Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ АЛГЕБРИ

Дрогобич, 2026

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ АЛГЕБРИ

Навчальний посібник для підготовки здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань А Освіта
спеціальності А3 Початкова освіта
Освітні програми: Початкова освіта та інформатика.
Початкова освіта та англійська мова

Дрогобич, 2026

УДК 51 (075.8)
ББК 22.11 я 73

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 26 березня 2026 року)

Рецензенти:

Комарницька Леся Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)
Кузьма Надія Василівна, спеціаліст вищої категорії, старший вчитель, вчитель математики, супервізант НУШ (Ліцей № 3 імені В'ячеслава Чорновола Дрогобицької міської ради)

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

Вибрані питання елементарної алгебри. Електронне навчально-методичне видання. Дрогобич: Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026. 148 с.

Навчальний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни «Вибрані питання елементарної алгебри» для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань
А Освіта спеціальності А3 Початкова освіта (Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова) денної та заочної форм здобуття освіти. У ньому вміщено теоретичний та практичний блоки курсу. Посібник містить виклад основних положень навчальної дисципліни, які розкриваються через конкретні приклади. Запропонована у виданні система вправ підібрана відповідно до вимог робочої програми дисципліни з метою забезпечення високого рівня сформованості спеціальних предметних компетентностей здобувачів.

Бібліографія: 15 назв.

Зміст

Вступ …………………………………………………………..…………….. 5

Теоретичний блок …………………………………………………………… 8

РОЗДІЛ 1. Алгебраїчні поняття обчислювального змісту ……….………. 8

1.1. Числовий вираз ………………………………………………….……….. 8

1.2. Числова рівність ………………………………………………………… 28

1.3. Числова нерівність ……………………………………………………... 29

1.4. Буквені вирази та їх види ……………………………………….…….. 31

1.5. Вирази з однією змінною ……………………………..……….……… 32

1.6. Вирази зі змінними ………………………………………………..……... 42

РОЗДІЛ 2. Алгебраїчні поняття предикативного змісту ……….....……… 45

2.1. Рівняння з однією змінною …………………………………….....…… 45

2.2. Нерівність з однією змінною …………………………………   …… 59

2.3. Розв’язування задач з використанням алгебраїчних понять ………… 79

Практичний блок …………………..……………………………..………… 83

Тематика практичних занять 83

Завдання для практичних занять та самостійної роботи ……………….. 84

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи №1 ….. 133

Типовий варіант контрольної роботи №1 ……………….....……… …… 134

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи №2 ….. 135

Типовий варіант контрольної роботи №2 …………………….....……….... 136

Перелік питань для самоконтролю та підсумкового контролю ……... 137

Список використаної літератури ……………………….....……..……... 140

Предметний покажчик ………………………………………………….…… 142

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Вибрані питання елементарної алгебри» передбачена як вибірковий компонент освітньо-професійної програми для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань А Освіта спеціальності А3 Початкова освіта денної та заочної форм здобуття освіти.

Метою вивчення курсу є математична підготовка здобувачів ЗВО та їх готовність до організації навчальної роботи з учнями початкової школи щодо формування знань про алгебраїчні поняття обчислювального та предикативного змісту.

Вивчення цієї дисципліни відповідно до затвердженої робочої навчальної програми передбачає формування окремих понять алгебраїчного змісту (числові вирази, числові рівності, числові нерівності, буквені вирази, тотожне перетворення виразів зі змінними, рівняння та нерівності з однією змінною тощо).

У пропонованому посібнику подано усі навчально-методичні матеріали вивчення курсу. Теоретичний блок містить означення та властивості зазначених понять алгебраїчного змісту. Практичний блок включає систему завдань для практичних занять та самостійної роботи та служить для систематизації та узагальнення знань, умінь та навичок здобувачів (обчислення значень числових виразів різних видів; встановлення істинності чи хибності числових рівностей та нерівностей; тотожні перетворення виразів зі змінними; розв'язування рівнянь та нерівностей з однією змінною (лінійних, квадратних, дробово-раціональних); розв'язування задач з використанням алгебраїчних понять (числового виразу, буквеного виразу, рівняння).

У посібнику подано теми практичних занять, типові варіанти та методичні рекомендації щодо написання контрольних робіт № 1 і № 2, критерії їх оцінювання, питання для самоконтролю та підсумкового контролю, список використаної літератури та предметний покажчик.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ
«ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ АЛГЕБРИ»

РОЗДІЛ 1. Алгебраїчні поняття обчислювального змісту

Числовий вираз. Прості та складені числові вирази. Значення числового виразу. Правила порядку виконання дій у числових виразах. Запис числового виразу за його словесним заданням і навпаки. Числові вирази з натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними числами. Обчислення значення числового виразу на основі використання законів та властивостей арифметичних дій.

Числова рівність. Правильні (істинні) та неправильні (хибні) числові рівності. Встановлення правильності числової рівності (порівняння двох чисел, числа та числового виразу, двох числових виразів). Властивості числових рівностей.

Числова нерівність. Правильні (істинні) та неправильні (хибні) числові нерівності. Встановлення правильності числової нерівності (порівняння двох чисел, числа та числового виразу, двох числових виразів). Властивості числових нерівностей.

Буквені вирази. Види буквених виразів.

Вирази з однією змінною. Область допустимих значень виразу (ОДЗ). Значення виразу зі змінною при наданні певного значення змінній. Тотожно рівні вирази. Тотожність. Тотожні перетворення виразів. Формули скороченого множення. Способи спрощення виразів різних видів з однією змінною.

Вирази зі змінними. Способи спрощення виразів зі змінними. Тотожні перетворення виразів з двома змінними.

РОЗДІЛ 2. Алгебраїчні поняття предикативного змісту

Рівняння з однією змінною. Розв'язок (корінь) рівняння. Наслідок рівняння. Рівносильні рівняння. Теореми про рівносильні рівняння. Розв'язування найпростіших рівнянь з однією змінною на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій. Лінійні, квадратні та такі, що зводяться до них, дробово-раціональні рівняння з однією змінною та способи їх розв'язування.

Нерівність з однією змінною. Розв'язок нерівності. Наслідок нерівності. Рівносильні нерівності. Теореми про рівносильні нерівності. Нерівності з однією змінною (лінійні, квадратні, дробово-раціональні) та способи їх розв'язування. Метод інтервалів.

Розв'язування задач з використанням алгебраїчних понять. Розв'язування задач за допомогою складання числового виразу. Розв'язування задач за допомогою складання буквеного виразу. Розв'язування простих та складених задач за допомогою складання рівняння з однією змінною (алгебраїчним способом).

Теоретичний блок
РОЗДІЛ 1. Алгебраїчні поняття обчислювального змісту

1.1. Числовий вираз

Означення 1. ***Числовим виразом*** *називається число чи декілька чисел, з'єднаних між собою знаками дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня і т.д.) та дужками, які вказують на порядок виконання дій.*

Наприклад, *36; 27 – (2 + 9);* $8\cdot\frac{1}{3}+5{,}3$*; 45 + 3,8 ·* $(7^2 – 15) : 4$*.*

За кількістю дій у числовому виразі їх поділяють на прості та складені. **Прості вирази** містять одне число або одну дію між двома числами. **Складені вирази** містять дві або більше дій над числами.

Наприклад, 25; 8 – 1,55; $12\cdot\frac{1}{3}$; $\sqrt{15}$ є простими числовими виразами.

$(8^2 – 14) : 10$; $3\sqrt{15}-1{,}5$ є складеними числовими виразами.

Означення 2. *Результат, який отримуємо після виконання зазначених дій у числовому виразі, називається* ***значенням числового виразу****.*

Під час знаходження значення числового виразу використовують **правила порядку виконання дій**:

1) *якщо вираз не містить дужок, то спочатку виконують дії другого ступеня (множення та ділення за порядком їх запису у виразі), а потім дії першого ступеня (додавання та віднімання за порядком їх запису у виразі);*
2) *якщо вираз містить дужки, то спочатку виконують дії в дужках, а потім дії поза дужками;*
3) *порядок дій можна нумерувати цифрами.*

Числовий вираз, який записаний математичними символами, можна задавати словесно з використанням відповідних математичних термінів. І навпаки, маючи словесне задання числового виразу, можна записати його відповідними математичними символами.

Наприклад, числовий вираз *(12 + 38) : 2* словесно можна задати так «півсума чисел *12* і *38*». Сформульований словесно вираз «Потроєна різниця квадратів чисел *4* і 2» можна записати символами так: $3 \cdot (4^2 - 2^2)$.

У початкових класах усно або письмово знаходять значення числових виразів лише з натуральними числами в межах одного мільйона та нулем.

У середніх класах загальноосвітньої школи вивчають числові вирази з дійсними числами, зокрема цілими, раціональними, ірраціональними.

I. Для знаходження значень числових виразів **з цілими числами** використовують правила виконання дій над числами з однаковими та різними знаками:

1. правила додавання

1) *При додаванні двох цілих чисел одного і того ж знаку отримується число того ж знаку, модуль якого дорівнює сумі модулів доданків.*

Наприклад, $5 + 7 = 12;$ $\quad -4 + (-8) = -12.$

2) *При додаванні двох цілих чисел різних знаків отримується число, знак якого співпадає зі знаком доданка, який має більший модуль, а модуль дорівнює різниці більшого та меншого модулів доданків.*

Наприклад, $-9 + 6 = -3;$ $\ -2 + 8 = 6;$ $\ 11 + (-7) = 4;$ $\ 2 + (-7) = -5.$

3) *Сума протилежних цілих чисел дорівнює нулю.*

Наприклад, $-5 + 5 = 0;$ $\quad 54 + (-54) = 0.$

4) *Додавання цілого числа з нулем не змінює цього числа.*

Наприклад, $4 + 0 = 4;$ $\quad -6 + 0 = -6;$ $\quad 0 + 3 = 3;$ $\quad 0 + (-7) = -7.$

2. правила віднімання

Відомо, що для того щоб відняти від числа *a* число *b*, треба до числа *a* додати число – *b*, яке є протилежним числом до числа *b*, тобто

$$a - b = a + (-b).$$

Наприклад, $-4 - 11 = -4 + (-11) = -15;$ $\quad -3 - 2 = -3 + (-2) = -5.$

3. правила множення

1) *При множенні двох цілих чисел одного і того ж знаку отримується додатне число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників.*

Наприклад, $8 \cdot 2 = 16;$ $(-8) \cdot (-2) = 16.$

2) *При множенні двох цілих чисел різних знаків отримується від'ємне число, модуль якого дорівнює добутку модулів множників.*

Наприклад, $-8 \cdot 2 = -16;$ $8 \cdot (-2) = -16.$

3) *Добуток цілого числа з нулем дорівнює нулю.*

Наприклад, $4 \cdot 0 = 0;$ $-6 \cdot 0 = 0;$ $0 \cdot 3 = 0;$ $0 \cdot (-7) = 0.$

4) *При множенні цілого числа на одиницю отримуємо те саме число.*

Наприклад, $-4 \cdot 1 = -4;$ $6 \cdot 1 = 6;$ $1 \cdot 3 = 3;$ $1 \cdot (-7) = -7.$

4. правила ділення

1) *При діленні двох цілих чисел одного і того ж знаку, відмінних від 0, отримується додатне число, модуль якого дорівнює частці їх модулів.*

Наприклад, $8 : 2 = 4;$ $(-8) : (-2) = 4.$

2) *При діленні двох цілих чисел різних знаків, відмінних від нуля, отримується від'ємне число, модуль якого дорівнює частці їх модулів.*

Наприклад, $-8 : 2 = -4$ $8 : (-2) = -4.$

3) *Частка нуля та довільного числа, відмінного від нуля, дорівнює нулю.*

Наприклад, $0 : 4 = 0;$ $0 : (-6) \cdot = 0.$

4) *Частка довільного числа й одиниці дорівнює тому ж числу.*

Наприклад, $-4 : 1 = -4;$ $6 : 1 = 6.$

5) *Ділити довільне число на нуль не можна (ділення на нуль не має змісту, ділення на нуль неможливе).*

Варто нагадати поняття **модуля числа**, яке використовується у цих правилах виконання арифметичних дій над цілими числами.

Означення 3. ***Модулем числа а*** *називається це ж число, якщо $a \geq 0$, або протилежне до нього число $-a$, якщо $a < 0$.*

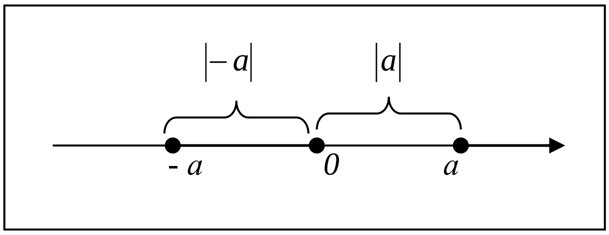
Модуль числа *а* позначається символом $|a|$.

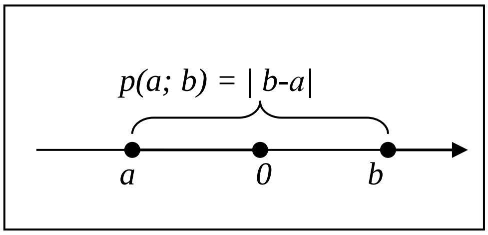
За означенням модуля числа отримуємо, що

$$|a| = \begin{cases} a, & якщо \quad a \geq 0, \\ -a, & якщо \quad a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|4| = 4,\quad |-8| = 8,\ |0| = 0,\quad |\pi - 3| = \pi - 3,\quad |3 - \pi| = \pi - 3$.

Геометрично модуль числа $|a|$ означає **відстань на координатній прямій від точки *A* (*a*) до точки *O* (*0*)** – початку координат.





Властивості модуля:

1. $|a| \geq 0$.

2. $|a| = |-a|$.

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, b ≠ 0.

5. $|a|^2 = a^2$.

6. $\sqrt{a^2} = |a|$.

II. Для знаходження значень числових виразів **з раціональними числами** використовують правила виконання дій над дробовими числами у вигляді звичайних та десяткових дробів:

1. правила додавання

1) *щоб додати два звичайні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без зміни.*

Наприклад, $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$.

2) *щоб додати два звичайні дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника (їх НСК) і додати за правилом 1.*

Наприклад, $\frac{{}^{2/}2}{3}+\frac{{}^{1/}1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

3) *щоб додати до цілого числа звичайний дріб (або навпаки), треба записати мішаний дріб, ціла частина якого є цілим числом, а дробова – заданим дробом.*

Наприклад, $4+\frac{1}{3}=4\frac{1}{3}$; $9\frac{8}{9}+10=19\frac{8}{9}$; $8+3\frac{5}{7}=11\frac{5}{7}$ $\frac{2}{5}+6=6\frac{2}{5}$.

4) *щоб додати до мішаного дробу звичайний дріб (або навпаки), треба цілу частину дробу залишити без змін, а дробові частини додати.*

Наприклад, $9\frac{{}^{1/}1}{8}+\frac{{}^{4/}1}{2}=9\frac{1+4}{8}=9\frac{5}{8}$; $\frac{1}{3}+5\frac{4}{5}=5\frac{17}{15}=6\frac{2}{15}$.

5) *щоб додати два мішані дроби, треба додати їх цілі та дробові частини окремо, а потім додати ці результати.*

Наприклад, $9\frac{{}^{7/}1}{2}+1\frac{{}^{2/}1}{7}=10\frac{7+2}{14}=10\frac{9}{14}$.

6) *щоб додати два скінченні десяткові дроби, треба додати їх у «стовпчик» за правилом додавання натуральних чисел, записавши коми десяткові одна під одною, і в одержаному результаті поставити десяткову кому на тому ж місці.*

Наприклад,

$$\begin{array}{r} 3{,}75\\ +\ \underline{15{,}385}\\ 19{,}135 \end{array}$$

7) *щоб додати скінченний десятковий дріб і мішаний або звичайний дріб, треба перетворити десятковий дріб у звичайний (або навпаки) і додати їх за попередніми правилами.*

Наприклад, $3{,}5+4\frac{1}{3}=3\frac{{}^{3/}1}{2}+4\frac{{}^{2/}1}{3}=7\frac{3+2}{6}=7\frac{5}{6}$; $3{,}5+\frac{1}{2}=3{,}5+0{,}5=4$.

2. правила віднімання

1) *щоб відняти два звичайні дроби з однаковими знаменниками, треба відняти їх чисельники, а знаменник залишити без зміни.*

Наприклад, $\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$.

2) *щоб відняти два звичайні дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника (їх НСК) і відняти за правилом 1.*

Наприклад, $\frac{{}^{2/}1}{2}-\frac{{}^{1/}1}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$.

3) *щоб відняти від мішаного дробу звичайний дріб, треба цілу частину залишити без зміни, а від дробової частини відняти звичайний дріб.*

Наприклад, $3\frac{{}^{4/}1}{3}-\frac{{}^{3/}1}{4}=3\frac{4-3}{12}=3\frac{1}{12}$.

4) *щоб відняти від цілого числа звичайний дріб, треба ціле число перетворити у мішаний дріб (ціла частина якого на 1 менша від заданого числа, а дробова частина є дробом, чисельник і знаменник якого дорівнюють знаменнику звичайного дробу) і відняти.*

Наприклад, $4-\frac{1}{3}=3\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=3\frac{2}{3}$.

5) *щоб відняти два мішані дроби, треба від цілої частини відняти цілу частину, а від дробової – дробову.*

Наприклад, $8\frac{2}{5}-4\frac{4}{5}=4\frac{2-4}{5}=4-\frac{2}{5}=3\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=3\frac{3}{5}$.

6) *щоб відняти від мішаного дробу ціле число, треба від цілої частини мішаного дробу відняти ціле число, а дробову частину залишити без зміни.*

Наприклад, $7\frac{1}{8}-6=1\frac{1}{8}$.

7) *щоб відняти від цілого числа мішаний дріб, треба ціле число перетворити у мішаний дріб (ціла частина якого на 1 менша від заданого цілого числа, а дробова частина є дробом, чисельник і знаменник якого дорівнюють знаменнику звичайного дробу) і відняти.*

Наприклад, $8-4\frac{4}{5}=7\frac{5}{5}-4\frac{4}{5}=3\frac{1}{5}$.

8) *щоб відняти два скінченні десяткові дроби, треба відняти їх у «стовпчик» за правилом віднімання натуральних чисел, записавши коми десяткові одна під одною, і в одержаному результаті поставити десяткову кому на тому ж місці.*

Наприклад,

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} 3{,}5 \\ \underline{2{,}74} \end{array} \\
0{,}76
\end{array}
$$

9) *щоб відняти від скінченого десяткового дробу звичайний дріб чи мішаний дріб (або навпаки), треба десятковий дріб перетворити у звичайний дріб (або навпаки) і відняти за попередніми правилами.*

Наприклад,

$$7{,}5-5\frac{6}{7}=7\frac{^{7/}1}{2}-5\frac{^{2/}6}{7}=2\frac{7-12}{14}=2-\frac{5}{14}=1\frac{14}{14}-\frac{5}{14}=1\frac{9}{14};$$

$$7{,}5-5\frac{2}{5}=7{,}5-5{,}4=2{,}1.$$

3. правила множення

1) *щоб помножити два звичайні дроби, треба чисельник помножити на чисельник, а знаменник – на знаменник (скоротити отриманий дріб, якщо це можливо).*

Наприклад, $\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 2}{8\cdot 3}=\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{1}{12}$.

2) *щоб помножити ціле число на звичайний дріб (або навпаки), треба це число помножити на чисельник, а знаменник залишити без зміни.*

Наприклад, $8\cdot\frac{1}{3}=\frac{8\cdot 1}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}\cdot 3=\frac{1\cdot 3}{5}=\frac{3}{5}$.

3) *щоб помножити ціле число на мішаний дріб (або навпаки), треба мішаний дріб перетворити у неправильний дріб і помножити за правилом 2.*

Наприклад, $$3\cdot 3\frac{1}{9}=3\cdot\frac{28}{9}=\frac{3\cdot 28}{9}=\frac{1\cdot 28}{3}=\frac{28}{3}=9\frac{1}{3};$$

$$1\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{5}{3}\cdot 4=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}.$$

4) *щоб помножити два мішані дроби, треба перетворити їх у неправильні дроби і помножити їх за правилом 1.*

Наприклад, $$8\frac{1}{4}\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{33}{4}\cdot\frac{11}{3}=\frac{33\cdot 11}{4\cdot 3}=\frac{121}{4}=30\frac{1}{4}.$$

5) *щоб помножити мішаний дріб на звичайний дріб (або навпаки), треба мішаний дріб перетворити у неправильний дріб і помножити за правилом 1.*

Наприклад, $$2\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{12\cdot 3}{5\cdot 8}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 2}=\frac{9}{10};$$

$$\frac{1}{4}\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{3}=\frac{1\cdot 11}{4\cdot 3}=\frac{11}{12}.$$

6) *щоб помножити два скінченні десяткові дроби, треба помножити їх у «стовпчик» за правилом множення натуральних чисел і в одержаному результаті десятковою комою відділити справа наліво стільки цифр, скільки їх є разом після десяткової коми в обох співмножниках.*

Наприклад,

$$\begin{array}{r} \times\quad 3{,}5 \\ \underline{\quad 2{,}74} \\ 140 \\ +\ 245 \\ \underline{70} \\ 9{,}590 = 9{,}59 \end{array}$$

7) *щоб помножити скінченний десятковий дріб на звичайний дріб або мішаний дріб (чи навпаки), треба перетворити десятковий дріб у звичайний (чи навпаки) і помножити їх за попередніми правилами.*

Наприклад,

$$\frac{3}{5}\cdot 9{,}6=\frac{3}{5}\cdot 9\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\cdot\frac{48}{5}=\frac{3\cdot 48}{5\cdot 5}=\frac{144}{25}=5\frac{19}{25}; \qquad \frac{3}{5}\cdot 9{,}6=0{,}6\cdot 9{,}6=5{,}76.$$

8) *щоб помножити десятковий дріб на* 10^n*, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр вправо (дописавши в разі потреби до дробу справа потрібну кількість нулів).*

Наприклад, $1,47 \cdot 10\,000 = 14\,700$, $12,3 \cdot 100 = 1230$.

4. правила ділення

1) *щоб поділити два звичайні дроби, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого (скоротити, якщо це можливо).*

Наприклад, $$\frac{3}{5}:\frac{8}{9}=\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{8}=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 8}=\frac{27}{40}.$$

2) *щоб поділити ціле число на звичайний дріб, треба це ціле число помножити на дріб, обернений до даного дробу.*

Наприклад, $$9:\frac{3}{5}=9\cdot\frac{5}{3}=\frac{9\cdot 5}{3}=\frac{3\cdot 5}{1}=\frac{15}{1}=15.$$

3) *щоб поділити звичайний дріб на ціле число, треба цей дріб помножити на дріб, обернений до цього числа.*

Наприклад, $$\frac{1}{8}:2=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 1}{8\cdot 2}=\frac{1}{16}.$$

4) *щоб поділити два мішані дроби, треба перетворити їх у неправильні дроби і поділити їх за правилом 1.*

Наприклад, $$3\frac{1}{8}:3\frac{1}{2}=\frac{25}{8}:\frac{7}{2}=\frac{25}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{25\cdot 2}{8\cdot 7}=\frac{25\cdot 1}{4\cdot 7}=\frac{25}{28}.$$

5) *щоб поділити мішаний дріб на ціле число (або навпаки), треба перетворити мішаний дріб у неправильний дріб і поділити їх за правилом 2 або 3.*

Наприклад, $$5\frac{1}{2}:2=\frac{11}{2}:2=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4},\quad 2:5\frac{1}{2}=2:\frac{11}{2}=2\cdot\frac{2}{11}=\frac{4}{11}.$$

6) *щоб поділити мішаний дріб на звичайний дріб (або навпаки), треба перетворити мішаний дріб у неправильний дріб і поділити за правилом 1.*

Наприклад, $$3\frac{1}{2}:\frac{2}{5}=\frac{7}{2}:\frac{2}{5}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 2}=\frac{35}{4}=8\frac{3}{4};$$

$$\frac{4}{5}:3\frac{1}{2}=\frac{4}{5}:3\frac{1}{2}=\frac{4}{5}:\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{8}{35}.$$

7) *щоб поділити скінченний десятковий дріб на звичайний дріб чи на мішаний дріб (або навпаки), треба десятковий дріб перетворити у звичайний і поділити їх за попередніми правилами.*

$$\frac{4}{5}:3{,}5=\frac{4}{5}:3\frac{1}{2}=\frac{4}{5}:\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{8}{35}$$

$$3{,}5:2\frac{2}{5}=\frac{7}{2}:\frac{12}{5}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{12}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 12}=\frac{35}{24}=1\frac{11}{24}.$$

8) *щоб поділити два скінченні десяткові дроби, треба перетворити їх у звичайні дроби (якщо це можливо) і поділити їх за попередніми правилами.*

Наприклад, $3{,}5:2{,}4=3\frac{1}{2}:2\frac{2}{5}=\frac{7}{2}:\frac{12}{5}=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{12}=\frac{7\cdot 5}{2\cdot 12}=\frac{35}{24}=1\frac{11}{24}.$

9) *щоб поділити два скінченні десяткові дроби, треба поділити їх у «стовпчик» за правилом ділення натуральних чисел, посунувши кому десяткову у діленому і дільнику на стільки знаків, щоб дільник став натуральним числом, і в одержаному результаті десяткову кому ставити після ділення цілої частини.*

Наприклад,

$$\begin{array}{r|l} 2{,}576 & 1{,}12 \\ \hline 257{,}6 & 112 \\ \hline -224 & 2{,}3 \\ \hline -336 & \\ 336 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

10) *щоб поділити десятковий дріб на 10^n, треба в цьому дробі перенести десяткову кому на n цифр вліво (при цьому в разі потреби зліва дописують потрібну кількість нулів).*

Наприклад, *12,45 : 10 = 1,245;* *27,344 : 10000 = 0,0027344.*

При виконанні арифметичних дій з дробами часто використовують **правила перетворення звичайних дробів у десяткові**:

1) *Якщо знаменник дробу є степенем числа 10, то такий звичайний дріб записуємо у іншій формі – десятковим дробом.*

Наприклад, $\frac{3}{10}=0{,}3$; $\frac{48}{100}=0{,}48$; $\frac{21}{1000}=0{,}021$; $0{,}0043=\frac{43}{10000}$;

$0{,}275=\frac{275}{1000}=\frac{11}{40}$; $2\frac{3}{10}=2{,}3$; $\frac{317}{100}=3\frac{17}{100}=3{,}17$.

2) *Якщо знаменник дробу є дільником степеня числа 10, то треба на основі основної властивості дробу помножити чисельник і знаменник дробу на таке число, щоб знаменник дробу став степенем числа 10, а тоді отриманий звичайний дріб записуємо у іншій формі – десятковим дробом.*

Наприклад,

$$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=0{,}5 \qquad \frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=0{,}75$$

$$\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25 \qquad \frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}=0{,}6$$

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0{,}2 \qquad \frac{4}{5}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{8}{10}=0{,}8$$

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=0{,}4 \qquad \frac{1}{8}=\frac{1\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{125}{1000}=0{,}125$$

3) *У загальному випадку, щоб записати звичайний дріб у вигляді десяткового дробу, треба поділити у «стовпчик» його чисельник на знаменник. При цьому можна отримати як скінченний, так і нескінченний десятковий дріб. Таке перетворення є результативним, якщо отримаємо скінченний десятковий дріб, бо можна виконувати з ним наступні дії. У іншому випадку виконуємо дії над звичайними дробами.*

Наприклад, звичайний дріб $\frac{23}{80}$ після виконання дії ділення числа *23* на число *80* утворюється частка у вигляді скінченного десяткового дробу *0,2875*.

Отже, $\frac{23}{80}=0{,}2875$.

