

Дрогобицький державний педагогічний  
університет імені Івана Франка

**Руслан Хаць**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В  
ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ. Ч. 2.  
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО  
АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА  
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ  
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

Навчально-методичний посібник  
для студентів спеціальностей  
F3 «Комп'ютерні науки», D3 «Менеджмент»,  
A4 «Середня освіта (Технології)»,  
A5 «Професійна освіта (Транспорт)»

**Дрогобич  
2026**

**УДК 51(075.8)  
X 28**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 26 березня 2026 р.)

**Рецензенти:**

**Дільний Володимир Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”;

**Матурін Юрій Петрович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Відповідальний за випуск:**

**Галь Юрій Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Хаць Р.В.**

**X 28 Вища математика в прикладах і задачах. Ч. 2. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної** : навч.-метод. пос. Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026. 245 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни „Вища математика” для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями F3 «Комп’ютерні науки», D3 «Менеджмент», A4 «Середня освіта (Технології)», A5 «Професійна освіта (Транспорт)», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Він містить лекційний матеріал, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи, поточного та підсумкового контролю.

Бібліографія 42 назви

© Руслан Хаць, 2026

© Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026

## Зміст

<b>Основні позначення.....</b>	<b>6</b>
<b>Передмова.....</b>	<b>8</b>
<b>Розділ 1. Вступ до математичного аналізу.....</b>	<b>9</b>
<b>1.1. Множини і функції.....</b>	<b>9</b>
1.1.1. Поняття множини. Дії над множинами. Логічні символи.....	9
1.1.2. Множина дійсних чисел та основні її властивості.....	10
1.1.3. Модуль дійсного числа.....	13
1.1.4. Межі числових множин.....	14
1.1.5. Поняття функції. Способи задання функції в $\mathbb{R}$ . Класифікація функцій.....	16
1.1.6. Основні відомості про комплексні числа.....	25
1.1.7. Запитання для самоконтролю.....	29
1.1.8. Вправи і задачі.....	31
1.1.9. Індивідуальні завдання.....	35
<b>1.2. Границя і неперервність функції.....</b>	<b>39</b>
1.2.1. Числова послідовність.....	39
1.2.2. Означення границі послідовності. Властивості збіжних послідовностей.....	40
1.2.3. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Нескінченні границі.....	43
1.2.4. Основні теореми про границі послідовностей.....	45
1.2.5. Існування границі монотонної послідовності.....	48
1.2.6. Число $e$ .....	49
1.2.7. Означення границі функції. Однобічні границі.....	51
1.2.8. Перша важлива границя. Властивості функції, яка має границю... 1.2.9. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Нескінченні границі. Границя в $\infty$ .....	55
1.2.10. Теореми про границі функції. Границя композиції функцій.....	59
1.2.11. Друга важлива границя.....	63
1.2.12. Означення неперервності функції. Властивості функцій, які неперервні у точці.....	65
1.2.13. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація.....	68
1.2.14. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку.....	70
1.2.15. Запитання для самоконтролю.....	73
1.2.16. Вправи і задачі.....	78
1.2.17. Індивідуальні завдання.....	87
<b>Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....</b>	<b>96</b>
<b>2.1. Похідна і диференціал функції.....</b>	<b>96</b>

2.1.1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну.....	96
2.1.2. Дотична і нормаль до графіка функції. Геометричний і механічний зміст похідної.....	98
2.1.3. Основні правила диференціювання.....	99
2.1.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Похідна складеної функції.....	100
2.1.5. Похідні показниково-степеневих функцій. Логарифмічна похідна. Похідна оберненої функції.....	102
2.1.6. Диференціал функції. Основні властивості диференціала.....	104
2.1.7. Похідні і диференціали вищих порядків.....	106
2.1.8. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично.....	109
2.1.9. Запитання для самоконтролю.....	111
2.1.10. Вправи і задачі.....	112
2.1.11. Індивідуальні завдання.....	117
<b>2.2. Застосування похідної.....</b>	<b>121</b>
2.2.1. Основні теореми диференціального числення. Правила Лопіталя.....	121
2.2.2. Формула Тейлора для довільної функції.....	124
2.2.3. Умови сталості функції. Зростання та спадання функції на проміжку.....	126
2.2.4. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку.....	129
2.2.5. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину.....	133
2.2.6. Асимптоти графіка функції.....	136
2.2.7. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.....	137
2.2.8. Запитання для самоконтролю.....	139
2.2.9. Вправи і задачі.....	140
2.2.10. Індивідуальні завдання.....	144
<b>Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....</b>	<b>148</b>
<b>3.1. Первісна і невизначений інтеграл.....</b>	<b>148</b>
3.1.1. Первісна і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтегралу.....	148
3.1.2. Таблиця основних інтегралів.....	149
3.1.3. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.....	152
3.1.4. Інтегрування елементарних раціональних дробів.....	159
3.1.5. Інтегрування раціональних функцій.....	161
3.1.6. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	165
3.1.7. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій.....	168
3.1.8. Запитання для самоконтролю.....	172

