№ 4(58) 2026
НАУКА І ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online
УДК 378.147: 512.6: 517.92: 004.4

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-4(58)-1841-1853

Матурін Юрій Петрович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329

Хаць Руслан Васильович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Комарницька Леся Іванівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038

АЛГОРИТМІЧНИЙ АНАЛІЗ РІВНЯННЯ БЕССЕЛЯ ЗАСОБАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ГАЛУА

Анотація. У статті подано спосіб академічного і водночас методично доступного пояснення алгоритмічних засад систем комп’ютерної алгебри на прикладі рівняння Бесселя. Предметом розгляду є не чисельне знаходження наближень і не технічна робота з програмним середовищем, а внутрішня логіка строгого алгебраїчного висновку про те, чи може лінійне диференціальне рівняння другого порядку мати розв’язок у скінченних термінах. Для цього використано поняття диференціального поля, розширення Пікара-Вессіо, диференціальної групи Галуа та алгоритм Ковачіча як послідовну процедуру перевірки ліувіллевої розв’язності. Такий підхід дає змогу перейти від традиційного опису спеціальних функцій як готових об’єктів до пояснення причин їх появи в теорії диференціальних рівнянь. За основу взято рівняння Бесселя, оскільки воно є класичним прикладом рівняння, де межа між елементарними й неелементарними розв’язками має точне алгебраїчне пояснення.

Показано, як початкове рівняння після ділення на квадрат незалежної змінної та відповідної заміни залежної функції зводиться до нормальної форми без першої похідної. Саме така форма є придатною для застосування алгоритму Ковачіча. Після цього аналізується раціональна функція, що входить до нормальної форми, і визначаються її особливі точки на розширеній комплексній площині. Встановлено, що для рівняння Бесселя істотними є полюс другого порядку в точці нуль і нульовий порядок на нескінченності.

ISSN 2786-6025 Online

Окрему увагу приділено змісту алгоритму Ковачіча як навчального об'єкта. Пояснено, що цей алгоритм спирається на класифікацію можливих підгруп спеціальної лінійної групи матриць другого порядку і тому має не лише обчислювальний, а й доказовий характер. Він дозволяє встановити, чи існує розв'язок у вигляді експоненти інтеграла раціональної функції, чи задача зводиться до квадратичного розширення, чи можуть виникати скінченні примітивні групи, або ж потрібно визнати відсутність ліувіллевих розв'язків. Для підготовки магістрів з математики така логіка є принциповою, бо вона переводить увагу з зовнішнього вигляду формули на структуру об'єкта. У результаті рівняння розглядається не як набір символів, до якого треба підібрати вдалу підстановку, а як диференціальний об'єкт, для якого можна досліджувати тип розширення, властивості групи автоморфізмів і межі алгоритмічної розв'язності. Це істотно змінює характер навчального матеріалу і робить його ближчим до сучасного розуміння символьних обчислень.

У роботі показано, що для рівняння Бесселя ліувіллеві розв'язки існують лише за напівцілих значень параметра. У цих випадках розв'язки виражаються через елементарні функції та прості алгебраїчні множники. Якщо ж параметр не є напівцілим, алгоритм Ковачіча відкидає всі придатні випадки, а відповідна диференціальна група Галуа не приводить до розв'язної алгебраїчної групи. Це дає строгий аргумент на користь того, що запис відповіді через функції Бесселя є необхідним, а не умовним. Такий висновок має не лише теоретичне, а й методичне значення. Він дозволяє пояснити, чому поява спеціальних функцій у відповіді системи комп'ютерної алгебри не є наслідком браку технічних засобів, а випливає з внутрішньої будови самого рівняння. У навчальному курсі це дає можливість показати здобувачам освіти межу між конструктивною розв'язністю та доведеною нерозв'язністю в елементарних функціях звичайних диференціальних рівнянь.