Однак інший звичайний дріб $\frac{15}{22}$ після виконання дії ділення числа *15* на число *22* перетворюється на нескінченний десятковий періодичний дріб *0,68181… = 0,6(81),* а виконувати з ним дії неможливо, тому таке перетворення є не результативним для подальших обчислень, тобто для виконання дій дріб $\frac{15}{22}$ не треба перетворювати у десятковий.

Якщо до десяткового дробу дописати справа нуль або декілька нулів, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад, *7,234 = 7,2340 = 7,23400* і т.д.

Якщо десятковий дріб закінчується одним або декількома нулями, то ці нулі можна відкинути і отримаємо рівний йому дріб.

Наприклад, *18,1428000 = 18,1428;*

0,000005000=0,000005;

2,12=2,12000.

III. Ірраціональні числа є нескінченними десятковими неперіодичними дробами.

Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{11}$, π *= 3,14159..., e = 2,7182818284590...* і т.д.

Над ірраціональними числами можна виконувати різні дії: додавати, віднімати, множити, ділити (на дільник, відмінний від 0), підносити до степеня і добувати корінь певного степеня.

При цьому треба використовувати теоретичні відомості зі шкільного курсу алгебри про:

1. **властивості арифметичного кореня** при $a \geq 0$ **і** $b \geq 0$**:**

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k},$$
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0,$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a},$$
$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}$$

2. **властивості степеня** при $a \geq 0$ **і** $b \geq 0$**:**

$$a^1 = a,$$
$$a^0 = 1,$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$
$$a^n : a^m = a^{n-m},$$
$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m},$$
$$a^n \cdot b^n = \left(a \cdot b\right)^n,$$
$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0,$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

На основі цих формул виконують деякі **способи перетворення ірраціональних виразів:**

1) *винесення множника за знак кореня:*

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

2) *внесення множника під знак кореня:*

$$0{,}3\sqrt{10} = \sqrt{0{,}09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0{,}09 \cdot 10} = \sqrt{0{,}9}.$$

3) *звільнення дробу від ірраціональності у знаменнику*

Якщо ірраціональне число міститься у знаменнику дробу, то можна звільнитися від ірраціональності у знаменнику, тобто такий дріб можна замінити тотожним йому дробом, знаменник якого вже не містить ірраціональності. Для цього досить помножити чисельник і знаменник дробу на одне і те ж відповідно підібране число чи вираз. При цьому використовується основна властивість дробу і формули скороченого множення. Наприклад,

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1} = \frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2})^3+1^3} = \frac{3(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{2+1} = \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1.$$

Для обчислення значень числових виразів **раціональним (зручним) способом** використовують закони дій додавання та множення, властивості різниці та частки чисел.

1. **Закони додавання та множення:**
   1) $a + b = b + a;$
   2) $(a + b) + c = a + (b + c);$
   3) $a + 0 = a;$
   4) $a + (-a) = 0;$
   5) $a \cdot b = b \cdot a;$
   6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
   7) $a \cdot 1 = a;$
   8) $a \cdot \frac{1}{a} = 1,\ a \neq 0;$
   9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$
2. **Властивості різниці чисел:**
   1) $a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c;$
   2) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d);$
   3) $(a - b) - (c - d) = (a + d) - (b + c);$

4) $(a - b) \cdot (c - d) = (a \cdot c + b \cdot d) - (a \cdot d + b \cdot c)$;

5) $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b$;

6) $(a + b) - c = (a - c) + b = (b - c) + a$;

7) $a + (b - c) = (a + b) - c = (a - c) + b$;

8) $(a - b) + c = (a + c) - b$;

9) $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$;

10) $a - (b - c) = (a + c) - b = (a - b) + c$;

11) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$;

12) *якщо* $b < c$, *то* $a - b > a - c$.

3. Властивості частки чисел:

1) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$;

2) $(a : b) : c = a : (b \cdot c) = (a : c) : b$;

3) $a : (b : c) = (a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$;

4) $(a : b) : c = a : (b \cdot c) = (a : c) : b$;

5) $(a \cdot b) : (c \cdot b) = a : c$;

6) $(a : c) : (b : c) = a : b$;

7) $(a : b) \cdot (c : d) = (a \cdot c) : (b \cdot d)$;

8) $(a : b) : (c : d) = (a \cdot d) : (b \cdot c)$;

9) $(a - b) : c = a : c - b : c$;

10) $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Наприклад,

$17 + 19 + 13 + 21 = 17 + 13 + 19 + 21 = (17 + 13) + (19 + 21) = 30 + 40 = 70$;

$(32 + 48) + 52 = 32 + (48 + 52) = 32 + 100 = 132$;

$11 + (123 + 89) = (11 + 89) + 123 = 100 + 123 = 223$.

$4 \cdot 67 \cdot 25 = 67 \cdot 4 \cdot 25 = 67 \cdot (4 \cdot 25) = 67 \cdot 100 = 6\,700$;

$5 \cdot 456 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 456 = (5 \cdot 2) \cdot 456 = 10 \cdot 456 = 4\,560$;

$36 \cdot 48 + 14 \cdot 48 = (36 + 14) \cdot 48 = 50 \cdot 48 = 50 \cdot (24 \cdot 2) = (50 \cdot 2) \cdot 24 =$

$= 100 \cdot 24 = 2\,400$.

$(1\ 096 + 839) - 1\ 835 = (1\ 096 + 839) - (1\ 000 + 835) =$

$= (1\ 096 - 1\ 000) + (839 - 835) = 96 + 4 = 100;$

$3\ 997 - 799 = 3\ 997 - (800 - 1) = (3\ 997 - 800) + 1 = 3\ 197 + 1 = 3\ 198;$

$78 \cdot 62 - 67 \cdot 62 = (78 - 67) \cdot 62 = 11 \cdot 62 = (10 + 1) \cdot 62 = 10 \cdot 62 + 1 \cdot 62 =$

$= 620 + 62 = 682.$

$(36 + 66) : 6 = 36 : 6 + 66 : 6 = 6 + 11 = 17;$

$72 : 4 = (80 - 8) : 4 = 80 : 4 - 8 : 4 = 20 - 2 = 18;$

$78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 60 : 3 + 18 : 3 = 20 + 6 = 26;$

$(37 \cdot 36) : 12 = 37 \cdot (36 : 12) = 37 \cdot 3 = 111;$

$(10 \cdot 37) : 5 = (10 : 5) \cdot 37 = 2 \cdot 37 = 74;$

$(290 : 5) : 29 = (290 : 29) : 5 = 10 : 5 = 2;$

$(75 - 5 \cdot 15) : (39 + 11 \cdot 39\ 991) = 0 : (39 + 11 \cdot 39\ 991) = 0.$

Усі ці теоретичні відомості про числові вирази різних видів та знаходження їх значень застосовуються під час **розв’язання прикладів**:

Приклад 1. *Сформулювати словесно числовий вираз* $48 : 3 - (6 + 3)$ *та знайти його значення.*

Розв’язання. Числовий вираз можна словесно сформулювати так: «різниця частки чисел *48* і *3* та суми чисел *6* і *3*»

$48 : 3 - (6 + 3) = 16 - 9 = 7.$

Значення числового виразу дорівнює *7*.

Відповідь: 7.

Приклад 2. *Знайти значення виразу* $(-18 + 23 - 16 + 9) \cdot (-18)$.

Розв’язання. $(-18 + 23 - 16 + 9) \cdot (-18) = ((-18 - 16) + (23 + 9)) \cdot (-18) = (-34 + 32) \cdot (-18) = -2 \cdot (-18) = 36.$

Відповідь: 36.

Приклад 3. *Знайти суму усіх цілих чисел від – 8 до 10 включно.*

Розв'язання. Серед цілих чисел від *– 8* до *10* є пари протилежних чисел, а їх сума як відомо дорівнює *0*. Залишились без пари числа *0, 9, 10,* а їх сума дорівнює *0 + 9 + 10 = 19,* тобто

$-8 + (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (-8 + 8) + (-7 + 7) + (-6 + 6) + (-5 + 5) + (-4 + 4) + (-3 + 3) + (-2 + 2) + (-1 + 1) + 0 + 9 + 10 = 9 + 10 = 19.$

Відповідь: 19.

Приклад 4. *Яким є знак добутку 27 додатних і 32 від'ємних чисел?*

Розв'язання. *32* від'ємні числа у добутку утворять додатне число, бо їх кількість є парною. Добуток довільної кількості додатних чисел є числом додатним. Отже, добуток додатних чисел є числом додатним.

Відповідь: знак «+».

Приклад 5. *Знайти добуток усіх цілих чисел від – 7 до 12.*

Розв'язання. Оскільки серед цілих чисел від *– 7* до *12* є число *0*, то їх добуток дорівнює *0*.

Відповідь: 0.

Приклад 6. *Додати дроби* $\frac{7}{24}$ *і* $\frac{11}{30}$.

Розв'язання. $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}=\frac{7^{/5}}{24}+\frac{11^{/4}}{30}=\frac{35}{120}+\frac{44}{120}=\frac{35+44}{120}=\frac{79}{120}.$

Відповідь: $\frac{79}{120}$.

Приклад 7. *Відняти дроби* $\frac{11}{30}$ *і* $\frac{7}{24}$.

Розв'язання. $\frac{11}{30}-\frac{7}{24}=\frac{11^{/4}}{30}-\frac{7^{/5}}{24}=\frac{44}{120}-\frac{35}{120}=\frac{44-35}{120}=\frac{9}{120}=\frac{3}{40}.$

Відповідь: $\frac{3}{40}$.

Приклад 8. *Помножити дроби* $\frac{3}{7}$ *і* $\frac{2}{11}$.

Розв'язання. $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

Відповідь: $\frac{6}{77}$.

Приклад 9. *Поділити дроби* $\frac{2}{3}$ *і* $\frac{7}{10}$*;* *2,8 і 0,09.*

Розв'язання. $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}$.

2,8 : 0,09 = $2\frac{8}{10}:\frac{9}{100}=\frac{28}{10}:\frac{9}{100}=\frac{28}{10}\cdot\frac{100}{9}=\frac{28\cdot 100}{10\cdot 9}=\frac{28\cdot 10}{9}=\frac{280}{9}=31\frac{1}{9}$.

Відповідь: $\frac{20}{21}$, 31 $\frac{1}{9}$.

Приклад 10. *Знайти значення числового виразу* $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}+\frac{7}{8}:\frac{5}{6}-\frac{11}{30}$.

Розв'язання.

1). $\frac{4}{9}\cdot\frac{12}{5}=\frac{4\cdot 12}{9\cdot 5}=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}$.

2). $\frac{7}{8}:\frac{5}{6}=\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{5}=\frac{7\cdot 6}{8\cdot 5}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}$.

3). $\frac{16}{15}+\frac{21}{20}-\frac{11}{30}=\frac{16^{\backslash 4}}{15}+\frac{21^{\backslash 3}}{20}-\frac{11^{\backslash 2}}{30}=\frac{64}{60}+\frac{63}{60}-\frac{22}{60}=\frac{64+63-22}{60}=\frac{105}{60}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$.

Відповідь: $1\frac{3}{4}$.

Приклад 11. *Знайти значення виразу* $1-\frac{4{,}6\cdot\frac{15}{23}:\frac{3}{7}}{9\frac{4}{5}:1{,}4}$.

Розв’язання.

$$1)\, 4{,}6\cdot\frac{15}{23}=4\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{23}=\frac{23}{5}\cdot\frac{15}{23}=\frac{23\cdot 15}{5\cdot 23}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 1}=3;$$

$$2)\, 3:\frac{3}{7}=3\cdot\frac{7}{3}=\frac{3\cdot 7}{3}=7;$$

$$3)\, 9\frac{4}{5}:1{,}4=9\frac{4}{5}:1\frac{2}{5}=\frac{49}{5}:\frac{7}{5}=\frac{49}{5}\cdot\frac{5}{7}=\frac{49\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{7\cdot 1}{1\cdot 1}=7;$$

$$4)\, 7:7=1;$$

$$5)\, 1-1=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 12. *Знайти значення виразу:*

2,4 : (4,35 : (10,021 – (0,14 · 1,05 + 0,013) – 4,061)) + 6,8.

Розв’язання.

1)
$$\begin{array}{r} \times\ 0{,}14 \\ 1{,}05 \\ \hline 70 \\ 14\ \ \\ \hline 0{,}1470 \end{array} = 0{,}147$$

2)
$$\begin{array}{r} +\ 0{,}147 \\ 0{,}013 \\ \hline 0{,}160 \end{array} = 0{,}16$$

3)
$$\begin{array}{r} -\ 10{,}021 \\ 0{,}16 \\ \hline 9{,}861 \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r} -\ 9{,}861 \\ 4{,}061 \\ \hline 5{,}800 \end{array} = 5{,}8$$

5) $4{,}35 : 5{,}8$
$$\begin{array}{r|l} -\ 43{,}5 & 58 \\ \cline{2-2} 406\ & 0{,}75 \\ \cline{1-1} -\ 290 & \\ 290 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

6) $2{,}4 : 0{,}75$
$$\begin{array}{r|l} -\ 240 & 75 \\ \cline{2-2} 225 & 3{,}2 \\ \cline{1-1} -\ 150 & \\ 150 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

7) 3,2 + 6,8 = 10,0 =10.

Відповідь: 10.

Приклад 13. *Знайти значення виразу* $\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6}$.

Розв’язання.

$$\left(2\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{2}+\left(5\sqrt{2}\right)^2-20\sqrt{6} =$$

$$=12+20\sqrt{6}+50-20\sqrt{6}=62.$$

Відповідь: 62.

Приклад 14. *Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу* $\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз до знаменника – ним є вираз, який складений з тих же чисел, а знак «–» змінений на знак «+»:

$$\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{8(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=4(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

Відповідь: $4\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

Приклад 15. *Обчислити значення виразу*

$$(6{,}25)^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^{0}.$$

Розв'язання.

$$(6{,}25)^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}-(-4)^{-1}\cdot(0{,}343)^{0}=\sqrt{\frac{25}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{16}}-\frac{1}{-4}\cdot 1=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=1{,}5.$$

Відповідь: 1,5.

Приклад 16. *Обчислити значення виразу, використовуючи закони та властивості арифметичних дій:*

127 + 18 + 73;   77 · 88 + 77 · 12;   65 438 – (5880 + 438);   (48 · 23) : 24.

Розв'язання.

127 + 18 + 73 = 127 + 73 + 18 = (127 + 73) + 18 = 200 + 18 = 218;

77 · 88 + 77 · 12 = 77 · (88 + 12) = 77 · 100 = 7 700;

65 438 – (5880+ 438) = (65 438 – 438) –5 800 = 65 000 – 5 800 = 59 200;

(48 · 23) : 24 = (48 : 24) · 23 = 2 · 23 = 46.

Відповідь: 218;   7700;   59200;   46.

1.2. Числова рівність

Означення. *Два числові вирази, з'єднані знаком «=», називаються* ***числовою рівністю****.*

Наприклад, $87 - (12 + 3^3) = 68 : 4 + 8{,}7.$

Числові рівності можуть бути **правильними (істинними) та неправильними (хибними).** З точки зору математичної логіки вони є висловлюваннями, які, як відомо, можуть бути як істинними (числова рівність правильна), так і хибними (числова рівність неправильна).

Щоб встановити правильність числової рівності, треба порівняти значення числових виразів лівої та правої частин числової рівності. Це може бути порівняння двох чисел, числа та значення числового виразу, порівняння значень двох числових виразів. Якщо вони є рівними, то числова рівність є правильною; якщо вони не є рівними, то числова рівність є неправильною.

Наприклад, числова рівність $34 + 12 \cdot 3 = 70$ є правильною, бо $70 = 70$; числова рівність $34 + 12 \cdot 3 = 50 \cdot 2$ є неправильною, бо $70 \neq 100$.

Розглянемо **властивості числових рівностей:**

$\forall a, b, c \in R$

1) Якщо $a = b$ *і* $b = c$, то $a = c$.

2) Якщо $a = b$ *і* $c = d$, то $a + c = b + d$.

3) Якщо $a = b$ *і* $c = d$, то $a \cdot c = b \cdot d$.

4) Якщо $a = b$, то $a + c = b + c$.

5) Якщо $a + c = b + c$, то $a = b$.

6) Якщо $a = b$ *і* $c \neq 0$, то $a \cdot c = b \cdot c$.

7) Якщо $a \cdot c = b \cdot c$ *і* $c \neq 0$, то $a = b$.

Доведення цих властивостей числових рівностей полягає у виконанні нескладних міркувань. Наприклад, доведемо властивість 2):

Нехай $a = b$, $c = d$. Доведемо, що $a + c = b + d$.

З того, що $a = b$, $c = d$ маємо: $a - b = 0$, $c - d = 0$.

Тоді $a - b + c - d = 0 \Rightarrow a + c - (b + d) = 0$.

Це означає, що $a + c = b + d$. Отже, властивість доведено.

1.3. Числова нерівність

Означення. *Два числові вирази, з'єднані знаками «>», «<», «≥», «≤», називаються* ***числовою нерівністю****.*

Наприклад, $87 - (12 + 3^3) > 68 : 4 + 8{,}7$.

Числові нерівності можуть бути **правильними (істинними) та неправильними (хибними).** З точки зору математичної логіки вони є висловлюваннями, які, як відомо, можуть бути як істинними (числова нерівність правильна), так і хибними (числова нерівність неправильна).

Щоб встановити правильність числової нерівності, треба знайти значення числових виразів лівої та правої частин числової нерівності і перевірити, чи вони пов'язані вказаним знаком нерівності. Якщо вони пов'язані цим знаком, то числова нерівність є правильною; якщо вони не пов'язані цим знаком, то числова нерівність є неправильною.

Наприклад,

числова нерівність $34 + 12 \cdot 3 < 80$ є правильною, бо $70 < 80$;

числова нерівність $34 + 12 \cdot 3 > 50 \cdot 2$ є неправильною, бо число 70 не є більше числа 100.

Розглянемо **властивості числових нерівностей:**

$\forall a, b, c, d \in R$

1) Якщо $a > b$, то $b < a$.

2) Якщо $a > b$ *і* $b > c$, то $a > c$.

3) Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$.

4) Якщо $a + c > b + c$, то $a > b$.

5) Якщо $a > b$ *і* $c > 0$, то $a \cdot c > b \cdot c$.

6) Якщо $a \cdot c > b \cdot c$ *і* $c > 0$, то $a > b$.

7) Якщо $a > b$ *і* $c < 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$.

8) Якщо $a \cdot c < b \cdot c$ *і* $c < 0$, то $a > b$.

9) Якщо $a > b$ *і* $c > d$, то $a + c > b + d$.

10) Якщо для $a, b, c, d > 0$, $a > b$ *і* $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$.

11) Якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

12) Якщо $a > b > 0$, то $(\forall n \in N)$ $a^n > b^n$.

Доведення цих властивостей числових нерівностей полягає у виконанні нескладних міркувань, причому треба врахувати, що:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0; \qquad a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$$

Наприклад, доведемо властивість 5):

Нехай $a > b$ *і* $c < 0$. Доведемо, що $a \cdot c > b \cdot c$.

Якщо $a > b$, то $a - b > 0$.

Знайдемо $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$. Оскільки $a > b$ і $c < 0$ за умовою, то $(a - b) \cdot c < 0$, а тому $a \cdot c - b \cdot c < 0$, тобто ми отримали, що $a \cdot c < b \cdot c$.

Отже, властивість доведено.

Приклад. *Між двома числовими виразами*

$$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 \quad і \quad 543 - (543 - 1)$$

поставити всі можливі знаки та перевірити істинність отриманих висловлювань.

Розв'язання. Спершу знайдемо значення заданих числових виразів:

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 = (86 - 0) : 43 : 2 = 86 : 43 : 2 = 2 : 2 = 1,$

$543 - (543 - 1) = 543 - 542 = 1.$

Між цими двома числовими виразами поставимо усі можливі знаки «=»,«>», «<», «≥», «≤» та перевіримо істинність утворених висловлювань (однієї числової рівності та чотирьох числових нерівностей):

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 = 543 - (543 - 1)$ – істинна числова рівність, бо $1 = 1$.

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 > 543 - (543 - 1)$ – хибна числова нерівність, бо хибно, що $1 > 1$.

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 < 543 - (543 - 1)$ – хибна числова нерівність, бо хибно, що $1 < 1$.

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 \geq 543 - (543 - 1)$ – істинна числова нерівність, бо $1 \geq 1$.

$(86 - 0 : 12) : 43 : 2 \leq 543 - (543 - 1)$ – істинна числова нерівність, бо $1 \leq 1$.

1.4. Буквені вирази та їх види

Означення. ***Буквеним виразом (алгебраїчним виразом)*** *називається запис, який складений з чисел та змінних, які з'єднані між собою знаками дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня і т.д.) та дужками, які визначають порядок виконання дій.*

У буквеному виразі змінні позначаються малими буквами латинського алфавіту.

Розрізняють **види буквених виразів** залежно від зазначених у ньому дій:

1) якщо буквений вираз не містить ділення на змінну і добування кореня зі змінної, то він називається **цілим виразом.**

   Наприклад, $8c$; $4 + 5a$; $3x - 4(y + 5)$; $-10x^2 + 2y$.

2) Якщо буквений вираз містить ділення на змінну, то він називається **дробовим виразом.**

   Наприклад, $\frac{3}{5x}$; $\frac{4}{y^2-9}$.

3) Цілі та дробові вирази називаються **раціональними виразами.**

   Наприклад, $7xy+\frac{2}{y-x}$.

4) Якщо буквений вираз містить добування кореня зі змінної, то він називається **ірраціональним виразом.**

   Наприклад, $\sqrt{a}-4$; $\sqrt{x^2-6y+9}$.

У початкових класах ознайомлюються з буквеними виразами під час розв'язування вправ «з віконечками», які є прототипами змінних.

За кількістю змінних розрізняють буквені вирази з однією та кількома змінними.

1.5. Вирази з однією змінною

Означення 1. ***Виразом з однією змінною*** *називається буквений вираз, складений з чисел і однієї змінної, які з'єднані між собою знаками дій та дужками, які визначають порядок виконання дій.*

Наприклад, $5x - 8{,}2$; y^2; $\cdot 4\,(x^2 - 15)$; $8\sqrt{a} - 2$.

Означення 2. *Значення змінної, при яких вираз зі змінною має зміст, тобто зазначені дії у ньому можна виконати, називається* ***допустимим значенням змінної,*** *а їх сукупність –* ***областю допустимих значень (ОДЗ) або областю визначення (ОВ) виразу.***

Цілий вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної, які до нього входить, тобто усі зазначені дії у ньому можна виконати, тому його областю визначення є множина всіх дійсних чисел.

Областю визначення **дробового виразу** є всі ті значення змінної, при яких знаменники не перетворюються в *0* (бо ділити на нуль не можна).

Областю визначення **ірраціонального виразу з непарним показником кореня** є всі дійсні значення змінної.

Областю визначення **ірраціонального виразу з парним показником кореня** є всі ті значення змінної, при яких підкореневий вираз набуває невід'ємних значень, тобто додатних значень або нуля.

Означення 3. *Якщо у виразі зі змінною надати їй певного значення, то отримаємо число, яке називається* ***значенням буквеного виразу для певного значення змінної.***

Якщо у буквеному виразі змінній надавати кількох різних значень, то один і той же буквений вираз набуває різних числових значень.

Наприклад, у таблиці наведено значення буквеного виразу $5x - 3$ для значень змінної $2, 5, 0, -1, -3$. Для того щоб їх знайти, треба підставити їх у буквений вираз і обчислити:

x	2	5	0	-1	-3
$5x-3$	7	22	-3	-8	-18

Розглянемо два вирази з однією змінною: $f(x) = x^2 - 1$ та $g(x) = 3x - 3$. Знайдемо їх значення при $x = -1$ і при $x = 2$:

$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0;$ $g(-1) = 3 \cdot (-1) - 3 = -3 - 3 = -6,$

$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$ $g(2) = 3 \cdot 2 - 3 = 6 - 3 = 3.$

Як бачимо, значення двох виразів при одних значеннях змінної можуть бути рівними, а при інших – ні.

Означення 4. *Якщо відповідні значення двох виразів, які містять одну і ту ж змінну, збігаються при будь-яких допустимих значеннях змінної, то такі вирази називаються* ***тотожно рівними.***

Наприклад, вирази $f(x) = 2x - 4$ і $g(x) = 2\,(x - 2)$ є тотожно рівними; вирази $f(x) = x^2 - 1$ та $g(x) = 3x - 3$ не є тотожно рівними.

Означення 5. ***Тотожністю*** *називається рівність двох виразів зі змінною, яка істинна при всіх допустимих значеннях змінної, що входить до них.*

Наприклад, рівності $a \cdot 1 = a;$ $a : a = 1,$ $a \cdot 0 = 0$ є тотожностями.

Означення 6. *Заміна одного буквеного виразу іншим, тотожно рівним йому на заданій множині, називається* ***тотожним перетворенням виразу.***

При тотожних перетвореннях виразів зі змінною широко використовують **формули скороченого множення:**

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – різниця квадратів;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат різниці;

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суми;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – різниця кубів;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сума кубів;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб різниці;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суми.

Заміна буквеного виразу простішим виразом, тотожно рівним йому, називається **спрощенням виразу на основі тотожних перетворень**.

I. Під час спрощення **цілих виразів зі змінною** використовують такі тотожні перетворення:

1. зведення подібних доданків:

суму подібних членів замінити одним членом, додавши їхні коефіцієнти і залишивши ту саму буквену частину:

$$2a^3 + a^2 - 17 - 3a^2 + a^3 - a - 80 = 3a^3 - 2a^2 - a - 97.$$

2. ***розкриття дужок:***

– якщо перед дужками стоїть знак «+», то дужки можна опустити, зберігши знак кожного доданка, взятого в дужки, і звести подібні доданки:

$$(5x^2 + 7x - 9) + (-3x^2 - 6x + 8) = 5x^2 + 7x - 9 - 3x^2 - 6x + 8 = 2x^2 + x - 1.$$

– якщо перед дужками стоїть знак «–», то дужки можна опустити, змінивши знак кожного доданка у дужках на протилежний, і звести подібні доданки:

$$(x^3 + 5x^2 - x + 8) - (x^3 - 7x - 1) = x^3 + 5x^2 - x + 8 - x^3 + 7x + 1 = 5x^2 + 6x + 9.$$

3. множення одночлена на многочлен:

щоб помножити одночлен на многочлен, треба цей одночлен помножити на кожен член многочлена:

$$-3a^2 \cdot (4a^3 - a + 1) = -12a^5 + 3a^3 - 3a^2.$$

4. множення многочленів:

кожний член одного многочленна треба помножити на кожний член другого многочлена і звести подібні доданки:

$$(4x^2 + 2x - 3)(2x - 4) = 8x^3 - 16x^2 + 4x^2 - 8x - 6x + 12 = 8x^3 - 12x^2 - 14x + 12.$$

***5. використання формул скороченого множення*:**

$(x-4)^2 + (x-3)(x+3) = x^2 - 8x + 16 + x^2 - 9 = 2x^2 - 8x + 7.$

6. розклад квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ ***на множники*:**

$$ax^2+bx+c=\begin{cases} a(x-x_1)(x-x_2),\ \textit{якщо}\ D>0, \\ a(x-x_1)^2,\ \textit{якщо}\ D=0, \\ \textit{не розкладається на множники},\ \textit{якщо}\ D<0 \end{cases}$$

де $D = b^2 - 4ac$ – **дискримінант**,

x_1 та x_2 – розв'язки відповідного квадратного рівняння

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Наприклад,

а) $x^2 - 11x + 30 = (x-6)(x-5)$,

бо $D = 121 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 1 > 0$.

$$x_1 = \frac{11+\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{12}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{11-\sqrt{1}}{2\cdot 1} = \frac{10}{2} = 5.$$

б) $2x^2 + 5x - 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x+3) = (2x-1)(x+3)$,

бо $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$.