3.1.9. Вправи і задачі.....	173
3.1.10. Індивідуальні завдання.....	178
<b>3.2. Визначений інтеграл.....</b>	<b>183</b>
3.2.1. Означення визначеного інтеграла та його основні властивості... 183	
3.2.2. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Лейбніца-Ньютона.....	187
3.2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.....	189
3.2.4. Невласні інтеграли.....	191
3.2.5. Запитання для самоконтролю.....	201
3.2.6. Вправи і задачі.....	202
3.2.7. Індивідуальні завдання.....	209
<b>3.3. Деякі застосування визначеного інтеграла.....</b>	<b>215</b>
3.3.1. Обчислення площ плоских фігур.....	215
3.3.2. Довжина кривої.....	220
3.3.3. Площа поверхні обертання.....	223
3.3.4. Об'єм тіла обертання.....	225
3.3.5. Запитання для самоконтролю.....	228
3.3.6. Вправи і задачі.....	229
3.3.7. Індивідуальні завдання.....	234
<b>Список використаних джерел.....</b>	<b>242</b>

## Основні позначення

1.  $\mathbb{N}$  – множина всіх натуральних чисел.
2.  $\mathbb{Z}$  – множина всіх цілих чисел.
3.  $\mathbb{N}_0$  або  $\mathbb{Z}_+$  – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4.  $\overline{n;m} = \{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq m\}$ .
5.  $\mathbb{Q}$  – множина всіх раціональних чисел.
6.  $\mathbb{R}$  – множина всіх дійсних чисел.
7.  $\overline{\mathbb{R}}$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8.  $\overline{\mathbb{R}}_0$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ $\infty$ ”.
9.  $\mathbb{C}$  – множина всіх комплексних чисел.
10.  $\emptyset$  – порожня множина.
11.  $\forall$  – квантор загальності;  $\exists$  – квантор існування.
12.  $A \times B$  – декартовий (прямий) добуток множин  $A$  і  $B$ .
13.  $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) : x_1 \in \mathbb{R}; \dots; x_n \in \mathbb{R}\}$  – множина всіх упорядкованих наборів із  $n$  дійсних чисел.
14.  $\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  – сума чисел.
15.  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  – факторіал числа.
16.  $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  – добуток чисел.
17.  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$  – біноміальні коефіцієнти.
18.  $(a;b)$  – відкритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , для яких  $a < x < b$ .
19.  $[a;b]$  – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , для яких  $a \leq x \leq b$ .
20.  $(a;b]$  – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , для яких  $a < x \leq b$ .
21.  $[a;b)$  – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , для яких  $a \leq x < b$ .
22.  $\inf H$  – точна нижня межа множини  $H$ .
23.  $\sup H$  – точна верхня межа множини  $H$ .
24.  $\min H$  – найменший елемент множини  $H$ .