Запропоновано модель подання теми у навчальному курсі. Її доцільно будувати як послідовність кількох етапів: перехід до нормальної форми, аналіз особливих точок раціональної функції, встановлення можливих випадків алгоритму, відсікання неможливих варіантів і формулювання остаточного висновку про існування або відсутність ліувіллевих розв'язків. Така схема не перевантажує курс зайвою термінологією, але дає змогу показати, як із теоретичних положень виростає чітка алгоритмічна процедура. Практична цінність дослідження полягає в тому, що складні положення диференціальної алгебри та теорії лінійних диференціальних рівнянь другого порядку подано у формі, придатній для освітнього використання в магістерській підготовці. Запропонований підхід можна використовувати в курсах диференціальних рівнянь, абстрактної алгебри, математичного аналізу та дисциплін, пов'язаних із цифровими математичними технологіями. Він формує в здобувачів освіти

ISSN 2786-6025 Online
уявлення про принципи роботи систем комп'ютерної алгебри, розвиває вміння пов'язувати аналітичні властивості функцій з алгебраїчною структурою рівнянь і створює основу для подальшого вивчення алгоритмів символьного інтегрування та теорії спеціальних функцій.

Ключові слова: рівняння Бесселя, диференціальна теорія Галуа, алгоритм Ковачіча, символьні обчислення, системи комп'ютерної алгебри, диференціальна група Галуа, розширення Пікара-Вессіо, алгоритм Ріша.

Maturin Yuriy Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/ 0000-0002-0544-1329

Khats' Ruslan Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/ 0000-0001-9905-5447

Komarnytska Lesia Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/ 0009-0001-0907-1038

ALGORITHMIC ANALYSIS OF THE BESSEL EQUATION BY MEANS OF DIFFERENTIAL GALOIS THEORY

Abstract. The paper presents an academically rigorous yet methodically accessible account of the algorithmic foundations of computer algebra systems through the example of the Bessel equation. The focus is not on numerical approximation of solutions or on the technical use of software, but on the internal logic of a strict algebraic conclusion about whether a second-order linear differential equation can admit a solution in finite terms. To this end, the notions of a differential field, a Picard-Vessiot extension, a differential Galois group, and Kovacic's algorithm are used as a consecutive procedure for testing Liouvillian integrability. Such an approach makes it possible to move from the traditional description of special functions as ready-made objects to an explanation of why they arise in the theory of differential equations. The Bessel equation is taken as the basic example because it is a classical case in which the boundary between elementary and non-elementary solutions admits an exact algebraic explanation.

It is shown that the original equation, after division by the square of the independent variable and an appropriate change of the dependent function, is reduced to normal form without the first derivative. This is precisely the form suitable for the application of Kovacic's algorithm. The rational function appearing in the normal

ISSN 2786-6025 Online
form is then analyzed, and its singular points on the extended complex plane are determined. It is established that, for the Bessel equation, the essential local data are a pole of order two at zero and order zero at infinity. These local characteristics are not secondary technical details. They determine the set of possible algorithmic cases and, in effect, specify which classes of solutions may be admitted or ruled out. The text explains that a computer algebra system does not test arbitrary substitutions and does not proceed by trial and error. It checks group-theoretic and local conditions that follow from differential Galois theory. For that reason, a negative outcome of the analysis means not a temporary computational failure, but a strict proof that no solution exists within Liouvillian extensions.

Special attention is given to the meaning of Kovacic's algorithm as an instructional object. It is explained that the algorithm rests on the classification of possible subgroups of the special linear group of two-by-two matrices and therefore has not only a computational but also a proof-theoretic character. It makes it possible to determine whether a solution exists in the form of the exponential of an integral of a rational function, whether the problem reduces to a quadratic extension, whether finite primitive groups may occur, or whether one must conclude that no Liouvillian solutions exist. For the preparation of master's students in mathematics, this logic is essential because it shifts attention from the external shape of a formula to the structure of the object itself. As a result, the equation is treated not as a string of symbols for which one has to guess a useful substitution, but as a differential object whose extension type, automorphism group, and limits of algorithmic solvability can be studied. This substantially changes the character of the instructional material and brings it closer to the modern understanding of symbolic computation.

The paper shows that the Bessel equation has Liouvillian solutions only for half-integer values of the parameter. In these cases, the solutions can be expressed through elementary functions and simple algebraic factors. If the parameter is not half-integer, Kovacic's algorithm eliminates all admissible cases, and the corresponding differential Galois group does not lead to a solvable algebraic group. This provides a strict argument that the appearance of Bessel functions in the answer is necessary rather than conventional. Such a conclusion has not only theoretical but also methodological significance. It makes it possible to explain why the occurrence of special functions in the output of a computer algebra system is not due to a lack of technical tools, but follows from the internal structure of the equation itself. Within an instructional course, this helps show students the boundary between constructive solvability and proven non-solvability in elementary functions.