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \qquad x_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3.$$

в) $6x^2 - 13x + 6 = 6(x - \frac{3}{2})(x - \frac{2}{3}) = 2(x - \frac{3}{2})3(x - \frac{2}{3}) = (2x-3)(3x-2)$,

бо $D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25 > 0$.

$$x_1 = \frac{13+\sqrt{25}}{2\cdot 6} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}; \qquad x_2 = \frac{13-\sqrt{25}}{2\cdot 6} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

г) $16x^2 - 8x + 1 = 16\,(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4}) = (4x - 1)^2$,

бо $D = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 0$,

$$x = \frac{1}{4}.$$

д) Квадратний тричлен $x^2 - x + 30$ на множники не розкладається, бо $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = -119 < 0$.

Якщо для квадратного тричлена $D < 0$, то для всіх значень змінної x він набуває або лише додатних значень, або лише від'ємних значень. Це залежить від знаку коефіцієнта a.

Наприклад, оскільки для квадратного тричлена $x^2 - x + 30$ дискримінант $D = -119 < 0$, то для довільного значення x він набуває лише додатних значень, бо коефіцієнт $a = 1 > 0$, тобто для всіх x

$$x^2 - x + 30 > 0.$$

II. Під час спрощення **дробових виразів зі змінною** використовують такі тотожні перетворення:

1. скорочення дробових виразів зі змінною:

1) розкласти на множники чисельник і знаменник дробового виразу;

2) скоротити утворений дробовий вираз на спільний множник.

Наприклад, $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \dfrac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} = \dfrac{x+4}{x}$.

2. додавання і віднімання дробових виразів зі змінною:

1) розкласти на множники знаменники дробових виразів;

2) виконати додавання чи віднімання цих дробових виразів, звівши їх до спільного знаменника;

3) спростити вираз у чисельнику утвореного дробового виразу;

4) скоротити по можливості утворений дробовий вираз.

Наприклад,

$$\frac{9a}{a^2-16}-\frac{a+4}{a^2-4a}=\frac{9a}{(a-4)(a+4)}-\frac{a+4}{a(a-4)}=\frac{9a^2-(a+4)^2}{a(a-4)(a+4)}=\frac{9a^2-(a^2+8a+16)}{a(a-4)(a+4)}=$$

$$=\frac{9a^2-a^2-8a-16}{a(a-4)(a+4)}=\frac{8a^2-8a-16}{a(a-4)(a+4)}=\frac{8(a^2-a-2)}{a(a-4)(a+4)}=\frac{8(a-2)(a+1)}{a(a-4)(a+4)}.$$

3. множення дробових виразів зі змінною:

1) розкласти на множники чисельники і знаменники дробових виразів;

2) виконати множення даних дробів, помноживши чисельник на чисельник, знаменник на знаменник;

3) скоротити по можливості утворений дробовий вираз.

Наприклад,

$$\frac{x^2-10x+25}{3x+12}\cdot\frac{x^2-16}{2x-10}=\frac{(x-5)^2}{3(x+4)}\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-5)}=\frac{(x-5)^2(x-4)(x+4)}{3(x+4)2(x-5)}=\frac{(x-5)\cdot(x-4)}{6}.$$

4. ділення дробових виразів зі змінною:

1) розкласти на множники чисельники та знаменники дробових виразів;

2) виконати ділення цих дробових виразів, помноживши перший дріб на дріб, обернений до другого;

3) скоротити по можливості утворений дробовий вираз.

Наприклад,

$$\frac{x^2-16}{4x-12}:\frac{x^2+3x-4}{x-3}=\frac{(x-4)(x+4)}{4(x-3)}:\frac{(x-1)(x+4)}{x-3}=\frac{(x-4)(x+4)}{4(x-3)}\cdot\frac{x-3}{(x-1)(x+4)}=$$

$$=\frac{(x-4)(x+4)(x-3)}{4(x-3)(x-1)(x+4)}=\frac{x-4}{4(x-1)}.$$

ІІІ. Під час спрощення **ірраціональних виразів зі змінною** використовують тотожні перетворення на основі властивостей степенів та арифметичних коренів (радикалів):

Наприклад,

$$\sqrt[4]{x^2\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^6\cdot x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^7}}=\sqrt[12]{x^7}=x^{\frac{7}{12}}.$$

Усі ці теоретичні відомості про буквені вирази з однією змінною різних видів та їх спрощення застосовуються під час **розв'язання прикладів**:

Приклад 1. *Знайти область визначення виразу з однією змінною:*

а) $45x^3 + 3{,}8;$

б) $\frac{4}{y^2 - 9};$

в) $\sqrt{x-4}.$

Розв'язання.

а) Оскільки вираз $45x^3 + 3{,}8$ є цілим, то його областю визначення є множина всіх дійсних чисел. Отже, $x \in R$.

б) Оскільки вираз $\frac{4}{y^2 - 9}$ є дробовим, то він існує при тих значеннях змінної y, які не перетворюють знаменник $y^2 - 9$ в 0, тобто:

$$y^2 - 9 \neq 0,$$

$$(y - 3)(y + 3) \neq 0,$$

$$y \neq 3 \quad і \quad y \neq -3.$$

Отже, $y \in (-\infty; -3) \bigcup (-3; 3) \bigcup (3; +\infty).$

в) Оскільки вираз $\sqrt{x-4}$ є ірраціональним, то він існує при тих значеннях змінної x, які задовольняють нерівність:

$$x - 4 \geq 0,$$

$$x \geq 4.$$

Отже, $x \in [4; +\infty).$

Приклад 2. *Спростити вираз* $(x - 2)(x - 8) + (2x + 5)^2 - 6(x + 4).$

Розв'язання.

$(x - 2)(x - 8) + (2x + 5)^2 - 6(x + 4) =$

$x^2 - 8x - 2x + 16 + 4x^2 + 20x + 25 - 6x - 24 =$

$= 5x^2 + 4x + 17.$

Приклад 3. *Розкласти на множники вираз* $25 - x^2$.

Розв'язання.

За формулою різниці квадратів маємо:

$$25 - x^2 = 5^2 - x^2 = (5 - x)(5 + x).$$

Приклад 4. *Розкласти на множники вираз* $y^3 - 27$.

Розв'язання.

За формулою різниці кубів маємо:

$$y^3 - 27 = y^3 - 3^3 = (y - 3)(y^2 + 3y + 9).$$

Приклад 5. *Спростити вираз* $\dfrac{a-5}{6-3a} + \dfrac{4(a+1)}{a^2+4a} : \left(\dfrac{9a}{a^2-16} - \dfrac{a+4}{a^2-4a}\right)$.

Розв'язання.

$$1)\ \frac{9a}{a^2-16} - \frac{a+4}{a^2-4a} = \frac{9a}{(a-4)(a+4)} - \frac{a+4}{a(a-4)} = \frac{9a^2-(a+4)^2}{a(a-4)(a+4)} = \frac{9a^2-(a^2+8a+16)}{a(a-4)(a+4)} =$$

$$= \frac{9a^2-a^2-8a-16}{a(a-4)(a+4)} = \frac{8a^2-8a-16}{a(a-4)(a+4)} = \frac{8(a^2-a-2)}{a(a-4)(a+4)} = \frac{8(a-2)(a+1)}{a(a-4)(a+4)};$$

$$2)\ \frac{4(a+1)}{a^2+4a} : \frac{8(a-2)(a+1)}{a(a-4)(a+4)} = \frac{4(a+1)}{a(a+4)} : \frac{8(a-2)(a+1)}{a(a-4)(a+4)} = \frac{4(a+1)}{a(a+4)} \cdot \frac{a(a-4)(a+4)}{8(a-2)(a+1)} =$$

$$= \frac{4(a+1)a(a-4)(a+4)}{a(a+4)8(a-2)(a+1)} = \frac{a-4}{2(a-2)};$$

$$3)\ \frac{a-5}{6-3a} + \frac{a-4}{2(a-2)} = \frac{a-5}{3(2-a)} + \frac{a-4}{2(a-2)} = \frac{a-5}{3(2-a)} - \frac{a-4}{2(2-a)} = \frac{2(a-5)-3(a-4)}{6(2-a)} =$$

$$= \frac{2a-10-3a+12}{6(2-a)} = \frac{-a+2}{6(2-a)} = \frac{2-a}{6(2-a)} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 6. *Спростити вираз:* $\dfrac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{0,5}+1} : \dfrac{\boldsymbol{x}^{0,5}+1}{\boldsymbol{x}^{1,5}-1} + \dfrac{2}{\boldsymbol{x}^{-0,5}}$.

Розв'язання.

$$\frac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{0,5}+1} : \frac{\boldsymbol{x}^{0,5}+1}{\boldsymbol{x}^{1,5}-1} + \frac{2}{\boldsymbol{x}^{-0,5}} = \frac{\boldsymbol{x}-1}{\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1} \cdot \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}\right)^3-1}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+1} + 2\sqrt{\boldsymbol{x}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}+1\right)}{\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1} \cdot \frac{\left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\boldsymbol{x}}+1\right)}{\sqrt{\boldsymbol{x}}+1} + 2\sqrt{\boldsymbol{x}} =$$

$$= \left(\sqrt{\boldsymbol{x}}-1\right)^2 + 2\sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - 2\sqrt{\boldsymbol{x}} + 1 + 2\sqrt{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}+1.$$

Приклад 7. *Спростити вираз* $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3$ *при $x < 3$.*

Розв'язання.

$$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{2-x}+x-3=$$

$$=|x-3|+\sqrt{2-x}+x-3=-(x-3)+\sqrt{2-x}+x-3=\sqrt{2-x}.$$

Приклад 8. *Спростити вираз* $\sqrt[6]{x^3\sqrt[4]{x}}.$

Розв'язання.

$$\sqrt[6]{x^3\sqrt[4]{x}}=\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^{12}\cdot x}}=\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^{13}}}=\sqrt[24]{x^{13}}=x^{\frac{13}{24}}.$$

Приклад 9. *Спростити вираз* $\dfrac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\dfrac{8ab}{a^2-4b^2}+\dfrac{2b}{a-2b}$,

за умови, що $0<a<2b$.

Розв'язання.

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=$$

$$=\frac{\sqrt{(a-2b)^2}}{\sqrt{(a+2b)^2}}-\frac{8ab}{(a-2b)(a+2b)}+\frac{2b}{a-2b}=$$

$$=\frac{|a-2b|}{|a+2b|}-\frac{8ab}{(a-2b)(a+2b)}+\frac{2b}{a-2b}.$$

За умовою $0<a<2b$, тому $|a-2b|=2b-a$

$$=\frac{-(a-2b)^2-8ab+2b(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}=$$

$$=\frac{-a^2+4ab-4b^2-8ab+2ab+4b^2}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{-a^2-2ab}{(a-2b)(a+2b)}=\frac{-a(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}=$$

$$=-\frac{a}{a-2b}=\frac{a}{2b-a}.$$

Приклад 10. *Записати вираз у вигляді степеня:*

$$\left(\frac{a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left(a^{\frac{4}{15}}\right)^{5}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

Розв'язання.

$$\left(\frac{a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left(a^{\frac{4}{15}}\right)^{5}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{a^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{15}\cdot 5}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(\frac{a^{\frac{5-4}{6}}}{a^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot a^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=$$

$$=\left(a^{\frac{1+3}{6}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{4}{6}+\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{4+4}{6}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}=a^{-1}.$$

1.6. Вирази зі змінними

Означення 1. ***Виразом зі змінними*** *називається буквений вираз, складений з чисел і двох чи більше змінних, які з’єднані між собою знаками дій та дужками, які визначають порядок виконання дій.*

Наприклад, $5x-8{,}2\,y;\ 12\,c+\ 5\,y^2;\ \cdot 4\,(x^2-15y);\ \frac{y^2-5y-24}{7y-56};\ 8\sqrt{a}-2c.$

Усі наведені вище тотожні перетворення виразів з однією змінною можна виконувати і над виразами з кількома змінними.

Наприклад,

$$\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}=\frac{^{2a+b/}\,2a}{2a+b}-\frac{^{1/}\,4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2a(2a+b)-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{4a^2+2ab-4a^2}{(2a+b)^2}=\frac{2ab}{(2a+b)^2}.$$

Окрім того у процесі тотожних перетвореннях виразів зі змінними часто використовують **розклад многочлена на множники,** тобто перетворення многочлена у добуток одночлена на многочлен або добуток многочленів. Його можна провести такими способами:

1. ***винесення спільного множника за дужки***

Наприклад,

$10x^2-15y=5(2x^2-3y);$

$10x^2-xy=x(10x-y);$

$10x^2-15xy=5x(2x-3y).$

2. ***винесення спільного виразу за дужки***

Наприклад,

$5(x-y)-3a(x-y)=(x-y)(5-3a);$

$3a(2x-7)+5b(7-2x)=3a(2x-7)-5b(2x-7)=(2x-7)(3a-5b);$

$(3a-5b)^2-4(5b-3a)=(5b-3a)^2-4(5b-3a)=(5b-3a)(5b-3a-4).$

3. ***групування та винесення спільного виразу за дужки***

Наприклад,

$$ax+x+2a+2=x(a+1)+2(a+1)=(a+1)(x+2).$$

4. ***використання основних алгебраїчних формул***

Наприклад,

$(4x^2 + 2xy + y^2)(2x - y) = (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3.$

Усі ці теоретичні відомості про буквені вирази різних видів зі змінними та їх спрощення застосовуються під час **розв'язання прикладів**:

Приклад 1. *Спростити вираз* $\dfrac{3x+21y}{x^2-49y^2}+\dfrac{2xy}{x^2-7xy}$.

Розв'язання.

$$\frac{3x+21y}{x^2-49y^2}+\frac{2xy}{x^2-7xy}=\frac{^{x/}3x+21y}{(x-7y)(x+7y)}+\frac{^{x+7y/}2xy}{x(x-7y)}=\frac{x(3x+21y)+2xy(x+7y)}{(x-7y)(x+7y)x}=$$

$$=\frac{3x^2+21xy+2x^2y+14xy^2}{(x-7y)(x+7y)x}=\frac{3x(x+7y)+2xy(x+7y)}{(x-7y)(x+7y)x}=\frac{(x+7y)(3x+2xy)}{(x-7y)(x+7y)x}=$$

$$=\frac{x(3+2y)}{(x-7y)x}=\frac{3+2y}{x-7y}.$$

Приклад 2. *Спростити вираз* $a\sqrt{2}\cdot x\sqrt{3}$.

Розв'язання.

$$a\sqrt{2}\cdot x\sqrt{3}=ax\sqrt{2\cdot 3}=ax\sqrt{6}.$$

Приклад 3. *Позбутися ірраціональності у знаменнику* $\dfrac{x}{a+\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$\frac{x}{a+\sqrt{x}}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})}=\frac{x(a-\sqrt{x})}{a^2-x}.$$

Приклад 4. *Позбутися ірраціональності у знаменнику дробу:*

а) $\dfrac{c}{\sqrt{a}-b}$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

Розв’язання.

а) $$\frac{c}{\sqrt{a}-b}=\frac{c\left(\sqrt{a}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-b\right)\left(\sqrt{a}+b\right)}=\frac{c\left(\sqrt{a}+b\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-b^2}-\frac{c\left(\sqrt{a}+b\right)}{a-b^2}.$$

б) $$\frac{3}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}=\frac{3\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2}=\frac{3\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)}{a-4b}.$$

в) $$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}=\frac{\left(\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right)}{a-b}.$$

Розділ 2

Алгебраїчні поняття предикативного змісту

2.1. Рівняння з однією змінною

Означення 1. ***Рівнянням з однією змінною*** *на числовій множині* X *називають предикат вигляду* $f(x) = g(x)$, $x \in X$, *де* $f(x)$, $g(x)$ – *вирази зі змінною* x.

Наприклад, $4x + 8 = 5(x - 3)$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\frac{x^2 - x}{6} + x + 1 = \frac{2x + 9}{3}$.

Означення 2. *Будь-яке значення змінної, при якому вирази* $f(x)$ *і* $g(x)$ *набувають одного і того ж числового значення, називають* ***розв'язком (коренем) рівняння.***

Якщо число a є розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$, то числова рівність $f(a) = g(a)$, яка утворюється шляхом підставляння у рівняння $f(x) = g(x)$ значення $x = a$, є правильною.

Наприклад, число -12 є розв'язком рівняння $2(x - 4) = 3x + 4$, оскільки при підставлянні його у це рівняння отримуємо правильну числову рівність:

$$2 \cdot (-12 - 4) = 3 \cdot (-12) + 4,$$
$$-32 = -32.$$

Означення 3. *Якщо всі розв'язки рівняння* $f_1(x) = g_1(x)$ *є розв'язками рівняння* $f_2(x) = g_2(x)$, *то кажуть, що рівняння* $f_2(x) = g_2(x)$ *є* ***наслідком рівняння*** $f_1(x) = g_1(x)$.

Це записують так: $f_1(x)=g_1(x) \Rightarrow f_2(x)=g_2(x)$.

Якщо рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ є наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то множина розв'язків рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ є **підмножиною множини розв'язків рівняння** $f_2(x) = g_2(x)$.

Наприклад, рівняння $2(x-3)=4$ не є наслідком рівняння $2x-5=3$, оскільки розв'язком першого рівняння є число 5, а розв'язком другого рівняння є число 4.

Означення 4. *Два рівняння* $f_1(x)=g_1(x)$ *і* $f_2(x)=g_2(x)$ *називаються* ***рівносильними*** *(еквівалентними) на області визначення цих рівнянь, якщо кожне з них є наслідком іншого.*

Це записують так: $f_1(x)=g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x)=g_2(x).$

Множини розв'язків рівносильних рівнянь є **рівними, тобто підмножинами одна одної**.

Наприклад, два рівняння $2(x-3)=4$ і $x-5=0$ є рівносильними, бо множини їх розв'язків є рівними (складаються з єдиного числа 5).

Під час розв'язування рівнянь з однією змінною широко використовують **теореми про рівносильні рівняння**.

Теорема 1. *Якщо до обох частин рівняння* $f(x)=g(x)$*, визначеного на множині X, додати або відняти один і той же вираз* $F(x)$*, який має зміст на множині X, то отримаємо рівняння* $f(x)+F(x)=g(x)+F(x)$*, яке рівносильне даному.*

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що множини розв'язків рівнянь $f(x)=g(x)$ і $f(x)+F(x)=g(x)+F(x)$ є рівними, тобто, що обидва рівняння є наслідками одне одного.

Спершу покажемо, що рівняння $f(x)=g(x)$ є наслідком рівняння $f(x)+F(x)=g(x)+F(x)$.

Нехай число a є розв'язком рівняння $f(x)=g(x)$. Тоді за означенням 2 числова рівність $f(a)=g(a)$ є правильною. Знайдемо значення числового виразу $F(a)$ і додамо його до правої та лівої частин числової рівності $f(a)=g(a)$. За властивістю 4 числових рівностей отримаємо правильну числову рівність $f(a)+F(a)=g(a)+F(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком рівняння $f(x)+F(x)=g(x)+F(x)$.

Отже, за означенням 3 рівняння $f(x) = g(x)$ є наслідком рівняння $f(x) + F(x) = g(x) + F(x)$.

Тепер покажемо, що рівняння $f(x) + F(x) = g(x) + F(x)$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Нехай число a є розв'язком рівняння $f(x) + F(x) = g(x) + F(x)$. Тоді за означенням 2 числова рівність $f(a) + F(a) = g(a) + F(a)$ є правильною. З останньої числової рівності за властивістю 4 числових рівностей отримаємо правильну числову рівність $f(a) = g(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$.

Отже, за означенням 3 рівняння $f(x) + F(x) = g(x) + F(x)$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Як бачимо, виконуються умови означення 4.

Отже, рівняння $f(x) = g(x)$ і $f(x) + F(x) = g(x) + F(x)$ є рівносильними.

Теорема доведена.

Наприклад, розв'язком рівняння $2x – 3 = x + 5$ є число 8. Якщо до обох частин рівняння $2x – 3 = x + 5$, визначеного на множині дійсних чисел, додати вираз $x – 1$, який має зміст на множині дійсних чисел, то отримаємо рівняння $(2x – 3) + (x – 1) = (x + 5) + (x – 1)$. Розв'язавши утворене рівняння, теж отримаємо число 8.

Отже, рівняння $2x – 3 = x + 5$ і $(2x – 3) + (x – 1) = (x + 5) + (x – 1)$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Наслідок 1. *Якщо будь-який член рівняння перенести з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком, то отримаємо рівняння, рівносильне заданому.*

Наприклад, розв'язком рівняння $2x – 3 = x + 5$ є число 8. У рівнянні $2x – 3 = x + 5$ перенесемо з лівої частини рівняння у праву число 3 з протилежним знаком, то отримаємо рівняння $2x = x + 5 + 3$.

Розв'язавши утворене рівняння, теж отримаємо число 8.

Отже, рівняння $2x - 3 = x + 5$ і $2x = x + 5 + 3$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Теорема 2. *Якщо обидві частини рівняння $f(x) = g(x)$, визначеного на множині X, помножити або поділити на один і той же вираз $F(x)$, який має зміст на множині X і не перетворюється в нуль ні при якому значенні змінної $x \in X$, то отримуємо рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$, яке рівносильне даному.*

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що множини розв'язків рівнянь $f(x) = g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$ є рівними, тобто, що обидва рівняння є наслідками одне одного.

Спершу покажемо, що рівняння $f(x) = g(x)$ є наслідком рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$.

Нехай число a є розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$. Тоді за означенням 2 числова рівність $f(a) = g(a)$ є правильною. Знайдемо значення числового виразу $F(a)$ і помножимо на нього праву та ліву частини числової рівності $f(a) = g(a)$. За властивістю 5 числових рівностей отримаємо правильну числову рівність $f(a) \cdot F(a) = g(a) \cdot F(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$.

Отже ,за означенням 3 рівняння $f(x) = g(x)$ є наслідком рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$.

Покажемо, що рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Нехай число a є розв'язком рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$. Тоді за означенням 2 числова рівність $f(a) \cdot F(a) = g(a) \cdot F(a)$ є правильною. З останньої числової рівності за властивістю 5 числових рівностей отримаємо правильну числову рівність $f(a) = g(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком рівняння $f(x) = g(x)$.

Отже, за означенням 3 рівняння $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$ є наслідком рівняння $f(x) = g(x)$.

Як бачимо, виконуються умови означення 4.

Отже, рівняння $f(x) = g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) = g(x) \cdot F(x)$ є рівносильними.

Теорема доведена.

Наприклад, розв'язком рівняння $2x – 3 = x + 5$ є число *8*. Якщо обидві частини рівняння $2x – 3 = x + 5$, визначеного на множині дійсних чисел, помножити на вираз $x – 1$, який має зміст на множині дійсних чисел, і не перетворюється в нуль ні при якому значенні змінної $x \in R$, крім *1*, то отримаємо рівняння $(2x – 3) \cdot (x – 1) = (x + 5) \cdot (x – 1)$. Розв'язавши утворене рівняння, отримаємо число *8*.

Отже, рівняння $2x – 3 = x + 5$ і $(2x – 3) \cdot (x – 1) = (x + 5) \cdot (x – 1)$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Наслідок 2. *Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і теж число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Наприклад, розв'язком рівняння $2x – 3 = x + 5$ є число *8*. Якщо помножимо обидві частини рівняння $2x – 3 = x + 5$ на число *3*, то отримаємо рівняння $3 \cdot (2x – 3) = 3 \cdot (x + 5)$, а звідси $6x – 9 = 3x + 15$. Розв'язавши утворене рівняння, отримаємо число *8*.

Отже, рівняння $2x – 3 = x + 5$ і $6x – 9 = 3x + 15$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Наприклад, розв'язком рівняння $4x – 6 = 2x + 2$ є число *4*. Якщо поділимо обидві частини рівняння $4x – 6 = 2x + 2$ на число *2*, то отримаємо рівняння $2x – 3 = x + 1$. Розв'язавши утворене рівняння, теж отримаємо число *4*. Отже, рівняння $4x – 6 = 2x + 2$ і $2x – 3 = x + 1$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Найпростіші рівняння з однією змінною розв'язують **на основі залежностей між компонентами та результатами арифметичних дій** додавання, віднімання, множення, ділення, використовуючи правила їх знаходження. Наведемо їх у таблиці:

<u>Додавання:</u> ***перший доданок, другий доданок, сума*** $x + b = c;$ $b + x = c;$ $x = c - b;$ $x = c - b.$ ***Щоб знайти невідомий доданок,*** ***треба від суми відняти відомий доданок.***
<u>Віднімання:</u> ***зменшуване, від'ємник, різниця*** $x - b = c,$ $b - x = c,$ $x = b + c,$ $x = b - c.$ ***Щоб знайти невідоме зменшуване, треба до різниці додати від'ємник.*** ***Щоб знайти невідомий від'ємник, треба від зменшуваного відняти різницю.***
<u>Множення:</u> ***перший множник, другий множник, добуток*** $x \cdot b = c,$ $b \cdot x = c,$ $x = c : b,$ $x = c : b,$ ***Щоб знайти невідомий множник,*** ***треба добуток поділити на відомий множник.***
<u>Ділення:</u> ***ділене, дільник, частка*** $x : b = c,$ $a : x = c,$ $x = c \cdot b,$ $x = a : c,$ ***Щоб знайти невідоме ділене, треба частку помножити на дільник.*** ***Щоб знайти невідомий дільник, треба ділене поділити на частку.***

Розглянемо деякі типи рівнянь з однією змінною:

1. Лінійні рівняння

Означення 5. ***Лінійним рівнянням*** *називається рівняння вигляду* $\boldsymbol{a \cdot x = b}$*, де* a*,* b *– довільні дійсні числа.*

1) Якщо $\boldsymbol{a \neq 0}$, то лінійне рівняння має *єдиний розв'язок* $x = \dfrac{b}{a}$.

2) Якщо $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$, то лінійне рівняння *не має розв'язків*.

3) Якщо $\boldsymbol{a = 0, b = 0}$, то лінійне рівняння має *безліч розв'язків*.

Багато рівнянь у процесі тотожних перетворень зводяться до лінійних.

Алгоритм їх розв'язання:

1) при потребі спростити вирази у правій і лівій частинах рівняння,
2) перенести вирази з правої частини рівняння у ліву, змінивши знаки при них на протилежні,
3) спростити вираз у лівій частині рівняння і звести його до вигляду лінійного рівняння,
4) розв'язати утворене рівняння,
5) записати відповідь.

При цьому варто врахувати, що:

– якщо при спрощенні виразів у лівій і правій частинах рівняння отримуємо *правильну числову рівність*, то рівняння має *безліч* розв'язків;

– якщо при спрощенні виразів у лівій і правій частинах рівняння отримуємо *неправильну числову рівність*, то рівняння *не має* розв'язків.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння:* $2(x-3)+5(1-x)=3(2x-5)$.

Розв'язання.

$2(x-3)+5(1-x)=3(2x-5)$,

$2x-6+5-5x=6x-15$,

$2x-5x-6x=-15+6-5$,

$-9x=-14$,

$x=1\frac{5}{9}$.

Відповідь: $1\frac{5}{9}$.

2. *Квадратні рівняння*

Означення 6. ***Квадратним рівнянням*** *називається рівняння вигляду* $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, *де a, b, c – довільні дійсні числа, причому* $a \neq 0$.

Якщо у квадратному рівнянні $a = 1$, *то воно називається* ***зведеним***.

Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ може мати різну кількість коренів залежно від значення **дискримінанта** $D = b^2 - 4ac$.

