Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Ольга КУТНЯК

НАУКОВІ ОСНОВИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ.

Частина І

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

ДРОГОБИЧ

2026

УДК 373.5.016:51(075.8)
Н34

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 5 від 23 квітня 2026 р.)

Рецензенти:

Війчук Тарас Іванович, кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка;

Білецька Любов Степанівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фундаментальних дисциплін початкової освіти Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск: Війчук Т. І.

Наукові основи шкільного курсу математики. Ч. І: тексти лекцій [для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика)] / уклад. О. А. Кутняк. Дрогобич: Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026. 62 с.

Тексти лекцій укладені відповідно до програми курсу «Наукові основи шкільного курсу математики» для підготовки здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти галузі знань *А Освіта* спеціальності *А4.04 Середня освіта (Математика)*, затвердженої науково-методичною радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 8 від 27 серпня 2025 р.). У них висвітлено методологічні основи математики; зв'язок теорії множин та шкільної математики; відображення і функції у шкільному курсі математики; многочлени, рівняння та нерівності.

Посібник рекомендований для підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форм навчання.

ЗМІСТ

Передмова

Навчальна дисципліна *«Наукові основи шкільного курсу математики»* призначена для удосконалення математичної та методичної підготовки майбутніх учителів математики. Вона спрямована на осмислення змісту шкільної математики з позицій сучасної вищої математики та методики її навчання і передбачає не лише засвоєння теоретичних положень, а й формування здатності майбутніх учителів аналізувати шкільні математичні поняття, встановлювати їх наукові підґрунтя та методично коректно представляти їх у навчальному процесі.

У текстах лекцій розглянуто наступні теми курсу: методологічні основи математики; теорія множин і шкільна математика; відображення у шкільному курсі математики; функції в шкільному курсі математики; многочлени, рівняння та нерівності. Теоретичний матеріал ілюструється на прикладах.

Посібник буде корисним для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, учителів та учнів старших класів закладів загальної середньої освіти.

§ 1. Методологічні основи математики

1.1. Предмет математики та її характерні риси

Методологія – це система принципів, методів, правил та способів організації наукового пізнання чи практичної діяльності. Вона визначає стратегію дослідження, забезпечуючи отримання об'єктивної інформації. Метою методології є організація діяльності для досягнення істинного знання, створення нових теорій або об'єктів.

Математика, як і інші науки, вивчає навколишній світ, об’єкти цього світу і відношення між ними. Однак на відміну від природничих наук вона вивчає форми і відношення матеріального світу, абстрагуючись від їх змісту. До характерних рис математичної науки відносять [3]:

1) математика вивчає абстраговані властивості предметів – числа, а не сукупності предметів, геометричні фігури, а не реальні тіла.

2) основним методом одержання математичних результатів є логічний висновок, який не потребує експериментальної перевірки.

3) абстракції, що виникають у математиці, розвиваються від абстракцій, що безпосередньо узагальнюють властивості реальних предметів, до абстракцій такого високого рівня, як топологічні простори, загальні алгебраїчні системи, алгоритми і т. д.

4) математика має властивість універсального застосування в інших галузях.

5) математика займає особливе положення у системі наук – її не можна віднести ні до гуманітарних, ні до природничих наук. Вона дає ті основні поняття, які використовуються майже в усіх науках. Серед цих понять «множина», «структура», «система», «ізоморфізм» і т.д.

1.2. Основні етапи розвитку математики

Основні етапи розвитку математики включають [8]:

- зародження математики (глибока давнина – V ст. до н. е.);
- математику сталих величин (VI–V ст. до н. е. – кінець XVI ст.);
- математику змінних величин (кінець XVI – середина XVIII ст.);
- сучасний період (з середини XVIII ст. і до наших днів).

На кожному етапі відбувалося формування нових галузей та інструментів, які сприяли розвитку науки загалом.

У період зародження (глибока давнина – V ст. до н. е.) математика виникла як результат практичних потреб людини: обчислення, вимірювання, підрахунок. У цей період розвивалися основи арифметики та геометрії. Початок розвитку математики пов’язують з першими цивілізаціями (наприклад, у Вавилоні та Давньому Єгипті).

У період математики сталих величин (VI–V ст. до н. е. – кінець XVI ст.) формувалися основні теорії, що стосуються сталих величин. **Антична Греція** вважається батьківщиною математики, де з'явилися перші вчені-математики, такі як Фалес Мілетський, Піфагор та Евклід. У цей час були створені перші теоретичні трактати, як «Начала» Евкліда, що стали основою шкільної математики. Роботи з геометрії, алгебри та арифметики створювалися для вирішення практичних задач землеміряння, архітектури та астрономії.

Період математики змінних величин (кінець XVI – середина XVIII ст.) характеризується появою аналітичної геометрії та диференціального та інтегрального числення. Видатними вченими цього періоду були Рене Декарт (засновник аналітичної геометрії), Ісаак Ньютон та Готфрід Ляйбніц, які незалежно один від одного створили диференціальне та інтегральне числення. З'явилася можливість вивчати рух, перетворення, а також досліджувати функції та їхні властивості, що стало потужним інструментом для розвитку фізики, механіки та інших наук.

У сучасний період розвитку математики (з середини XVIII ст. і до тепер) продовжується бурхливий розвиток раніше заснованих галузей математики. Виникають такі нові розділи, як математична логіка, теорія множин, теорія груп, алгебрична топологія, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, цифрова математика, машинне навчання. Активно розвиваються прикладні галузі: прикладна математика, математичне моделювання, дослідження операцій, теорія автоматичного керування. Сучасна математика тісно пов'язана з комп'ютерами, які стали незамінним інструментом для складних обчислень та дослідження.

1.3. Математичні методи пізнання. Поняття числа, фігури та множини як приклади математичних моделей

Ключовим аспектом пізнавальної діяльності людини є дослідження властивостей і взаємодій об’єктів реальності з метою їх подальшого практичного застосування. Математика сформувала систему методів для теоретичного осмислення просторових і якісних характеристик світу. Серед них особливе місце посідає *математична модель* – це наближений опис усякого класу явищ зовнішнього світу, виражений з допомогою математичної символіки. Побудова математичних моделей є методом пізнання зовнішнього світу, прогнозування явищ та управління різними процесами. Метод математичного моделювання широко застосовуються в різноманітних науках: фізиці, хімії, біології, економіці, соціології [3].

Процес формування математичних моделей неминуче передбачає ігнорування окремих аспектів реальності, що зумовлює певну невідповідність між моделлю та об’єктом дослідження. Лише порівняння з дійсністю результатів, одержаних шляхом вивчення моделі, дозволяє робити висновки про якість цієї моделі, межі її застосування. Кожну модель можна застосовувати лише в певних умовах. Фундаментом математичного моделювання є специфічний процес абстрагування, найбільш поширеними формами якого в математиці виступають ідеалізація та абстракція ототожнення (узагальнення).

Абстракція ототожнення починається з встановлення відношення еквівалентності у множині, яка досліджується. Під час встановлення відношення еквівалентності в деякій множині еквівалентні об’єкти ототожнюються за деякою властивістю, яка абстрагується від решти властивостей цих об’єктів і стає самостійним абстрактним поняттям. Так відношення рівносильності множин об’єднує в один клас усі скінченні множини, між якими можна встановити бієктивну відповідність. У наслідок цього ототожнення від множин, які належать одному й тому ж класу еквівалентності, абстрагується їх загальна властивість, що характеризує цей клас, властива всім множинам цього класу і не властива ніяким іншим множинам. Ця властивість є самостійним поняттям натурального числа, яке виражає чисельність множин даного класу [3].

Також під час побудови математичних моделей дійсності широко застосовується і такий специфічний прийом абстрагування, як *ідеалізація,* що полягає у формуванні концептів, які наділені не лише реальними, а й гіпотетичними властивостями, не притаманними об'єктам-прообразам. Створення таких ідеалізованих конструктів спрямоване на спрощення аналізу складних природних явищ. Фундаментальні поняття математики, як-от «геометрична точка» (що не має фізичних розмірів), «пряма» або «площина», є класичними прикладами ідеалізацій. Попри відсутність їхніх точних аналогів у матеріальному світі, без цих категорій побудова цілісної геометрії неможлива. Наступним етапом наукового пізнання стає застосування *абстракції ототожнення*: шляхом узагальнення специфічних рис окремих ідеалізованих фігур формуються універсальні поняття (наприклад, загальні категорії «куля» чи «трикутник»).

1.4. Аксіоматичний метод у математиці

Аксіоматичний метод – це особливий спосіб побудови наукової теорії, при якому в її основу покладаються кілька вихідних положень (***аксіом***), що приймаються без доведень. Усі інші твердження теорії (теореми) виводяться з цих аксіом суто логічним шляхом. Для того, щоб аксіоматична система вважалася досконалою, вона має відповідати трьом критеріям:

1) *несуперечливість:* з аксіом неможливо одночасно вивести твердження та його заперечення. Це найважливіша вимога – суперечлива система не має цінності.

2) *незалежність:* жодну з аксіом неможливо вивести з інших. Це робить систему лаконічною.

3) *повнота:* будь-яке істинне твердження у межах цієї системи можна довести, виходячи з її аксіом.

Першим прикладом застосування аксіоматичного методу є книга **«Начала» Евкліда** (приблизно 300 р. до н. е.). Евклід спробував вивести всю геометрію з кількох очевидних постулатів. Хоча з погляду сучасної логіки його система була неповною, вона залишалася ідеалом науки протягом двох тисячоліть.

Якісний стрибок відбувся на межі XIX та XX століть завдяки роботам **Давида Гільберта**. Він розробив формальну аксіоматику, де об’єкти (точки, прямі) розглядаються не як фізичні сутності, а як абстракції, властивості яких повністю визначаються аксіомами. Це дозволило математиці вийти за межі наочності та працювати з багатовимірними просторами та абстрактними структурами. Наведемо приклад аксіоматичної побудови геометрії, описаної Д. Гільбертом у книзі «Основи геометрії» (1899 р.) [1].

Перша група аксіом: аксіоми належності

Основне відношення – «*належати*».

I_1. *Для будь-яких двох точок* A, B *існує пряма* a*, яка належить кожній з цих двох точок* A, B.

I_2. *Для двох точок* A, B *існує не більше однієї прямої, яка належить кожній з точок* A, B.

I_3. На прямій існує принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4. Для будь-яких трьох точок A, B, C, які не лежать на одній прямій, існує площина α, яка належить кожній з цих трьох точок A, B, C. Для будь-якої площини завжди існує належна їй точка.

I_5. Для будь-яких трьох точок A, B, C, які не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, яка належить цим точкам.

I_6. Якщо дві точки A, B прямої a лежать в площині α, то довільна точка прямої a лежить в площині α.

I_7. Якщо дві площини α і β мають спільну точку A, то вони мають принаймні ще одну спільну точку B.

I_8. Існують принаймні чотири точки, які не лежать на одній площині.

Аксіоми I_{1-3} називаються *площинними аксіомами групи* I, а I_{4-8} – *просторовими аксіомами групи* I.

Друга група аксіом

Основне поняття – *«між».*

II_1. Якщо точка B лежить між точками A і C, то A, B, C є три різні точки прямої і B лежить також між C і A.

II_2. Для будь-яких точок A і C на прямій AC існує принаймні одна точка B така, що точка C лежить між A і B.

II_3. Серед будь-яких трьох точок прямої існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

Третя група аксіом: аксіоми рівності та руху

Основне поняття – «*рівний*».

III_1. Якщо A, B є дві точки на прямій a і A' – точка на цій же прямій або на іншій прямій a', то завжди можна знайти точку B', яка лежить по заданий від точки A' бік прямої a' і при тому таку, що відрізок AB рівний відрізку $A'B'$.

III_2. *Якщо відрізок* $A'B'$ *і відрізок* $A''B''$ *рівні одному і тому ж відрізку* AB, *то відрізок* $A'B'$ *рівний також і відрізку* $A''B''$; *іншими словами,, якщо два відрізки рівні третьому, то вони рівні між собою.*

III_3. *Нехай* AB *і* BC *є два відрізки прямої* a, *які не мають жодної спільної точки, і нехай* $A'B'$ *і* $B'C'$ *є два відрізки тієї ж прямої або іншої прямої* a', *які також не мають спільної точки; якщо при цьому* $AB \equiv A'B'$ *і* $BC \equiv B'C'$, *то і* $AC \equiv A'C'$.

III_4. *Нехай задано* $\angle(h,k)$ *в площині* α *і пряма* a' *в площині* α', *а також визначений відносно* a' *бік площини* α'. *Нехай* h' *означає промінь прямої* a', *який виходить з точки* O'. *Тоді в площині* α' *існує один і тільки один промінь* k' *такий, що кут* (h,k) *рівний куту* (h',k') *і разом з тим усі внутрішні точки кута* (h',k') *лежать по заданий бік від* a'. Це відношення між кутами позначається так: $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

III_5. *Якщо для двох трикутників* ABC *та* $A'B'C'$ *мають місце рівності* $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, *то має місце також і рівність* $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Четверта група аксіом: аксіома про паралельні

IV. (**аксіома Евкліда**). *Нехай* a *– довільна пряма і* A *– точка, яка лежить зовні прямої, тоді у площині, що визначається точкою* A *і прямою* a, *існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку* A *і не перетинає пряму* a.