A model for presenting this topic in an instructional course is proposed. It is reasonable to organize it as a sequence of several stages: reduction to normal form, analysis of the singular points of the rational function, determination of the possible cases of the algorithm, elimination of impossible alternatives, and formulation of the

final conclusion about the existence or nonexistence of Liouvillian solutions. Such a scheme does not overload the course with excessive terminology, yet it clearly shows how a definite algorithmic procedure grows out of theoretical statements. The practical value of the study lies in the fact that difficult ideas from differential algebra and the theory of second-order linear differential equations are presented in a form suitable for educational use in master's-level training. The proposed approach may be used in courses on differential equations, abstract algebra, mathematical analysis, and subjects related to digital mathematical technologies. It forms in students an understanding of the principles underlying computer algebra systems, develops the ability to relate the analytic properties of functions to the algebraic structure of equations, and creates a basis for further study of algorithms of symbolic integration and the theory of special functions.

Keywords: Bessel equation, differential Galois theory, Kovacic algorithm, symbolic computations, computer algebra systems, differential Galois group, Picard-Vessiot extension, Risch algorithm.

Постановка проблеми. Застосування систем комп'ютерної алгебри у навчальному процесі закладів вищої освіти переважно зводиться до механічного введення вихідних даних і отримання готового аналітичного результату. Здобувачі вищої освіти розглядають спеціалізоване програмне забезпечення як інструмент, не маючи уявлення про внутрішню алгоритмічну логіку його модулів. У класичному університетському курсі диференціальних рівнянь поява спеціальних функцій, зокрема циліндричних функцій Бесселя, гіпергеометричних функцій чи функцій Ейрі, подається як наслідок неможливості знайти розв'язок в елементарних функціях. Викладачі демонструють неефективність відомих штучних прийомів інтегрування і вводять розв'язок у вигляді степеневих рядів.

Таке пояснення не розкриває алгебраїчної природи проблеми. Комп'ютерні програми аналізують розв'язність рівнянь не шляхом перебору методів підстановки. Процесор працює зі строгими алгебраїчними алгоритмами, що здатні за скінченну кількість кроків довести відсутність розв'язку у заданому класі функцій. Виникає дидактична потреба впровадження елементів диференціальної теорії Галуа в освітній процес магістрів предметної спеціальності А4.04 «Середня освіта (Математика)». Це дозволить пояснити критерії алгоритмічної розв'язності диференціальних рівнянь на концептуальному рівні, формуючи фахівця, здатного аналізувати принципи символьних обчислень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичний базис для алгоритмізації аналітичних обчислень було закладено у працях Дж. Рітта та Е. Колчіна [1]. Їхні дослідження формалізували диференціальну алгебру як самостійну галузь, ввівши поняття диференціальних ідеалів та диферен-

ISSN 2786-6025 Online

ціальних розширень полів. Алгоритмічний підхід до розв'язання задачі інтегрування в скінченних термінах реалізував Р. Ріш [2]. Для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку ключовий прорив здійснив Дж. Ковачіч [4]. Його алгоритм дає змогу визначити наявність ліувіллевих розв'язків шляхом жорсткої класифікації алгебраїчних підгруп спеціальної лінійної групи матриць.

Систематизований виклад сучасної диференціальної теорії Галуа та застосування алгоритму Ковачіча міститься у фундаментальній монографії М. Ван дер Пута та М. Сінгера [3]. Автори наводять строгу класифікацію диференціальних груп Галуа та детально описують механізми перевірки розв'язності через аналіз особливостей раціональних функцій. Окремі аспекти абстрактної алгебраїчної структури цих рівнянь висвітлено в роботі А. Магіда [6]. Адаптація цих суто математичних і вузькоспеціалізованих методів до дидактичних потреб підготовки вчителів інформатики та математики залишається нерозкритою темою у вітчизняній науково-методичній літературі. Відсутні методичні моделі, які б переводили результати теорії Галуа у площину загальноосвітнього пояснення принципів роботи комп'ютерних алгоритмів.