Можливі такі три випадки:

1. $\boldsymbol{D > 0}$

Тоді квадратне рівняння має **два дійсні різні розв'язки**, які обчислюються за формулами:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

2. $\boldsymbol{D = 0}$

Тоді квадратне рівняння має **один дійсний розв'язок**, який обчислюється за формулою:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

3. $\boldsymbol{D < 0}$

Тоді квадратне рівняння **не має жодного дійсного розв'язку**.

Розглянемо **часткові випадки квадратних рівнянь**:

1) Нехай $\boldsymbol{c = 0}$, тоді квадратне рівняння має вигляд $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$.

Винесемо у лівій частині рівняння x за дужки і отримаємо:

$$x(ax + b) = 0,$$

$$\text{звідси} \quad x = 0 \quad \text{або} \quad ax + b = 0.$$

Отже, $x = 0$ або $x = -\frac{b}{a}$.

2) Нехай ***b* = 0**, тоді рівняння має вигляд $\boldsymbol{ax^2 + c = 0.}$

Звідси маємо, що:

$$ax^2 = -c,$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Отже, можливі такі випадки для коренів квадратного рівняння:

– *якщо* $a > 0$ *і* $c > 0$, *то* $x \in \varnothing$,

– *якщо* $a > 0$ *і* $c < 0$, *то* $x = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$ або $x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$,

– *якщо* $a < 0$ *і* $c > 0$, *то* $x = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$ або $x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$,

– *якщо* $a < 0$ *і* $c < 0$, *то* $x \in \varnothing$.

3) Нехай ***b* = 0, *c* = 0**, тоді квадратне рівняння має вигляд $\boldsymbol{ax^2 = 0.}$

Звідси маємо, що:

$$x^2 = 0,$$

$$x = 0.$$

Отже, $x = 0$.

Багато рівнянь у процесі тотожних перетворень зводяться до квадратних.

Алгоритм їх розв’язання:

1) при потребі спростити вирази у правій і лівій частинах рівняння;
2) перенести вирази з правої частини рівняння у ліву, змінивши при них знаки на протилежні;
3) спростити вираз у лівій частині рівняння і звести його до квадратного рівняння;
4) розв’язати утворене квадратне рівняння за вище поданими типами;
5) записати відповідь.

Часом для легшого знаходження коренів деяких зведених квадратних рівнянь використовують **теорему Вієта**, за якою підбираємо їх так, щоб *сума коренів дорівнювала другому коефіцієнту з протилежним знаком, а їх добуток дорівнював третьому коефіцієнту*.

Такі міркування можливі лише для знаходження цілих коренів.

Наприклад, для зведеного квадратного рівняння $x^2 - 10x + 24 = 0$ за теоремою Вієта корені легко визначити: це будуть числа $x = 4$ і $x = 6$, бо їх сума дорівнює *10*, а їх добуток – *24*.

Усі ці теоретичні відомості про розв'язування квадратних рівнянь застосовуються під час **розв'язання прикладів**:

Приклад 1. *Розв'язати рівняння:* $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 1, \quad b = 5, \quad c = -6$.

Знайдемо значення дискримінанта: $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49 > 0$.

Отже, рівняння має два різні розв'язки:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = 1, \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -6.$$

Відповідь: 1; – 6.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння:* $x^2 + 5x = 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 0$.

$$x^2 + 5x = 0,$$

$$x(x + 5) = 0,$$

звідси $x = 0$ або $x = -5$.

Відповідь: 0; – 5.

Приклад 3. *Розв'язати рівняння:* $x^2 + 8 = 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 1, \quad b = 0, \quad c = 8.$

$$x^2 + 8 = 0,$$

$$x^2 = -8,$$

$$\text{звідси} \quad x \in \varnothing.$$

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад 4. *Розв'язати рівняння:* $4x^2 - 9 = 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 4, \quad b = 0, \quad c = -9.$

$$4x^2 - 9 = 0,$$

$$(2x - 3)(2x + 3) = 0,$$

$$\text{звідси} \quad x = 1\frac{1}{2} \quad \text{або} \quad x = -1\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-1\frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2}$.

Приклад 5. *Розв'язати рівняння:* $4x^2 = 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 4, \quad b = 0, \quad c = 0.$

$$4x^2 = 0,$$

$$x^2 = 0,$$

$$x = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 6. *Розв'язати рівняння* $(x+3)(x+7)+1=(2x-3)^2-8(x-5)$.

Розв'язання.

$(x+3)(x+7)+1=(2x-3)^2-8(x-5),$

$x^2+7x+3x+21+1=4x^2-12x+9-8x+40,$

$x^2+10x+22=4x^2-20x+49,$

$x^2+10x+22-4x^2+20x-49=0,$

$-3x^2+30x-27=0,$

$x^2-10x+9=0.$

$D=100-36=64>0.$

$x_1=\dfrac{10+8}{2}=9$; $x_1=\dfrac{10-8}{2}=1.$

Відповідь: 1; 9.

3. Дробово-раціональні рівняння

Означення 7. *Рівняння вигляду* $f(x)=g(x)$ *називається* ***дробово-раціональним****, якщо вирази* $f(x)$ *і* $g(x)$ *є дробово-раціональними.*

Розглядають дробово-раціональні рівняння двох видів:

1. Дробово-раціональне рівняння з числовими знаменниками

Алгоритм розв'язання:

1) перенести всі вирази з правої частини рівняння в ліву частину, змінивши при них знаки на протилежні;
2) звести ліву частину рівняння до спільного знаменника;
3) спростити вираз в чисельнику утвореного дробово-раціонального виразу;
4) утворити рівняння $\dfrac{f(x)}{a}=0$;
5) розв'язати рівняння $f(x)=0$;
6) записати відповідь.

2. Дробово-раціональне рівняння зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними

Алгоритм розв'язання:

1) перенести всі вирази з правої частини рівняння в ліву частину, змінивши при них знаки на протилежні;
2) всі знаменники розкласти, якщо можливо, на множники;
3) звести ліву частину рівняння до спільного знаменника;
4) спростити вираз у чисельнику утвореного дробово-раціонального виразу;
5) використати умову: дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю;
6) розв'язати рівняння (чисельник дорівнює нулю) і нерівність (знаменник не дорівнює нулю);
7) перевірити, які з розв'язків рівняння є розв'язками нерівності і виключити ті з них, при яких знаменник перетворюється у нуль як сторонні;
8) записати відповідь.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння* $\frac{x^2-x}{6}+x+1=\frac{2x+9}{3}$.

Розв'язання.

$$\frac{x^2-x}{6}+x+1=\frac{2x+9}{3},$$

$$\frac{{}^{1/}x^2-x}{6}+{}^{6/}x+{}^{6/}1-\frac{{}^{2/}2x+9}{3}=0,$$

$$\frac{(x^2-x)+6(x+1)-2(2x+9)}{6}=0,$$

$$\frac{x^2-x+6x+6-4x-18}{6}=0,$$

$$x^2+x-12=0$$

$D = 1 + 48 = 49 > 0;$

$$x_1=\frac{-1+7}{2}=3, \qquad x_2=\frac{-1-7}{2}=-4.$$

Відповідь: – 4; 3.

Приклад 2. *Розв'язати рівняння* $\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання.

$$\frac{3x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x+3}=\frac{15x-3}{x^2-9},$$

$$\frac{^{x+3/}3x-2}{x-3}-\frac{^{x-3/}x-4}{x+3}-\frac{^{1/}15x-3}{x^2-9}=0,$$

$$\frac{3x^2-2x+9x-6-(x^2-4x-3x+12)-15x+3}{(x-3)(x+3)}=0,$$

$$\frac{3x^2-8x-3-x^2+7x-12}{(x-3)(x+3)}=0,$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2-x-15}{(x-3)(x+3)}=0\Rightarrow\begin{cases}2x^2-x-15=0\\(x-3)(x+3)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3; \quad x_2=-2\frac{1}{2}\\ x\neq 3; \quad x\neq -3\end{cases}$$

Як бачимо, число *3* перетворює знаменник в нуль, тому воно не може бути розв'язком цього рівняння ($x = 3$ – сторонній корінь).

Відповідь: – 2,5.

2.2. Нерівність з однією змінною

Означення 1. ***Нерівністю з однією змінною*** *на числовій множині X називають предикати вигляду* $f(x) > g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $x \in X$, *де* $f(x)$, $g(x)$ – *вирази зі змінною x.*

Наприклад, $4x + 8 < 5(x - 3)$, $x^2 - 5x + 6 > 0$, $\frac{x^2 - x}{6} + x + 1 \leq \frac{2x + 9}{3}$.

Означення 2. *Будь-яке значення змінної, при якому нерівність зі змінною перетворюється в істинну числову нерівність, називається* ***розв'язком нерівності.***

Якщо число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$, то числова нерівність $f(a) > g(a)$, яка утворюється шляхом підставляння у задану нерівність $f(x) > g(x)$ значення $x = a$, є правильною.

Наприклад, число 14 є розв'язком нерівності $2 \cdot (x - 4) < 3x + 8$, оскільки при підставлянні його у задану нерівність отримуємо правильну числову нерівність:

$$2 \cdot (14 - 4) < 3 \cdot 14 + 8,$$

$$20 < 50.$$

Розв'язати нерівність зі змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує.

Означення 3. *Якщо всі розв'язки нерівності* $f_1(x) > g_1(x)$ *є розв'язками нерівності* $f_2(x) > g_2(x)$, *то кажуть, що нерівність* $f_2(x) > g_2(x)$ *є* ***наслідком нерівності*** $f_1(x) > g_1(x)$.

Це записують так: $f_1(x) > g_1(x) \Rightarrow f_2(x) > g_2(x)$.

Якщо нерівність $f_2(x) > g_2(x)$ є наслідком нерівності $f_1(x) > g_1(x)$, то **множина розв'язків нерівності** $f_1(x) > g_1(x)$ є **підмножиною множини розв'язків нерівності** $f_2(x) > g_2(x)$.

Наприклад, нерівність $2(x - 3) > 4$ не є наслідком нерівності $2x - 5 > 3$, оскільки розв'язком першої нерівності є всі дійсні числа, більші 5, а розв'язком другої нерівності є всі дійсні числа, більші 4.

Означення 4. *Дві нерівності* $f_1(x) > g_1(x)$ *і* $f_2(x) > g_2(x)$ *називаються* ***рівносильними*** *(еквівалентними) на області визначення цих нерівностей, якщо кожна з них є наслідком іншої.*

Це записують так: $f_1(x) > g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) > g_2(x).$

Множини розв'язків рівносильних нерівностей є **рівними, тобто підмножинами одна одної**.

Зокрема, нерівності рівносильні, якщо вони не мають розв'язків.

Означення 5. *Дві нерівності з однією змінною називаються* ***рівносильними****, якщо множини їх розв'язків є рівними.*

Наприклад, дві нерівності $2(x - 3) > 4$ і $x - 5 > 0$ є рівносильними, бо множини їх розв'язків є рівними (складаються з усіх дійсних чисел, більших за число 5).

Під час розв'язування нерівностей з однією змінною широко використовують **теореми про рівносильні нерівності.**

Розглянемо їх на прикладі нерівності $f(x) > g(x).$

Теорема 1. *Якщо до обох частин нерівності* $f(x) > g(x)$*, визначеної на множині X, додати або відняти один і той же вираз F(x), який має зміст на множині X, то отримаємо нерівність* $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$*, яка рівносильна до заданої.*

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що множини розв'язків нерівностей $f(x) > g(x)$ і $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$ є рівними, тобто, що обидві нерівності є наслідками одна одної.

Спершу покажемо, що нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) + F(x) > g(x) + F(x).$

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x).$ Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) > g(a)$ є правильною. Знайдемо значення числового виразу $F(a)$ і додамо його до правої та лівої частин числової нерівності $f(a) > g(a).$ За властивістю 3 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) + F(a) > g(a) + F(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$.

Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$.

Тепер покажемо, що нерівність $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$. Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) + F(a) > g(a) + F(a)$ є правильною. З останньої числової нерівності за властивістю 3 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) > g(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$.

Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Як бачимо, виконуються умови означення 4.

Отже, нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) + F(x) > g(x) + F(x)$ є рівносильними.

Теорема доведена.

Наприклад, розв'язком нерівності $2x - 3 > x + 5$ є усі дійсні числа, більші числа 8. Якщо до обох частин нерівності $2x - 3 > x + 5$, визначеного на множині дійсних чисел, додати вираз $x - 1$, який має зміст на множині дійсних чисел, то отримаємо нерівність:

$$(2x - 3) + (x - 1) > (x + 5) + (x - 1),$$

$$2x - 3 + x - 1 > x + 5 + x - 1,$$

$$2x + x - x - x > 5 - 1 + 3 + 1,$$

$$x > 8.$$

Розв'язками утвореної нерівності є усі дійсні числа, більші числа 8.

Отже, нерівності $2x - 3 > x + 5$ і $(2x - 3) + (x - 1) > (x + 5) + (x - 1)$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Наслідок 1. *Якщо будь-який член нерівності перенести з однієї частини нерівності в іншу з протилежним знаком, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.*

Наприклад, розв'язком нерівності $2x - 3 > x + 5$ є усі дійсні числа, більші числа 8. У нерівності $2x - 3 > x + 5$ перенесемо з лівої частини нерівності у праву число 3 з протилежним знаком, то отримаємо нерівність:

$$2x > x + 5 + 3,$$

$$2x - x > 5 + 3,$$

$$x > 8.$$

Розв'язавши утворену нерівність, теж отримаємо усі дійсні числа, більші числа 8.

Отже, нерівності $2x - 3 > x + 5$ і $2x > x + 5 + 3$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Теорема 2. *Якщо обидві частини нерівності* $f(x) > g(x)$, *визначеної на множині X, помножити або поділити на один і той же вираз F(x), який має зміст на множині X і додатній при всіх значеннях змінної* $x \in X$, *то отримуємо нерівність* $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$, *рівносильну заданій.*

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що множини розв'язків нерівностей $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$ є рівними, тобто, що обидві нерівності є наслідками одна одної.

Спершу покажемо, що нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$.

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$. Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) > g(a)$ є правильною. Знайдемо значення числового виразу $F(a)$ і помножимо на нього праву та ліву частини числової нерівності $f(a) > g(a)$. За властивістю 4 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) \cdot F(a) > g(a) \cdot F(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$.

Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$.

Покажемо, що нерівність $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$. Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) \cdot F(a) > g(a) \cdot F(a)$ є правильною. З останньої числової нерівності за властивістю 4 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) > g(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$.

Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Як бачимо, виконуються умови означення 4.

Отже, нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) > g(x) \cdot F(x)$ є рівносильними.

Теорема доведена.

Наслідок 2. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне і теж додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.*

Наприклад, розв'язком нерівності $2x - 3 > x + 5$ є усі дійсні числа, більші за число 8. Якщо помножимо обидві частини нерівності $2x - 3 > x + 5$ на додатне число 3, то отримаємо нерівність:

$$3 \cdot (2x - 3) > 3 \cdot (x + 5),$$

$$6x - 9 > 3x + 15,$$

$$6x - 3x > 15 + 9,$$

$$3x > 24,$$

$$x > 8.$$

Розв'язками утвореної нерівності є усі дійсні числа, більші за число 8.

Отже, нерівності $2x - 3 > x + 5$ і $3 \cdot (2x - 3) > 3 \cdot (x + 5)$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Теорема 3. *Якщо обидві частини нерівності $f(x) > g(x)$, визначеної на множині X, помножити або поділити на один і той же вираз $F(x)$, який має зміст на множині X і від'ємний при всіх значеннях змінної $x \in X$, а знак нерівності змінити на протилежний, то отримуємо нерівність $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$, рівносильну заданій.*

Доведення. Для доведення теореми треба показати, що множини розв'язків нерівностей $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$ є рівними, тобто, що обидві нерівності є наслідками одна одної.

Покажемо, що нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$.

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$. Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) > g(a)$ є правильною. Знайдемо значення числового виразу $F(a)$ і помножимо на його праву та ліву частини числової нерівності $f(a) > g(a)$. За властивістю 5 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) \cdot F(a) < g(a) \cdot F(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$.

Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) > g(x)$ є наслідком нерівності $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$.

Покажемо, що нерівність $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Нехай число a є розв'язком нерівності $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$. Тоді за означенням 2 числова нерівність $f(a) \cdot F(a) < g(a) \cdot F(a)$ є правильною. З останньої числової нерівності за властивістю 5 числових нерівностей отримаємо правильну числову нерівність $f(a) > g(a)$, тобто за означенням 2 число a є розв'язком нерівності $f(x) > g(x)$. Отже, за означенням 3 нерівність $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$.

Як бачимо, виконуються умови означення 4.

Отже, нерівності $f(x) > g(x)$ і $f(x) \cdot F(x) < g(x) \cdot F(x)$ є рівносильними.

Теорема доведена.

Наслідок 3. *Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне і теж від'ємне число, а знак нерівності змінити на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну заданій.*

Наприклад, розв'язком нерівності $2x - 3 > x + 5$ є усі дійсні числа, більші за число 8. Якщо помножимо обидві частини нерівності $2x - 3 > x + 5$ на від'ємне число -3, то отримаємо нерівність:

$$-3 \cdot (2x - 3) < -3 \cdot (x + 5),$$

$$-6x + 9 < -3x - 15,$$

$$-6x + 3x < -15 - 9,$$

$$-3x < -24,$$

$$x > 8.$$

Розв'язками утвореної нерівності є всі дійсні числа, більші за число 8.

Отже, нерівності $2x - 3 > x + 5$ і $-3 \cdot (2x - 3) > -3 \cdot (x + 5)$ є рівносильними на множині дійсних чисел.

Розглянемо деякі типи нерівностей з однією змінною:

1. Лінійні нерівності

Означення 6. ***Лінійними нерівностями*** *називаються нерівності вигляду* $\boldsymbol{ax > b;\ ax < b,\ ax \geq b;\ ax \leq b}$; *де* a, b *– довільні дійсні числа.*

1) Якщо $\boldsymbol{a > 0}$, то лінійні нерівності мають <u>*безліч розв'язків у вигляді числових проміжків*</u>, для знаходження яких враховують, що при діленні нерівності на додатне число знак нерівності не змінюється):

$$ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a},\quad x \in (\frac{b}{a}; +\infty),$$

$$ax < b \Rightarrow x < \frac{b}{a},\quad x \in (-\infty; \frac{b}{a}),$$

$$ax \leq b \Rightarrow x \leq \frac{b}{a},\quad x \in (-\infty; \frac{b}{a}],$$

$$ax \geq b \Rightarrow x \geq \frac{b}{a},\quad x \in [\frac{b}{a}; +\infty).$$

2) Якщо $\boldsymbol{a < 0}$, то лінійні нерівності мають <u>*безліч розв'язків у вигляді числових проміжків*</u>, для знаходження яких враховують, що при діленні нерівності на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний):

$$-ax < b \Rightarrow x > -\frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right),$$

$$-ax > b \Rightarrow x < -\frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right),$$

$$-ax \geq b \Rightarrow x \leq -\frac{b}{a}, \quad x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right],$$

$$-ax \leq b \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}, \quad x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right).$$

3) Якщо $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$, то лінійні нерівності мають різні розв'язки залежно від знаку нерівності та значення числа b:

$ax > b, b > 0, \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax > b, b < 0, \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty),$

$ax < b, b > 0, \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty),$

$ax < b, b < 0, \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax \leq b, b > 0, \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty),$

$ax \leq b, b < 0, \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax \geq b, b > 0, \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax \geq b, b < 0, \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty).$

4) Якщо $\boldsymbol{a = 0, b = 0}$, то лінійні нерівності мають різні розв'язки залежно від знаку нерівності:

$ax > b \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax < b \Rightarrow x \in \varnothing,$

$ax \leq b \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty),$

$ax \geq b \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty).$

Багато нерівностей у процесі тотожних перетворень зводяться до лінійних.

Алгоритм їх розв'язання:

1) при потребі спростити вирази у правій і лівій частинах нерівності,
2) перенести вирази з правої частини нерівності у ліву, змінивши знаки при них на протилежні,
3) спростити вираз у лівій частині нерівності і звести його до вигляду лінійної нерівності,
4) розв'язати утворену нерівність,
5) записати відповідь.

При цьому варто врахувати, що:

– якщо при спрощенні виразів у лівій і правій частинах нерівності отримуємо *правильну числову нерівність,* то нерівність має *безліч* розв'язків, $x \in (-\infty; +\infty)$;

– якщо при спрощенні виразів у лівій і правій частинах нерівності отримуємо *неправильну числову нерівність*, то нерівність не має розв'язків, $x \in \varnothing$.

Приклад. *Розв'язати нерівність:* $2(x-3)+5(1-x) \geq 3(2x-5)$.

Розв'язання.

$2(x-3)+5(1-x) \geq 3(2x-5)$,

$2x-6+5-5x \geq 6x-15$,

$2x-5x-6x \geq -15+6-5$,

$-9x \geq -14$,

$x \leq 1\frac{5}{9}$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 1\frac{5}{9}]$.

2. Квадратні нерівності

Означення 7. ***Квадратними нерівностями*** *називаються нерівності вигляду*

$$ax^2+bx+c>0; \quad ax^2+bx+c<0; \quad ax^2+bx+c \geq 0; \quad ax^2+bx+c \leq 0;$$

де a, b, c – довільні дійсні числа, причому $a \neq 0$.

Розв’язки квадратних нерівностей знаходять **графічним способом за допомогою координатної прямої.**

Нехай $\boldsymbol{a > 0}$.

Можливі такі випадки залежно від значення дискримінанта $\boldsymbol{D}$:

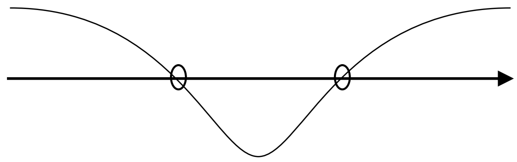
1. $\boldsymbol{D > 0}$

Тоді відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два дійсні різні розв’язки x_1 та x_2 і квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ розкладається на множники $a(x - x_1)(x - x_2)$:

а) $ax^2 + bx + c > 0;$

$a(x - x_1)(x - x_2) > 0.$

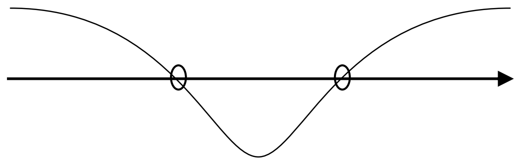
$x \in (-\infty; x_1) \bigcup (x_2; +\infty).$



б) $ax^2 + bx + c < 0;$

$a(x - x_1)(x - x_2) < 0.$

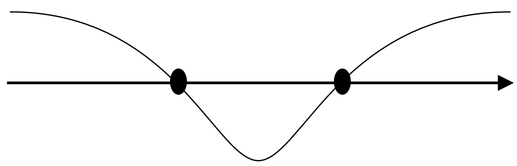
$x \in (x_1; x_2).$



в) $ax^2 + bx + c \geq 0;$

$a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0.$

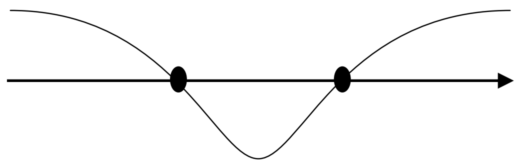
$x \in (-\infty; x_1] \bigcup [x_2; +\infty).$



г) $ax^2 + bx + c \leq 0;$

$a(x - x_1)(x - x_2) \leq 0.$

$x \in [x_1; x_2].$



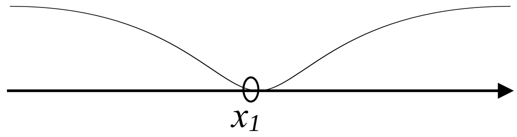
2. $\boldsymbol{D = 0}$

Тоді відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один дійсний розв’язок x_1 і квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ розкладається на множники $a(x - x_1)^2$:

а) $ax^2 + bx + c > 0;$

$a(x - x_1)^2 > 0.$

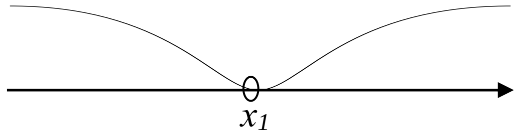
$x \in (-\infty; x_1) \bigcup (x_1; +\infty).$



б) $ax^2 + bx + c < 0;$

$a(x - x_1)^2 < 0.$

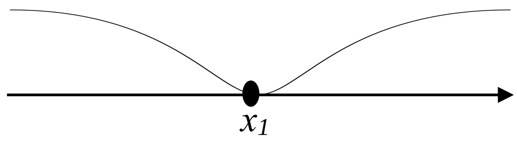
$x \in \varnothing.$



в) $ax^2 + bx + c \geq 0;$

$a(x - x_1)^2 \geq 0.$

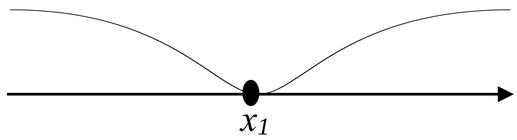
$x \in R.$



г) $ax^2 + bx + c \leq 0;$

$a(x - x_1)^2 \leq 0.$

$x = x_1.$



3. D < 0

Тоді відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має жодного дійсного розв'язку і квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ на множники не розкладається, а набуває завжди одного знаку, такого ж як коефіцієнт a (ми розглядаємо його у нашому випадку додатним, $a > 0$):

а) $ax^2 + bx + c > 0;$

$x \in R.$

б) $ax^2 + bx + c < 0;$

$x \in \varnothing.$

в) $ax^2 + bx + c \geq 0;$

$x \in R.$

г) $ax^2 + bx + c \leq 0;$

$x \in \varnothing.$

Розглянемо **часткові випадки квадратних нерівностей** для $a > 0$:

1) Нехай $\boldsymbol{c = 0}$

Тоді квадратні нерівності мають вигляд:

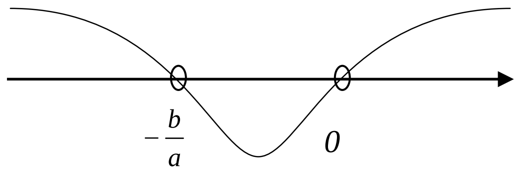
$$\boldsymbol{ax^2 + bx > 0, \quad ax^2 + bx < 0, \quad ax^2 + bx \geq 0, \quad ax^2 + bx \leq 0.}$$

Щоб їх розв'язати, треба у лівій частині нерівності винести x за дужки:

а) $ax^2 + bx > 0,$

$x(ax + b) > 0.$

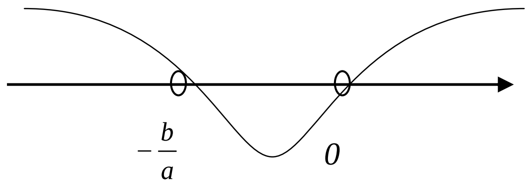
$x \in (-\infty, -\frac{b}{a}) \bigcup (0; +\infty).$



б) $ax^2 + bx < 0,$

$x(ax + b) < 0.$

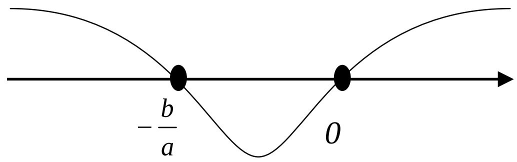
$x \in (-\frac{b}{a}; 0).$



в) $ax^2 + bx \geq 0,$

$x(ax + b) \geq 0.$

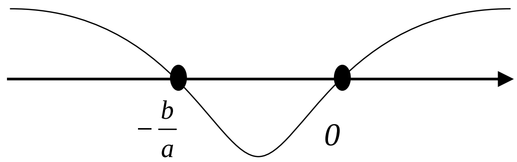
$x \in (-\infty; -\frac{b}{a}] \bigcup [0; +\infty).$