25.  $\max H$  – найбільший елемент множини  $H$ .
26.  $f: H_1 \rightarrow H_2$  – функція з множини  $H_1$  в множину  $H_2$ .
27.  $D(f)$  – область визначення функції  $f$ .
28.  $E(f)$  – множина значень функції  $f$ .
29.  $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$  – графік функції  $f$  в множині  $H_1 \times H_2$ .
30.  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$  – образ множини  $A$ .
31.  $f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$  – прообраз множини  $B$ .
32.  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – обернена функція до оборотної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
33.  $[x]$  – ціла частина числа  $x \in \mathbb{R}$ .
34.  $\text{sgn } x$  – функція знаку числа  $x \in \mathbb{R}$ .
35.  $x = \text{Re } z$  – дійсна частина комплексного числа  $z = x + iy$ .
36.  $y = \text{Im } z$  – уявна частина комплексного числа  $z = x + iy$ .
37.  $\arg z$  – головне значення аргументу комплексного числа  $z$ .
38.  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$  – проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $a \in \mathbb{R}$ .
39.  $(x_n)$  – числова послідовність.
40.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  – границя послідовності  $(x_n)$ .
41.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  – границя функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ .
42.  $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  – приріст функції в точці  $a$ .
43.  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ ,  $f^{(0)}(x) := f(x)$ , – похідна порядку  $n \in \mathbb{N}$  функції  $f$  в точці  $x$ .
44.  $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$  – диференціал порядку  $n \in \mathbb{N}$  функції  $f$ .
45.  $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$  – найбільше значення функції  $f$  на  $[a; b]$ .
46.  $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$  – найменше значення функції  $f$  на  $[a; b]$ .
47.  $\int_a^b f(x) dx$  – визначений інтеграл функції  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
48.  $:=$  – рівне за означенням.

## Передмова

Вища математика – це фундаментальна галузь математики, що охоплює широке коло теоретичних і прикладних аспектів, від яких залежить розвиток науки та техніки.

Пропонований навчально-методичний посібник призначений для студентів, які вивчають вищу математику, та містить розділи: вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Опанування цих знань є необхідним для розуміння складних математичних концепцій і для застосування їх у різних галузях науки та інженерії.

Даний навчально-методичний посібник є доповненим і переробленим виданням посібників [3, 4] та водночас продовженням посібника [35]. Кожен розділ містить основні теоретичні відомості, зразки розв'язання опорних прикладів, вправи й задачі для практичних занять і самостійного опрацювання, а також індивідуальні завдання. Поданий теоретичний матеріал є достатнім для розв'язування завдань з відповідних тем курсу. Значна кількість наведених прикладів та їх розв'язань сприяє глибшому осмисленню суті математичних понять і тверджень. Кількість наведених вправ і задач є достатньою для роботи студентів на практичних заняттях та під час виконання самостійної роботи.

Більш розширений теоретичний матеріал із повними доведеннями всіх тверджень, наведених у цьому посібнику, подано в навчальних виданнях [3, 4, 7–10]. Основні означення та термінологія, що використовуються в посібнику, є усталеними й загальноприйнятими в аналогічній навчальній літературі [1–42].

Для студентів спеціальностей F3 «Комп'ютерні науки», D3 «Менеджмент», A4 «Середня освіта (Технології)» та A5 «Професійна освіта (Транспорт)».

# Розділ 1. Вступ до математичного аналізу

## 1.1. Множини і функції

У цьому підрозділі розглянемо деякі поняття теорії множин, математичної логіки, дійсних та комплексних чисел, поняття функції та основні класи функцій.

**1.1.1. Поняття множини. Дії над множинами. Логічні символи.** Множина – це первісне математичне поняття в так званій наївній теорії множин і йому означення не дається. Множину уявляють собі як сукупність елементів певної природи. Множини позначають, як правило, великими латинськими літерами:  $A, B, C, \dots$ . Деякі множини мають спеціальні позначення [3, 8-10]:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – це множини відповідно натуральних, цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел. Множина складається з певних елементів. Якщо множина  $A$  складається з елементів  $a, b, c$ , то це записується так:  $A = \{a; b; c\}$ . Якщо ж множина  $A$  складається з елементів  $x$  множини  $H$ , які мають властивість  $p(x)$ , то це записують так:  $A = \{x \in H : p(x)\}$ . Наприклад,  $A = \{x \in [0; 2] : x^3 - 1 > 0\}$ . Множина  $\emptyset$ , яка не містить жодного елемента, називається порожньою. Якщо елемент  $x$  належить множині  $A$ , то це записують так:  $x \in A$ . Якщо елемент  $x$  не належить множині  $A$ , то це записують так:  $x \notin A$  або  $x \bar{\in} A$ . Якщо кожний елемент множини  $A$  є і елементом множини  $B$ , то множина  $A$  називається підмножиною  $B$  і це записують так:  $A \subset B$  або  $B \supset A$ . Дві множини називаються рівними, коли вони містять одні й ті самі елементи. Множина  $A \cap B$ , яка утворена з всіх спільних елементів множин  $A$  і  $B$ , називається перетином множин  $A$  і  $B$ . Множину  $A \cup B$ , яка складається з тих елементів, які належать принаймні одній з множин  $A$  і  $B$ , називають об'єднанням множин  $A$  і  $B$ . Множина  $A \setminus B$ , що містить ті елементи множини  $A$ , які не належать множині  $B$ , називається різницею множин  $A$  і  $B$ . Якщо  $a \in A$  і  $b \in B$ , то пару елементів  $a$  і  $b$ , записану у вигляді  $(a; b)$  називають [3, 8-10] упорядкованою парою і при цьому пари  $(a_1; b_1)$  і  $(a_2; b_2)$  називають рівними, якщо  $a_1 = a_2$  і  $b_1 = b_2$ . Множина, елементи якої є всі упорядковані пари  $(a; b)$ , де  $a \in A$  і  $b \in B$ , називається декартовим або прямим добутком множин  $A$  і  $B$  і позначають  $A \times B$ .