Мета статті − сформувати дидактичну модель аналізу логіки символьних обчислень на прикладі рівняння Бесселя з використанням алгоритму Ковачіча. Показати спосіб пояснення неінтегровності у скінченних термінах через структуру диференціальної групи Галуа, без залучення програмної реалізації та надмірного використання чисельних наближень.

Виклад основного матеріалу. Класичний математичний аналіз базується на поняттях границі, неперервності та нескінченно малих величин. Цей теоретичний апарат формалізується мовою ε-δ. Архітектура обчислювальних систем має цілком дискретну природу. Процесор оперує виключно скінченними символьними послідовностями, станами регістрів та логічними вентилями. Машина не моделює неперервність. Це створює смисловий розрив між теоретичним математичним аналізом та його фактичною алгоритмічною реалізацією в цифрових системах.

Диференціальна алгебра заміняє аналітичні процедури на алгебраїчні алгоритми. В основі цього переходу лежить відмова від розгляду функцій як відображень множин на користь їх вивчення як формальних елементів диференціальних полів.

Диференціювання перестає бути операцією пошуку границі відношення приросту функції до приросту аргументу. Воно стає абстрактним адитивним оператором D, заданим на полі, для якого виконується правило Лейбніца: $D(ab) = aD(b) + bD(a)$. Операції числення переносяться у площину чистої алгебри, де об'єктами маніпуляцій стають структурні одиниці − символи, а не наближені числові значення.

№ 4(58) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

Принципи роботи систем комп'ютерної алгебри вимагають глибокого поєднання комплексного аналізу з теорією кілець і полів. Алгебраїчна структура розширень диференціальних полів визначається поведінкою функцій у комплексній площині: розташуванням полюсів, їх порядками та особливостями на нескінченності. Наявність полюса заданого порядку в точці x = 0 для диференціального рівняння є індикатором типу відповідної диференціальної групи Галуа. Системи комп'ютерної алгебри перетворюють аналітичні властивості функцій на алгоритмічні критерії. Під час символьного інтегрування алгоритми аналізують диференціальні розширення. Перевіряється належність первісної до елементарного розширення базового поля на основі теореми Ліувілля. Відбувається строгий алгебраїчний обчислювальний процес замість евристичного підбору замін змінних.

Аналіз розв'язності лінійних диференціальних рівнянь другого порядку за алгоритмом Ковачіча потребує інформації про поведінку функцій на сфері Рімана. Порядок раціональної функції на нескінченності обчислюється як різниця степенів знаменника та чисельника. Невідповідність цього порядку заданим цілочисловим критеріям дає алгебраїчне доведення того, що розв'язок не виражається через елементарні функції. Аналітична характеристика безпосередньо зумовлює хід виконання алгоритму.

Математичний вираз у пам'яті комп'ютера зберігається у вигляді абстрактного синтаксичного дерева. Кожен його вузол відповідає елементу диференціального кільця. Операція диференціювання реалізується через рекурсивні перетворення структури дерева згідно з аксіомами диференціальної алгебри. Опанування цих механізмів показує органічний зв'язок між абстрактними алгебраїчними структурами та проєктуванням структур даних в інженерії програмного забезпечення. Поєднання комплексного аналізу та алгебри формує теоретичну базу для розуміння алгоритмічних обмежень програмного забезпечення, готуючи фахівців до викладання дисциплін на стику математики та інформатики.

Концептуальні основи диференціальної теорії Галуа. У класичній теорії Галуа розглядається поле раціональних чисел Q та многочлен над цим полем. До поля Q приєднуються корені многочлена, утворюючи поле розкладу. Властивості цього розширення вивчаються через групу Галуа − групу автоморфізмів поля, які залишають нерухомими елементи базового поля. Якщо ця група є розв'язною, то алгебраїчне рівняння можна розв'язати в радикалах.

Диференціальна теорія Галуа діє за аналогічною логікою, але об'єктами виступають диференціальні рівняння. Базовим полем є диференціальне поле раціональних функцій C(x), де оператором диференціювання є стандартна похідна по x. Замість приєднання коренів многочлена, до поля C(x) приєднуються лінійно незалежні розв'язки лінійного диференціального

№ 4(58) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online
рівняння. Отримане диференціальне поле називається розширенням Пікара-Вессіо.