г) $ax^2 + bx \leq 0,$

$x(ax + b) \leq 0.$

$x \in [-\frac{b}{a}; 0].$



2) Нехай $\boldsymbol{b = 0}$

Тоді квадратні нерівності мають вигляд:

$$\boldsymbol{ax^2 + c > 0, \quad ax^2 + c < 0, \quad ax^2 + c \geq 0, \quad ax^2 + c \leq 0.}$$

Для $\boldsymbol{c > 0}$**:**

а) $ax^2 + c > 0,$

$x \in R.$

б) $ax^2 + c < 0,$

$x \in \varnothing.$

в) $ax^2 + c \geq 0,$

$x \in R.$

г) $ax^2 + c \leq 0,$

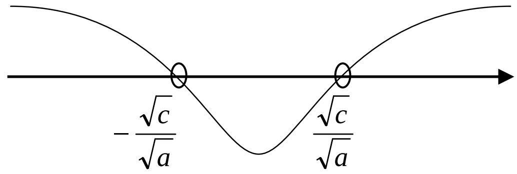
$x \in \varnothing.$

Для $\boldsymbol{c < 0}$:

а) $ax^2 - c > 0,$

$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x - \sqrt{c}\right) > 0,$

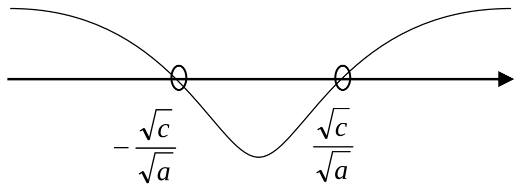
$x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}) \bigcup (\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}; +\infty).$



б) $ax^2 - c < 0,$

$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x - \sqrt{c}\right) < 0.$

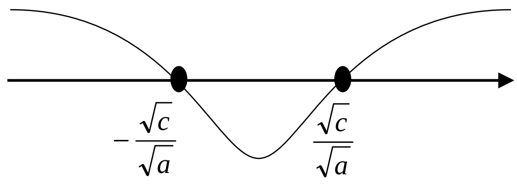
$x \in (-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}; \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}).$



в) $ax^2 - c \geq 0,$

$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x - \sqrt{c}\right) \geq 0.$

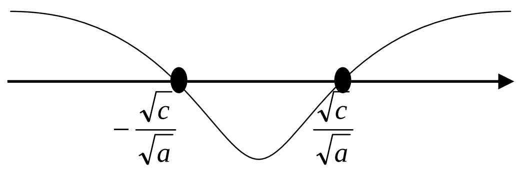
$x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}] \bigcup [\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}; +\infty).$



г) $ax^2 - c \leq 0,$

$\left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}x - \sqrt{c}\right) \leq 0.$

$x \in [-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}; \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}].$

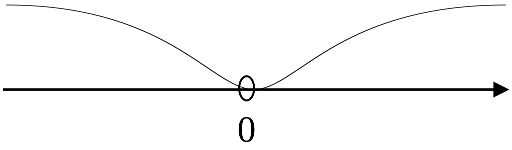


3) Нехай $\boldsymbol{b = 0}$, $\boldsymbol{c = 0}$, тоді квадратні нерівності мають вигляд:

$$\boldsymbol{ax^2 > 0, \quad ax^2 < 0, \quad ax^2 \geq 0, \quad ax^2 \leq 0.}$$

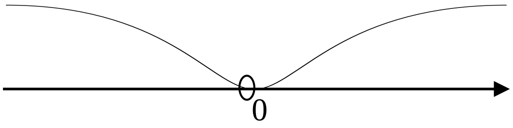
а) $ax^2 > 0,\ x^2 > 0,$

$x \in (-\infty, 0) \bigcup (0; +\infty).$



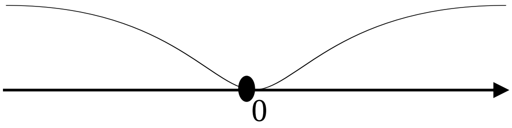
б) $ax^2 < 0,\ x^2 < 0,$

$x \in \varnothing.$



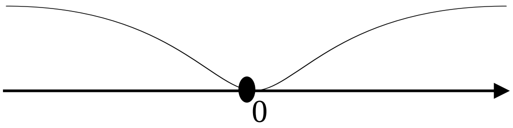
в) $ax^2 \geq 0,\ x^2 \geq 0,$

$x \in R.$



г) $ax^2 \leq 0,\ x^2 \leq 0,$

$x = 0.$



Багато нерівностей у процесі тотожних перетворень зводяться до квадратних.

Алгоритм їх розв'язання:

1) при потребі спростити вирази у правій і лівій частинах нерівності,
2) перенести вирази з правої частини нерівності у ліву, змінивши при них знаки на протилежні,
3) спростити вираз у лівій частині нерівності і звести її до квадратної нерівності,
4) розв'язати утворену квадратну нерівність за вище поданими типами,
5) записати відповідь.

Усі ці теоретичні відомості про розв’язування квадратних нерівностей застосовуються під час **розв’язання прикладів**:

Приклад 1. *Розв’язати нерівність:* $x^2 + 5x + 6 > 0$.

Розв’язання.

$x^2 + 5x + 6 > 0,$

Розв’яжемо відповідне квадратне рівняння:

$x^2 + 5x + 6 = 0.$

$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 6.$

За теоремою Вієта сума коренів має дорівнювати числу – 5, а добуток коренів має дорівнювати числу 6.

Отже, $x_1 = -2, \quad x_2 = -3.$

Квадратний тричлен лівої частини нерівності можна розкласти на множники за цими коренями, отримаємо нерівність:

$(x + 3)(x + 2) > 0.$

Розв’язками цієї нерівності є усі дійсні числа, які менші за число – 3 або більші за число – 2.

Відповідь: $x \in (-\infty; -3) \bigcup (-2; +\infty).$

Приклад 2. *Розв’язати нерівність:* $3x^2 + 5x + 10 < 0.$

Розв’язання.

$3x^2 + 5x + 10 < 0.$

Розв’яжемо відповідне квадратне рівняння:

$3x^2 + 5x + 10 = 0.$

$a = 3, \quad b = 5, \quad c = 10.$

$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = 25 - 120 = -95 < 0.$

Квадратне рівняння $3x^2 + 5x + 10 = 0$ дійсних розв’язків не має, тому квадратний тричлен у лівій частині рівняння на множники не розкладається, а набуває завжди лише додатних значень, бо $a = 3 > 0$. Тому квадратна нерівність $3x^2 + 5x + 10 < 0$ розв’язків не має.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад 3. *Розв'язати нерівність:* $x^2 + 6x + 9 \le 0$.

Розв'язання.

$x^2 + 6x + 9 \le 0,$

$(x + 3)^2 \le 0.$

Але вираз $(x + 3)^2$ може набувати лише невід'ємних значень (додатних або нуль). Тому залишається випадок, що $x + 3 = 0$, а звідси $x = -3$.

Відповідь: -3.

Приклад 4. *Розв'язати нерівність:* $4x^2 - 9 > 0$.

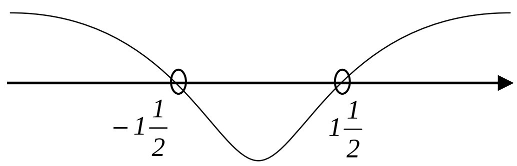
Розв'язання.

$4x^2 - 9 > 0.$

Неповна квадратна нерівність, $b = 0$.

$(2x - 3)(2x + 3) > 0.$

Відповідь: $x \in (-\infty, -1\frac{1}{2}) \bigcup (1\frac{1}{2}; +\infty)$.



Приклад 5. *Розв'язати нерівність:* $x^2 + 7 \le 0$.

Розв'язання.

$x^2 + 7 \le 0.$

Неповна квадратна нерівність, $b = 0$.

$x^2 + 7 \ge 0$ при всіх значеннях змінної x, тому задана нерівність розв'язків не має.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

Приклад 6. *Розв'язати нерівність:* $x^2 + 5x < 0$.

Розв'язання.

Коефіцієнтами квадратного рівняння є: $a = 1, \quad b = 5, \quad c = 0.$

$x^2 + 5x < 0$,

$x(x + 5) < 0,$

звідси $x < 0$ або $x > -5.$

Відповідь: $x \in (-5; 0).$

Приклад 7. *Розв'язати нерівність* $(x + 3)(x + 7) + 1 < (2x - 3)^2 - 8(x - 5).$

Розв'язання.

$(x + 3)(x + 7) + 1 < (2x - 3)^2 - 8(x - 5),$

$x^2 + 7x + 3x + 21 + 1 < 4x^2 - 12x + 9 - 8x + 40,$

$x^2 + 10x + 22 < 4x^2 - 20x + 49,$

$x^2 + 10x + 22 - 4x^2 + 20x - 49 < 0,$

$-3x^2 + 30x - 27 < 0,$

$x^2 - 10x + 9 > 0,$

$x^2 - 10x + 9 = 0.$

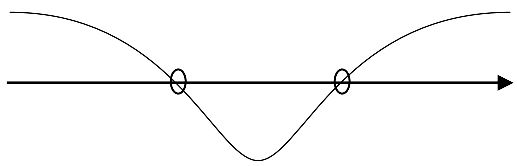
$a = 1, \quad b = -10, \quad c = 9.$

$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 > 0.$

$x_1 = \frac{10+8}{2} = 9, \qquad x_2 = \frac{10-8}{2} = 1.$

Отже, отримаємо нерівність

$(x - 9)(x - 1) > 0.$



Відповідь: $x \in (-\infty, 1) \bigcup (9; +\infty).$

3. Дробово-раціональні нерівності

Означення 7. *Нерівності вигляду* $\frac{f(x)}{g(x)}>0$; $\frac{f(x)}{g(x)}<0$; $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ *називаються* ***дробово-раціональними****, якщо вирази* $f(x)$ *і* $g(x)$ *є многочленами.*

Розглядають дробово-раціональні нерівності двох видів:

1. ***Дробово–раціональні нерівності з числовими знаменниками*** *вигляду* $\frac{f(x)}{a}>0$; $\frac{f(x)}{a}<0$; $\frac{f(x)}{a}\geq 0$; $\frac{f(x)}{a}\leq 0$, *де* $f(x)$ *–многочлен,*

a – довільне дійсне число, відмінне від нуля.

Алгоритм розв'язання:

1) перенести всі вирази з правої частини нерівності в ліву частину, змінивши при них знаки на протилежні;
2) звести ліву частину нерівності до спільного знаменника;
3) спростити вираз в чисельнику утвореного дробово-раціонального виразу;
4) звести нерівність до вигляду $\frac{f(x)}{a} > 0$ або $\frac{f(x)}{a} < 0$ або $\frac{f(x)}{a} \geq 0$ або $\frac{f(x)}{a} \leq 0$;
5) розв'язати нерівність $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$ або $f(x) \geq 0$ або $f(x) \leq 0$;
6) записати відповідь.

2. Дробово-раціональні нерівності зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними

Алгоритм розв'язання:

1) перенести всі вирази з правої частини нерівності в ліву частину, змінивши при них знаки на протилежні;
2) всі знаменники розкласти, якщо можливо, на множники;
3) звести ліву частину нерівності до спільного знаменника;
4) спростити вираз у чисельнику утвореного дробово-раціонального виразу;

5) звести нерівність до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

і розглянути такі випадки:

а) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$.

Частку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ замінити добутком $f(x) \cdot g(x) > 0$ або $f(x) \cdot g(x) < 0$. Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ розкласти на множники і розв'язати утворену нерівність методом інтервалів;

б) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Частку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ замінити добутком $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ або $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ з умовою, що $g(x) \neq 0$. Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ розкласти на множники і розв'язати утворену нерівність методом інтервалів;

6) записати відповідь.

Метод інтервалів служить для розв'язування дробово-раціональних нерівностей вигляду $f(x) \cdot g(x) > 0$ або $f(x) \cdot g(x) < 0$ або $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ або $f(x) \cdot g(x) \leq 0$. Для цього вирази $f(x)$ *і* $g(x)$ треба розкласти на найпростіші множники вигляду $x + a$, $x - a$, знайти відповідні нульові точки, зобразити їх на координатній прямій, побудувати проміжки, які утворюються цими точками. При переході через них знаки виразів чергуються. Тоді вибрати ті з них, які відповідають умові нерівності і записати відповідь.

Приклад 1. *Розв'язати нерівність* $\frac{x^2 - x}{6} + x + 1 > \frac{2x + 9}{3}$.

Розв’язання.

$$\frac{x^2-x}{6}+x+1>\frac{2x+9}{3},$$

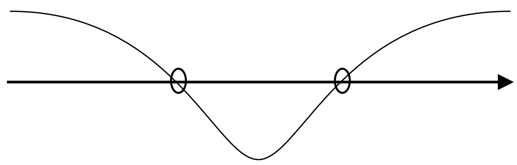
$$\frac{{}^{1/}x^2-x}{6}+{}^{6/}x+{}^{6/}1-\frac{{}^{2/}2x+9}{3}>0,$$

$$\frac{(x^2-x)+6(x+1)-2(2x+9)}{6}>0,$$

$$\frac{x^2-x+6x+6-4x-18}{6}>0,$$

$$x^2+x-12>0.$$

За теоремою Вієта $x_1=3$ $x_2=-4.$



Отримаємо нерівність:

$(x-3)(x+4)>0.$

Відповідь: $x\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

Приклад 2. *Розв’язати нерівність* $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1.$

Розв’язання.

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}<1,$$

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}-1<0,$$

$$\frac{(x-3)(x+2)-(x^2-1)}{x^2-1}<0,$$

$$\frac{x^2+2x-3x-6-x^2+1}{x^2-1}<0,$$

$$\frac{-x-5}{x^2-1}<0,$$

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}>0,$$

$$(x+5)(x-1)(x+1)>0.$$

Відповідь: $x\in(-5;-1)\cup(1;+\infty)$.

2.3. Розв'язування задач з використанням алгебраїчних понять

Алгебраїчні поняття широко використовують для розв'язування задач.

1. Розв'язування задач за допомогою складання числового виразу

Прості та складені сюжетні задачі часто розв'язують за допомогою складання числового виразу на дві та більше дій. Часом до однієї і тієї ж задачі можна скласти кілька числових виразів, а це вказує на можливість розв'язати задачу кількома способами.

Задача 1. *Дівчинка складала букети. Для кожного букета вона брала по 3 білі й 2 червоні квітки. Скільки всього квіток у 7 таких букетах?*

Розв'язання.

Розв'язання цієї задачі за допомогою складання числового виразу можна розглянути такими двома способами:

1-ий спосіб

$(3 + 2) \cdot 7 = 35$ (кв.)

2-ий спосіб

$3 \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 35$ (кв.)

Відповідь: 35 квіток.

Числовий вираз першого способу розв'язання задачі передбачає виконання двох дій і такий хід міркувань: спершу знайдемо кількість білих і червоних квіток у одному букеті, а потім кількість квіток у *7* таких букетах.

Числовий вираз другого способу розв'язання задачі передбачає виконання трьох дій і такий хід міркувань: спершу знайдемо кількість білих квіток у *7* букетах, потім – кількість червоних квіток у *7* букетах, а потім кількість всіх квіток у *7* букетах.

Перший спосіб розв'язання задачі є більш раціональним, бо передбачає лише дві дії.

Рівність, складена з числових виразів першого та другого способів розв'язання задачі, підтверджує розподільну властивість дії множення відносно дії додавання.

2. *Розв'язування задач за допомогою складання буквеного виразу*

Прості та складені сюжетні задачі розв'язують за допомогою складання буквеного виразу на дві та більше дій у випадку, якщо якесь числове значення величини не вказано у задачі.

Задача 2. *24 сині і кілька жовтих слив батько поділив порівну між трьома синами. Скільки слив одержав кожен син?*

Розв'язання.

Розв'язання цієї задачі за допомогою складання буквеного виразу можна розглянути такими двома способами:

В умові задачі вказано, що жовтих слив було кілька. Позначимо їх кількість через t.

1-ий спосіб

$((24 + t) : 3)$ (сл.)

2-ий спосіб

$(24 : 3 + t : 7)$ (сл.)

Буквений вираз першого способу розв'язання задачі передбачає виконання двох дій і такий хід міркувань: спершу знайдемо кількість синіх і жовтих слив разом, а потім кількість слив у кожного сина.

Буквений вираз другого способу розв'язання задачі передбачає виконання трьох дій і такий хід міркувань: спершу знайдемо кількість синіх слив у кожного сина, потім – кількість жовтих слив у кожного сина, а потім кількість синіх і жовтих слив у кожного сина.

Перший спосіб розв'язання задачі є більш раціональним, бо передбачає лише дві дії.

Рівність, складена з буквених виразів першого та другого способів розв'язання задачі, підтверджує властивість дії ділення.

3. Розв'язування задач за допомогою складання рівняння

Прості та складені сюжетні задачі розв'язують за допомогою складання рівняння з однією змінною.

Спершу треба пояснити введення змінної та за сюжетом задачі і зв'язками між заданими та шуканою величинами скласти відповідне рівняння та розв'язати його. Такий спосіб розв'язування задач називається **алгебраїчним способом**.

Задача 3. *Олег задумав число. Якщо його помножити на 3, а від отриманого результату відняти число 4, то отримаємо число 5. Яке число задумав Олег?*

Розв'язання.

Нехай Олег задумав число x. За умовою задачі його помножили на 3 і від отриманого результату відняли число 4. Отримали число 5.

Можна скласти рівняння:

$$x \cdot 3 - 4 = 5,$$

$$x \cdot 3 = 5 + 4,$$

$$x \cdot 3 = 9,$$

$$x = 9 : 3,$$

$$x = 3$$

Відповідь: Олег задумав число 3.

Задача 4. *Сума двох натуральних чисел дорівнює 80. Якщо перше з них помножити на 2, а друге на 7, то сума добутків дорівнюватиме 280. Знайти ці числа.*

Розв'язання.

Нехай перше натуральне число x, тоді друге натуральне число дорівнює $80 - x$. За умовою задачі перше число помножити на 2, тоді отримаємо $x \cdot 3$. Друге число помножили на 7, тоді отримаємо $(80 - x) \cdot 7$. Сума цих добутків дорівнює 280. Складаємо рівняння:

$$x \cdot 3 + (80 - x) \cdot 7 = 280,$$

$$3x + 560 - 7x = 280,$$

$$560 - 4x = 280,$$

$$4x = 560 - 280,$$

$$4x = 280,$$

$$x = 280 : 4,$$

$$x = 70.$$

$80 - x = 80 - 70 = 10.$

Відповідь: перше число 70, друге число 10.

Задача 5. *Довжини сторін трикутника виражаються трьома послідовними натуральними числами. Знайти їх довжини, якщо відомо, периметр трикутника дорівнює 30 см.*

Розв'язання.

Нехай *x см* – довжина першої сторони трикутника, тоді довжини двох інших його сторін – (*x + 1) см* і *(x + 2) см.* За умовою задачі сума всіх його сторін дорівнює 30 см.

Складаємо рівняння:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 30,$$

$$3x + 3 = 30,$$

$$3x = 27,$$

$$x = 9 \text{ (см)}$$

$x + 1 = 9 + 1 = 10$ (см)

$x + 2 = 9 + 2 = 11$ (см)

Відповідь: 9 см, 10 см, 11 см.

ПРАКТИЧНИЙ БЛОК
ТЕМАТИКА ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№ з/п	**Тема практичних занять**
1.	Прості та складені числові вирази. Значення числового виразу. Правила порядку виконання дій у числових виразах. Запис числового виразу за його словесним заданням і навпаки. Обчислення значень виразів раціональним способом.
2.	Числові вирази з натуральними та цілими числами.
3.	Числові вирази з раціональними числами.
4.	Числові вирази з ірраціональними та дійсними числами.
5.	Числові рівності та встановлення їх істинності.
6.	Числові нерівності та встановлення їх істинності.
7.	Буквені вирази та їх види. Область допустимих значень виразу. Значення виразу для певних значень змінної.
8.	Тотожні перетворення виразів з однією змінною
9.	Тотожні перетворення виразів зі змінними.
10.	**КР 1**
11.	Розв’язування найпростіших рівнянь з однією змінною на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій.
12.	Розв’язування лінійних і квадратних рівнянь з однією змінною.
13.	Розв’язування рівнянь з однією змінною, які зводяться до квадратних.
14.	Розв’язування дробово-раціональних рівнянь з однією змінною.
15.	Розв’язування лінійних і квадратних нерівностей з однією змінною.
16.	Розв’язування дробово-раціональних нерівностей з однією змінною. Метод інтервалів.
17.	Розв’язування задач складанням числового та буквеного виразів.
18.	Розв’язування задач алгебраїчним способом.
19.	**КР 2**
20	Підсумкове заняття

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

РОЗДІЛ 1. Алгебраїчні поняття обчислювального змісту

1. Прості та складені числові вирази. Значення числового виразу

1. Серед поданих числових виразів вказати прості та складені:

а) $23 + 4$;

-7;

$6^3 + 14,5$;

$\sqrt{3} + 8 : 2$;

$(23 - 1) \cdot 5$;

$58 - 7^2$;

$(25 : 5 + 4) - 8$;

б) $18 : 9$;

$(36 - 2)^2$;

$4\sqrt{7} - 5$;

$(30 : 6) + 1,8$;

$6 \cdot 2^4 - 12$;

$8,14$;

$-5^2 + 1,2$.

2. У числовому виразі $12 : 2 + 2 \cdot 2$ поставити дужки так, щоб його значення дорівнювало:

а) 6;

б) 2.

3. Поставити дужки у числовому виразі $1137 - 37 + 200$ так, щоб його значення дорівнювало 900.

4. Обчислити суму всіх різниць:

$230 - 110$; $320 - 230$; $410 - 320$.

5. Розв’язати кругові приклади:

а) $28 \cdot 3$ $9 + 19$ $12 \cdot 5$ $3 \cdot 9$ $81 : 9$ $84 - 72$ $27 \cdot 3$ $60 : 20$;

б) $460 - 239$ $390 - 165$ $225 + 235$ $363 + 27$ $221 + 683$ $904 - 541$.

6. Знайти значення числових виразів, у яких останньою є дія множення:

$3 \cdot 7 + 7$	$2 + 7 \cdot 5$	$8 - 3 \cdot 0$	$9 : 1 \cdot 1$
$7 + 3 \cdot 7$	$(2 + 7) \cdot 5$	$(8 - 3) \cdot 0$	$(10 - 1) \cdot 1$
$50 \cdot 10 : 100$	$300 : 10 \cdot 10$	$1 \cdot 1 \cdot 1 + 1$	$60 - 10 \cdot 2$

7. Записати добутки в порядку спадання без обчислення їх значень:

$27 \cdot 81$, $27 \cdot 15$, $15 \cdot 26$, $28 \cdot 82$, $14 \cdot 25$.

8. Використовуючи закони додавання, обчислити найзручнішим способом:

1) $109 + 36 + 191 + 64 + 27$,

2) $(30 + 7) + (10 + 3)$,

3) $(16 + 9) + 21$,

4) $3997 + 1586$;

5) $273 + 1227 + 154 + 446$,

6) $871 + 2475 + 89 + 325$,

7) $171 + (29 + 34)$,

8) $299 + 2348$.

9. Використовуючи правила віднімання, обчислити найзручнішим способом:

а) $(15 - 8) + (5 - 2)$,

$44 - (10 + 14)$,

$(47 - 14) - (6 - 3)$,

$63 - (28 - 7)$,

$(12 - 2) - (4 - 2)$,

$(15 + 17) - 5$,

$65438 - (5800 + 438)$,

$570\,049 - 4\,548 - 4\,452$,

$4567 - 699$,

б) (26 – 12) – (8 – 4),

82 – (20 + 12),

(34 + 49) – 3,

56 – (37 – 14),

(2033 + 544) – 1502,

(98765 – 399) + 235,

6321 – (1812 + 321),

(2096 + 539) – 2535,

7824 – 799.

10. Використовуючи закони множення, обчислити найзручнішим способом:

а) $(7 \cdot 3 \cdot 15) \cdot 4$;

$78 \cdot 62 - 67 \cdot 62$;

$(125 \cdot 3) \cdot (8 \cdot 37)$;

$25 \cdot (18 \cdot 4)$;

$25 \cdot 68$;

$77 \cdot 48 + 23 \cdot 48$;

$750 \cdot 120$;

$5 \cdot 456 \cdot 2$;

$(30 \cdot 7) \cdot (10 \cdot 3)$;

$15 \cdot 25 \cdot 50 \cdot 4$;

$8 \cdot 49 \cdot 125$;

$4 \cdot 67 \cdot 25$;

$44 \cdot 24$;

$7 \cdot (90 + 30)$;

$61 \cdot 101$;

$4488 \cdot 25$;

б) $67 \cdot 58 + 33 \cdot 58$;

$44 \cdot 46$;

$48 \cdot 52$;

$32 \cdot 1001$;

$648 \cdot 125;$

$424 \cdot 999;$

$125 \cdot 88;$

$903 \cdot 897;$

$(88 + 56) \cdot 125;$

$36 \cdot 48 + 14 \cdot 48;$

$73 \cdot 67;$

$301 \cdot 299;$

$2003 \cdot 1997;$

$289 \cdot 302;$

$65 \cdot 55,$

$97 \cdot 103;$

$655 \cdot 125 – 155 \cdot 125;$

$733 \cdot 335 + 300 \cdot 335 – 33 \cdot 335;$

$1504 \cdot 21 – 504 \cdot 21.$

11. Використовуючи правила ділення, обчислити найзручнішим способом:

а) $(36 + 64) : 10;$

$(243 + 81) : 9;$

$(121 – 44) : 11;$

$(474 – 141) : 3;$

$72 : 4;$

$(37 \cdot 36) : 12;$

$(72 \cdot 42) : 8;$

$256 : (16 \cdot 4);$

$405 : (81 : 2);$

$823 : 50 + 177 : 50;$

$(290 : 5) : 29;$

$369 : (41 : 3);$

б) $(36 + 66) : 6$;

$(154 + 42) : 7$;

$(856 – 444) : 4$;

$(1888 – 488) : 8$;

$56 : 4$;

$693 : 7$;

$(48 \cdot 23) : 24$;

$(63 \cdot 26) : 9$;

$(35 \cdot 18) : 7$;

$144 : (12 \cdot 4)$;

$(140 : 5) : 14$;

$125 + 375 : 25$.

12. Обчислити значення числового виразу раціональним способом і сформулювати теоретичні основи перетворень:

а) $3997 + 1586$;

$4567 – 699$;

$648 \cdot 25$;

$68 : 4$;

$(75 – 5 \cdot 15) : (39 + 11 \cdot 31)$;

$(85 + 24 \cdot 9) \cdot (21 \cdot 3 – 7 \cdot 9)$;

$2\,700 : (9 \cdot 25)$;

$(1\,400 \cdot 580) : (7 \cdot 29)$;

б) $299 + 2348$;

$324 – 89$;

$320 \cdot 48$;

$693 : 7$;

$(300 : 15) \cdot 5$;

$(543 – 379) \cdot (276 : 1 + 432 : 432 – 277) : 1246$;

$7824 - 799$;

$75 \cdot 12 + 24 \cdot 68 - 75 \cdot 2 - 24 \cdot 18 + 88 \cdot 25 - 78 \cdot 25$.

13. Порівняти значення поданих нижче виразів, не виконуючи обчислень, і обґрунтувати хід міркувань:

а) $343 \cdot 65$ і $343 \cdot 76$;

б) $254 \cdot 132$ і $132 \cdot 254$;

в) $43 \cdot 176$ і $34 \cdot 174$;

г) $41 \cdot 241$ і $0 \cdot 1321$;

д) $22 \cdot 41$ і $41 \cdot 22$;

е) $78 \cdot 15$ і $32 \cdot 13$.

14. Довести, що три останні цифри значення виразу $1993^3 + 7^3$ є нулями.

15. Зобразити число 100 числовим виразом, запис якого має п’ять цифр 5.