П'ята група аксіом: аксіоми неперервності

V_1. (аксіома вимірювання або аксіома Архімеда). *Нехай* AB *і* CD *– два довільних відрізки, тоді на прямій* AB *існує скінченне число точок* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ *таких, що відрізки* $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ *рівні відрізку* CD *і точка* B *лежить між* A *і* A_n.

V_2. (аксіома лінійної повноти). *Точки прямої утворюють систему, яка при збереженні лінійного порядку, першої аксіоми про рівність і аксіоми Архімеда (тобто аксіом* I_{1-2}, II, III_1, V_1*) не допускає ніякого розширення.*

Аксіома Дедекінда. Якщо всі точки прямої розподілені на два класи так, що при цьому:

1) *кожна точка належить до одного і тільки до одного класу і кожен клас містить точки;*
2) *кожна точка першого класу передує кожній точці другого,*

то або в першому класі існує точка, якій передують усі решта точок першого класу, або у другому класі існує така точка, яка передує усім решта точкам другого класу.

Контрольні запитання

1. Що вивчає методологія?
2. Назвіть характерні риси математики як науки?
3. Охарактеризуйте коротко основні етапи розвитку математики.
4. Що таке математична модель?
5. Опишіть такі прийоми абстрагування, як абстракція ототожнення (узагальнення) та ідеалізація.
6. У чому полягає сутність аксіоматичного методу у математиці?
7. Наведіть приклади аксіоматичної побудови геометрії.

§ 2. Теорія множин і шкільна математика

2.1. «Наївна» та аксіоматична теорії множин

Наївна та аксіоматична теорія множин – це два різні підходи до вивчення множин. Наївна теорія множин використовує інтуїтивне, «природне» розуміння множин та їхніх властивостей, тоді як аксіоматична теорія множин формалізує поняття множин за допомогою системи аксіом, яка усуває парадокси, що виникають у наївній теорії.

Наївне визначення множини Кантора (або, як його ще називають, інтуїтивне визначення) описує множину як довільну сукупність певних об'єктів, які можна відрізнити один від одного та які уявляються як єдине ціле. Іншими словами, це сукупність об'єктів, які розглядаються як єдине ціле, не заглиблюючись у формальні аксіоми [4].

Інтуїтивне визначення – множина розглядається як довільна сукупність об'єктів, об'єднаних певною ознакою. Немає чітких правил, які визначають, які операції над множинами є допустимими. Через відсутність формалізації наївна теорія множин призводить до логічних суперечностей, таких як парадокс Рассела.

У аксіоматичній теорії множин поняття множини визначається системою аксіом, які приймаються без доведення. Аксіоматична теорія множин була розроблена для подолання парадоксів наївної теорії множин. Найпоширеніша аксіоматична теорія множин – це система Цермело-Френкеля. Наведемо її аксіоми:

1. *Аксіома екстенсіональності (об'ємності)*. Дві множини рівні тоді і тільки тоді, коли вони мають одні і ті ж елементи.
2. *Аксіома порожньої множини.* Існує множина, яка не містить жодного елемента.
3. *Аксіома пари.* Для будь-яких двох множин існує множина, що містить саме їх.

4. *Аксіома об'єднання.* Для двох множин існує третя, яка включає в себе всі елементи обох, і тільки їх.
5. *Аксіома степеневої множини.* Для будь-якої множини існує множина всіх її підмножин.
6. *Аксіома виділення (схема підмножин).* Для будь-якої множини і властивості можна виділити підмножину.
7. *Аксіома заміни (схема заміни).* Образ множини при функціонально заданому відображенні є множиною (тобто, якщо кожному елементу множини поставити у відповідність інший об'єкт (за правилом), то всі ці нові об'єкти теж утворюють множину).
8. *Аксіома регулярності (фундації).* Множини не можуть містити самі себе або утворювати цикли.
9. *Аксіома нескінченності.* Існує нескінченна множина.
10. *Аксіома вибору.* Для довільного сімейства непорожніх множин, що не перетинаються, існує множина, яка має рівно один спільний елемент з кожною множиною даного сімейства, навіть якщо множин у сімействі нескінченно багато і невизначено правило вибору елемента з кожної множини.

2.2. Числові множини шкільної математики

У шкільному курсі математики теорія дійсного числа викладається не повно. Доведення, що зустрічаються у цій теорії, і навіть саме означення дійсного числа достатньо складні та використовують ряд ідей, далеких від шкільного курсу. Однак, термін «дійсне число» неминуче з'являється на уроках математики. Зокрема, учням говорять про раціональні та ірраціональні числа (акуратне означення яких також не формулюються).

До раціональних чисел ми приходимо, поступово узагальнюючи поняття числа. Найпершими числами, з якими ми знайомимося ще в молодших класах школи, є натуральні числа: 1, 2, 3,… Множина N усіх натуральних чисел нескінченна. У цій множині завжди виконуються дві операції: «+» та «·». При цьому сума і добуток двох натуральних чисел знову є натуральними числами. Що стосується обернених дій «-» та «:», то вони виконуються на множині натуральних чисел не завжди. Наприклад, 5-9 і 2:3 неможливо обчислити, не вийшовши за межі множини N. Для того, щоб ці операції завжди виконувалися, уводять нові числа – дробові та від'ємні. У результаті приходимо до раціональних чисел Q.

Зазвичай дробові та від'ємні числа вводяться неодночасно. У школі спочатку вводяться дробові числа (точніше, додатні дробові числа: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \frac{3}{2}$ і т. д.). У результаті введення цих нових операцій, «:» одного натурального числа на друге (або навіть одного дробового на друге) завжди виконується. Далі вводиться 0 і від'ємні раціональні числа. У результаті цього ми отримуємо множину Q усіх раціональних чисел. У цій множині виконуються 4 арифметичні дії (окрім «:» на 0). Можливий і інший шлях: спочатку доєднують 0 і від'ємні числа (отримують Z), далі доєднують дробові числа. Чіткого означення раціональних чисел у шкільному курсі немає. Залишається аксіоматичний шлях побудови Q раціональних чисел. У цьому випадку вважається відомим, що таке натуральне число, далі без означення вводиться термін «раціональне число» і формулюються властивості раціональних чисел.

Множина Q усіх раціональних чисел володіє наступними 4-ма групами властивостей:

1) $\forall\ a, b \in Q$ визначена їх сума $a + b$, причому

$$a + b = b + a \text{ (комутативність);}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (асоціативність);}$$

$\exists$ число 0, що $a + 0 = a$ $\forall$ раціонального a;

$\forall\ a, b \in Q$ $\exists!\ x \in Q$, що є коренем рівняння $b + x = a$. Число x називається *різницею* a і b, $x = a - b$;

$0 - a = -a$.

2) у множині Q містяться натуральні числа $Q \supset N$. Раціональні числа, представлені у вигляді різниці двох натуральних чисел, називаються *цілими* (Z).

3) для $\forall\ a, b \in Q$ визначений їх добуток $a \cdot b$, причому

$$ab = ba \text{ (комутативність);}$$

$$(ab)c = a(bc) \text{ (асоціативність);}$$

$$a(b + c) = ab + ac \text{ (дистрибутивність);}$$

$\forall a \in Q \quad 1 \cdot a = a$;

$\forall\, a, b \in Q, b \neq 0, \exists!\, x \in Q,$ що $bx = a$, x називається *часткою* чисел a і b, і позначається $x = \frac{a}{b}$ (операція ділення);

4) будь-яке раціональне число зображається у вигляді частки $\frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, $b \neq 0$.

Ці чотири групи властивостей повністю характеризують множину раціональних чисел (доведення цього виходить за рамки шкільної програми). Виконання цих властивостей можна прийняти в якості означення множини Q усіх раціональних чисел.

Властивості множини дійсних чисел

Однак, обійтися лише раціональними числами не вдається. Доводиться вводити числа, що не є раціональними і називаються *ірраціональними*. Разом раціональні та ірраціональні числа об'єднують під назвою *дійсні числа*.

Арифметична причина введення ірраціональних чисел: квадратні рівняння і рівняння вищих степенів з раціональними (і навіть цілими) коефіцієнтами не завжди вдається розв'язати, залишаючись у множині Q (наприклад, $x^2 = a, x^3 = a$ і т. д, $a > 0, a \in Q$).

У шкільних підручниках з алгебри є доведення того факту, що $\sqrt{2}$ (тобто додатній корінь рівняння $x^2 = 2$) – ірраціональне, або, точніше, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2. Уже добування (арифметичних) коренів потребує введення ірраціональних чисел.

Можна так буде означити множину раціональних чисел (після опису множини R усіх дійсних чисел): *ірраціональними* називаються дійсні числа, що не є раціональними, тобто що не зображаються у вигляді двох цілих чисел.

Геометрична причина введення ірраціональних чисел: раціональних чисел не вистачає для вимірювання відрізків.

Усяке додатне раціональне число при записі у вигляді десяткового дробу дає або скінченний, або нескінченний періодичний десятковий дріб.

Нехай NP – гіпотенуза прямокутного рівнобедреного трикутника MNP (кут М – прямий) з бічною стороною, що дорівнює 1. Тоді $NP=\sqrt{2}$. При вимірюванні відрізка NP ми отримаємо нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

Ірраціональним називається число, яке записується у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу (некоректне означення, оскільки воно неповне, не описує дій над такими числами).

Множина** R **усіх дійсних чисел володіє наступними 5 групами властивостей:

1) множина R містить усі раціональні числа $R \supset Q$.
2) див. властивість 1, аналогічно будемо мати і для множини R;
3) див. властивість 3, аналогічно будемо мати і для множини R;
4) R розбиваються на додатні та від'ємні. При цьому сума і добуток додатніх чисел знову є додатнім числом. Це дає можливість увести в множині R нерівності: за означенням $a > b$ (або $b < a$), якщо $a - b$ –додатне.
   Далі, якщо a – від'ємне, то $-a$ — додатне. $\forall\, a > 0, a \in R$ знайдеться $r > 0, r \in Q$, що $r < a$.
5) У множині R кожна обмежена монотонна послідовність має границю.

Виконання властивостей 1) – 5) можна прийняти у якості означення множини R усіх дійсних чисел.

2.3. Точкові множини

У шкільній геометрії вивчаються геометричні фігури, тобто підмножини множини Π_3 точок у тривимірному просторі. Координатний метод дозволяє задати кожну точку в тривимірному просторі як набір із трьох дійсних чисел (координат цієї точки).

Отже, кожній геометричній фігурі відповідає деяка множина трійок дійсних чисел. Точки на площині задаються двома координатами, отже, множини площини відповідають множинам, що складаються з пар дійсних чисел. Множини точок, що вивчаються на шкільній математиці, зазвичай задаються кортежами дійсних чисел. Наприклад, трикутник *ABC* з вершинами $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ задається кортежем із шести чисел $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$. Коло радіуса R з центром $A(x_1, y_1)$ задається трійкою чисел (x_1, y_1, R) тощо.

Найчастіше геометричні фігури визначаються їхніми характерними властивостями, тобто властивостями, які мають точки цих фігур і яких не мають інші точки в просторі. Наприклад, відрізок *AB* складається з таких точок *M*, що $|AM|+|MB|=|AB|$, круг радіуса *R* з центром *O* в площині складається з таких точок *M* цієї площини, що $|OM| \leq R$ тощо.

У цих прикладах множини точок були задані геометрично властивостями відстаней їхніх точок від деяких нерухомих точок. Якщо система координат обрана в просторі (на площині), то геометричні фігури задаються певними наборами рівнянь та нерівностей, що пов'язують координати точок цих фігур. Наприклад, пряма лінія задається рівнянням $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0.$

Задання геометричних фігур за допомогою рівнянь та нерівностей дозволяє використовувати апарат алгебри для розв'язання геометричних задач і, навпаки, забезпечити геометричну ілюстрацію алгебраїчних тверджень.

2.4. Операції над множинами в шкільній математиці

Операції над множинами – це математичні дії, які дозволяють створювати нові множини на основі однієї або кількох існуючих. Найпоширеніші операції включають об'єднання ($A \cup B$, усі елементи в *A* або *B*), перетин ($A \cap B$, елементи в *A* та *B*), різниця ($A \backslash B$, елементи в *A*, але не в *B*) та доповнення ($\bar{A}$, елементи, що не входять до *A*, в межах універсальної множини). Ці операції є фундаментальними для теорії множин і візуалізуються за допомогою діаграм Венна, які показують логічні відношення між множинами, використовуючи кола, що перекриваються.