Диференціальна група Галуа цього рівняння − це група всіх диференціальних автоморфізмів розширення Пікара-Вессіо, які залишають елементи поля C(x) нерухомими. Оскільки ці автоморфізми зберігають лінійні комбінації розв’язків, група Галуа ізоморфна алгебраїчній підгрупі загальної лінійної групи матриць GL(n, C), де n − порядок рівняння. Критерій розв’язності лінійного диференціального рівняння в елементарних функціях (у квадратурах) зводиться до аналізу цієї матричної групи: розв’язок існує тоді й тільки тоді, коли зв’язна компонента одиниці диференціальної групи Галуа є розв’язною алгебраїчною групою. Системи комп’ютерної алгебри реалізують алгоритми, що здатні ідентифікувати структуру цієї групи без фактичного розв’язання самого рівняння.

Для навчального пояснення доцільно ввести ще одне поняття − диференціальний модуль. Нехай k є диференціальним полем. Диференціальним модулем над k називається скінченновимірний векторний простір M над k разом з оператором ∂M, який задовольняє правило $\partial M(am) = a'm + a\partial M(m)$. У такій мові рівняння вже не сприймається як окрема формула для невідомої функції. Воно подається як алгебраїчний об’єкт, для якого можна говорити про базис, розмірність і перетворення. Це зручно в методичному курсі, бо дозволяє перейти від обчислювальних прийомів до чіткої структури. У роботі М. ван дер Пута і М. Сінгера [3] підкреслюється, що скалярне рівняння n-го порядку та лінійна система першого порядку над тим самим полем описують один і той самий об’єкт у різних формах [4].

Розширення Пікара-Вессіо для рівняння $u'' = r(x)u$ є найменшим диференціальним полем, яке містить поле C(x), фундаментальну систему розв’язків і не розширює поле констант. Саме остання умова робить це розширення придатним для теорії Галуа. Далі розглядається група всіх диференціальних автоморфізмів цього поля, що фіксують елементи базового поля. Вона діє на просторі розв’язків лінійно, тому подається матрицями. Через це задача про вигляд розв’язку переходить у задачу про структуру групи. Такий перехід добре пояснює, чому система комп’ютерної алгебри не «вгадує» формулу, а виконує перевірку групових ознак розв’язності [4].

Перехід до нормальної форми $y'' = r(x)y$ для цього прикладу має окрему методичну цінність. Після заміни залежної змінної член з першою похідною зникає, і вся інформація, потрібна алгоритму, концентрується у функції r(x). Тоді вже не потрібно працювати з початковим рівнянням у громіздкому вигляді. Достатньо дослідити особливі точки r(x), порядки полюсів та поведінку на нескінченності. Саме ці локальні характеристики визначають, які випадки алгоритму взагалі можуть виникнути. Для здобувача освіти це добрий

ISSN 2786-6025 Online
приклад того, як проста алгебраїчна заміна робить складну аналітичну задачу придатною до точного алгоритмічного аналізу [4, 6].

Теоретичний фон тут задає загальний критерій ліувіллевої інтегровності.

Для лінійного диференціального рівняння над диференціальним полем нульової характеристики наявність базису з ліувіллевих функцій еквівалентна розв'язності зв'язної компоненти одиниці його диференціальної групи Галуа. У випадку рівнянь другого порядку це переводить задачу в дослідження підгруп SL(2, C). Саме тому класифікація підгруп у Ковачіча не є зовнішнім доповненням до теми, а становить її внутрішнє ядро. Вона пояснює, чому алгоритм має не лише обчислювальний, а й доказовий характер [4−6].

Зведення рівняння Бесселя до нормальної форми. Класичне рівняння Бесселя має вигляд [7]: $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$, де ν − комплексний параметр, який визначає порядок циліндричної функції.