16. Зобразити число 30 числовим виразом, запис якого має три цифри 5.

17. Сформулювати числові вирази, записані символами:

а) $56 - 14$;

$123 : 3 - 45 \cdot 2$;

$5601 - (852 + 3250)$;

$890 + (21875 + 10540)$;

$589 \cdot 2 + 250 \cdot 3$;

$(15000 + 60485) - (25800 + 12000)$;

б) $64 + 25$;

$36 \cdot 5 + 147 : 7$;

$5601 - (852 + 3250)$;

$7200 : 90 - 810 : 30$;

$3200 + 58000 : 290$;

$(24000 - 9540) + (45600 - 30580)$.

18. Записати словосполучення у вигляді числового виразу:

1) суму чисел 5 і 7;

2) різницю чисел 8 і 3;

3) добуток чисел 15 і 4;

4) частку чисел 12 і 4 ;

5) півдобуток чисел 8 і 3;

6) півсуму чисел 10 і 4;

7) піврізницю чисел 10 і 6;

8) подвоєний добуток 8 і 4;

9) добуток трьох чисел, кожне з яких 7;

10) частку суми чисел 9 і 7 та 4;

11) зменшуване 45, а від'ємник є сумою чисел 12 і 5;

12) суму добутків чисел 3 і 5 та 6 і 7;

13) квадрат суми чисел 8 і 4;

14) суму квадратів чисел 8 і 4;

15) різницю кубів чисел 8 і 4;

16) куб різниці чисел 8 і 4;

17) суму кубів чисел 8 і 4;

18) куб суми чисел 8 і 4;

19) подвоєну частку чисел 10 і 5;

20) ділене 55, а дільник є різницею чисел 12 і 7;

21) різницю часток чисел 120 і 10 та 8 і 4;

22) різницю квадратів чисел 10 і 5.

19. Записати у вигляді числового виразу і обчислити його значення:

1) Суму чисел 354 і 175 збільшити на 644;

2) Число 83 збільшити на суму чисел 76 і 39;

3) До суми чисел 345 і 55 додати число 764;

4) До числа 476 додати суму чисел 276 і 456;

5) Суму чисел 354 і 175 зменшити на 64;

6) Число 283 зменшити на суму чисел 76 і 39;

7) Від суми чисел 345 і 55 відніми число 64;

8) До числа 476 додати різницю чисел 676 і 456;

9) Від суми чисел 3 407 і 47 відняти їх різницю;

10) Різницю чисел 43 і 34 збільшити на 68;

11) До різниці чисел 87 в 43 додати їх суму;

12) Число 54 збільшити на різницю чисел 97 і 64;

13) Суму чисел 35 і 15 збільшити у 4 рази;

14) Число 83 збільшити на добуток чисел 76 і 39;

15) До добутку чисел 45 і 55 додати число 64;

16) До числа 476 додати добуток чисел 20 і 56;

17) Добуток чисел 34 і 50 збільшити на 87;

18) Число 43 зменшити на добуток чисел 65 і 4;

19) Різницю чисел 78 і 34 збільшити у 5 разів;

20) Від добутку чисел 12 і 6 відняти 30;

21) Добуток чисел 14 і 32 зменшити на 59;

22) Від числа 67 відняти добуток чисел 3 і 14;

23) Добуток чисел 54 і 13 збільшити на їх різницю;

24) Добуток чисел 65 і 25 зменшити на їх різницю;

25) Суму чисел 73 і 27 збільшити у 4 рази і зменш на 300;

26) Добуток чисел 25 і 40 зменшити на 120 і збільш у 3 рази;

27) Частку чисел 344 і 4 зменшити на 64;

28) Число 283 зменшити на частку чисел 75 і 3;

29) Суму чисел 345 і 55 зменшити у 10 разів;

30) До частки чисел 116 і 2 додати їх добуток;

31) Число 920 поділити на добуток чисел 10 і 2;

32) Частку чисел 432 і 12 збільшити на 68;

33) Суму чисел 784 і 4 зменшити на їх частку;

34) Число 54 збільшити на частку чисел 98 і 49;

35) Від суми чисел 18 628 і 14 539 відняти різницю цих самих чисел;

36) Від числа 34 687 відніми різницю чисел 49 305 і 19 876;

37) Від різниці чисел 6 117 845 і 5 961 047 відняти число 36 483;

38) Зменшити різницю чисел 14 320 і 8 964 на 2 645;

39) Збільшити суму чисел 945 і 637 на різницю тих самих чисел;

40) Збільшити різницю чисел 5 678 і 4 789 у 91 раз.

2.Числові вирази з натуральними та цілими числами

20. Обчислити значення числових виразів з натуральними числами:

1) $171 \cdot 342 : 57 - 15 \cdot (7\,000 - 6\,988) : 36$;

2) $27 \cdot 81\,098 - 61\,098 : (1\,301 - 18 \cdot 39)$;

3) $(101 \cdot 101 - 652\,864 : 808) : 303 \cdot 205$;

4) $(345\,465 : 853 + 200\,007 : 639) - 109 \cdot 29$;

5) $(18 \cdot 93 - (1\,927 - 1\,873) \cdot 31) : 56 + 10$;

6) $(5\,640\,333\,486 : 349 - 5\,754\,528 : 7\,632 \cdot 14\,544) \cdot 500 - 1\,310\,700\,000$;

7) $((83\,325 - 26\,719\,146 : 426) \cdot 170 + 12\,814\,173 : 381) \cdot 7 - 390 \cdot 787$;

8) $((5672 - 4968) \cdot 70 - (9020 - 7996) : 16) \cdot 100 + 9600 \cdot 408 - 781170 : 390$;

9) $(((537\,476\,146 - 437\,555\,836) : 245 - 76\,531\,740 : 730) \cdot 546) : 735\,280$;

10) $(188 - 65) \cdot 1\,034 + 101 \cdot (505 : 5 + 8\,008 - 2\,345) \cdot (4726 - 4\,715)$.

21. Скласти числові вирази, щоб знайти:

а) на скільки різниця чисел 7 145 і 3 938 більша від частки чисел 975 і 15;

б) на скільки частка чисел 545 і 5 менша від суми чисел 976 і 894;

в) у скільки разів різниця чисел 7 995 і 7 852 менша від різниці чисел 10305 і 6158;

г) у скільки разів сума чисел 583 і 7 802 більша від різниці чисел 1265 і 1252;

д) на скільки сума чисел 2 786 і 456 більша від частки чисел 1 436 і 4;

е) на скільки різниця чисел 7 145 і 3 938 більша від суми чисел 976 і 894;

є) на скільки різниця чисел 6 545 і 5 938 менша від суми чисел 976 і 894;

ж) на скільки різниця чисел 2 102 і 867 менша від різниці чисел 5 702 і 42;

з) на скільки сума чисел 1 234 і 5 678 більша від різниці чисел 3452 і 2987;

и) на скільки сума чисел 2 786 і 456 більша від суми чисел 1 436 і 234.

22. Знайти значення числа x, для якого:

1) $|\,x\,| = 9$;

2) $| x | = 20$;

3) $| x | = 0$;

4) $| x | = -3$;

5) $| x | = -8$.

23. Позначити на координатній прямій цілі числа, модулі яких дорівнюють:

1) 3; – 8; 0.

2) – 4; 10; 5.

24. Позначити на координатній прямій усі цілі числа x, які задовольняють наступні умови:

1) $| x | < 9$;

2) $| x | > 2$;

3) $| x | < 0$;

4) $| x | > -4$;

5) $| x | > 0$;

6) $| x | < -2$;

7) $| x | > -9$;

8) $| x | \geq 0$;

9) $| x | > 1$;

10) $| x | \leq 5$.

25. Обчислити значення числових виразів з цілими числами:

1) $-2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 5$;

2) $3 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) - (-5) \cdot 7$;

3) $(-18 + 23 - 16 + 9) \cdot (-18)$;

4) $210 : (-7) + (-13) \cdot (-6) - 45$.

26. Обчислити значення числового виразу з модулем цілих чисел:

1) $|-8| - |-5|$;

2) $-|240| : (-|80|)$;

3) $-|-10| \cdot |15|$;

4) $|-710| + |-290|$

5) $|-27| : |9|$;

6) $|-30|+|52|$;

7) $|18|+|-15|$;

8) $-|-49|:|-7|$.

3. Числові вирази з раціональними числами

27. Знайти значення числового виразу з раціональними числами:

1) $\dfrac{(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11})\cdot 3}{(1{,}5+\frac{1}{4}):18\frac{1}{3}}$;

2) $\left((\frac{7}{9}-\frac{47}{72}):1{,}25+\frac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\frac{19}{25}$;

3) $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43$;

4) $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$;

5) $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}$;

6) $\dfrac{3{,}75:1{,}5+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{3}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}$;

7) $\left[\dfrac{\left[\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right]:1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):\frac{1}{8}+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}\right]$;

8) $\dfrac{\left[\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right]\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}$;

9) $(-4{,}5 + 3{,}8) \cdot (2{,}01 - 3{,}81)$;

10) $1 : 2{,}5 + 1{,}44 : 3{,}6 + 3{,}6 : 1{,}44 \cdot (0{,}1 - 0{,}02)$;

11) $((2{,}71 \cdot 0{,}43 + 7{,}152) \cdot 2{,}32) : 0{,}25 + (3{,}191 + 2{,}45 - 1{,}218) : 0{,}125$;

12) $(0{,}45 : 0{,}9 + 0{,}9 : 0{,}45 + 1{,}5 : 3 + 0{,}242 : 0{,}11) : (2{,}3 - 1{,}26)$;

13) $(90{,}09 : 91 + 3{,}774 : 0{,}34) : (232{,}31 : 17{,}87 + 186{,}85 : 5{,}05)$.

4. Числові вирази з ірраціональними та дійсними числами

28. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{27}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[4]{32}$; $\sqrt[3]{81}$.

2) $\sqrt{125}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{625}$; $\sqrt[4]{48}$.

29. Внести множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{7}$; $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[4]{2}$;

2) $4\sqrt{3}$; $3\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[4]{7}$.

30. Знайти значення числового виразу з ірраціональними числами у вигляді коренів:

1) $(\sqrt{12} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$;

2) $(\sqrt{18} + \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$;

3) $(2\sqrt{18} + 3\sqrt{8}) + (3\sqrt{32} - \sqrt{50})$;

4) $(2\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{18}) + (\sqrt{72} - \sqrt{80})$;

5) $5\sqrt{8} - 2\sqrt{50} + 5$;

6) $(\sqrt{8} + \sqrt{12}) : 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

7) $(2\sqrt{3} + 1) \cdot (2\sqrt{3} - 1)$;

8) $(4 + 3\sqrt{7}) \cdot (3\sqrt{7} - 4)$;

9) $(2 - \sqrt{3}) \cdot (4 + 2\sqrt{3})$;

10) $(6 - 3\sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})$;

11) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{10}$;

12) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$;

13) $8\sqrt{2\frac{3}{4}}+\sqrt{44}-12\sqrt{\frac{11}{9}}$;

14) $4\sqrt{7\frac{1}{2}}-\frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}$;

15) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$;

16) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}}$;

17) $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

18) $\frac{\sqrt{31+8\sqrt{15}}}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

19) $\frac{\sqrt{27}-\sqrt{21}-\sqrt{15}}{3-\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;

20) $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{30}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{8}}$.

31. Знайти значення числового виразу з ірраціональними числами у вигляді степенів:

1) $\frac{89+8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$;

2) $97\cdot 25^{-1}+\frac{25^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{-1}\cdot 125^{\frac{1}{3}}-9^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{64})^{\frac{-1}{3}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}}-216^{-\frac{1}{3}}}$;

3) $(2^{10}\cdot 3^{6}-9^{2}\cdot 16^{2}):24^{3}$;

4) $(\frac{1}{10})^{-1}:(\frac{2}{5})^{2}:(0{,}4)^{-1}\cdot 0{,}2^{2}$;

5) $\frac{0{,}1^{-1}-0{,}4^{0}}{2\frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{-3}+(-\frac{1}{3})^{-1}}$;

6) $$\frac{2\cdot 4^{-2}+(81^{-\frac{1}{2}})^{3}\cdot(\frac{1}{9})^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot(\frac{1}{5})^{-2}+(\sqrt{3})^{0}\cdot(\frac{1}{2})^{-2}}.$$

32. Порівняти:

1) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{6}$;

$\sqrt{5}$ і $\sqrt[3]{11}$;

$\sqrt[5]{6}$ і $\sqrt[10]{35}$;

2) $\sqrt{11}$ і $\sqrt{15}$;

$\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt{3}$;

$\sqrt[7]{5}$ і $\sqrt[21]{120}$.

33. Спростити вирази:

1) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$;

2) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

34. Спростити вирази з радикалами:

1) $\sqrt{(-41)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$;

2) $\sqrt{(-37)^2}$; $\sqrt{(\sqrt{6}+3)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}+\sqrt{(5\sqrt{2}-7)^2}$.

4) $\sqrt{(2\sqrt{10}-7)^2}-\sqrt{(3\sqrt{10}-10)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{8})^2}$.

35. Визначити, якій числовій множині належить значення числового виразу:

1) $(2\sqrt{7})^2-3\sqrt{2{,}25\cdot 900}$;

2) $(3\sqrt{5})^2-2\sqrt{6{,}25\cdot 400}$;

3) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$;

4) $\sqrt{12}\ \cdot\ \sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$;

5) $\sqrt{(8-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$;

6) $\sqrt{(6-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$;

7) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$;

8) $\dfrac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}$;

9) $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2$;

10) $\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^2$.

36. Виконати дії над дійсними числами:

1) 2,5 – 4,9 + (– 3,7) – (– 5,8);

2) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}):(-2)-16\frac{1}{4}:(-4)$;

3) $5:(-(-\frac{1}{12}):(-\frac{1}{4})+\frac{1}{6}:(-2))+1\frac{1}{3}$;

4) 2,3 · (– 1,8) – 1,4 · (– 0,8) · (– 1,5);

5) (– 4,5 + 3,8) · (2,01 – 3,81);

6) (2,8 – 3,9) · (– 4,3 – 2,6);

7) – 4,5 · 0,1 + (– 3,7) · (– 2,1);

8) – 3,8 · (– 1,5) – (– 1,2) · 0,5 – 6,5;

9) – 2,321 · (– 3,2 + 2,3 – 4,8 + 6,7) – 1,579;

10) (10,8 – 12) · (6,7 – 9);

11) – 2,79 : 3,1 + 24,24 : 2,4;

12) (11,3 – 13) · (5,8 – 8);

13) 2,07 · (– 2,3) + 13,13 : 1,3;

14) (16,7 – 12) · (21,5 – 24);

15) (1 – 1,5 · 1,4) · (– 2,8);

16) (18,6 – 14) · (31,5 – 34);

17) (1 – 1,3·1,6)·(–3,2) – 5,4 · (– 0,2);

18) | 1,34 + (– 4,71) |;

19) | 6,35 | + | 1 – 4,96 |;

20) | 1,3 · (– 4,1) |;

21) – | – 6,8 | : | 1 – 0,96 |;

22) | (– 4,3)(· | – 7,6) | |.

5.Числові рівності та встановлення їх істинності

37. Встановити істинність числових рівностей:

1) (232323 + 323232) : 555 = 11;

2) (700603 – 145048) : 5 = 111111;

3) (451 576 + 103 979) : 55 = 111;

4) (414 141 + 141 414) : 55 = 10 101.

38. Пояснити, як побудована кожна з пірамід числових рівностей:

11 · 11 = 121;

111 · 111 = 12 321;

1 111 · 1 111 =….

37 · 3 = 111;

37 · 6 = 222;

37 · 9 = 333.

3 367 · 33 = 111 111;

3 367 · 66 = 222 222;

3 367 · 99 = 333 333;

3 367 · 132 = 444 444;

3 367 · 165 = 555 555;

$$3\,367 \cdot 198 = 666\,666;$$

$$3\,367 \cdot 231 = 777\,777;$$

$$3\,367 \cdot 264 = 888\,888;$$

$$3\,367 \cdot 297 = 999\,999;$$

$$1 \cdot 9+2 = 11;$$

$$12 \cdot 9+3 = 111;$$

$$123 \cdot 9+4 = 1\,111;$$

$$1\,234 \cdot 9+5 = 11\,111;$$

$$12\,345 \cdot 9+6 = 111\,111;$$

$$123\,456 \cdot 9+7 = 1\,111\,111;$$

$$12\,34\,567 \cdot 9+8 = 11\,111\,111.$$

$$1 \cdot 8+1 = 9;$$

$$12 \cdot 8+2 = 98;$$

$$123 \cdot 8+3 = 987;$$

$$1\,234 \cdot 8+4 = 9\,876;$$

$$12\,345 \cdot 8+5 = 98\,765;$$

$$1\,234\,556 \cdot 8+6 = 987\,654;$$

$$1\,234\,567 \cdot 8+7 = 9\,876\,543.$$

39. Між числами вставити знаки арифметичних дій і дужки так, щоб отримати істинні числові рівності:

1…2…3…4 = 1;	8…3…5…1 = 6;
1…2…3…4…5 = 1;	1…2…3…4…5…6 = 1;
8…2…4 = 4;	8…2…4 = 1;

$12\ldots3\ldots4 = 40$;

$12\ldots3\ldots4 = 60$;

$12\ldots3\ldots4 = 0$;

$28\ldots6\ldots4 = 18$,

$28\ldots4\ldots6 = 26$;

$28\ldots6\ldots4 = 38$;

$3\ldots6\ldots2 = 9$;

$5\ldots4\ldots13 = 33$;

$8\ldots4\ldots2 = 6$;

$8\ldots4\ldots2 = 2$;

$12\ldots3\ldots4 = 24$;

$12\ldots3\ldots4 = 32$;

$12\ldots3\ldots4 = 36$;

$28\ldots6\ldots4 = 30$;

$28\ldots6\ldots4 = 26$;

$28\ldots4\ldots6 = 30$;

$7\ldots3\ldots9 = 30$;

$8\ldots3\ldots8 = 32$;

$8\ldots2\ldots4 = 16$;

$5\ldots5\ldots5 = 6$.

40. Встановити, чи правильними є числові рівності з натуральними числами:

$69 \cdot 57 : 437 + 1247 = 72 \cdot 58 : 464 + 1346$;

$4512 : 94 \cdot 58 = 2179 + 55 \cdot 11$;

$3204 : 89 + 11569 = 247 \cdot 5 + 20720 : 56,3^2 + 4^2 = 5^2$;

$15^2 + 16^2 = 17^2$;

$35^2 + 36^2 = 37^2$;

$60^2 + 899^2 = 901^2$;

$65^2 + 2112^2 = 2113^2$;

$4^3 + 6^2 = 10^2$;

$3^3 + 3^2 = 62$;

$972 - 96^2 = 97 + 96$;

$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2$;

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

41. Встановити, чи правильними є числові рівності з раціональними числами:

1) $\left(1\frac{2}{5} + 3,5 : 1\frac{1}{4}\right) : 2\frac{2}{5} + 3,4 : 2\frac{1}{8} - 0,35 = \left(\left(21,85 : 43,7 + 8,5 : 3,4\right) : 4,5\right) : 1\frac{2}{5} + 1\frac{11}{21}$;

2) $\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$ = $\frac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\frac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}$ **;**

3) $\frac{(4{,}561+5{,}439)\cdot 0{,}1}{(7{,}01-5{,}01):0{,}5}-\frac{(4{,}45-2{,}2):0{,}3}{(0{,}823+0{,}177)\cdot 30}$ = 25,6;

4) $52:(\frac{6:(0{,}4-0{,}2)}{2{,}5\cdot(0{,}8+1{,}2)}+\frac{(34{,}06-33{,}81)\cdot 4}{6{,}84:(28{,}57-25{,}15)})-8$ = 0;

5) $24{,}57:3{,}5+(3{,}35-2\frac{13}{15}+\frac{5}{8})\cdot(225:12{,}5-3\frac{14}{19}\cdot 2)$ = – 2;

6) $(17\frac{1}{18}\cdot 3{,}6-0{,}476:14):(0{,}009\cdot 8700-120:4\frac{2}{7})+0{,}306:0{,}3$ = 15;

7) $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3{,}75:1\frac{1}{2}\right):2{,}2$ = 10.

42. Встановити, чи правильними є числові рівності з ірраціональними числами:

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$;

2) $\sqrt[5]{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[10]{\sqrt{5}+2}=\sqrt{5}-2$;

3) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;

4) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt{5}}$.

6.Числові нерівності та встановлення їх істинності

43. Поставити між числовими виразами з натуральними числами знаки «>», «<», «=» так, щоб отримати істинні висловлювання:

а) 573 + 289 579 + 284;

573 – 289 579 – 284;

25 – 5 : 5 24;

245 – (45 + 28) 245 – (17 + 28);

(86 – 0 : 12) : 43 : 2 543 – (543 – 1);

	892 – 648	352 – 108;
б)	343 – 256	544 – 457;
	638638 : 638	393393 : 393;
	145 : 5	435 : 15 + 5;
	296 + 104 : 4	(296 + 104) : 4;
	1546 – 789	1 093 – 454;
	2 · 20 + 5 · 2	50.

44. Серед наступних числових нерівностей вказати правильні:

1) $$\left[\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124 \quad > \quad \frac{12{,}8:0{,}64+3{,}05:0{,}05}{8\frac{2}{3}:1\frac{4}{9}-1};$$

2) $$\frac{203{,}4:9-(5{,}39-7{,}39)}{\frac{3}{14}\cdot\frac{7}{9}-\frac{1}{3}} \quad < \quad \frac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\frac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)};$$

3) $$\left(\frac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\right)\cdot 5{,}2:\left(\frac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right) \quad > \quad \frac{(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11})\cdot 3}{(1{,}5+\frac{1}{4}):18\frac{1}{3}}.$$

7. Буквені вирази та їх види. Область допустимих значень виразу. Значення виразу для певних значень змінної

45. Навести по три приклади:

а) цілих буквених виразів;

б) дробових буквених виразів;

в) раціональних буквених виразів;

г) ірраціональних буквених виразів.

46. Вказати вид виразу та знайти його область допустимих значень (ОДЗ):

а) $5x - 13$;

$7y - 1$;

$\frac{5}{x}$;

$\frac{3x+1}{7}$;

$\frac{a^2-4}{2b+3}$;

$a+\frac{1}{5b}$;

$\frac{x+1}{x-2}$;

$\frac{2y}{3-y}-\frac{y^2-9}{y+4}$;

$\frac{x+5}{x^2+2}$;

$\frac{x+7}{x^2}+\frac{x^2-25}{x-2}$;

$\sqrt{x+4}$

$\sqrt[5]{x+14}$

б) $25+15y$;

$18+3x$;

$\frac{6}{y}$;

$\frac{8}{1+c}$;

$\frac{5m}{a^2}$;

$\frac{2x-8}{6-3x}$

$\frac{4x-1}{10}$

$\frac{x+8}{3x-2}+\frac{7}{x+4}$

$\frac{y-2}{y^2+3}$;

$\frac{4x}{x^2}-\frac{6}{x^2-9}$;

$\sqrt{5-x}$

$\sqrt[3]{8x+7}$

47. Знайти значення буквеного виразу *7 – 0,5x* для значень змінної *x = – 2, 3, 0, – 4, – 5.*

48. Знайти значення буквеного виразу *1,5x + 5* для значень змінної *x = – 3, 8, 0, – 3, – 6.*

49. Знайти значення буквеного виразу для заданого значення змінної:

1) $\frac{x-3}{x^2+3x}-\frac{x+3}{x^2-3x}-\frac{4x}{x^2-9}$, якщо $x = 7$;

2) $\frac{m+2}{m}:\left(\frac{m}{m-2}-\frac{4}{m^2-2m}\right)$, якщо m = 3;

3) $\frac{2}{n+2}+\frac{n+5}{n^2-4}-\frac{3n+1}{2n-4}$, якщо n = 5;

4) $\frac{2}{n+3}+\frac{n+2}{n^2-9}-\frac{3n+1}{2n-6}$, якщо n = 2.

50. Чи є тотожними буквені вирази *4 (x – 2)* *і* *– 8 + 4x?*

51. Чи є тотожними буквені вирази *5 (x + 3)* *і* *15 + 5x?*

52. Чи є тотожними буквені вирази *7 (x – 4)* *і* *– 29 + 7x?*

53. Чи є тотожними буквені вирази *8 (2x + 5)* *і* *42 + 6x?*

8. Тотожні перетворення виразів з однією змінною

54. Спростити цілий вираз з однією змінною:

1) $(3b - 2)(5 - 2b) + 6b^2$;

2) $(7y - 4)(2y + 3) - 13y$;

3) $(1 - x + 4x^2 - 8x^3) + (2x^3 + x^2 - 6x - 3) - (5x^3 - 8x^2)$;

4) $(0{,}5a - 0{,}6a^2 + 5{,}5) - (-0{,}5a + 0{,}4a^2) + (1{,}3a - 4{,}5)$;

5) $(a - 4)(a + 4) + (2a - 1)^2$;

6) $(b - 3)(b + 3) - (b + 2)^2$;

7) $(2x + 1)^2 - (x + 7)(x - 3)$;

8) $(3y-2)^2-(y-9)(y-4)$.

55. Розкласти многочлен на множники:

1) $4x^2-25$;

2) $6a^2-24$;

3) $3x^2+6x+3$;

4) $6p^2+24+24p$;

5) $8a^3-8$;

6) $9x^3-9$;

7) $27a^3+125b^3$;

8) $8x^3+216$;

9) $x^2-11x+30$;

10) y^2+6y+5;

11) $2x^2-5x+3$;

12) $5y^2+2y-3$.

56. Скоротити дробовий вираз із змінною:

1) $\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$;

2) $\frac{y^2-5y-24}{7y-56}$;

3) $\frac{a^2-10a+9}{a^2-6a-27}$;

4) $\frac{a^2-9a+8}{a^2-11a+24}$;

5) $\frac{a^2-10a+9}{a^2-6a-27}$;

6) $\frac{x^2-5x+4}{7x-7}$.

57. Спростити дробові вирази зі змінною за допомогою тотожних перетворень:

1) $\frac{a}{6a}+\frac{a-2}{6a}$;

$\frac{y+2}{6y}+\frac{y}{6y}$;

$\frac{x+5}{x+7}+\frac{15}{x-14}$;

$\frac{6b+2}{b}-\frac{9b+2}{b}$;

$\frac{5a-3}{3a+1}+\frac{a+5}{3a+1}$;

$\frac{a+6}{4a+8}+\frac{a+2}{8-4a}+\frac{2a}{a^2-4}$;

$\frac{a+3}{4a+4}-\frac{a+1}{4a-4}-\frac{a}{1-a^2}$;

$\frac{x^2-25}{x^2-6x}:\frac{x^2+5x}{x^2-36}$;

$\frac{a^2-4a}{36a^2-1}:\frac{a^4-64a}{36a^2-12a+1}$;

2) $\frac{5b}{14}-\frac{2b}{6}$;

$\frac{c+4}{3c}-\frac{2}{2c^2}$;

$\frac{c-4}{4c}-\frac{8}{3c^2}$;

$\frac{2y}{3-y}-\frac{y^2-9}{y+4}$;

$\frac{-a}{a+4}-\frac{4}{a+4}$;

$\frac{4b}{b-5}-\frac{20}{b-5}$;

$\frac{x^2-16}{x^3-x^2}\cdot\frac{x^2-9}{x^2+4x}$;

$\frac{m+2}{m}:\left(\frac{m}{m-2}-\frac{4}{m^2-2m}\right)$;

$\frac{12a-4a^2}{2a+3}+\frac{1}{2a-3}:\left(\frac{4}{4a^2-9}-\frac{6a-9}{8a^3+27}\right)$.