Добуток  $A \times A$  називають декартовим квадратом множини  $A$  і позначають через  $A^2$ . Зокрема [3, 8-10],  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  – це множина усіх

упорядкованих пар  $(x; y)$  дійсних чисел, тобто  $\mathbb{R}^2 = \{(x; y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . Аналогічно визначається множина  $\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$  – це множина усіх упорядкованих трійок  $(x; y; z)$  дійсних чисел і множина  $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) : x_1 \in \mathbb{R}; \dots; x_n \in \mathbb{R}\}$  – множина всіх упорядкованих наборів із  $n$  дійсних чисел. Множина, елементами якої є числа (дійсні чи комплексні) називається числовою множиною. Множина, яка складається з нескінченної кількості елементів, називається нескінченною.

Для скорочення записів часто використовуються символи (квантори):  $\forall$  (квантор загальності) і  $\exists$  (квантор існування). Квантор  $\forall$  читається так: „для всіх”, „кожний”, „будь-який” і т.д. Квантор  $\exists$  читається так: „існує”, „знайдеться”, „для деякого” і т.д. За допомогою кванторів можна побудувати висловлення: а)  $(\forall x \in E) : P(x)$  – для всіх елементів  $x$  множини  $E$  виконується  $P(x)$ ; б)  $(\exists x \in E) : P(x)$  – існує елемент  $x$  множини  $E$ , для якого виконується  $P(x)$ .

**1.1.2. Множина дійсних чисел та основні її властивості.** У курсі вищої математики найбільший інтерес становлять числові множини. Серед числових множин будемо розглядати множини натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних та дійсних чисел. Множина всіх натуральних чисел позначається через  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$ . Множина  $\mathbb{N}$ , до якої додано ще елемент 0 позначається через  $\mathbb{N}_0$  або  $\mathbb{Z}_+$ , тобто  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Суму  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  коротко записують так [3, 8-10]:

$$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

При цьому,

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{m=2}^{n+1} a_{m-1} = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2} = \dots .$$

Добуток  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  коротко записують так [3, 8-10]:

$$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n .$$

За означенням,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ,  $0! = 1$ ,  $1! = 1$ ,  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$ ,

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1), \prod_{j=1}^0 a_j = 1 .$$

**Приклад 1.**  $\sum_{j=1}^3 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14, \sum_{j=3}^1 a_j = 0,$

$$\sum_{j=1}^4 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

**Приклад 2.**  $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3, \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$

**Приклад 3.**  $\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1.$

**Приклад 4.**  $\prod_{k=1}^4 \sqrt{k} = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4} = 2\sqrt{6}, \prod_{k=4}^2 k = 1,$

$$\prod_{k=1}^5 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Множина всіх цілих чисел позначається так:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -n; \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$ . Множину всіх цілих невід'ємних чисел позначають через  $\mathbb{N}_0$  або через  $\mathbb{Z}_+$ . Множину всіх цілих чисел, які задовольняють нерівність  $n \leq k \leq m$  позначаємо так:  $\overline{n; m} = \{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq m\}$ .