Системи комп'ютерної алгебри, що застосовують алгоритм Ковачіча, не працюють із рівняннями, які містять першу похідну. Наявність першої похідної ускладнює алгебраїчну структуру розширення. Першим кроком алгоритмічного аналізу є зведення рівняння до нормальної форми за допомогою класичної підстановки Ліувілля. Для рівняння вигляду $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ використовується множник, що залежить від інтеграла коефіцієнта при першій похідній. Для рівняння Бесселя коефіцієнт $p(x)$ дорівнює $1/x$ (після ділення початкового рівняння на x^2). Відповідно, заміна має вигляд [5, 7]:

$$y = u \exp(-1/2 \int(1/x)dx) = u \exp(-1/2 \ln x) = u\, x^{-1/2}.$$

Виконується підстановка цієї функції у початкове рівняння. Після диференціювання та зведення подібних доданків усі члени, що містять першу похідну u', скорочуються. Рівняння набуває нормальної форми: $u'' = r(x)u$, де раціональна функція $r(x)$ має вигляд $r(x) = (4\nu^2 - 1) / (4x^2) - 1$.

У цій формі рівняння цілком готове для обробки алгоритмом. Базовим диференціальним полем є C(x). Диференціальна група Галуа G відповідного розширення Пікара-Вессіо є алгебраїчною підгрупою спеціальної лінійної групи матриць SL(2, C). Завдання системи зводиться до дослідження особливостей раціональної функції $r(x)$.

Аналіз полюсів функції на розширеній комплексній площині. Алгоритм Ковачіча класифікує алгебраїчні підгрупи SL(2, C), жорстко прив'язуючи їх до аналітичних властивостей функції $r(x)$ у її сингулярних точках. Здобувачам освіти пропонується визначити розташування та порядки цих полюсів.

Функція $r(x) = (4\nu^2 - 1) / (4x^2) – 1$ має особливість у точці $x = 0$. Оскільки знаменник містить множник x у другому степені, точка $x = 0$ є полюсом другого порядку. Далі аналізується поведінка функції на нескінченності (сфера Рімана). Алгоритм вимагає обчислення порядку функції при $x \to \infty$. Раціональну функцію можна записати у вигляді дробу зі спільним знаменником:

ISSN 2786-6025 Online

$$r(x) = (-4x^2 + 4\nu^2 - 1) / (4x^2).$$

Порядок на нескінченності ord∞(r) визначається як різниця степеня знаменника і степеня чисельника. Степінь чисельника дорівнює двом (через доданок $-4x^2$). Степінь знаменника дорівнює двом. Отже, ord∞(r) = 2 – 2 = 0.

Значення порядку нуль означає, що функція на нескінченності не має ні полюса, ні нуля. Вона стабілізується на значенні –1. Ці два параметри (полюс 2-го порядку в нулі та нульовий порядок на нескінченності) є вхідними даними для логічних фільтрів алгоритму Ковачіча.

***Алгоритмічні фільтри та класифікація підгруп* SL(2, C).** Логіку алгоритму Ковачіча зручно подавати через чотири послідовні випадки. Перший випадок пов’язаний з трикутною підгрупою і веде до розв’язку вигляду $\exp(\int\omega dx)$. Другий випадок відповідає ситуації, коли після квадратичного розширення задача фактично зводиться до першого випадку. Третій випадок охоплює три скінченні примітивні групи. Четвертий випадок є загальним: якщо попередні варіанти не реалізуються, диференціальна група Галуа є достатньо великою, і ліувіллевого розв’язку немає. У статті Дж. Ковачіча [4] саме така класифікація перетворюється на алгоритм перевірки.

У навчальній практиці корисно окремо показати, як локальні дані переходять у скінченний перелік кандидатів. Для кожної особливої точки алгоритм будує допустимі значення показників. Потім з цих значень складаються комбінації, для яких обчислюється число d − можливий степінь шуканого многочлена. Якщо d не є невід’ємним цілим числом, відповідна комбінація відкидається відразу. Якщо d допустиме, перевіряється існування многочлена цього степеня, що задовольняє допоміжне диференціальне рівняння. Таку схему легко подати у формі таблиці або дерева рішень. Саме тому алгоритм Ковачіча має методичну цінність: він дає висновок через послідовність простих перевірок, а не через неясні евристики [4–6].