У шкільному курсі математики множини починають вивчати у 8 класі під час вивчення теми «Квадратні корені. Дійсні числа» (навчальна програма «Алгебра 8 клас НУШ» на основі модельних програм О.С. Істера 2025-2026 н.р.). Зокрема, вивчають поняття множини та її елементів, підмножини, числових множин, раціональних, ірраціональних та дійсних чисел. У 10 профільному класі продовжують вивчати операції над множинами, зображують на діаграмах або числовій прямій об'єднання і переріз множин та ілюструють поняття підмножини.

Приклад 2. 1. Нехай $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}$. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$ та $A \setminus B$.

Розв'язання. Отже,

$$x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow x \in [-2, 2],$$

$$A = [-2, 2].$$

Знайдемо множину B:

$$|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

Отже, $B = (-1, 3)$.

Знайдемо перетин множин:

$$A \cap B = [-2, 2] \cap (-1, 3) = (-1, 2],$$

їх об'єднання:

$$A \cup B = [-2, 2] \cup (-1, 3) = [-2, 3),$$

різницю:

$$A \setminus B = [-2, 2] \setminus (-1, 3) = [-2, -1].$$

Розв'язання такого завдання – це пряме застосування операцій над множинами (перетин, об'єднання, різниця). У шкільних задачах множини підміняють множинами розв'язків нерівностей; аналіз перетинів інтервалів – це робота з множинами в практичному контексті.

Приклад 2.2. У класі 30 учнів, 18 з них вивчають математику, 12 – фізику, 7 вивчають і математику, і фізику. Застосовуючи теорію множин, визначити, скільки учнів вивчають лише математику, лише фізику і принаймні один із двох предметів.

Розв'язання. Нехай M – множина учнів, що вивчають математику і Ф – множина учнів, що вивчають фізику. Учні, які вивчають обидва предмети: $|M \cap \Phi| = 7$. Тоді кількість учнів, що вивчають лише математику: $|M \backslash \Phi| = |M| - |M \cap \Phi| = 18 - 7 = 11$. Кількість учнів, що вивчають лише фізику: $|\Phi \backslash M| = |P\Phi| - |M \cap \Phi| = 12 - 7 = 5$. Кількість учнів, що вивчають принаймні один із двох предметів:

$$|M \cup \Phi| = |M| + |\Phi| - |M \cap \Phi| = 18 + 12 - 7 = 23.$$

Отже, 11 учнів вивчають лише математику, 5 учнів вивчають лише фізику, а 23 учні вивчають принаймні один із двох предметів.

Цей приклад показує, як операції з множинами, такі як об'єднання, перетин та різниця, корисні для вирішення реальних задач, пов'язаних з лічбою та класифікацією.

Ці приклади демонструють зв'язок між теорією множин та шкільною математикою. У геометрії множини дозволяють, наприклад, класифікувати фігури на основі їхніх властивостей. За допомогою діаграм Венна можна візуалізувати ієрархію чотирикутників, оскільки багато з них є підмножинами інших (наприклад, кожен квадрат є ромбом, але не кожен ромб є квадратом). Наведемо за допомогою цих діаграм логічну класифікацію опуклих чотирикутників (рис. 1):

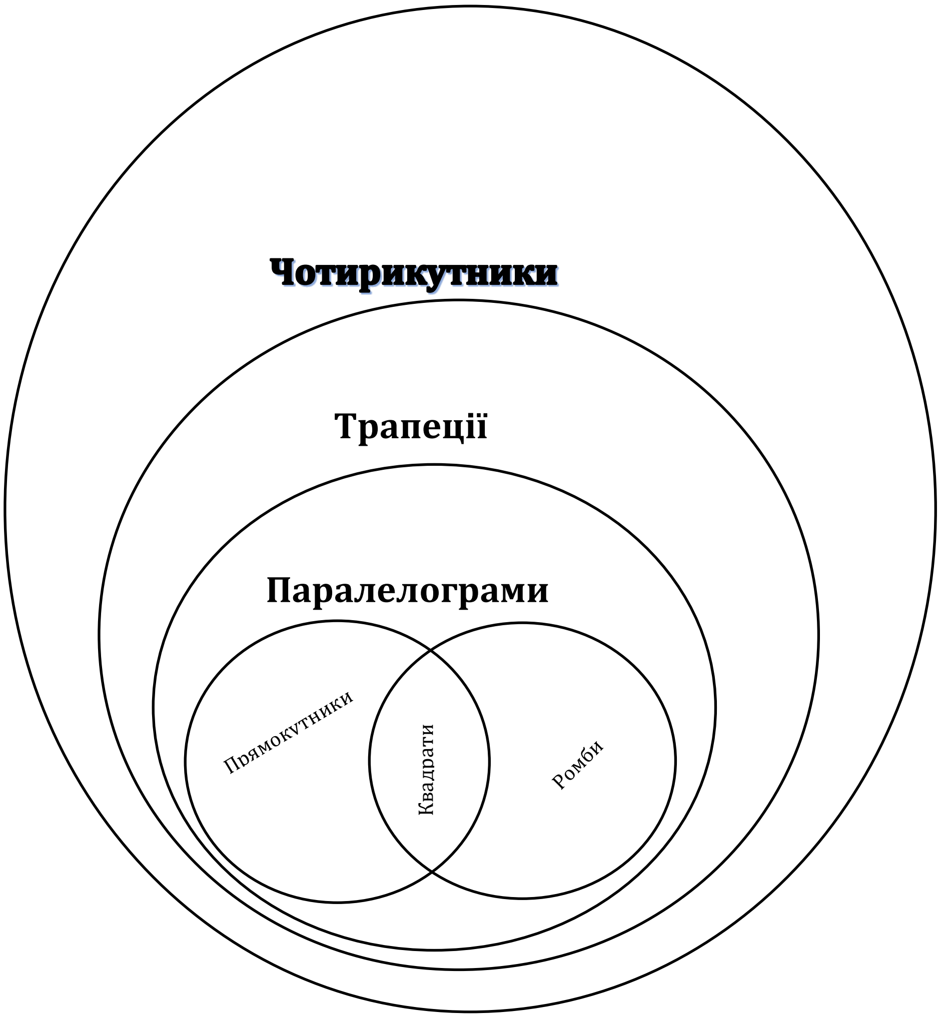

Рис. 1

Завдяки теорії множин абстрактне мислення стає практичним інструментом для аналізу та структурування математичних знань.

2.5. Потужність множини. Множини потужності вище континууму

Потужність множини – це узагальнення поняття кількості елементів множини, яке застосовується як до скінченних, так і до нескінченних множин. Це характеристика, що показує, скільки елементів міститься в множині [9]. Дві множини мають однакову потужність (рівнопотужні), якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно-однозначну відповідність (бієкцію). Для скінченних множин потужність – це просто кількість елементів. Для нескінченних множин поняття потужності дозволяє порівнювати їх за «розміром». Наприклад, множина натуральних чисел та множина парних натуральних чисел мають однакову потужність, оскільки можна встановити відповідність $n \leftrightarrow 2n$. Множини, що мають таку саму потужність, як і множина натуральних чисел називаються зліченними (наприклад, Z, Q). Будь-яка нескінченна підмножина зліченної множини також є зліченною.

Множина визначається лише тим, які елементи до неї належать. Порядок запису елементів не має значення. Дві множини рівні, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Якщо порядок важливий, використовують поняття *впорядкованої множини* або кортежу (наприклад, $(a,b)\neq(b,a)$).

Потужність (число елементів) множини позначається |M|. Найменша нескінченна потужність $\aleph_0$ (наприклад, натуральні числа N). Множина потужності континууму **($\mathfrak{c}$ або $2^{\aleph_0}$) –** це потужність множини дійсних чисел R, що є строго більшою за зчисленну.

Множини потужності вище континууму (наприклад, 2^{c} або $\aleph_2$) – це множини, що містять більше елементів, ніж дійсні числа, що доводиться через *теорему Кантора* (булеан множини A має більшу потужність, ніж A), $|P(A)|>|A|$). Наприклад, множина всіх функцій з R у R мають потужність, що перевищує континуум.

Контрольні запитання

1. У чому полягає сутність «наївної» теорії множин?
2. Сформулюйте аксіоми Цермело-Френкеля.
3. Сформулюйте властивості множини Q усіх раціональних чисел.
4. Яка арифметична та геометрична причини виникнення дійсних чисел?
5. Сформулюйте властивості множини R усіх дійсних чисел.
6. Наведіть приклади точкових множин у шкільній геометрії.
7. Які операції виконуються над множинами у шкільній математиці?
8. Проілюструйте на прикладах зв'язок між теорією множин та шкільною математикою.

§ 3. Відображення у шкільному курсі математики

3.1. Відображення і математичні структури

Поняття відображення є частковим випадком загального поняття відповідності між множинами. А саме, *відображенням із множини X у множину Y* називають будь-яку функціональну відповідність між цими множинами. Тобто відображенням із X у Y називають таку відповідність f, при якій образ довільного елемента $x \in X$ є або пуста множина або складається з одного елемента. Частковим випадком цього поняття є *відображення множини X у множину Y*, тобто всюди визначена функціональна відповідність між X та Y. Якщо f – відображення X в Y, то образ кожного елемента $x \in X$ складається з одного елемента $y \in Y$, записують $y = f(x)$.

Основними поняттями, що стосуються відображень, є *область визначення* та *область значень* відображень, поняття *ін'єктивного, сюр'єктивного та бієктивного* відображень, поняття *композиції* та *оберненого* відображення.

Нагадаємо, що *ін'єктивне відображення* – це відображення між елементами двох множин, при якому двом різним елемента першої множини (області визначення) ніколи не ставиться у відповідність один і той самий елемент другої множини (області значень) [10]. Тобто, відображення f: $X \to Y$ – *ін'єктивне* тоді й тільки тоді, коли для кожного y з Y існує не більш як один (або жодного) x у X такий, що $f(x)=y$.

Серед функцій, що вивчаються у шкільному курсі математики, ін'єктивним відображенням є, наприклад, лінійна функція, степенева функція з непарним показником, показникова та логарифмічна функції та ін. Неінєктивними є такі функції, як степеневі з парним показником, тригонометричні функції, функція $y = |x|$.

Наприклад, функція $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ визначена як $f(x) = x^3$ є ін'єктивною тому, що для будь-яких двох дійсних чисел x та x', якщо $x^3 = (x')^3$, то обов'язково $x = x'$.

Натомість, функція $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, визначена як $g(x) = x^2$ не є ін'єктивною тому, що, наприклад, $g(1) = 1 = g(-1)$.

Якщо, побудувавши на координатній площині графіки функцій, провести пряму, паралельну до осі абсцис, і ця пряма перетинає графік функції в одній точці, то функція є ін’єктивною. Якщо ж ця пряма перетинає графік у двох чи більше точках, то функція не є ін’єктивною (рис. 2):

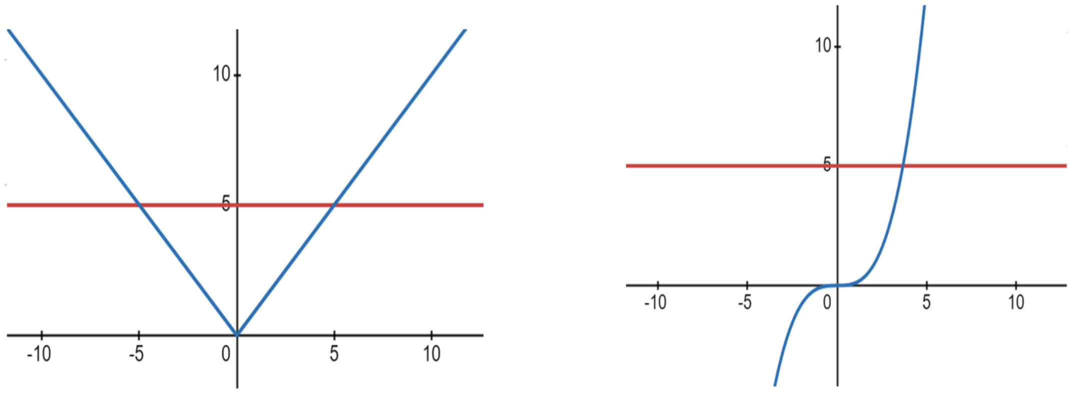

Рис. 2

Відображення f: $X \to Y$ наз. *сюр'єктивним*, якщо для кожного y з Y існує щонайменше один x з X такий, що $f(x) = y$.

Наприклад, функція f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, визначена як $f(x) = x^2$ не є сюр'єктивною тому, що не існує такого дійсного числа x, що $x^2 = -1$. Але якщо визначити функцію g: $\boldsymbol{R} \to [0, \infty)$ за тією ж формулою як f, але з областю значень, обмеженою лише невід'ємними дійсними числами, то функція g буде сюр'єктивною.

Відображення f: $X \to Y$ називається *бієктивним,* якщо воно є ін’єктивним та сюр’єктивним.