58. Спростити ірраціональні вирази зі змінною за допомогою тотожних перетворень:

1) $\sqrt[3]{2x^4\sqrt[4]{x}}$;

2) $\sqrt[5]{3x\sqrt[3]{x}}$;

3) $\sqrt[6]{x^4\sqrt[5]{x}}$;

4) $\sqrt[7]{x^5\sqrt{x}}$;

5) $\frac{1}{1+2\sqrt{x}}+\frac{1}{1-2\sqrt{x}}-\frac{32x^2+4}{1-64x^3}$;

6) $\frac{2\sqrt{x}+3}{4x+6\sqrt{x}+9}:\frac{1}{8\sqrt{x^3}-27}$;

7) $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{4\sqrt{a}}{a-1}\right):\frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}}$;

8) $\frac{x-25}{x-5\sqrt{x}+25}:\frac{\sqrt{x}-5}{x\sqrt{x}+125}$.

59. Довести тотожність:

1) $\left[\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right]:\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right]:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}=\left[\left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\frac{a^2-2a}{4-a}+\frac{a+8}{a+2}\right]\cdot(a+2)$

2) $\frac{5-x^{-0,5}}{1+\sqrt{x}}-\frac{5\sqrt{x}+x^{-0,5}}{x-1}=\frac{-6\sqrt{x}-1}{\sqrt{x(x-1)}}$.

9. Тотожні перетворення виразів зі змінними

60. Спростити цілий вираз зі змінними:

1) $(3b-2a)(5a-2b)+6a^2-b^2$;

2) $(7y-4x)(2y+3x)-15xy$;

3) $(y-y^3+4x^2-8x^3)+(2x^3+x^2-6y-3y^2)-(5x^3-8y^2)$;

4) $(0,5a-0,6b+5,5)-(-0,5a+0,4b)+(1,3b-4,5)$;

5) $(a-4b)(a+4b)+(2a-b)^2$

6) $(b-3a)(b+3a)-(b+2a)^2$

7) $(2x + 3y)^2 - (x + 7y)(x - 3y)$;

8) $(x - 4y) + (2x + 3y)^2 - (9x^2 + 4y^2)$;

9) $4{,}5(5x - 1{,}2y - 2{,}6) - (1{,}5x - 1)^2 + (2y + 3)^2$;

10) $-6{,}5(5x^2 - 17y^2 - 4{,}6) - (0{,}5x - 3)^2 + (2y + 0{,}3x)^2$;

11) $(2y - 5x)(12y + 5x) - (5x - 3y)(4x + 2y) - 15xy + 6$;

12) $(3y - y^2 + 5x^3 - 7x^3) - (12x^3 - 5x^2 - 4y^2 - 3y^3) - (15x^3 + 18y^3)$;

13) $(8y + 5x)^2 - (3y + 7x)(3y - 7x) + 3xy - 12$;

14) $(3y - 2x)^2 - (y - 9x)(y + 2x) + 24xy$.

61. Розкласти многочлен на множники:

1) $mx^2 - my^2$;

2) $6a^2 - 24b^2$;

3) $3x^2 + 6xy + 3y^2$;

4) $6p^2 + 24q^2 + 24pq$;

5) $8a^3 - 8b^3$;

6) $9x^3 + 9y^3$;

7) $4xy + 12y - 4x - 12$;

8) $60 + 6ab - 30b - 12a$;

9) $x^2 - 18xy + 81y^2$;

10) $y^2 + 8yz + 16z^2$;

11) $4x^2 - 4xy + y^2$;

12) $25y^2 + 10y - x^2$.

62. Скоротити дробовий вираз зі змінними:

1) $\frac{15a^2 - 10ab}{8b^2 - 12ab}$;

2) $\frac{25x^2 - 20xy}{16y^2 - 20xy}$;

3) $\frac{ax + 2x - 3a - 6}{ax - 8a + 2x - 16}$;

4) $\frac{a^3 - 9ab^2}{a^2 - 3ab}$;

5) $\dfrac{4c^2+10cd}{4c^3-25cd^4}$;

6) $\dfrac{24x^4+3xy^3}{12x^2+6xy}$;

7) $\dfrac{x^2y-3xy}{x^2-5x+6}$;

8) $\dfrac{y^2-5y-24}{7yx-56x}$;

9) $\dfrac{15a^2-10ab}{8b^2-12ab}$;

10) $\dfrac{25x^2-20xy}{16y^2-20xy}$;

11) $\dfrac{ax+2x-3a-6}{ax-8a+2x-16}$;

12) $\dfrac{a^3-9ab^2}{a^2-3ab}$;

13) $\dfrac{4c^2+10cd}{4c^3-25cd^4}$;

14) $\dfrac{24x^4+3xy^3}{12x^2+6xy}$.

63. Спростити дробовий вираз зі змінними:

1) $\dfrac{2m}{3c}+\dfrac{3m}{6c}$;

2) $\dfrac{m}{abc}+\dfrac{c}{abm}$;

3) $\dfrac{1-ab}{abc}-\dfrac{1-ad}{acd}$;

4) $\dfrac{11}{5a}-\dfrac{2c}{15ab}$;

5) $\dfrac{2x}{6t}\cdot\dfrac{3t}{2x}$;

6) $\dfrac{4x}{3t}\cdot\dfrac{3t}{2x}$;

7) $\dfrac{15a^3}{b}\cdot\dfrac{b^2}{25a}$;

8) $\frac{4x-3}{y}\cdot\frac{y^2}{3-4x}$;

9) $\frac{m}{10n}:\frac{m}{5n}$;

10) $\frac{m}{5n}:\frac{4m}{15n}$;

11) $\frac{m^4}{m-2a}\cdot\frac{2a-m}{m^3}$;

12) $\frac{a^2-64}{b^3}\cdot\frac{b}{a-8}-\frac{1}{b^2}$.

64. Виконати тотожні перетворення дробових виразів з двома змінними:

1) $\left[\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)+\left(\frac{ab}{a+b}-a\right)\right]:\frac{a^2b}{a^2-b^2}$;

2) $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}\cdot\frac{a+b}{2}$;

3) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\frac{bc}{(a+b+c)^2}$;

4) $\frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)-\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{2b}{a+b}$;

5) $\left(\frac{2x}{4x^2-y^2}+\frac{1}{y-2x}\right):\left(\frac{2x}{2x+y}-\frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right)$. ;

6) $\frac{x^2-xy}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$.

65. Спростити ірраціональні вирази з двома змінними:

1) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(a-b)+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}:\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$;

3) $\frac{x-y}{x^{0,5}-y^{0,5}}-\frac{x^{1,5}-y^{1,5}}{x-y}$;

4) $$\left(\frac{\boldsymbol{x}^{0,5}+3\boldsymbol{y}^{0,5}}{\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^{0,5}\boldsymbol{y}^{0,5}+\boldsymbol{y}}+\frac{\boldsymbol{x}^{0,5}-3\boldsymbol{y}^{0,5}}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{x}^{0,5}-\boldsymbol{y}^{0,5}}{2}.$$

66. Спростити вираз зі змінними та знайти його значення для вказаних значень змінних:

1) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)\dfrac{3}{m-n}$ при $m = 10$, $n = 27$;

2) $\left[\dfrac{1}{(m+n)^2}\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)+\dfrac{2}{(m+n)^3}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)\right]\cdot m^2n^2$ при $m = 5$, $n = 8$;

3) $\dfrac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+\dfrac{10(ax-3x^2)}{a^2-9x^2}$ при $a = 4$, $x = 3$;

4) $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{\left(a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2\right)\cdot(a-b)}{\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)\cdot\left(a^3+b^3+a^2b+ab^2\right)\left(a^3-b^3\right)}$ при $a = 5$, $b = 9$.

5) $\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{a}}}:\left(\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{a}}}-\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}\right)$ при $a = 9$, $b = 16$;

6) $\dfrac{(a-b)^2}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\dfrac{a^2+b^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}$ при $a = 4$, $b = 25$.

67. Встановити, чи залежить числове значення виразу зі змінними від надання змінним певних числових значень:

1) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\dfrac{a-b-c}{abc}\cdot\dfrac{2}{a^2-ab-ac}$;

2) $\left[a-\left(\dfrac{(16-a)a}{a^2-4}+\dfrac{3+2a}{2-a}+\dfrac{3a-2}{a+2}\right):\dfrac{a-1}{a\left(a^2+4a+4\right)}\right]\cdot\dfrac{a-1}{3a}$;

3) $\left[\dfrac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)\right]\cdot\dfrac{b-2a}{b+1}$.

68. Чи є тотожностями наступні рівності:

1) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+1\right)^2}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-1}{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{a}{b}+1}:\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}+1}{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a}{b}+1}=\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a+b}{a-b}$;

2) $\frac{x^3+y^3}{x+y}:\left(x^2-y^2\right)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2} = \left[\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}\right]\cdot\frac{2x-5y}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}:\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right) = \left(\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}\right):\frac{2\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$;

4) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}+\frac{b}{a-\sqrt{ab}}-\frac{a}{b+\sqrt{ab}}\right) = \frac{(a-b)^2}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}+\frac{a^2+b^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}$;

5) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)-\frac{2ab-4a^2}{2a+b} =$

$= \left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{ab+b^2}\right):\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right)-\frac{b-a}{b}.$

РОЗДІЛ 2. Алгебраїчні поняття предикативного змісту

11. Розв'язування найпростіших рівнянь з однією змінною на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій

1. Розв'язати рівняння на основі зв'язку між компонентами арифметичних дій та залежностями між ними:

1) $68 + x = 112$;

2) $x + 132 = 400$;

3) $x – 42 = 256$;

4) $77 – x = 15$;

5) $x \cdot 6 = 666$;

6) $17 \cdot x = 510$;

7) $x : 24 = 510$;

8) $125 : x =25$.

2. При яких значеннях змінної x числове значення різниці $35 – 5x$ дорівнює числу 10?

3. При яких значеннях змінної x числове значення різниці $7x + 9$ дорівнює числу 5?

4. Яке число від множення на 7 збільшується на 30?

5. Яке число від ділення на 6 зменшується на 1?

6. Записати у вигляді рівнянь і розв'язати їх:

1) Яке число треба збільшити на 45, щоб отримати 165;

2) На скільки треба збільшити 24, щоб отримати 236;

3) До якого числа треба додати 38, щоб отримати 67;

4) Яке число треба додати до 87, щоб отримати 427;

5) Яке число треба зменшити на 45, щоб отримати 165;

6) На скільки треба зменшити 248, щоб отримати 136;

7) Від якого числа треба відняти 38, щоб отримати 67;

8) Яке число треба відняти від 847, щоб отримати 427;

9) Яке число треба збільшити у 5 разів, щоб отримати 165;

10) У скільки разів треба збільшити 24, щоб отримати 96;

11) Яке число треба помножити на 38, щоб отримати 190;

12) На яке число треба помножити 87, щоб отримати 261;

13) Яке число треба зменшити у 2 рази, щоб отримати 502;

14) У скільки разів треба зменшити 248, щоб отримати 62;

15) Яке число треба поділити на 3, щоб отримати 150;

16) На яке число треба поділити 116, щоб отримати 58?

7. На основі залежностей між компонентами та результатами арифметичних дій розв'язати рівняння:

1) $x + 99 = 299 + 357$;

2) $x - 48 = 650 + 252$;

3) $191 - x = 91 + 58$;

4) $186 - x : 6 = 92$;

5) $x : 25 + 6 = 10$;

6) $117 - (45 + x) = 62$;

7) $513 + (698 - x) = 725$;

8) $(159 + x) - 712 = 846$;

9) $652 + (x - 112) = 921$;

10) $325 - (x + 161) = 96$;

11) $(482 - x) + 619 = 876$;

12) $47 - 2 \cdot x = 25$;

13) $(7x - 8) : 2 = 31$;

14) $(3x + 21) : 10 = 3$;

15) $100 : (10 + 5x) = 5$;

16) $96 : (3x + 1) = 6$;

17) $(112 + x) + 65 \cdot 13 = 983 + 15 \cdot 11$;

18) $676 \cdot 11 - 7000 = (400 - x) + 21 \cdot 19$;

19) $786 - (12 \cdot 13 + x) = 33 \cdot 14 - 134$;

20) $(1245 + 47 \cdot 56 + x) - 998 = 1379 + 3101$;

21) $x – (3\ 807 + 9\ 997) : (553 – 485) = 3487$;

22) $x : (37583 – 37068) + 68739 = 69\ 426$;

23) $2\ 111\ 022 : (5\ 960 – x) = 6\ 723$;

24) $9746 : x – 885 = 1$.

8. Розв'язати рівняння на основі зв'язку між компонентами арифметичних дій та залежностями між ними:

1) 24 960 : (3360 – (300 · (200 – 6x)) : 115) = 8;

2) 450 – ((18 000 – (112 500 : 25 – x) · 6) : 90) = 338;

3) 282 – (72 · (1 548 – (x · 13 + 62))) : 4 548 = 270;

4) (((750 + x : 28) · 24 – 21156) · 12 + 38) ·101 = 192 910;

5) ((56 · (66 + x) +12 600) : 40 – 70) · 24 = 21 000.

6) 24 960 : (3 360 – 30 · (200 – 6x) : 115) = 8;

7) (14 972 580 : (250 000 – 52 · (4 881 – x)) ·1 024 – 590 552): 376 = 1 003;

8) (17 613 380 : (11 254 + 4 926 341 136 : (7200 – x) ·8 000 : 1 000 000) = 2;

9) 411 – ((630 000 – 105 ·(6 250 : x – 26) ·180) : 3 150 = 355;

10) ((((756 + 6x) : 111 + 6 138): 82) – 29 · 404 + 4 658) : 307 = 26.

12. Розв'язування лінійних і квадратних рівнянь з однією змінною

9. Розв'язати лінійні рівняння з однією змінною:

1) $(x – 6)^2 – x(x + 8) = 2;$

2) $y(y – 1) – (y – 5)^2 = 2;$

3) $(x + 5)^2 – x^2 = 3;$

4) $(2y + 1)^2 – 4y^2 = 5;$

5) $(x + 1)(x + 2) – (x – 3)(x – 4) = 6;$

6) $(3x – 1)(2x + 7) – (x + 1)(6x – 5)= 16;$

7) $24 – (3y + 1)(4y – 5) = (11 – 6y)2y;$

8) $(6y + 2)(5 – y) = 47 – (2y – 3)(3y – 1);$

9) $8m(1 + 2m) – (4m + 3)(4m – 3) = 2m;$

10) $x – 3x(1 – 12x) = 11 – (5 – 6x)(6x + 5);$

11) $(6x – 7)(6x + 7) – 4x(9x + 2) = – 1;$

12) $(8 – 9p)p = – 40 + (6 – 3p)(6 + 3p).$

10. Розв’язати квадратні рівняння:

1) $3x^2 – 4x = 0$;

2) $x^2 + 6x = 0$;

3) $x^2 – 5 = 0$;

4) $3x^2 = 12;$

5) $7x^2 + 11 = 0;$

6) $6x^2 = 0;$

7) $(2x – 7)(2x + 7) = 6x – 51;$

8) $(x – 1)(x – 3) = 27 – 2x;$

9) $(5x – 1)^2 – (x – 6)(x + 8) = 85;$

10) $(3x – 4)(x – 6) – (x + 5)^2 = 79;$

11) $(2x + 3)^2 = (x +1)(x – 10) + 43;$

12) $(2x – 3)(2x + 3) – 1= 5x + (x – 2)^2;$

13) $(x – 17)(x + 5) – (2x – 3)(2x + 30) = – 67;$

14) $(3x + 4)(x – 2) – (x + 5)(x – 1) = 17;$

15) $(2x + 7)(x – 2) – (x + 4)(x – 5) = 18;$

16) $3x(x – 4) – (3x + 2)(3x – 2) = – 44;$

17) $(x – 1)^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 – 2x + 2;$

18) $(x – 1)^2 + (x – 2)(x + 1) = 1.$

13. Розв’язування рівнянь з однією змінною, які зводяться до квадратних

11. Розв’язати рівняння, які зводяться до квадратних, способом заміни:

1) $36x^4 – 13x^2 + 1 = 0;$

2) $9x^4 + 13x^2 + 4 = 0;$

3) $x^8 – 65x^4 + 64 = 0;$

4) $x^8 – 15x^4 – 16 = 0;$

5) $x^6 – 5x^3 – 24 = 0;$

6) $3x^6 + 2x^3 - 1 = 0;$

7) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24;$

8) $(5x^2 - 4)^2 + 6(5x^2 - 4) - 7 = 0;$

9) $\left(x - \frac{6}{x}\right)^2 + 4\left(x - \frac{6}{x}\right) - 5 = 0;$

10) $\left(x - \frac{12}{x}\right)^2 - 3\left(x - \frac{12}{x}\right) - 4 = 0;$

11) $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24;$

12) $(x^2 + 3x)^2 - 2x^2 - 6x = 8;$

13) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0;$

14) $(x^2 - 6x + 3)(x^2 - 6x + 5) = 15;$

15) $(x^2 + 4x - 1)(x^2 + 4x + 3) = 12;$

16) $(x^2 - 3x - 5)(x^2 - 3x + 1) + 5 = 0;$

17) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x + 1)^2 = 1;$

18) $(x^2 + 2x)^2 - 11(x + 1)^2 + 35 = 0;$

19) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) = -16;$

20) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)x = 24;$

21) $(3x + 1)^6 - 28(3x + 1)^3 + 27 = 0;$

22) $(2x - 1)^6 - 9(2x - 1)^3 + 8 = 0;$

23) $(x + 2)^4 - (x^2 + 4x) - 6 = 0;$

24) $(x - 3)^4 + (x^2 - 6x) + 7 = 0;$

25) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$

26) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0;$

27) $2x^2 - 7x - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} + 9 = 0;$

28) $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47;$

29) $\frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2;$

30) $\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{5}{x^2-5}=2$;

31) $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$;

32) $\dfrac{x^2-x-6}{x}-\dfrac{8x}{x^2-x-6}=2$;

33) $\dfrac{x^2}{(3x-2)^2}-\dfrac{6x}{3x-2}+5=0$;

34) $1-\dfrac{15}{(x^2-4x)^2}=\dfrac{2}{x^2-4x}$;

35) $\dfrac{2x+6}{x}-\dfrac{4x}{2x+6}=3$;

36) $\dfrac{x}{x^2-2}+\dfrac{6(x^2-2)}{x}=7$;

37) $(x-1)^2-4(x^2-1)+3(x+1)=0$;

38) $(x-2)^2-6(x^2-4)+5(x+2)=0$.

14. Розв’язування дробово-раціональних рівнянь

12. Розв’язати дробово-раціональні рівняння з числовим знаменником:

1) $\dfrac{x+1}{9}-\dfrac{x-1}{6}=2-\dfrac{x+2}{2}$;

2) $\dfrac{(2x+1)^2}{25}-\dfrac{x-1}{3}=x$;

3) $\dfrac{(3x+2)^2}{11}-\dfrac{x+5}{4}=x^2$;

4) $\dfrac{(2-x)^2}{3}-2x=\dfrac{(7+2x)^2}{5}$;

5) $\dfrac{(6-x)^2}{8}+x=7-\dfrac{(2x-1)^2}{3}$;

6) $\dfrac{1-3y}{11}-\dfrac{3-y}{5}=0$;

7) $\dfrac{(y+1)^2}{12}-\dfrac{1-y^2}{24}=4$;

8) $1-\frac{x-3}{2}=\frac{2-x}{3}+4$;

9) $\frac{2m+1}{4}+3=\frac{m}{6}-\frac{6-m}{12}$;

10) $\frac{a+13}{10}-\frac{2a}{5}=\frac{3-a}{15}+\frac{a}{2}$.

13. Розв'язати дробово-раціональні рівняння:

1) $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$;

2) $\frac{70}{x^2-16}-\frac{17}{x-4}=\frac{3x}{x+4}$;

3) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$;

4) $\frac{2}{4-x^2}-\frac{1}{2x-4}-\frac{7}{2x^2+4x}=0$;

5) $\frac{3}{(2-x)^2}-\frac{5}{(x+2)^2}=\frac{14}{x^2-4}$;

6) $\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{4}{(x+1)^2}=0$;

7) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$;

8) $\frac{5}{2x+6}-\frac{1}{6x^2-18x}+\frac{29}{3x^2-27}=0$;

9) $\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

10) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=0$;

11) $\frac{2x^3-2{,}5x^2-11{,}5x+3}{x^2-x-6}=0$;

12) $\frac{(x^2-9)(x^2-6x-11)}{x^2-5x+6}=0$;

13) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$;

14) $\frac{3}{x^2-x-2}+1=\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$;

15) $\frac{3(9x-3)}{9x-6}=2+\frac{3x+1}{3x-2}$;

16) $\frac{3x+11}{5(2x-1)}+\frac{5x}{3-6x}=\frac{2x-21}{30x-15}$;

17) $\frac{2x+19}{5x^2-5}-\frac{17}{x^2-1}=\frac{3}{1-x}$;

18) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

19) $4+\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}$;

20) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{x+1}{x-1}$;

21) $\frac{14}{x^2+2x-8}+\frac{5+x}{2-x}+\frac{7}{x-2}+\frac{1}{x+4}=0$;

22) $\frac{x^3-8}{x-2}=6x+1$;

23) $\frac{13}{2x^2+x-21}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{x^2-9}$;

24) $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}+\frac{2x-3}{x+4}+\frac{x+4}{3-2x}=0$.

15. Розв’язування лінійних і квадратних нерівностей з однією змінною

14. Розв’язати лінійні нерівності:

1) $x+3>9x+2$;

2) $34-7x>13-3x$;

3) $(x+3)(x-5)-6<x(x+9)+1$;

4) $(x-1)(x+3)+5>x(x-2)-14$;

5) $(x-2)(x+2)-x<x^2-5x+8$;

6) $(x+3)(x-3)-4x<x^2-7x+3$;

7) $(x+6)(x-1)-x(x+3)\le 17$;

8) $(x+3)(x-2)-x(x+8)\le 17$;

9 $(8-x)^2-x(x+4)>4$;

10) $(9-x)^2 - x(x-7) > 4$;

11) $(x+1)(x^2 - x+1) - x(x^2+4) \ge 9$;

12) $(x-1)(x^2 + x+1) - x(x^2+5) \ge 4$;

13) $(x-3)^2 < (x+3)(x-2)+1$;

14) $(x-4)^2 < (x+1)(x-3)-5$;

15) $(x+1)(x-8)-5x \ge (x+9)(x-9)+1$;

16) $(x+2)(x-6)-2x \ge (x+7)(x-7)+37$;

17) $(x+1)^2 \le x^2 + 12x + 221$;

18) $(x-12)^2 \ge x^2 - 36x + 120$.

15. Розв’язати квадратні нерівності:

1) $3x + x^2 \le 0$;

2) $3x^2 - 2x > 0$;

3) $-x^2 + 5 \le 0$;

4) $8 - x^2 \le 0$;

5) $(3x-8)(3x+8) \le 6x - 40$;

6) $(x+3)(x+7) + 1 \le 8(x-5)$;

7) $(3x-1)^2 - (x-8)(x+4) > 43$;

8) $(2x-1)^2 - (x-1)(x+7) \le 5$;

9) $(4x-3)(x+2) - (x-8)^2 \ge -16$;

10) $(2x+1)(x-7) > (3x-1)^2 - 50$;

11) $2x(x+8) - (2x-7)(2x+7) \ge 73$;

12) $(5x+7)(x-2) < 21x^2 - 11x - 13$;

13) $(2x-3)(x+1) \ge x^2 + 9$;

14) $(4x-5)(4x+5) - (4x+1)(3x-8) \le 15x$;

15) $(3x-5)(x+2) - (x-6)(x+1) \le 16$;

16) $(5x+1)(3x-1) > (4x-1)(x+2)$;

17) $(2x+9)(x-4) - (x+6)(x-11) > 37$;

18) $2x(3x-1) > 4x^2 + 5x + 9$.

16. Розв’язування дробово-раціональних нерівностей з однією змінною. Метод інтервалів

16. Розв’язати дробово-раціональні нерівності методом інтервалів:

1) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-6}\geq 0$;

2) $\dfrac{x^2+5x+4}{x+4}\leq 0$;

3) $\dfrac{-x^2+x+6}{x^2-2x+1}\geq 0$;

4) $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+2x+1}\geq 0$;

5) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-25}\geq 0$;

6) $\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-4}\leq 0$;

7) $\dfrac{(x^2-4)(x+3)}{(x+1)^2}<0$;

8) $\dfrac{(x^2-9)(x+2)}{(x-1)^2}<0$;

9) $\dfrac{5x+3}{x-2}\geq 2$;

10) $\dfrac{4x-3}{x+2}\geq 3$;

11) $\dfrac{x^2+2x}{x+1}\geq\dfrac{2(x+2)}{x+1}$;

12) $\dfrac{x^2+3x}{x-2}\geq\dfrac{3(x+3)}{x-2}$;

13) $\dfrac{x}{x+2}\leq\dfrac{x-5}{x-2}$;

14) $\dfrac{x-1}{x-2}\leq\dfrac{x+2}{x}$;

15) $\dfrac{2x+1}{x^2+5x}>\dfrac{2}{x+2}$;

16) $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$;

17) $\dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x^2-2x+1} \geq 0$;

18) $\dfrac{(x+5)^2(x-6)}{x^2-25} \leq 0$;

19) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x+4}<\dfrac{4x}{x^2+2x-8}$;

20) $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{2}{x-3}<\dfrac{8}{x^2-8x+15}$;

21) $\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{6}{x-2}<\dfrac{x-21}{x^2+x-6}$;

22) $\dfrac{6-2x}{x^2-2x-3} \leq \dfrac{1}{x-3}<\dfrac{x}{x+1}$;

23) $1+\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{-x-7}{x^2-4x-5}$;

24) $\dfrac{1}{x^3-1}+\dfrac{x}{x^2+x+1} \geq \dfrac{1}{x-5}$;

25) $\dfrac{5x-1}{4}-\dfrac{x-1}{2} \geq 3x-2$;

26) $\dfrac{5x+2}{4}-\dfrac{x-1}{3} \geq 4x-3$;

27) $\dfrac{2x+3}{3}-\dfrac{x+1}{4}<-1$;

28) $\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{x+3}{8}<-4$;

29) $\dfrac{7x-4}{9}-\dfrac{3x+3}{4}>\dfrac{8-x}{6}$;

30) $\dfrac{5x-3}{4}-\dfrac{3-x}{5}>\dfrac{2-x}{10}$.

17. Розв’язування задач складанням числового та буквеного виразів

17. Розв’язати задачу складанням числового виразу:

1) *На кожну тарілку мама поклала 5 вареників з картоплею і 3 вареники з м’ясом. Скільки всього вареників вона поклала на 4 тарілки?*

Розв’язати задачу двома способами. Який закон арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

2) У магазині продали 6 дитячих шарфів по 58 грн. і 6 шапочки по 88 грн. Скільки одержали грошей за ці речі?

Розв'язати задачу двома способами. Який закон арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

3) На змаганнях у першому запливі було 4 човни, по 8 спортсменів у кожному. У другому запливі було 3 човни, також по 8 спортсменів у кожному. Скільки всього спортсменів брало участь у двох запливах?

Розв'язати задачу двома способами. Пояснити, про що дізналися кожною дією.

Розв'язання

1-й спосіб	*2-й спосіб*
$8 \cdot (4 + 3) = 56$ (сп.)	$8 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 56$ (сп.)
Відповідь: 56 спортсменів.	*Відповідь:* 56 спортсменів.

Який закон арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

4) 18 синіх і 12 жовтих слив батько поділив порівну між трьома синами. Скільки слив одержав кожний син?

Розв'язати задачу двома способами за поданими планами.

1-й спосіб

1) Скільки всього було слив?
2) Скільки слив одержав кожний син?