Алгоритм Ковачіча послідовно перевіряє можливість зведення диференціальної групи Галуа до трьох типів розв’язних груп. Кожен крок спирається на необхідні умови, пов’язані з полюсами. Крок 1 перевіряє, чи є група Галуа підгрупою групи Бореля (групи верхньотрикутних матриць). Цей випадок відповідає ситуації, коли відповідне рівняння Ріккаті має раціональний розв’язок, а початкове диференціальне рівняння має розв’язок у вигляді експоненти від інтеграла раціональної функції. Для полюса другого порядку в точці x = 0 алгоритм обчислює локальні експоненти. Вони знаходяться як корені квадратного рівняння, утвореного з коефіцієнта при $1/x^2$. Локальні експоненти дорівнюють $1/2 + \nu$ та $1/2 - \nu$.

Алгоритм вимагає, щоб лінійна комбінація цих експонент давала невід’ємне ціле число, яке відповідатиме степеню певного многочлена. Встановлено, що ця умова виконується тоді й тільки тоді, коли параметр ν є

ISSN 2786-6025 Online

напівцілим числом: $\nu = n + 1/2$, де $n \in Z$. Якщо умова виконується, система комп'ютерної алгебри розв'язує задачу і генерує результат через елементарні функції (наприклад, комбінації синусів і косинусів, ділених на корінь з x). Якщо ν не є напівцілим, алгоритм переходить до кроку 2 (перевірка на імпримітивну диедральну групу) та кроку 3 (перевірка на скінченні примітивні групи: тетраедральну, октаедральну, ікосаедральну). Алгоритм Ковачіча містить строгу алгебраїчну теорему, яка слугує необхідною умовою для цих випадків. Вона стверджує, що для реалізації кроку 2 або кроку 3 порядок функції r(x) на нескінченності повинен бути більшим або дорівнювати двом, або ж функція повинна мати полюси специфічних непарних порядків.

Оскільки обчислений раніше порядок на нескінченності $ord\infty(r) = 0$, ця фундаментальна необхідна умова не виконується. Програма комп'ютерної алгебри миттєво відкидає ці кроки без жодних спроб чисельного наближення або пошуку замін. Це ілюструє силу алгебраїчного підходу: машина не витрачає ресурси на безперспективні перетворення.

Для рівняння Бесселя корисно підкреслити і позитивний випадок. Коли параметр ν є напівцілим, перший випадок алгоритму не відкидається, і розв'язки справді зводяться до елементарних функцій. У найпростіших прикладах, при $\nu = 1/2$ та $\nu = -1/2$ вони виражаються через sin x і cos x, помножені на прості степені x. Для більших напівцілих значень виникають подібні формули, де синус і косинус множаться на раціональні функції від x. Це створює наочний контраст: одна і та сама сім'я рівнянь містить як випадки з елементарним записом розв'язку, так і випадки, де потрібно вводити спеціальні функції. У роботі [4] показано, що для рівняння Бесселя ліувіллеві розв'язки існують тоді і тільки тоді, коли 2ν є непарним цілим числом.

Негативний висновок алгоритму також має самостійний зміст. Він означає не те, що комп'ютерна система не знайшла вдалої підстановки, а те, що в межах ліувіллевих розширень такої підстановки не існує. Саме тому системи комп'ютерної алгебри повертають для рівняння Бесселя спеціальні функції $J_\nu(x)$ та $Y_\nu(x)$ як базові об'єкти. Їх поява у відповіді не є технічною умовністю. За нею стоїть встановлений алгебраїчний факт про нерозв'язність зв'язної компоненти групи Галуа. Для магістерського курсу це один з найкращих прикладів того, як абстрактна алгебра пояснює межі символьних обчислень [6].

Доведення неінтегровності та дидактичний підсумок. Якщо параметр ν не є напівцілим числом, алгоритм Ковачіча завершується негативно на всіх придатних гілках перевірки. Це означає не технічну невдачу обчислення, а встановлений структурний факт: для такого значення параметра рівняння Бесселя не має ліувіллевих розв'язків. У термінах диференціальної теорії Галуа відповідна група не належить до тих підгруп SL(2, C), які відповідають елементарній інтегровності.