Якщо існує бієкція $f : X \to Y$, то множини X та Y називаються *рівнопотужними* і це записують так: $|X| = |Y|$. Відношення рівнопотужності множини є *еквівалентністю.*

Математична структура – це сукупність множини елементів та певних операцій чи правил, які визначають, як елементи взаємодіють між собою.

Наприклад, до математичних структур відносять групи, кільця, поля, векторні простори, топологічні простори.

Відношення – це математична структура, яка формалізує властивості об'єктів та їхні зв'язки. Наприклад, відношення рівністі, подільністі, паралельністі тощо.

3.2. Морфізми структур

Відображення, що зберігає математичні структури, називається ***морфізмом.*** Це фундаментальне поняття, яке використовується для порівняння математичних структур, таких як групи, кільця чи простори, шляхом встановлення взаємозв'язку між їхніми елементами, який зберігає властивості цих структур [11].

Гомоморфізм – морфізм, що зберігає алгебраїчні операції, такі як додавання чи множення.

Ізоморфізм – це бієктивний (взаємно однозначний) гомоморфізм. Якщо дві структури ізоморфні, вони вважаються математично еквівалентними.

Гомеоморфізм – морфізм, який зберігає топологічні структури. Це неперервна функція, що має неперервну обернену функцію.

Нагадаємо, що *топологічний простір* – це впорядкована пара (X, Γ), де X – множина, а Γ – система підмножин множини X (їх називають відкритими), що задовільняє таким умовам [12]:

1. Порожня множина та множина X належать Γ.
2. Об'єднання довільного набору множин з Γ також належить Γ.
3. Перетин скінченного набору множин з Γ також належить Γ. Тоді множина Γ називається **топологією** над множиною X, а елементи X є *точками*. Множини в Γ називають відкритими, їхнє доповнення відповідно замкненими множинами.

3.3. Види відображень у шкільному курсі математики

Самим загальним і основним є таке *визначення* поняття функції: кажуть, що визначена деяка *функція*, якщо, по-перше задана деяка множина, яка називається *областю визначення функції*, по-друге, задана деяка множина, яка називається *областю значень функції*, і, по-третє, вказано визначене правило, за допомогою якого кожному елементу, взятому із області визначення, ставиться у відповідність деякий елемент із області значень.

У шкільній математиці вивчають в основному множини, що складаються із чисел або числових кортежів (числові множини), геометричні фігури (точкові множини), а також множини, що складаються із геометричних фігур. Існують чотири основні види відображень, що представляють інтерес для шкільної математики:

1) відображення числових множин у числові множини;

2) відображення числових множин у точкові множини;

3) відображення множин геометричних фігур у числові множини;

4) відображення точкових множин у точкові множини;

Найбільш важливі – числові функції числового аргументу (відображення 1 типу). Вони є основним об’єктом вивчення у математичному аналізі.

Метод координат установлює звя’зок між числовими і геометричними множинами. Кожному $x \in R$ відповідає точка $\text{M}(x)$ координатної прямої, причому це відображення бієктивне. Кожній трійці координат відповідає точка $M(x, y, z)$ координатного простору.

Аналогічно встановлюється зв’язок між парами чисел і точками координатної площини. Ці відповідності можна розглядати як відображення із R^k у Π_k, і як відображення із Π_k у R^k, $k=1,2,3.$ Відображення із R^k у ту чи іншу множину геометричних фігур дозволяють визначити число параметрів, від яких залежать елементи цієї множини. Наприклад, сукупність кіл на площині є трьохпараметричним сімейством, оскільки будь-яке коло однозначно визначається трійкою чисел (a,b,r), де a і b – координати її центру, а r – довжина радіуса.

Вимірювання геометричних величин є прикладом відображення множин геометричних фігур у числові множини. У процесі вимірювання кожній геометричній фігурі, що належить деякій сукупності фігур, ставиться у відповідність невід'ємне число – міра цієї фігури, причому повинні виконуватись умови адитивності та інваріантності.

Геометричне перетворення є бієктивними відображеннями Π_k на Π_k, $k = 1,2,3.$ Кожне таке перетворення може бути задане набором числових функцій. Наприклад, паралельне перенесення перетворює точку $M(x, y)$ у точку $M'(x', y')$, де $x' = x + a$, $y' = y + b$.

Попри розглянуті типи відображень у шкільній математиці розглядають і інші відображення: виразів у функції, функцій у функції, функцій у числа і т. д. Наприклад, диференціювання ставить у відповідність кожній диференційованій функції f її похідну f', тобто є відображенням множини диференційованих функцій у множини функцій. Обчислення визначеного інтегралу від функції є відображенням множини інтегровних функцій у множину чисел і т. д.

3.4. Операції над відображеннями в шкільній математиці

У шкільній програмі зазвичай розглядаються відображення числових множин, де кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$. Наведемо основні операції операції над відображеннями, що вивчаються у школі [7]:

1. *Арифметичні операції:*

Якщо ми маємо дві функції $f(x)$ та $g(x)$ з однаковою областю визначення, то ми можемо створювати нові функції:

Сума та різниця: $(f+g)(x)= f(x)+g(x)$; $(f-g)(x)= f(x)-g(x)$;

Добуток: $(f\cdot g)(x)= f(x)\cdot g(x)$;

Частка: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, якщо $g(x) \neq 0$.

Наприклад, якщо *f(x)= x*, а *g(x)=sinx*, то їхньою сумою буде нова функція *h(x)=x+sinx.*

Розглянемо побудову графіка функції $y = f_1(x) + f_2(x)$, якщо задано графіки $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Нагадаємо, що *графіком* функції $y = f(x)$ називається множина усіх точок площини, координати *x*, *y* яких задовольняє співвідношення $y = f(x)$.

Зауважимо, що областю визначення функції $y = f_1(x) + f_2(x)$ є множина тих значень x_0, для яких визначені обидві функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, тобто область визначення представляє собою перетин областей визначень функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$.

Нехай точка (x_0, y_1) належить графіку $y = f_1(x)$, тобто $y_1 = f_1(x_0)$, а точка (x_0, y_2) належить графіку $y = f_2(x)$, тобто $y_2 = f_2(x_0)$.

Тоді точка $(x_0, y_1 + y_2)$ належить графіку функції $y = f_1(x) + f_2(x)$ (оскільки $f_1(x_0) + f_2(x_0) = y_1 + y_2$), причому довільна точка цього графіка може бути отримана таким чином. Тому графік функції $y = f_1(x) + f_2(x)$ можна отримати із графіка $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ заміною кожної точки (x_0, y_1) графіка функції $y = f_1(x)$ точкою $(x_0, y_1 + y_2)$, де $y_2 = f_2(x_0)$, тобто зсувом кожної точки (x_0, y_1) графіка функції $y = f_1(x)$ вздовж осі y на величину $y_2 = f_2(x_0)$. При цьому розглядаються лише такі точки x_0, для яких визначені обидві функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Такий метод побудови називається *додаванням графіків* функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$.

Приклад 3.1. На рис. 3 *методом додавання графіків* побудований графік функції [13]:

$$y = x + \sin x.$$

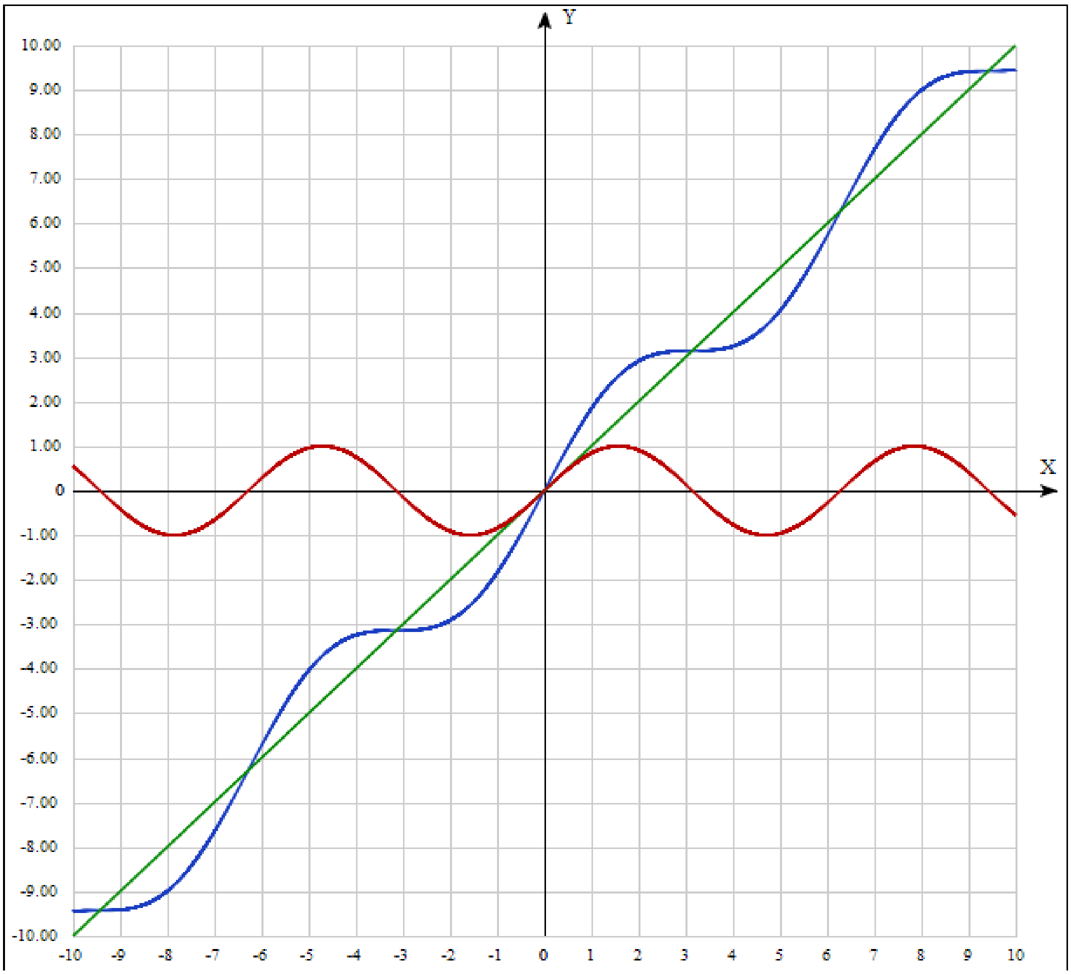

Рис. 3

2. *Композиція відображень (складена функція)*

Нехай f і g – дві функції. Підставивши під знак функції $y = f(x)$ замість аргумента x функцію $x = g(t)$, отримуємо нову функцію $y = f(g(t))$, у якої аргументом є t. Функція $y = f(g(t))$ називається *композицією* функції f і g .

Приклад. Нехай $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$, знайти $f\left(\dfrac{t}{t^2+1}\right)$.

Отже,

$$f\left(\frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)^2}{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)+1} = \frac{\frac{t^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{t+t^2+1}{t^2+1}} = \frac{t^2}{(t^2+t+1)(t^2+1)},$$ оскільки $t^2+1 \neq 0$.

3. *Обернене відображення*

Нехай $f(x)$ – деяка функція, задана на відрізку $[a,b]$. Якщо ця функція не є монотонною, то може трапитися, що двом різним значенням аргументу відповідає одне і те ж значення функції (рис. 4):

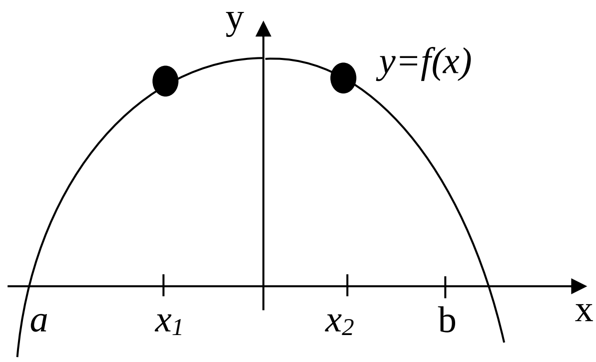

Рис. 4

Тут для значення аргумента можна однозначно визначити відповідні значення функції. Однак обернений перехід (від y до x) тут не буде однозначним.

Наприклад, значення y_0 функція приймає у двох точках x_1 і x_2.

Для того, щоб обернений перехід був однозначним, обмежуються розглядом монотонних функцій.

Якщо ми домовимося обернену функцію позначати через g, то її означення можна сформулювати так: рівність $x_0 = g(y_0)$ за означенням означає, що у точці x_0 вихідна функція приймає значення y_0, тобто $y_0 = f(x_0)$.

1. Щоб знайти функцію, обернену монотонній функції $y = f(x)$, потрібно замінити місцями букви x і y, $x = f(y)$ та із отриманої рівності, як з рівняння, знайти y. Наприклад, для функції $f(x)=2x+3$ оберненою буде функція $f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$.

2. Якщо $f(x)$ – монотонна функція, а $g(x)$ – обернена до неї, то функція $g(x)$ також монотонна, причому, якщо f – зростає, то і g – зростає, якщо f – спадна, то і g – спадна.