2-й спосіб

1) Скільки синіх слив одержав кожний син?
2) Скільки жовтих слив одержав кожний син?
3) Скільки всього слив одержав кожний син?

Який закон арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

5) 20 вантажних і 12 легкових автомобілів розмістили на залізничних платформах, по 4 автомобілі на кожну платформу. Скільки було використано платформ?

Розв'язати задачу двома способами відповідно до поданих схем:

1-й спосіб *2-й спосіб*

(□ + □) **:** □ □ **:** □ + □ **:** □

Який закон арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

6) *У першому турнірі з гімнастики прийняло участь 17 дівчаток і 9 хлопчиків, а у другому — 13 дівчаток і 15 хлопчиків. Скільки учнів виступило в обох турнірах?*

Розв'язати задачу трьома способами.

Яке правило арифметичних дій використовується при розв'язанні задачі?

7) *У майстерні за перший квартал пошили 275 дитячих костюмів і 380 жіночих, а за другий – 178 дитячих і 406 жіночих. Скільки всього костюмів пошили у майстерні?*

Склади 3 вирази для розв'язання цієї задачі.

Яке правило арифметичних дій використовується у розв'язанні задачі?

8) За виразом (19 + 15) · 2 скласти і розв'язати задачу двома способами, використовуючи розподільний закон множення відносно додавання.

Використовуючи розподільну властивість додавання відносно множення, скласти і розв'язати задачу двома способами.

18. Скласти задачі за коротким записом і розв'язати їх складанням числового виразу.

Було – 16м *Було – 6м і 7м*

Відрізали – 4м і 7м *Купили – 4м*

Залишилось – ? *Стало – ?*

Які властивості арифметичних дій використовуються при їх розв'язанні?

19. Два велосипедисти виїхали із селища одночасно у протилежних напрямах. Швидкість одного велосипедиста 15км/год, а другого — 16км/год. Скільки кілометрів становитиме відстань між велосипедистами через 4год?

I спосіб

1) 16 + 15 = 31(км/год);

2) 31 · 4 = 124(км).

Відповідь: 124км.

II спосіб

1) 15 · 4 = 60(км);

2) 16 · 4 = 64(км);

3) 60 + 64 = 124(км).

Відповідь: 124км.

Поясніть розв’язання задачі першим способом і другим способом. Складіть числові вирази для розв’язання задачі. Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

20. *Від пристані одночасно у протилежних напрямах відплили теплохід і катер. Швидкість теплохода 32км/год, а катера — 24км/год. Яка відстань між теплоходом і катером через 3год?*

Скласти числові вирази для розв’язання задачі. Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

21. *Від однієї пристані у протилежних напрямках одночасно відійшли два пароплави. Швидкість першого пароплава дорівнює 27км/год, а другого – 36км/год. Яка відстань буде між ними через 3год після початку руху?*

Скласти числові вирази для розв’язання задачі. Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

22. *Від пристані у протилежних напрямах одночасно відпливли два теплоходи. Швидкість одного — 24км/год, а другого — 26км/год. Яка відстань буде між ними через 4год після початку руху?*

Скласти числові вирази для розв’язання задачі. Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

23. *На одній тарілці було 12 помідорів, а на другій – 6. За сніданком діти з’їли 4 помідори. Скільки помідорів залишилося?*

Розв’яжи задачу, користуючись схемою: (□ +□) – □ .

Якими ще способами можна розв’язати цю задачу?

Скласти до них відповідні схеми. Скласти числові вирази для розв’язання задачі. Яке правило арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

24. Скласти і розв’язати задачу за схемами складанням числового виразу двома способами:

Було – 16

Поїхало – 4 і 7

Залишилось - *?*

I спосіб: (□ – □) – □.

II спосіб: □ – (□ + □).

Яке правило арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

25. *Вівчар мав постригти 60 овець. Він постриг 27 білих і 15 чорних овець. Скільки овець йому залишилось постригти?*

Розв’язати задачу двома способами, склавши план розв’язування. Скласти числовий вираз. Яке правило арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

26. *У хлопчика було 36 марок про художників і 27 – про письменників. Він розклав їх в альбомі, по 9 марок на кожну сторінку. Скільки сторінок в альбомі зайняли марки?*

Розв’яжи задачу двома способами, склавши числові вирази.

27. *Тато зрізав 36 качанів капусти, а мама – 45. Усю капусту вони склали у кошики по 9 качанів у кожний. Скільки потрібно було кошиків?*

Розглянь записи і поясни два способи розв’язання задачі:

I спосіб: (36 + 45) : 9 = 9 кошиків потрібно.

II спосіб: 36 : 9 + 45 : 9 = 9 кошиків потрібно.

Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

28. *Один токар обточує за день 87 деталей, а другий – 96. Токарі працювали 5 днів.*

Про що дізнаємося, якщо знайдемо значення виразів:

$$87 \cdot 5 + 96 \cdot 5, \quad (87 + 96) \cdot 5?$$

Який закон арифметичних дій використовується при розв’язанні задачі?

29. *З міста одночасно і в одному напрямку вирушили вантажний і легковий автомобіль. Швидкість легкового автомобіля 76км/год, вантажного – 58км/год. Яка відстань буде між автомобілями через 5год?*

Пояснити правильність запису рівності для розв'язку задачі:

$$(76 – 58) \cdot 4 = 76 \cdot 4 – 58 \cdot 4 = 72.$$

Який закон арифметичних дій узагальнює дана рівність?

30. *Два пішоходи вийшли із села одночасно у протилежних напрямах. Швидкість одного пішохода — 4км/год, а другого — 5км/год. Скільки кілометрів становитиме відстань між пішоходами через 3 год?*

Пояснити правильність запису рівності для розв'язку задачі:

$$4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = (4 + 5) \cdot 3.$$

Який закон арифметичних дій узагальнює дана рівність?

31. Розв'язати задачу складанням буквеного виразу:

1) *У результаті розмолу 100 кг пшениці одержали* t *кг манних круп і 80 кг борошна. Решту становили кормові відходи. Скільки одержали кормових відходів?*

2) *Першокласники зібрали 24кг макулатури, а другокласники – 30кг. Усю макулатуру зв'язали в пакети, по с кг у кожному. Скільки вийшло пакетів?*

3) *Один токар виготовляє за годину* b *деталі, а другий – 3. Скільки деталей вони виготовлять за 5 годин спільної роботи?*

4) *Теплохід на підводних крилах за годину проходить 70км, а катер – хкм. Скільки кілометрів вони пропливуть за 3 години?*

5) *У школі спочатку було 320 дівчаток і 350 хлопчиків. За рік прийняли ще* w *дівчаток і 40 хлопчиків. Скільки учнів стало у школі?*

6) *У майстерні мали пошити 350 костюмів. За перше півріччя пошили 400 костюмів, а за друге –* v*. Скільки костюмів пошили понад план?*

7) *На одній грядці росло 356 кущів помідорів, а на другій – 370. З першої грядки зібрали* n *кущів, а з другої – 215. Скільки кущів помідорів залишилось на полі?*

8) *Туристи проїхали залізницею 325км, автобусом – 120км і пройшли пішки ткм. Знайти довжину всього шляху.*

9) *У майстерні пошили 10 сорочок. На кожну сорочку пішло 2м тканини. Скільки коштує вся тканина, якщо ціна 1м тканини kгрн.?*

10) *Для дорослого кроля на добу влітку потрібно 1кг трави і dг концентратів. Скільки трави і концентратів разом треба на добу для 10 кролів?*

18. Розв'язування задач алгебраїчним способом

32. Розв'язати задачі, записавши їх умови у вигляді рівняння:

1) *Петро задумав число, додав до нього 116, а потім від результату відняв 89. Отримав число 342. Яке число задумав Петро?*

2) *Василь задумав число, відняв від нього 17, а потім від отриманої різниці відняв 145. Отримав число 213. Яке число задумав Василь?*

3) *Іван задумав число, помножив його на 13, потім додав 116 і одержаний результат зменшив у 25 разів. Отримав число 23. Яке число задумав Іван?*

4) *Якщо задумане число помножити на 3 і до добутку додати 18, то вийде 63. Знайти задумане число.*

5) *Учень задумав число. Якщо від нього відняти 7 і результат поділити на 3, то дістанемо 5. Яке число задумав учень?*

33. Одне число більше другого на 6. Якщо перше помножити на 5, а друге на 4, то перший добуток буде більший від другого на 40. Знайти ці числа.

34. Одне число більше від другого в 6 разів. Якщо від більшого з них відняти 37, а до меншого додати 73, то результати будуть рівні. Знайти ці числа.

35. Знайти числа, якщо:

а) їх сума дорівнює 200, а різниця – 10;

б) їх сума дорівнює 120, а частка – 5;

в) їх сума дорівнює 150, а добуток – 5000;

г) їх сума дорівнює 61, а добуток – 900.

д) їх різниця дорівнює 125, а частка – 6;

е) їх різниця дорівнює 11, а добуток – 312;

є) їх півсума дорівнює 71, а піврізниця – 31.

36. Сума двох чисел дорівнює 3, а сума їх квадратів – 65. Знайти ці числа.

37. Різниця двох чисел 10, а різниця їх квадратів – 240. Знайти ці числа.

38. Сума двох чисел дорівнює 105, а відношення їх 1:2. Знайти ці числа.

39. Одне число більше від другого на 6, а відносяться вони як 9:7. Знайти ці числа.

40. Різниця квадратів двох натуральних чисел і квадрат їх різниці дорівнює 275 і 121 відповідно. Знайти ці числа.

41. Різниця двох чисел дорівнює 17. Якщо перше число поділити на друге, то в частці отримаємо 2, а в остачі 4. Знайти більше з них.

42. Сума двох натуральних чисел 27. Якщо перший доданок збільшити в 5 разів , а другий – у 3 рази, то сума їх стане 111. Які це числа?

43. Дано два добутки: $11 \cdot 44$ і $16 \cdot 32$. На яке число треба збільшити кожний з чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

44. На яке число треба зменшити кожний з чотирьох множників $25 \cdot 51$ і $31 \cdot 40$, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

45. Знайти три натуральні числа, з яких друге більше за перше на стільки, на скільки третє більше другого, якщо відомо, що добуток двох менших чисел дорівнює 80, а добуток двох більших чисел –120.

46. Доведіть, що коли сума двох натуральних чисел ділиться на якесь число, то і сума їх кубів ділиться на те саме число.

47. Парне чи непарне число є сумою двох послідовних натуральних чисел?

48. Довести, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

49. Знайти два послідовні натуральні числа, сума яких дорівнює 651.

50. Знайти два послідовні натуральні числа, сума квадратів яких дорівнює 434.

51. Знайти два послідовних натуральних числа, якщо квадрат суми цих чисел на 112 більший від суми їх квадратів.

52. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 51. Визначити більше число.

53. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 57. Визначити менше число.

54. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 81. Знайти їх.

55. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 625 більший від меншого числа. Знайти більше число.

56. Добуток двох послідовних чисел на 239 більший, ніж їх сума. Знайти ці числа. Чи є вони натуральними?

57. Довжини сторін трикутника виражаються трьома послідовними натуральними числами. Знайти їх, якщо периметр трикутника 30 см.

58. Квадрат суми двох послідовних чисел більший від суми їх квадратів на 264. Знайти ці числа.

59. Знайти три послідовні натуральні числа, якщо квадрат середнього з них на 1 більший від добутку двох крайніх чисел.

60. Знайти чотири послідовні натуральні числа, коли відомо, що різниця між добутком двох чисел, які стоять на парних місцях, і добутком двох чисел, які стоять на непарних місцях, дорівнює 23.

61. Знайти п'ять послідовних натуральних чисел, якщо сума квадратів перших трьох дорівнює сумі квадратів двох останніх.

62. Знайти чотири натуральних числа, з яких перше більше за друге у стільки разів, у скільки друге більше за третє. Якщо від першого числа відняти суму двох інших, то різниця становитиме 2, а якщо до першого додати піврізницю другого і третього, то в сумі отримаємо 9.

63. Мені загадали натуральне число. Треба було збільшити його на 200 000 і отримане число потроїти. Замість того я приписав до цифрового запису заданого числа справа цифру 2 і отримав правильний результат. Яке загадане число?

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи № 1

Для виконання контрольної роботи № 1 з розділу «Алгебраїчні поняття обчислювального змісту» студент повинен:

знати *алгебраїчні поняття обчислювального змісту (числові вирази, числові рівності, числові нерівності, буквені вирази, вирази з однією змінною, вирази зі змінними), теоретичні основи виконання арифметичних дій у множинах натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних та дійсних чисел, теоретичні основи тотожних перетворень числових виразів та буквених виразів з однією та двома змінними;*

вміти *застосовувати основні правила виконання арифметичних дій для знаходження значень числових виразів з натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними та дійсними числами, встановлювати правильність чи неправильність числових рівностей та нерівностей, здійснювати тотожні перетворення цілих, дробово-раціональних та ірраціональних виразів з однією та двома змінними.*

Контрольна робота містить **10 практичних завдань** з даного розділу, які оцінюються ***50 балами*** *(кожне завдання по 5 балів)*.

Типовий варіант контрольної роботи № 1

РОЗДІЛ 1. Алгебраїчні поняття обчислювального змісту

Варіант - 1

1.	*На скільки добуток чисел 258 і 37 більший, ніж сума чисел 147 і 2780 ?*	5 балів
2.	*Знайти значення виразу:* $2047 \cdot ((25879+(409 \cdot 256 - 36547) \cdot 96) - 3344)$.	5 балів
3.	*Обчислити:* $\dfrac{(1\frac{1}{5}:(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005))\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25$.	5 балів
4.	*Обчислити:* $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}-8$.	5 балів
5.	*Обчислити*: $-\lvert -7 \rvert \cdot \lvert 11 \rvert + 3 - 62$.	5 балів
6.	*Встановити, чи є правильною числова рівність:* $4{,}7175 : 8{,}5 + 0{,}09 \cdot 0{,}043 = 3{,}023 - 0{,}845 \cdot 1{,}56$.	5 балів
7.	*Спростити вираз:* $(x+8)(3x-4) - (6-x)(3x-5)$.	5 балів
8.	*Спростити вираз:* $2a(5b-3) + (2a+7b)(7b-2a) - (7b-2a)^2$.	5 балів
9.	*Спростити:* $\dfrac{x-3}{x^2+3x}-\dfrac{x+3}{x^2-3x}-\dfrac{4x}{x^2-9}$.	5 балів
10.	*Знайти значення виразу при b = 7:* $\dfrac{b^2-16}{b^3}\cdot\dfrac{b}{b+4}-\dfrac{1}{b^2}$	5 балів
	Всього	**50 балів**

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи № 2

Для виконання контрольної роботи № 2 з розділу «Алгебраїчні поняття предикативного змісту» студент повинен:

знати

алгебраїчні поняття предикативного змісту (рівняння та нерівності з однією змінною), теореми про рівносильні рівняння та нерівності, теоретичні основи розв’язування лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь та нерівностей з однією змінною, правила розв’язування сюжетних задач за допомогою складання числового, буквеного виразів та складанням рівняння (алгебраїчним способом);

вміти *розв’язувати найпростіші рівняння на основі залежностей між компонентами та результатами арифметичних дій, використовувати до теореми про рівносильні рівняння та нерівності до розв’язування лінійних, квадратних, дробово-раціональних рівнянь та нерівностей з однією змінною, складати умову задачі за поданим числовим виразом; розв’язувати сюжетні задачі за допомогою складання буквеного виразу та алгебраїчним способом.*

Контрольна робота містить **10** практичних завдань з даного розділу, які оцінюються ***50 балами*** *(кожне завдання по 5 балів).*

Типовий варіант контрольної роботи № 2

РОЗДІЛ 2. Алгебраїчні поняття предикативного змісту

Варіант – 1

1.	*Розв'язати рівняння на основі залежностей між компонентами та результатами арифметичних дій:* $(36 + (4x - 14) : 8) : 9 = 12.$	5 балів
2.	*Розв'язати лінійне рівняння:* $3(5x + 3) - 4(4 + 8x) = 6(3x + 4) - 54.$	5 балів
3.	*Розв'язати квадратне рівняння:* $(x - 5)^2 + (x + 5)^2 = (x - 3)^2 - 4(x + 1).$	5 балів
4.	*Розв'язати дробово-раціональне рівняння:* $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{9-6x+x^2} = \frac{3}{2x^2+6x}.$	5 балів
5.	*Розв'язати лінійну нерівність:* $(x - 3)(x - 7) - 4x \geq (x + 9)(x - 9) - 10.$	5 балів
6.	*Розв'язати квадратну нерівність:* $(3x + 1)^2 - (x - 4)(x + 5) \leq 12.$	5 балів
7.	*Розв'язати дробово-раціональну нерівність методом інтервалів:* $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} \geq 0.$	5 балів
8.	*Скласти умову задачі, яка розв'язувалась би числовим виразом: 24 : (9 – 5).*	5 балів
9.	*Розв'язати задачу за допомогою складання буквеного виразу:* У першому кошику було m груш, а у другому – в 4 рази більше, ніж у першому. Скільки груш було в обох кошиках ?	5 балів
10.	*Розв'язати задачу алгебраїчним способом:* Одне число більше від другого у 6 разів. Якщо від більшого з них відняти 37, а до меншого додати 73, то результати будуть рівні. Знайти ці числа.	5 балів
	Всього	**50 балів**

Перелік питань для самоконтролю та підсумкового контролю

1. Числовий вираз. Прості та складені числові вирази.
2. Значення числового виразу.
3. Правила порядку виконання дій у числових виразах.
4. Запис числового виразу за його словесним заданням і навпаки.
5. Числові вирази з натуральними та цілими числами.
6. Правила виконання дій над числами з однаковими та різними знаками.
7. Модуль числа та його властивості.
8. Числові вирази з раціональними числами.
9. Додавання звичайних дробів.
10. Віднімання звичайних дробів.
11. Множення звичайних дробів.
12. Ділення звичайних дробів.
13. Додавання десяткових дробів.
14. Віднімання десяткових дробів.
15. Множення десяткових дробів.
16. Ділення десяткових дробів.
17. Правила перетворення звичайних дробів у десяткові.
18. Правила перетворення десяткових дробів у звичайні.
19. Числові вирази з ірраціональними числами.
20. Властивості арифметичного кореня.
21. Властивості степеня.
22. Винесення множника за знак кореня.
23. Внесення множника під знак кореня.
24. Звільнення від ірраціональності у знаменнику.
25. Закони додавання та множення.
26. Властивості різниці чисел.
27. Властивості частки чисел.

28. Числова рівність. Правильні (істинні) та неправильні (хибні) числові рівності.
29. Властивості числових рівностей.
30. Встановлення правильності числової рівності (порівняння двох чисел, числа і числового виразу, двох числових виразів).
31. Числова нерівність. Правильні (істинні) та неправильні (хибні) числові нерівності.
32. Властивості числових нерівностей.
33. Встановлення правильності числової нерівності (порівняння двох чисел, числа і числового виразу, двох числових виразів).
34. Буквені вирази та їх види.
35. Вирази з однією змінною.
36. Область допустимих значень змінної (ОДЗ).
37. Значення виразу зі змінною при наданні певного значення змінній.
38. Тотожно рівні вирази. Тотожність.
39. Формули скороченого множення.
40. Тотожні перетворення цілих виразів зі змінною.
41. Тотожні перетворення дробових виразів зі змінною.
42. Тотожні перетворення ірраціональних виразів зі змінною.
43. Вирази зі змінними.
44. Тотожні перетворення виразів зі змінними.
45. Рівняння з однією змінною.
46. Розв’язок (корінь) рівняння.
47. Наслідок рівняння.
48. Рівносильні рівняння.
49. Теореми про рівносильні рівняння.
50. Розв’язування найпростіших рівнянь з однією змінною на основі залежностей між компонентами та результатом арифметичних дій.
51. Лінійні рівняння та їх розв’язання.
52. Квадратні рівняння та їх розв’язання.

53. Часткові випадки квадратних рівнянь.
54. Теорема Вієта.
55. Дробово-раціональні рівняння з числовими знаменниками.
56. Дробово-раціональні рівняння зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними та алгоритм їх розв’язання.
57. Нерівність з однією змінною.
58. Розв’язок нерівності.
59. Наслідок нерівності.
60. Рівносильні нерівності.
61. Теореми про рівносильні нерівності.
62. Розв’язування лінійних нерівностей з однією змінною.
63. Розв’язування квадратних нерівностей з однією змінною.
64. Часткові випадки квадратних нерівностей.
65. Розв’язування дробово-раціональних нерівностей з числовими знаменниками.
66. Розв’язування дробово-раціональних нерівностей зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними.
67. Метод інтервалів.
68. Розв’язування задач за допомогою складання числового виразу.
69. Розв’язування задач за допомогою складання буквеного виразу.
70. Розв’язування задач за допомогою складання рівняння з однією змінною (алгебраїчним способом).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика: навчальний посібник. 5-е вид. Київ: Центр учбової літератури, 2010. 448 с.
2. Затула Н.І., Зуб А.М. , Коберник Г.І. , Нещадим А.Ф. Математика: навчальний посібник [для педвузів]. Київ: Кондор, 2006. 560 с.
3. Коберник Г.І., Чирва Г.М. Математика. Практикум. Ч. І: навч. посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». 2-е вид. Умань: ФОП Жовтий О.О., 2013. 193 с.
4. Коберник Г.І., Чирва Г.М. Математика. Практикум. Ч. ІІ: навч. посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». 2-е вид. Умань: РВЦ «Софія», 2013. 185с.
5. Сілков В.В. Математика. Курс лекцій. Ч. ІІ. Методичні вказівки до вивчення курсу математики. Для студентів спеціальні № 6.010102 "Початкова освіта" . – Рівне: РДГУ, 2008. 104 с.
6. Щербан Т., Щербан В. Вивчення елементів алгебри в початковій школі: Навчальний посібник. Київ: Кондор-Видавництво, 2015. 278 с.

Додаткова

1. Довженко К.П. Пропедевтика вивчення алгебри // *Початкова школа*. 2013. №13. С.4 – 7.
2. Ковальчук В., Білецька Л., Силюга Л., Стасів Н. Методичні прийоми розв’язування текстових задач складанням рівнянь. Дрогобич: Коло, 2010. 36 с.
3. Коляк Н. Практичне засвоєння елементів алгебри // *Початкова школа*. 2013. №13. С. 8 – 14.
4. Математика в таблицях та схемах для учнів початкових класів / Упоряд. Курганов С.Ю., Волошина В.О. – Харків: Торсінг плюс, 2013. С. 38 – 41.
5. Назаренко Н. Розв'язування текстових задач алгебраїчним способом // *Початкова школа*. 2011. № 2. С. 25 – 27.

6. Полякова О. Вивчення елементів алгебри у початковому курсі математики // *Початкова школа*. 2013. № 2. С. 3 – 7.
7. Тартовська С. Методичні прийоми розв'язування арифметичних задач складанням виразів // *Початкова школа.* 2005. № 12. С. 18 – 21.
8. Шишацька Т. Круглі числа. Прості і складені задачі з буквеними даними // *Бібліотека вчителя початкової школи*. 2005. № 10. С. 87 – 91.
9. Щербан В. Методика розв’язування рівнянь і нерівностей в початковому курсі математики: методичні рекомендації для самостійної роботи студентів з дисципліни «Алгебраїчна та геометрична пропедевтика в курсі математики початкової школи». Мукачево: МДУ, 2016. 56 с.

Предметний покажчик

А

Алгоритм розв’язання лінійних нерівностей 67

Алгоритм розв’язання лінійного рівняння 51

Алгоритм розв’язування дробово-раціональних нерівностей з числовими знаменниками 76

Алгоритм розв’язування дробово-раціональних нерівностей зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними 76

Алгоритм розв’язування дробово-раціонального рівняння з числовим знаменником 56

Алгоритм розв’язування дробово-раціонального рівняння зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними 57

Б

Буквений (алгебраїчний) вираз 31

В

Види буквених виразів 31

Використання формул скороченого множення 35

Винесення множника за знак кореня 20

Вираз з однією змінною 32

Вираз зі змінними 42

Властивості арифметичного кореня 20

Властивості модуля 11

Властивості різниці чисел 21

Властивості степеня 20

Властивості частки чисел 22

Властивості числових нерівностей 29

Властивості числових рівностей 28

Внесення множника під знак кореня 20

Г

Групування та винесення спільного виразу за дужки 43

Д

Дискримінант 35

Ділення дробових виразів зі змінною 37

Додавання та віднімання дробових виразів зі змінною 36

Дробові вирази 31

Дробово-раціональне рівняння 56

Дробово-раціональне рівняння з числовим знаменником 56

Дробово-раціональне рівняння зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними 57

Дробово-раціональні нерівності 76

Дробово-раціональні нерівності з числовими знаменниками 76

Дробово-раціональні нерівності зі знаменниками у вигляді виразів зі змінними 76

З

Закони додавання 21

Закони множення 21

Залежності між компонентами та результатами арифметичних дій 50

Зведене квадратне рівняння 52

Зведення подібних доданків 34

Звільнення дробу від ірраціональності у знаменнику 20

Значення буквеного виразу для певного значення змінної 32

Значення числового виразу 8

І

Ірраціональні вирази 31

Ірраціональні числа 19

К

Квадратне рівняння 52

Квадратні нерівності 67

Л

Лінійне рівняння 51

Лінійні нерівності 65

М

Метод інтервалів 77

Множення дробових виразів зі змінною 37

Множення многочленів 34

Множення одночлена на многочлен 34

Модуль числа 10

Н

Наслідок нерівності 59

Наслідок рівняння 45

Неправильна (хибна) числова нерівність 29

Неправильна (хибна) числова рівність 28

Нерівність з однією змінною 59

О

Область визначення буквеного виразу 32

П

Правила віднімання десяткових дробів 14

Правила віднімання звичайних дробів 13

Правила віднімання чисел з однаковими та різними знаками 9

Правила ділення десяткових дробів 17
Правила ділення звичайних дробів 16
Правила ділення чисел з однаковими та різними знаками 10
Правила додавання десяткових дробів 12
Правила додавання звичайних дробів 11
Правила додавання чисел з однаковими та різними знаками 9
Правила множення десяткових дробів 15
Правила множення звичайних дробів 14
Правила множення чисел з однаковими та різними знаками 10
Правила перетворення звичайних дробів у десяткові 18
Правила порядку виконання дій 8
Правильна (істинна) числова нерівність 29
Правильна (істинна) числова рівність 28
Прості вирази 8

Р

Раціональні вирази 31
Рівносильні нерівності 60
Рівносильні рівняння 46
Рівняння з однією змінною 45
Розв’язки квадратних рівнянь залежно від дискримінанта 52
Розв’язок (корінь) рівняння 45
Розв’язок нерівності 59
Розв’язування задач за допомогою складання буквеного виразу 80
Розв’язування задач за допомогою складання рівняння 81
Розв’язування задач за допомогою складання числового виразу 79
Розклад квадратного тричлена на множники 35
Розклад многочлена на множники 42
Розкриття дужок 34

С

Складені вирази   8

Скорочення дробових виразів зі змінною   36

Способи перетворення ірраціональних виразів   20

Способи спрощення дробових виразів зі змінною   36

Способи спрощення цілих виразів зі змінною   34

Спрощення ірраціональних виразів зі змінною   37

Т

Теорема Вієта   54

Теореми про рівносильні нерівності   60

Теореми про рівносильні рівняння   46

Тотожне перетворення виразу   33

Тотожність   33

Тотожно рівні вирази   33

Ф

Формули коренів квадратного рівняння   35

Формули скороченого множення   33

Ц

Цілі вирази   31

Ч

Часткові випадки квадратних нерівностей   70

Часткові випадки квадратних рівнянь   52

Числова нерівність   29

Числова рівність   28

Числовий вираз   8

Для нотаток

Для нотаток