ISSN 2786-6025 Online

Згідно з теоремою класифікації, якщо група не зводиться до описаних підгруп, вона збігається з усією групою SL(2, C). Оскільки група матриць SL(2, C) є простою неабелевою групою, вона не є розв'язною. Відповідно, розширення Пікара-Вессіо для рівняння Бесселя не є ліувіллевим. Доведено алгебраїчний факт: розв'язки рівняння Бесселя для не напівцілих порядків неможливо виразити через скінченну комбінацію елементарних функцій. Саме цей результат дозволяє системі комп'ютерної алгебри припинити алгоритм і вивести відповідь у вигляді спеціальних символів, функцій Бесселя першого і другого порядків J_ν (x) та Y_ν (x), відповідно [7]. Поява спеціальних функцій отримує строге обґрунтування через нерозв'язність групи.

Дидактична цінність цього прикладу полягає в тому, що здобувач освіти переходить від формули до структури. Замість питання «яку підстановку треба взяти?» ставиться інше питання: «яка алгебраїчна причина існування або відсутності замкненого розв'язку?». Такий підхід формує інше розуміння символьних обчислень. Система комп'ютерної алгебри постає не як «чорна скринька», а як реалізація строгої математичної логіки.

Методично доцільно організовувати таку тему як послідовність коротких етапів. Спочатку рівняння переводиться в нормальну форму. Далі складається таблиця особливих точок і порядків полюсів. Після цього визначаються допустимі випадки алгоритму і відсіюються неможливі комбінації локальних показників. Лише на завершальному етапі робиться висновок про наявність або відсутність ліувіллевого розв'язку. Така побудова заняття не перевантажує курс зайвою термінологією, але показує, як з теорії виростає робоча процедура. У цьому і полягає головна дидактична перевага теми.

Висновки. Аналіз рівняння Бесселя за алгоритмом Ковачіча дає придатний для навчання приклад того, як диференціальна теорія Галуа пояснює межі можливостей символьного інтегрування. Після переходу до нормальної форми та дослідження полюсів функції r(x) встановлюється, що ліувіллеві розв'язки існують лише для напівцілих значень параметра ν. В інших випадках поява функцій Бесселя у відповіді є наслідком строгого алгебраїчного висновку, а не зручного позначення. Запропонований матеріал можна використовувати в магістерських курсах з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, абстрактної алгебри та методики навчання інформатики для пояснення логіки роботи систем комп'ютерної алгебри.

Література:

1. Kolchin E. R. Differential algebra and algebraic groups. Pure Appl. Math., Vol. 54. Academic Press, New York-London, 1973. 446 p.

2. Risch R. H. The Problem of Integration in Finite Terms. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1969. Vol. 139. P. 167-189. https://doi.org/10.2307/1995313

3. Van der Put M., Singer M. F. Galois Theory of Linear Differential Equations. Springer, 2003. 438 p.

4. Kovacic J. J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *Journal of Symbolic Computation*. 1986. Vol. 2, Iss. 1. P. 3-43. https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80010-4

5. Bronstein M. Symbolic Integration I: Transcendental Functions. Springer, 2005. 325 p.

6. Magid A. R. Lectures on Differential Galois Theory. American Mathematical Society, 1994. 105 p.

7. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press, Cambridge, 1944. 804 p.

References:

1. Kolchin, E. R. (1973). *Differential algebra and algebraic groups*. Pure Appl. Math., Vol. 54. Academic Press, New York-London.

2. Risch, R. H. (1969). The problem of integration in finite terms. *Transactions of the American Mathematical Society*. Vol. 139. P. 167-189. https://doi.org/10.2307/1995313

3. Van der Put, M., & Singer, M. F. (2003). *Galois theory of linear differential equations*. Berlin, Germany: Springer.

4. Kovacic, J. J. (1986). An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *Journal of Symbolic Computation*, 2(1), 3-43. https://doi.org/10.1016/S0747-7171(86)80010-4

5. Bronstein, M. (2005). *Symbolic integration I: Transcendental functions*. Berlin, Germany: Springer.

6. Magid, A. R. (1994). *Lectures on differential Galois theory*. Providence, USA: American Mathematical Society.

7. Watson, G. N. (1944). *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, Cambridge.

Дата першого надходження статті до видання: 06.04.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 23.04.2026