3. При переході від функції до оберненої до неї функції область визначення і множина значень замінюються місцями.

4. Графіки взаємно-обернених функцій $f(x)$ і $g(x)$ симетричні один одному відносно прямої $y = x$.

5. Для довільного x, що належить області визначення функції $f(x)$ справедливе співвідношення $g(f(x)) = x$; для будь-якого x, що належить області визначення оберненої функції $g(x)$ справедливе співвідношення $f(g(x)) = x$.

4. Геометричні перетворення графіка.

При вивченні числових функцій розглядають перетворення графіків. Ця операція пов'язана з композицією довільних числових функцій і деяких стандартних функцій таких, як $x \to x + a, x \to ax, x \to |x|$. У залежності від порядку, в якому відбувається композиція функцій, отримуємо із функції f нові функції, значення яких при заданому значенні x дорівнюють $f(x + a)$, $f(ax)$, $f\,|x|$, $f\,|x + a|$, $f(x) + a$, $a\,f(x)$, $|f(x)|$, $|f(x + a)|$ і т. д. Також виконуються композиції, внаслідок яких отримуємо функції $f(x + a)+b$, $b\,f(x + a)$, $|f(x) + a|$, $bf(|x| + a)$ і т. д. Зі шкільного курсу математики відомо, як побудувати графіки таких функцій за заданим графіком функції f.

3.5. Неперервні та гомеоморфні відображення у шкільній математиці

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y називається *неперервним*, якщо прообраз довільної відкритої множини A з Y відкритий у X. Відкрита множина – це абстрактне поняття, яке узагальнює ідею відкритого проміжку на осі дійсних чисел. У випадку, якщо топологія з X в Y задана метрикою, будь-яке ізометричне відображення $f\colon X \to Y$ є гомеоморфним. Зокрема, гомеоморфне будь-яке переміщення площини або простору. Усі афінні перетворення площини і простору, зокрема, перетворення подібності, є гомеоморфізмами, тобто у загальному випадку гомеоморфізми можуть змінювати кути, довжини, площі, об'єми та кривизну, розтягувати об'єкти, скручувати, м'яти та згинати. Наприклад, будь-який відрізок [$a; b$] гомеоморфний відрізку [0; 1]; коло гомеоморфне еліпсу або квадрату (їх можна розтягнути одне в одного), але негомеоморфне відрізку.

Властивості простору, що зберігаються при гомеоморфізмах, називаються *топологічними*. Найбільш важливими з них для шкільного курсу математики є властивості *зв'язності, компактності та розмірності.* Нагадаємо, що зв'язна множина – це топологічний простір або підмножина, яку неможливо подати як об'єднання двох непорожніх розділених (відкритих або замкнених) множин. Іншими словами, це множина, що складається з однієї «цільної» частини, у якій будь-які дві точки можна з'єднати неперервною лінією (шляхом), що повністю належить цій множині. Фігури, що вивчаються у шкільній математиці складаються зазвичай із скінченного числа зв'язних компонент. Наприклад, інтервал (0; 1) на числовій прямій, круг, куля, пряма, площина є зв'язними множинами. *Неперервний образ зв'язної множини є зв'язним.*

Багато фігур, що розглядаються у шкільній математиці, є замкненими та обмеженими (круг, коло, многокутники і т. д.). Замкнуті та обмежені фігури на площині і в просторі називаються *компактними*. *Образ замкнутої обмеженої фігури при неперервному відображенні є замкненим та обмеженим*.

Розмірність будь-якої лінії, що зустрічається у шкільному курсі математики (кола, гіперболи, параболи, графіки функцій і т. д.) дорівнює 1, розмірність будь-якої поверхні дорівнює 2, а розмірність кулі та інших просторових тіл дорівнює 3.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте означення відображення із множини X у множину Y та відображення множини X у множину Y.
2. Які відображення називаються ін'єктивними, сюр'єктивними та бієктивними? Наведіть їх приклади у шкільному курсі математики.
3. Що таке математична структура?
4. Сформулюйте означення морфізму структури.

5. Які основні види відображень представляють інтерес для шкільної математики? Наведіть приклади кожного з таких відображень.
6. Які операції над відображеннями виконують у шкільному курсі математики?
7. Назвіть неперервні та гомеоморфні відображення, що вивчаються у шкільному курсі математики.

§ 4. Функції у шкільному курсі математики

4.1. Способи задання функції.

Окрім відомих способів задання функції (аналітичний, графічний, табличний, композиція функцій, параметричне задання функції), можливі й інші задання функції.

Наприклад, показникову функцію $y = e^x$ можна задати наступним способом:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Відоме також наступне зображення комплексної експоненти:

$$e^{ix} = cosx + isinx.$$

При достатньо малих околах майже всіх значень аргументу аналітичні функції можна подати у вигляді суми степеневих рядів:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Для геометричної прогресії, знаменник якої $|x| < 1$, маємо:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots.$$

Також відомим є інтегральне задання функції, наприклад:

$$lnx = \int_1^x \frac{dx}{x}, x > 0.$$

4.2. Неперервні функції в шкільній математиці

Неперервність функції – це одне з тих понять, які в школі часто пояснюють інтиїтивному рівні (функція є неперервною, якщо її графік можна намалювати, не відриваючи олівця від паперу), але воно є фундаментом для курсу математичного аналізу (похідних та інтегралів).

У шкільному курсі функція $f(x)$ називається ***неперервною*** в точці x_0, якщо виконуються три умови:

1) функція **визначена** в цій точці (тобто $f(x_0)$ існує);
2) існує **границя** функції в цій точці: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) границя функції в цій точці **дорівнює значенню** функції в цій точці: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, її називають неперервною на цьому проміжку.

Більшість функцій, які вивчаються у школі, є неперервними у своїй області визначення:

1) *лінійна функція* – неперервна завжди;
2) *квадратична функція* – неперервна завжди;
3) *степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні функції* – неперервні в усіх точках, де вони визначені.

Якщо хоча б одна з умов неперервності порушується, то функція має розрив [7]. Наприклад:

1) $y = \frac{1}{x}$ – у точці *x*=0 функція має розрив другого роду (односторонні границі різні і дорівнюють $+\infty$ та $-\infty$);
2) $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ – у точці *x*=2 функція невизначена, але її графік виглядає як пряма з «виколотою» точкою (усувний розрив);

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \ x \le 1 \\ x+5, \ x > 1 \end{cases}$ – у точці x=1 функція має розрив типу «стрибка» (односторонні границі різні та дорівнюють 1 та 6, між частинами графіка утворюється «стрибок»).

У шкільних задачах «підозрілими» на розрив є точки, де:

1) знаменник дорівнює 0;
2) змінюється формула (у кусково-заданих функціях);
3) аргумент функції логарифма або, наприклад, тангенса, виходить за межі допустимих значень.

До розривних функцій шкільного курсу математики також відносять функції $y = [x]$ (ціла частина числа, функція має розрив у кожній цілій точці $x = 1, 2,3, \dots$) та $y = \{x\}$ (дробова частина числа $\{x\} = x - [x]$, функція так само має розрив у кожній цілій точці $x = 1, 2,3, \dots$).

4.3. Аксіоматичні визначення лінійної, показникової, логарифмічної, степеневої функцій, тригонометричних функцій числового аргументу та їхні властивості. Теореми існування та єдиності цих функцій.

Означення 4.1. *Лінійною функцією* називається будь-який неперервний гомоморфізм групи R^+ в себе, тобто будь-яка функція f із множини R в себе, яка володіє властивостями:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2) f – неперервна.

Означення 4.1*. *Лінійною функцією* з коефіцієнтом a, $a \in R$, називається будь-яка лінійна функція, що володіє додатковою властивістю:

3) $f(1)= a$.

Наведемо властивості лінійної функції (продовжимо нумерацію):

4) $f(0)= 0$;
5) $f(-x) = -f(x)$;
6) $f(cx) = cf(x)$ для будь-яких $c, x \in R$.

Теорема 4.1. *Нехай число* $a \in R$. *Тоді існує єдина лінійна функція* $l_a(x)$ *з коефіцієнтом* a, $l_a(x) = ax$ *для будь-якого* $x \in R$.

У шкільному курсі математики лінійною називають функцію $y = kx + b$. У вищій математиці її називають *афінно-лінійною* або *афінною функцією*. У будь-якому випадку функція $y = kx + b$ при $b \neq 0$ не задовільняє означення 4.1.

Означення 4.2. *Показниковою функцією* називається будь-який неперервний гомоморфізм групи R^{+} в групу R, тобто будь-яка функція $f(\cdot)$ із множини R у множину $R_{>0}$, яка володіє властивостями:

1) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
2) f – неперервна.

Означення 4.2*. *Показниковою функцією* з основою a, де $a > 0$, називається показникова функція, що володіє додатковою властивістю

3) $f(1) = a$.

Будь-яку показникову функцію позначимо $f(x) = a^x$. Наведемо властивості показникової функції:

1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;
2) a^x – неперервна;
3) $a^1 = a$;
4) $a^0 = 1$;
5) $a^{-x} = (a^x)^{-1}$;
6) $(a^b)^x = a^{bx}$ для будь-яких $b, x \in R$;
7) функція $f(x) = a^x$ монотонно зростає, якщо $a > 1$ і монотонно спадає, якщо $0 < a < 1$.

Теорема 4.2. *Існує єдина показникова функція з основою* a, $a > 0$, *тобто єдина функція f із R у* $R_{>0}$ *з властивостями:*

1) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для будь-яких $x, y \in R$;
2) f – неперервна;
3) $f(1) = a$.

Означення 4.3. *Логарифмічною функцією* називається будь-який неперервний гомоморфізм групи R в групу R^{+}, тобто будь-яка функція із множини $R_{>0}$ у множину R, яка володіє властивостями:

1) $f(x \cdot y)= f(x + y)$;
2) f – неперервна.

Означення 4.3*. *Логарифмічною функцією* з основою a, де $a > 0$, називається логарифмічна функція, що володіє додатковою властивістю:

3) $f(a)= 1$.
4) $f(1)= 0$.

При $a=1$ властивості 4 і 3 суперечать одна одній. Тому логарифмічна функція з основою $a=1$ не існує. Часто обмеження $a \neq 1$ включають в саме означення логарифмічної функції за основою a.

Позначимо $f(x)= log_a x$. Наведемо властивості логарифмічної функції:

1) $log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a x, \quad \forall x, y \in R_{>0}$;
2) функція $f(x)= log_a x$ – неперервна;
3) $log_a a = 1$;
4) $log_a 1 = 0$;
5) $log_a x^{-1} = -log_a x$ при $x>0$;
6) $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a x, \quad \forall x, y \in R_{>0}$;
7) $log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in R$;
8) логарифмічна функція за основою a є бієкцією, яка є взаємно обернена до показникової функції з основою a;
9) логарифмічна функція монотонно зростає, якщо логарифмічна a >1 і монотонно спадає, якщо 0<a <1;
10) $log_a(x^b) = b log_a x, \quad \forall b \in R$, $x>0$;
11) $log_a x = log_a c \cdot log_c x$.

Теорема 4.3. *Існує єдина логарифмічна функція з основою* $a > 0$, *тобто функція з* $R_{>0}$ *у* R *з властивостями:*

1) $f(x \cdot y)= f(x + y)$;
2) f – неперервна;

3) $f(a)= 1$.

Означення 4.4. *Степеневою функцією* називається будь-який неперервний гомоморфізм групи R в себе, тобто будь-яка функція, що відображає множину $R_{>0}$ в себе, яка володіє властивостями:

1) $f(x \cdot y)= f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in R_{>0}$;
2) f – неперервна.

Означення 4.4*. *Степеневою функцією* з показником степеня a, де $a \in R$, називається степенева функція, що володіє додатковою властивістю:

3) $f(2)= 2^a$.

У властивості 3 число 2 не відіграє жодної спеціальної ролі. Можна написати будь-яке додатне число, окрім 1. Позначення 2^a розуміємо в сенсі значення показникової функції з основою 2.

Для деяких значень a степенева функція x^a допускає продовження на більш широку область визначення, ніж $R_{>0}$. Наприклад, якщо $a = n \in N$, то за парністю чи непарністю (в залежності від n) x^a продовжується на $R_{<0}$. Крім того, за неперервністю 0^n ставлять рівним 0. Якщо $a = -n,\ n \in N$, то x^a продовжується лише на $R_{<0}$. Якщо $a > 0$, то $\lim\limits_{a \to 0_+} x^a = 0$. Щоб не порушувалася неперервність функції x^a, у цьому випадку ставлять $0^a = 0$.

При непарному $n \in N$ функція $x^{1/n}$ допускає єдине продовження на всю числову пряму, а при парному $n \in N$ це продовження неможливе. Ця ситуація пов'язана з ін'єктивністю або неін'єктивністю функції x^n, оскільки рівність $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$=$x$ по суті задає $x^{\frac{1}{n}}$ як функцію, обернену до x^n, тому функцію $x^{\frac{20}{13}}$ можна вважати визначеною $\forall x \in R$, а функцію $x^{\frac{13}{20}}$ лише для невід'ємних x.

Теорема 4.4. *Існує єдина степенева функція з показником степеня a, де $a \in R$.*

Властивості степеневих функцій:

4) $1^a = 1$;
5) $\left(\frac{1}{x}\right)^a$=$\frac{1}{x^a}$;

6) $(x^a)^b = x^{ab}$;
7) $x^0 = 1$;
8) функція x^a монотонно зростає при $a > 0$ і монотонно спадає при $a < 0$.

Аксіоматичне визначення *тригонометричних функцій* спирається на наступні властивості:

1) аксіоми додавання (наприклад, $sin(a+b)=sina\cdot cosb+cosa\cdot sinb$, $cos(a-b)=cosa\cdot cosb+sina\cdot sinb$);
2) значення функцій у певних кутах (наприклад, $cos0=1$, $sin0=0$);
3) фундаментальне співвідношення $sin^2x+cos^2x=1$ $\forall x \in R$;
4) періодичність та симетричність (наприклад, $sin(x+2\pi)=sinx$ і т. д. і властивості парності та непарності $cos(-x)=cosx$, $sin(-x)=-sinx$).

Також є ще наступні підходи до аксіоматичного визначення:

1) комплексна екпонента $e^{ix}=cosx+isinx$;
2) косинус і синус визначаються як розв’язки диференціальних рівнянь, наприклад, $y''=-y$.

Контрольні запитання

1. Які є способи задання функції?
2. Як можна задати функцію за допомогою степеневих рядів?
3. Що таке інтегральне зображення функції?
4. Наведіть приклади неперервних функцій та функцій, що мають розриви, що зустрічаються у шкільному курсі математики.
5. Сформулюйте аксіоматичні означення лінійної, показникової, логарифмічної, степеневої функцій, тригонометричних функцій числового аргументу.
6. Охарактеризуйте властивості вище перелічених функцій.
7. Сформулюйте теєореми існування та єдиності лінійної, показникової, логарифмічної та степеневої функцій.

§ 5. Многочлени, рівняння та нерівності

5.1. Дії над многочленами

У шкільній програмі вивчення многочленів починається у 7-му класі на уроках алгебри. Ця тема включає визначення многочлена та його стандартний вигляд, додавання та віднімання многочленів, множення одночлена на многочлен та многочлена на многочлен, формули скороченого множення (квадрат суми, різниця квадратів тощо). У старшій школі (особливо у класах з поглибленим вивченням) з'являються теми, які фактично є частиною вищої алгебри. А саме, *ділення многочленів «куточком», теорема Безу, схема Горнера, теорема Вієта для рівнянь вищих степенів, цілі корені многочлена**,*** *розклад на лінійні множники.*

Многочленом від x називають вираз вигляду

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \,, \qquad (5.1)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – деякі числа, що називаються коефіцієнтами многочлена, x – символ, замість якого можна підставити будь-яке числове значення [6].

Часто для скороченого запису використовують функціональну символіку для позначення многочленів.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

Тоді значення цього многочлена при *x*=*c* позначимо через *f*(c):

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \dots + a_{n-2}c^2 + a_{n-1}c + a_n.$$

Коефіцієнт a^n у виразі (5.1) називають *вільним членом*. Очевидно, що при x=0 отримаємо f (0)=a_n, а при x=1 матимемо, що $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$. Отже, значення довільного многочлена при x=1 дорівнює сумі усіх коефіцієнтів цього многочлена. Ці два простих зауваження часто використовуються при розв’язуванні задач.

Тотожні перетворення многочленів: розкриття дужок, зведення подібних членів та перестановка доданків.

Якщо $a_0 \neq 0$, то x^n називається старшим членом, a_0 – старшим коефіцієнтом, а многочлен називається *многочленом n-ого степеня*. Запис (5.1) – канонічний запис многочлена n-ого степеня.

Приклад 5.1. Знайти суму коефіцієнтів многочлена, який отримаємо із многочлена

$$1+(x^2-6x+5)(x^5+3x^4-2x^3+x^2-x)^3+(x^2-3x+1)^{25}(x^3+5x+7)$$

зведенням до канонічного вигляду.

Розв'язання. Маємо $f(1)=1+(-1)^{25}\cdot 13=-12$. Отже, шукана сума дорівнює –12.

Нехай маємо два многочлени *P(x)* і *Q(x)*:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$
$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_n.$$

Рівність *P(x)*=*Q(x)* справедлива лише у тому випадку, коли $m=n$, $a_0=b_0$, … , $a_n=b_m$.

Мають місце наступні теореми:

Теорема 5.1. *Якщо P(x)=Q(x), то для будь-якого числа с справедлива рівність P(c)=Q(c).*

Теорема 5.2. *Якщо для будь-якого числа с справедлива рівність P(c)=Q(c), то P(x)=Q(x).*

Теорема 5.3. *Якщо P(x)≠Q(x), то існує таке число с, що P(c)≠Q(c).*

Теорема 5.4. *Якщо існує таке число с , що P(c)≠Q(c), то P(x)≠Q(x).*

Теорема 5.1 (а, отже, і еквівалентна їй теорема 5.4) очевидна. Навпаки, теорема 5.2 (і еквівалентна їй теорема 5.3) зовсім не очевидна.

Приклад 5.2. Учень перемножив многочлени і отримав наступний результат: $(x^5-x^4+x^2-x+1)(x+1)=x^6+1$. Перевірити, чи вірно виконано множення.

Розв'язання. Нехай *P(x)* =$(x^5-x^4+x^2-x+1)(x+1)$, а *Q(x)* =x^6+1.

Якщо x=0, то маємо *P(0)*=1, *Q(0)*=1, тоді *P(0)* =*Q(0)*. Аналогічно *P(1)*=2, *Q(1)*=2, тобто *P(1)*=*Q(1)*.

Чи можемо сказати, що $P(x)=Q(x)$, тобто, що множення виконано вірно? Жодна теорема не дає відповіді.

Далі, при $x = -1$, $P(-1)=0$, $Q(-1)=2$, тобто $P(-1)\neq Q(-1)$.

Отже, множення виконано не вірно.

Теорема 5.5. *Нехай P(x) і Q(x) – два многочлени, степінь кожного не перевищує n. Тоді, якщо значення многочленів співпадають у n+1 точках, то P(x)=Q(x).*

Якщо $P(c_1)=Q(c_1)$, $P(c_2)=Q(c_2)$, … , $P(c_{n+1})=Q(c_{n+1})$ *(де* $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ *– різні числа), то P(x)=Q(x).*

Теорема 5.2 випливає з теореми 5.5.

Сума, різниця і добуток двох многочленів теж є многочленом.

Наступні тереми часто є корисними при розв'язуванні ряду задач.

Терема 5.6. *Нехай P(x) і Q(x) – два, відмінних від нуля многочлени. Тоді степінь многочлена P(x) ·Q(x) дорівнює сумі степенів многочленів P(x) і Q(x), а старший коефіцієнт дорівнює добутку старших коефіцієнтів многочленів P(x) і Q(x).*

Теорема 5.7. *Степінь многочлена P(x)+Q(x) (або P(x)-Q(x)) не перевищує найбільший із степенів многочленів P(x) і Q(x).*

Перейдемо до ділення многочленів. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – два многочлени, $g(x)\neq 0$. Якщо існує такий многочлен $q(x)$, що $f(x)=g(x)\cdot q(x)$, то кажуть многочлен $f(x)$ ділиться на $g(x)$ ($g(x)$ – дільник, $q(x)$ – частка).

Прості приклади показують, що один многочлен ділиться на інший не завжди. Наприклад, многочлен x^2+1 не ділиться на $(x-1)$ націло. Якби x^2+1 ділився на $(x-1)$, тоді б $x^2+1=(x-1)\cdot q(x)$, але при $x=1$, $x^2+1=2$, а $(x-1)\,q(x)=0$. Тому написана рівність не має змісту при жодному $q(x)$.

Отже, у множині многочленів дію ділення не завжди можна виконати. Однак існує більш загальна операція: ділення з остачею (якщо дільник не дорівнює 0).

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – два довільні многочлени, причому $g(x)\neq 0$. Тоді існують многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що виконується рівність $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, де $r(x)$ або дорівнює 0, або має менший степінь, ніж многочлен $g(x)$. Цими умовами многочлени $q(x)$ і $r(x)$ визначаються однозначно.

5.2 Алгебраїчні рівняння та його корені. Теорема Безу. Основна теорема алгебри

Число c називається коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(c)=0$. Задачу «знайти усі корені заданого многочлена $f(x)$» прийнято також формулювати так: розв'язати рівняння $f(x)=0$.

Іншими словами, якщо мова йде про рівняння $f(x)=0$, то ми не маємо на увазі, що запис $f(x)=0$ означає рівність многочленів (тобто, що усі коефіцієнти дорівнюють 0). Відмітимо, що корені многочлена $f(x)$ називаються також коренями рівняння $f(x)=0$. Підкреслимо, що розв'язати рівняння означає знайти усі його корені [5].

У шкільному курсі математики розглядають різні рівняння: ірраціональні, логарифмічні, показникові, тригонометричні та інші.

Алгебраїчним рівнянням називається рівняння виду $f(x)=0$, де $f(x)$ – деякий многочлен. Якщо $f(x)$ – многочлен n-ого степеня, то рівняння $f(x)=0$ називають *алгебраїчним рівнянням n-ого степеня*.

При розв'язуванні алгебраїчних рівнянь корисна наступна теорема **(теорема Безу).**

Теорема 5.8. *Остача від ділення многочлена f(x) на* $(x-a)$ *дорівнює f(a) (тобто дорівнює значенню цього многочлена при x=a).*

Справді $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r(x),\ r(x)\neq 0$, степінь остачі $r(x)$ менший степеня дільника $(x-a)$ або дорівнює 0. Тому $r(x)=r$ є числом,

$$f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r, \qquad f(a)=0+r, \qquad f(a)=r.$$

Теорема 5.9. *Якщо a – корінь многочлена f(x), то цей многочлен ділиться на* $(x-a)$.

Якщо нам відомий корінь $x=a$ алгебраїчного рівняння $f(x)=0$, то знаходження решти коренів цього рівняння зводиться до розв'язування рівняння $g(x)=0$, який має степінь менший на 1, ніж вихідне рівняння.

Теорема 5.10. *Якщо усі коефіцієнти многочлена*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

є цілими числами, то всякий цілий корінь цього многочлена є дільником вільного члена a_n.

Теорема 5.11. *Довільний многочлен n-ого степеня*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

може бути зображений у вигляді добутку

$$f(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n).$$

Цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників. Доведення теореми 5.11 будується на наступній теоремі.

Теорема 5.12. *Довільний многочлен f(x), степінь якого відмінний від 0, має принаймні один корінь.*

Це основна теорема алгебри. Доведення цієї теореми не є елементарним, за методами доведення вона не є не алгебраїчною теоремою.

Теорема 5.13. *Нехай* $f(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$ – *розклад многочлена n-ого степеня на множники 1-ого степеня. Тоді числа* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *є коренями многочлена f(x) і інших коренів цей многочлен не має.*

Якщо серед чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ є такі, які співпадають, то ми кажемо, що у многочлена є кратні корені. Якщо серед чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ число c зустрічається k разів, а усі решта відмінні від c, то *c називають k-кратним коренем* многочлена *f(x).*

Теорема 5.14 *(уточнення основної теореми алгебри). Кожне алгебраїчне рівняння n-ого степеня має рівно n коренів.*

Приклад 5.3. Знайти остачу від ділення многочлена

$$x^{99} + x^3 + 10x + 5$$

на многочлен $x^2 + 1$.

Розв'язання. За означенням ділення маємо тотожність

$$x^{99}+x^3+10x+5=Q(x)\left(x^2+1\right)+ax+b,$$

яка справедлива усюди в області комплексних чисел. У якості x потрібно вибрати один з коренів виразу x^2+1, наприклад $x=i$. Підставимо $x=i$ та отримаємо $i^{99}+i^3+10i+5=ai+b$, тобто $8i+5=ai+b$, звідки $a=8, b=5$. Отже, остача дорівнює $8x+5$.

5.3. Різні підходи до означення поняття рівняння (нерівності)

У сучасній математиці існує три основні підходи до трактування рівнянь та нерівностей:

1) **виразовий підхід (класичний).** ***Рівняння*** розглядається як запис *рівності двох математичних виразів***,** тобто це математичний запис, що складається з двох виразів, поєднаних знаком «=» (або знаками «>», «<» для нерівностей). Головна увага приділяється формальним перетворенням виразів (спрощення, розкриття дужок) для знаходження значення змінної.
2) **функціональний підхід.** ***Рівняння*** розглядається як питання про *спільні точки значень двох функцій*. Рівняння $f(x)=g(x)$ – це задача знаходження значень аргументу x, при яких значення функцій f та g збігаються. Розв'язати рівняння означає знайти абсциси точок перетину графіків $y= f(x)$ та $y= g(x)$. Нерівність $f(x)>g(x)$ визначає проміжки, де графік однієї функції лежить вище за іншу.
3) **логіко-семантичний підхід (через предикати).** Це найбільш строгий підхід, що використовує поняття математичної логіки. ***Рівняння (або нерівність)*** – це ***предикат*** (речення зі змінною), який перетворюється на істинне або хибне висловлювання при підстановці конкретного значення змінної з певної множини. Тобто змінна x – це об'єкт з певної області визначення. Розв'язати рівняння означає знайти **множину істинності** цього предиката (всі значення x, для яких твердження стає істинним). Якщо множина істинності порожня – рівняння не має розв'язків.

Знак рівності використовується у математиці дуже часто і зміст, який надається цьому знаку, далеко не завжди один і той самий.

Наприклад, (5.2), (5.3), (5.4), де (5.2), (5.3), (5.4) – деякі висловлення.

$$\frac{651}{257} = 2\frac{137}{257}, \tag{5.2}$$

$$1236 = 2^2 * 3 * 103, \tag{5.3}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10. \tag{5.4}$$

Зміст «=» у (5.2), (5.3), (5.4): істинність такого висловлення означає, що справа і зліва стоїть одне і те ж число. Такі висловлення ми будемо називати *числовими рівностями.* (5.2) та (5.3) – вірні числові рівності, а (5.3) – невірна.

У іншому змісті застосовують знак «=», якщо мова йде про рівність функцій. Нагадаємо, що дві функції $f(x)$ і $g(x)$ є рівними (тобто співпадають), якщо, по-перше, області визначення цих функцій співпадають, і, по-друге, для $\forall x_0 \in D(f)$, а $f(x_0)=g(x_0)$.

Часто у таких випадках використовують знак «≡», замість «=». Запис $f(x)=g(x)$ або $f(x)\equiv g(x)$ називають також *тотожністю.*

Наприклад, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, $\log_2 2^x = x$.

Іноді при розгляді тотожностей доводиться обмежувати область визначення функцій. А саме, будемо казати, що рівність $f(x)=g(x)$ є тотожністю на множині M, якщо по-перше, множина M міститься в області визначення кожної із функцій $f(x)$, $g(x)$, і, по-друге, для $\forall x_0 \in M$ справедлива числова рівність $f(x_0)=g(x_0)$.

Пишуть $f(x)\equiv g(x)$ на множині M або $f(x)=g(x)$ при $x \in M$.

Приклад 5.4. Рівність $\sqrt{x^2} = x$ є тотожністю на множині невід'ємних чисел, тобто $\sqrt{x^2} \equiv x$, при $x \geq 0$. Хоча область визначення цих функцій $(-\infty; +\infty)$, але їх значення співпадають лише на множині невід'ємних чисел. На множині усіх дійсних чисел співвідношення $\sqrt{x^2} = x$ не є тотожністю.

У зовсім іншому сенсі використовується знак «=» при розгляді рівнянь.

Рівняння з одним невідомим x має такий загальному вигляд

$$f(x)=g(x), \tag{5.5}$$

де $f(x)$ та $g(x)$ – довільні функції. Якщо ми кажемо, що (5.5) є рівнянням, то це означає, що рівність (5.5) розглядається як *невизначене висловлювання* (при одних значеннях x – істинне, при інших – хибне), тобто ми цікавимося знаходженням коренів.

Число a називається коренем рівняння (5.5), якщо, по-перше, це число належить області визначення як функції $f(x)$, так і $g(x)$, і, по-друге, $f(a)=g(a)$.

Розв'язати рівняння означає знайти усі його корені (або довести, що рівняння коренів немає).

5.4. Відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей). Основні перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності

У процесі розв'язання рівнянь зазвичай проводимо деякі перетворення.

Є основне правило: не можна виконувати перетворення, які можуть привести до втрати коренів. Іноді при деяких перетвореннях можуть з'явитися нові корені. З цим пов'язана необхідність перевірки коренів.

Нехай $f(x)=g(x)$ – задане рівняння, а $f_1(x)=g_1(x)$ – деяке нове рівняння, утворене внаслідок перетворень. Будемо говорити, що при переході від рівняння $f(x)=g(x)$ до $f_1(x)=g_1(x)$ відбувається втрата коренів, якщо існує число x_0 (хоча б одне), яке є коренем рівняння $f(x)=g(x)$ і не є коренем рівняння $f_1(x)=g_1(x)$. Далі, число x_0 називається стороннім коренем, якщо це число є коренем рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ і не є коренем рівняння $f(x)=g(x)$.

Приклад 5.5. Розв'язуючи рівняння $x^3=x$, поділивши на x обидві його частини, отримаємо

$$x^2=1;\ x_{1,2}=\pm1.$$

Але $x=0$ теж є коренем рівняння. Отже, скоротивши на x, ми втратили один корінь.

Означення 5.1. Два рівняння *f(x)=g(x)* (5.6) і $f_1(x) = \mathrm{g}_1(x)$ (5.7) називають *еквівалентними (рівносильними)* на деякій множині M, якщо вони мають на цій множині одні і ті ж розв'язки, тобто кожен корінь рівняння (5.6), що належить множині M, є коренем рівняння (5.7), і навпаки, кожен корінь рівняння (5.7), що належить множині M, є коренем рівняння (3.6).

Приклад 5.6. Рівняння $x = 0$ і $x(x^2 + 1) = 0$ рівносильні на множині $\boldsymbol{R}$ (x=0 – єдиний корінь) і нерівносильні на множині $\boldsymbol{C}$, де друге рівняння має ще два корені ($x_2 = i, x_3 = -i$).

Означення 5.2. Нехай задане деяке рівняння $f(x) = g(x)$. Рівняння $f_1(x) = \mathrm{g}_1(x)$ називається *наслідком* рівняння $f(x) = g(x)$, якщо при переході від першого до другого не відбулося втрати коренів, тобто усі корені $f(x) = g(x)$ є коренями $f_1(x) = \mathrm{g}_1(x)$.

Означення 5.3. Будемо говорити, що рівняння $f(x) = g(x)$ (5.6) рівносильне диз'юнкції рівнянь $f_1(x) = g_1(x), f_2(x) = g_2(x), \dots, f_n(x) = g_n(x)$ (5.7), якщо виконуються умови:

1) кожен корінь (5.6) є коренем принаймні одного з рівнянь (5.7);
2) будь-який корінь будь-якого рівняння (5.7) є коренем рівняння (5.6).

Тобто, можна записати

$$f(x) = g(x) \leftrightarrow f_1(x) = g_1(x) \vee f_2(x) = g_2(x) \vee \dots \vee f_n(x) = g_n(x) \quad .$$

Тепер розглянемо нерівності. Усі дійсні числа розбиваються на додатні, від'ємні і число 0. Для того, щоб вказати, що число a додатнє, використовуємо запис $a > 0$.

Нагадаємо, що сума і добуток додатних чисел теж є додатніми числами. Далі, якщо a – від'ємне, то число $-a$ – додатнє (і навпаки). Нарешті, для будь-якого додатного числа a знайдеться таке додатне раціональне число r, що $r < a$. Ці факти і лежать в основі теорії нерівностей.

За означенням нерівність $a > b$ (або $b < a$) має місце лише в тому випадку, якщо $a - b$ – додатне.

Наведемо основні властивості нерівностей. Нехай $a, b, c \in R, n \in N$.

1) Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$ *(транзитивність).*

Доведення: $a > b$, за означенням маємо $a - b > 0$; $b > c, b - c > 0$. Отже,

$$a - c = (a - b) + (b - c) > 0$$

як сума додатніх чисел. Отже, $a >$ c.

2) Якщо $a > b$, то для будь-якого c має місце нерівність

$$a + c > b + c.$$

Доведення: оскільки $a > b$, то $a - b > 0$. Тому

$$(a + c) - (b + c) = a - b > 0,$$

тобто $a + c > b + c$.

3) Якщо $a + b > c$, то $a > c - b$, тобто будь-який доданок можна перенести з однієї частини в другу, змінивши знак цього доданку на протилежний.

Доведення випливає з властивості 2).

$$a + b > c \ \ |+(-b),$$

$$a + b - b > c - b,$$

$$a > c - b.$$

4) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$, тобто при додаванні нерівностей одного і того ж змісту отримаємо нерівність цього ж змісту.

Доведення: згідно означення нерівності достатньо показати, що різниця $(a + \text{c}) - (b + d)$ >0. Маємо

$$(a + \text{c}) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

Оскільки з умови випливає, що $(a - b) > 0$ і $(c - d) > 0$, то $(a + \text{c}) - (b + d)$ >0.

Наслідок. Із властивостей 2) і 4) випливає наступне правило віднімання нерівностей: якщо $a > b$ і $c > d$, то $a - d > b - c$ (для доведення достатньо до обох частин нерівності $a + c > b + d$ додати число $(-c - d)$).

5) Якщо $a > b$, то при $c > 0$ маємо $ac > bc$, а при $c < 0$ маємо $ac < bc$.

Доведення: якщо $a > b$, то $a - b > 0$. Тому знак різниці $ac - bc = c(a - b)$ співпадає із знаком числа c. Якщо $c > 0,$ то $ac - bc > 0, ac > bc$. Якщо $c < 0,$ то $ac - bc < 0, ac < bc$.

6) Якщо $a > b > 0$ і $c > d > 0$, то $ac > bd$, тобто якщо всі члени двох нерівностей однакового змісту додатні, то при почленному множенні цих нерівностей отримуємо нерівність цього ж змісту.

Доведення: маємо $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d)$. Оскільки, $c > 0, b > 0, a - b > 0, c - d > 0$, то $ac–bd>0$, тобто $ac>bd$.

7) Якщо $a > b > 0$ і $c > d > 0$, то $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Доведення: маємо $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac-bd}{cd}$. Оскільки чисельник і знаменник дробу додатні, то $\frac{a}{d} - \frac{b}{c} > 0$.

Частинний випадок: якщо $a = b = 1, c > d > 0$, то $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$. Це правило зберігається, якщо $c<0$, $d<0$. Отже, якщо $c > d$ і $cd > 0$, то $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$. Якщо ж $c > d$ і $cd < 0$ (тобто $c > 0, d < 0$), то $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$.

Еквівалентні перетворення рівнянь

1) додавання (віднімання) одного й того ж виразу:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x);$$

2) множення (ділення) на ненульовий вираз:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x), h(x)\neq 0;$$

У такому випадку потрібно враховувати *область допустимих значень.*

3) перенесення членів:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0;$$

4) розкриття дужок, зведення подібних доданків;
5) заміна змінної (бієктивна) – якщо заміна взаємно-однозначна, тоді еквівалентність зберігається.

Нееквівалентні перетворення рівнянь

1) множення на вираз, що може дорівнювати нулю (можуть з’явитися зайві розв’язки);
2) піднесення до степеня (втрачається знак, тому з’являються сторонні корені);
3) добування кореня (втрачається частина розв’язків);

4) логарифмування, потенціювання.

Еквівалентні перетворення нерівностей

1) додавання (віднімання):

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)>g(x)+h(x);$$

2) множення (ділення):

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x),\ h(x)>0,$$

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x)<g(x)\cdot h(x),\ h(x)<0 \text{ (знак змінюється)};$$

3) піднесення до степеня (для парного степеня – нееквівалентне перетворення, для непарного – еквівалентне);

4) застосування монотонних функцій (якщо функція зростає, то знак зберігається, якщо спадає, то знак змінюється).

5.5. Рівняння, що містять один та два параметри. Рівняння в області комплексних чисел

Рівняння з параметрами та рівняння в області комплексних чисел потребують особливих методів розв'язання, оскільки вони залежать від додаткових умов або розширеної числової системи. Параметр – це стала величина, значення якої в умові не вказано, але від якої залежить кількість або вигляд коренів рівняння.

Рівнянням з параметрами називають рівняння виду $f(x; a_1; a_2; \dots; a_n)=0$, *де* x – шукане невідоме, $a_1; a_2; \dots; a_n$ – змінні параметри. Розв’язати рівняння з параметрами означає, що для кожного значення параметра треба встановити, чи має рівняння розв’язки, і якщо має, то знайти ці розв’язки, що як правило, залежать від параметра. Розв’язуються такі рівняння аналітичним та графічним методами.

Приклад 5.7. Знайдіть усі значення параметра a, при якому рівняння $|x^2 - 8|x| + 7| = a$ має менше 4 коренів.

Розв'язання. Застосуємо графічний метод для розв'язання заданого рівняння з параметром (рис. 5). Виділимо повний квадрат і запишемо це рівняння у вигляді $|(|x|-4)^2-9|=a$. Нехай $f(x)=|(|x|-4)^2-9|$, $g(x)=a$.

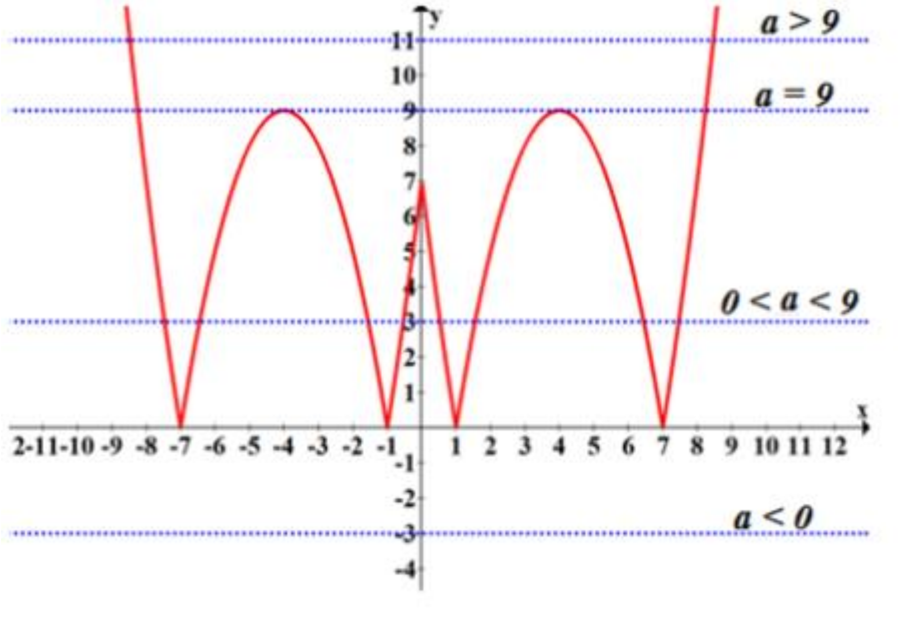

Рис. 5

Схематично зобразимо графіки функцій *f(x)* та *g(x)*. Графік функції *g(x)=a* – пряма, паралельна осі *Ox*. Розв'язки рівняння – абсциси точок перетину графіків функцій.

Пряма не перетне графік *f(x),* якщо *a<0*. Якщо *a>9*, то пряма матиме з графіком менше чотирьох точок перетину (а саме дві). Тобто, рівняння має менше 4 коренів, якщо

$$a \in (-\infty;0) \cup (9;+\infty).$$

Рівнянням з двома параметрами називається рівняння вигляду *f(x; a, b)*=0, де a і b – параметри.

Приклад 5.8. Знайти всі значення параметрів $a, b \in R,$ для яких рівняння

$$x^2+ax+b=0$$

має два різні додатні корені.

Розв'язання. Нехай x_1 та x_2 – корені заданого рівняння. За теоремою Вієта:

$$x_1+x_2=-a,\ x_1x_2=b.$$

Для того, щоб рівняння мало два різні корені, потрібно, щоб

$$D=a^2-4b>0.$$

Для того, щоб корені були додатні, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases}$$

Об'єднуючи всі умови, отримаємо наступну систему для параметрів:

$$\begin{cases} a^2 - 4b > 0, \\ a < 0, \\ b > 0. \end{cases}$$

Отже, рівняння має два різні додатні корені тоді і лише тоді, коли

$$a < 0, b > 0, a^2 > 4b.$$

Рівняння в області комплексних чисел – це рівняння, де змінна z належить множині C, $z=x+iy$, де $x, y \in R$, а $i^2=-1$.

Розв'язання рівнянь:

1) *квадратні рівняння:* при від'ємному дискримінанті розв'язком є два спряжені комплексні числа $z = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$;
2) *корінь n-ого степеня*: рівняння $z^n = \omega$ має n різних комплексних коренів, які лежать на колі, згідно формули Муавра;
3) *f(z)=g(z):* метод прирівнювання дійсних та уявних частин – це один із базових та ефективних способів розв'язування рівнянь у множині C.

Приклад 5.9. Обчислити значення виразу

$$z^{167} + \frac{1}{z^{167}}$$

для z, що задовольняє рівняння $z + \frac{1}{z} = 1$.

Розв'язання. За умовою z задовольняє рівняння $z^2 - z + 1 = 0$, тобто $z^3 = -1$. Оскільки

$$z^{167} = \left(z^3\right)^{55} \cdot z^2 = -z^2,$$

то потрібно обчислити значення виразу

$$-z^2 - \frac{1}{z^2} = -\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right).$$

Піднесемо рівняння $z + \frac{1}{z} = 1$ до квадрату і знайдемо, що

$$z^2+\frac{1}{z^2}=-1.$$

Отже, $z^{167}+\frac{1}{z^{167}}=1$.

5.6. Деякі відомі нерівності

1. $\forall\, a,b \in R: \ a^2+b^2 \geq 2ab.$

Зауваження: справедлива і більш сильна нерівність

$$a^2+b^2 \geq 2|ab|,$$

$$(|a|-|b|)^2 \geq 0.$$

2. Якщо a і $b \in R$ одного знаку (тобто $ab > 0$), то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$$

3. Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0,$ то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, тобто середнє арифметичне двох невід'ємних чисел не менше їх середнього геометричного

4. *Нерівність для середнього арифметичного і середнього геометричного n невід'ємних чисел (нерівність Коші)*: якщо $a_1, a_2, \dots, a_n - \forall$ невід'ємні числа, то

$$\left|\frac{a_1, a_2, \dots, a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 * \ a_2 * \dots * a_n}\right|.$$

Рівність має місце лише при $a_1 = \ a_2 = \cdots = a_n$.

5. *Нерівність Коші-Буняковського*: для будь-яких дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$виконується нерівність:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Рівність має місце тоді і тільки тоді, коли числа a_k і b_k пропорційні, тобто коли існують такі числа α і $\beta, \alpha^2+\beta^2 \neq 0$ і для всіх $k = 1,2, \dots, n$ виконується рівність $\alpha a_k + \beta b_k = 0$.

6. *Нерівність Бернуллі*: якщо $x \geq -1$, тоді для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність $(1+x)^n \geq 1+nx$.

7. *Нерівність Гельдера*: для довільної пари дійсних чисел $(x_i; y_i)$, де $i = \overline{1, n}$ і додатних раціональних p, q: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, має місце така нерівність:

$$\left(x_1^p + x_2^p + x_3^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(y_1^q + y_2^q + y_3^q + \cdots + y_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$
$$\geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n).$$

8. *Нерівність Мінковського:*

$$\left(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(y_1^p + y_2^p + \cdots + y_n^p\right)^{\frac{1}{p}} + \cdots + \left(z_1^p + z_2^p + \cdots + z_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq$$
$$((x_1 + y_1 + \cdots + z_1)^p + (x_2 + y_2 + \cdots + z_2)^p + \cdots + (x_n + y_n + \cdots + z_n)^p)^{\frac{1}{p}}.$$

9. Нерівність Чебишева: для двох неспадних (чи двох незростаючих) послідовностей чисел a_i і b_i виконується нерівність:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}{n} \leq$$
$$\leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

Приклад 5.10. Знайти усі m, для яких нерівність

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

задовольняється при усіх додатних значеннях x.

Розв'язання. Умова, що вітки параболи направлені вгору означає, що $m > 0$. Якщо парабола не перетинає вісь Ox, то отримуємо систему

$$\begin{cases} m > 0, \\ D = 4 - m(3m + 1) < 0. \end{cases}$$

Якщо ж заданий тричлен має дійсні корені, то більший корінь не повинен бути додатним:

$$\begin{cases} m > 0, \\ \dfrac{2 + \sqrt{4 - m(3m + 1)}}{m} \leq 0. \end{cases}$$

Друга нерівність другої системи (і, як наслідок, уся система) не має розв'язків при $m > 0$, оскільки чисельник і знаменник є додатними.

Розв'язуючи другу нерівність першої системи, отримаємо

$$m < -1\frac{1}{3},\ m > 1.$$

Беручи до уваги першу нерівність, знаходимо розв'язок нерівності: $m > 1$.

Нехай тепер m=0. Тоді отримаємо, що $-4x+1>0$, тобто $x<\frac{1}{4}$ і нерівність задовольняється не при всіх додатних x.

Отже, $m > 1$.

5.7. Застосування похідної та інтеграла при доведені нерівностей

При доведенні *нерівностей з використанням похідної* виконуються наступні міркування [2].

Нехай на проміжку $x \in [a, b]$ із області визначення функцій f та g потрібно довести нерівність $f(x) \geq g(x)$. Розглянемо функцію $u(x) = f(x) - g(x)$. Нехай на даному проміжку похідна $u'(x)$ має єдиний корінь x_0 – точка мінімуму функції $u(x)$ і виконується рівність $u(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$. Цього достатньо, для доведення, що на проміжку $[a, b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$.

Цим методом можна доводити і числові нерівності. Тоді, перед реалізацією описаної вище схеми розглядають деяку функцію, що має числові значення у деяких точках.

Приклад 5.11. Довести нерівність $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ при будь-якому дійсному x.

Доведення. Нехай маємо функцію $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Похідна функції $f'(x) = x - \sin x$ має єдиний корінь x= 0. Отже, x= 0 є точкою мінімуму функції. Звідси маємо, що для усіх значень $x \neq 0$ виконуватиметься нерівність $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$. Рівність досягається при $x =$ 0.

При *доведенні нерівностей з використанням інтегрального числення* виконуються наступні міркування [2]. Нехай на проміжку $[a, b]$ задані дві неперервні функції $f(x)$ та $g(x)$ і в усіх точках цього проміжку виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$. Тоді на проміжку $[a, b]$ виконується нерівність $\int_a^x f(t)\,dt \geq \int_a^x g(t)\,dt$. Аналогічно, виконується твердження і для наступних функцій $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$ та $f(x) < g(x)$.

Хід виконання даного методу полягає у наступному: для доведення нерівності $F(x) \geq G(x)$ розглядаємо функції $f(x)$ та $g(x)$, де $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. При виконанні нерівності $f(x) \geq g(x)$, стверджуємо, що вірна і нерівність $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \geq G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$.

Приклад 5.12. Довести нерівність

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2019} < \frac{8080\sqrt{505} - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Кожний доданок $\sqrt{n}$ можна трактувати, як площу прямокутника з висотою $\sqrt{n}$ та основою, що дорівнює 1 (відстань між точками n та $n + 1$), то

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2019} < \int_2^{2020} \sqrt{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{2020} = \frac{2\sqrt{2020^3} - 2\sqrt{2^3}}{3} = \frac{8080\sqrt{505} - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Контрольні запитання

1. Яке зображення має канонічний вигляд многочлена n-ого степеня?
2. Які дії виконують над многочленами?
3. Які поняття вищої алгебри з теорії многочленів вивчають у шкільному курсі математики?
4. Що таке алгебраїчне рівняння?
5. Сформулюйте теорему Безу та основну теорему алгебри.
6. Наведіть різні підходи до означення поняття рівняння (нерівності).
7. Які перетворення рівнянь (нерівностей) є еквівалентними?
8. Сформулюйте означення рівнянь з параметром та двома параметрами та вкажіть, які є методи їх розв'язання.

9. Які є методи розв’язування рівняння в області комплексних чисел.

10. Наведіть деякі відомі нерівності (нерівності середніх, Коші, Коші-Буняковського, Бернуллі, Гельдера, Мінковського, Чебишева).

ЛІТЕРАТУРА

1. Галь Ю. М., Золота О. А. Проективна геометрія та основи геометрії. Дрогобич: РВДДПУ, 2011. 125 с.
2. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей. Івано-Франківськ, 2014. 100 с.
3. Соколенко Л. О. Наукові основи шкільного курсу математики. Частина І. Чернігів: Десна Поліграф, 2020. 144 с.
4. Charles C. Pinter . A Book of Set Theory. Kyung Moon Publishers, South Korea, 2014. 224 p.
5. Herman J., Šimša J., Kučera R. Equations and Inequalities. Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory. Canadian Mathematical Society, 2000. 344 p.
6. Barbeau E. J. Polynomials. Springer-Verlag New-York Inc., 1989. 441 p.
7. Nicholas J., Hunter J., Hargreaves J. Functions and Their Graphs. Mathematics Learning Centre, University of Sydney, 2006. 78 p.

Інтернет-ресурси:

8. Історія розвитку математики. URL: https://surl.li/kwfhbw
9. Потужність множини. URL: https://surl.li/sqxmdu
10. Ін’єкція. URL: https://surl.li/uthpng
11. Морфізм. URL: https://surl.li/ytixzr
12. Топологічний простір. URL: https://surl.li/bpkfww
13. Geogebra. Graphical calculator. URL: https://www.geogebra.org/graphing?lang=uk

Електронне видання

Ольга КУТНЯК

НАУКОВІ ОСНОВИ

ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ.

Частина І

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

Дрогобицький державний педагогічний університет

імені Івана Франка