Множина всіх раціональних чисел позначається через  $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ . Раціональні числа зображаються у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів. Ірраціональні числа – це числа, які зображаються у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів. Числа  $\sqrt{2} = 1,41\dots$ ,  $\pi = 3,14\dots$  та  $\gamma = 1,101001000100001\dots$  є ірраціональними [3, 8-10]. Ірраціональні числа не можна подати у вигляді звичайного дроби  $a = p/q$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ .

Множина всіх дійсних чисел позначається через  $\mathbb{R}$  і складається із всіх раціональних та ірраціональних чисел. Іншими словами, множина  $\mathbb{R}$  – це множина всіх нескінченних десяткових дробів. Кожному дійсному числу на числовій прямій відповідає одна точка і, навпаки, кожній точці числової прямої відповідає певне дійсне число. Тому множину дійсних чисел називають інколи числовою прямою або числовою віссю, а самі дійсні числа називають точками.

Множини  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  і  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  називаються відповідно замкненим і відкритим проміжками, а множини

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  і  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  називаються відповідно лівим та правим напіввідкритими проміжками.

Нескінченна система (тобто множина) замкнених проміжків

$$\{[a_n; b_n] : n \in \mathbb{N}\} = \{[a_1; b_1]; [a_2; b_2]; \dots; [a_n; b_n]; \dots\} \quad (1)$$

називається системою замкнених вкладених проміжків, якщо

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Важливу властивість дійсних чисел виражає наступне твердження, яке називається аксіомою Кантора або аксіомою неперервності множини дійсних чисел.

**Теорема 1 (принцип вкладених проміжків Кантора) [3, 8-10].**

*Для будь-якої нескінченної системи (1) замкнених вкладених проміжків існує принаймні одне дійсне число, яке належить всім проміжкам цієї системи.*

Нехай  $\varepsilon > 0$  – довільне дійсне число.  $\varepsilon$ -околом точки  $a \in \mathbb{R}$  називається проміжок  $U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , тобто

$$U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}. \text{ Проколенням } \varepsilon\text{-околом точки } a \in \mathbb{R}$$

називається множина  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ . Отже,

$$\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}, \text{ тобто } \overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Інколи множину  $\mathbb{R}$ , доповнюють двома такими символами  $-\infty$  і  $+\infty$ , що  $(\forall x \in \mathbb{R}) : -\infty < x < +\infty$ . Доповнена такими символами множина  $\mathbb{R}$

називається розширеною числовою прямою і позначається через  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Символи  $-\infty$  і  $+\infty$  не є дійсними числами. Вони називаються нескінченно віддаленими точками або нескінченними числами.

Проколені  $\varepsilon$ -околи точок  $-\infty$  і  $+\infty$  визначаються відповідно так [3, 8-

$$10]: \overset{\circ}{U}(-\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\varepsilon\} \text{ і } \overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x > \varepsilon\}, \text{ де } \varepsilon > 0.$$

Інколи множину дійсних чисел доповнюють одним символом  $\infty$ , який називають нескінченністю. Доповнена цим символом множина  $\mathbb{R}$

позначається через  $\overline{\mathbb{R}}_0$ . Проколенням  $\varepsilon$ -околом  $\infty$  називається множина

$$\overset{\circ}{U}(\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \varepsilon\}, \text{ де } \varepsilon > 0. \text{ За означенням вважають, що}$$

$$\infty + \infty = \infty, \frac{\infty}{0} = \infty, \frac{0}{\infty} = 0, \infty \cdot \infty = \infty, 0^\infty = 0 \text{ і } \infty^\infty = \infty. \text{ Для будь-якого}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ виконується } x + \infty = \infty, \frac{x}{\infty} = 0, |\infty| = +\infty, |x| < |\infty|, \text{ і якщо}$$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то  $x \cdot \infty = \infty$  і  $\frac{x}{0} = \infty$ . Наступні вирази є невизначеними (не мають змісту в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ ) [3, 8-10]:

а)  $\frac{0}{0}$ ; б)  $\frac{\infty}{\infty}$ ; в)  $0 \cdot \infty$ ; г)  $\infty - \infty$ ; д)  $\infty^0$ ; е)  $1^\infty$ ; є)  $0^0$ .

$\varepsilon$ -ОКОЛИ ТОЧОК  $\infty$ ,  $-\infty$  і  $+\infty$  визначаються відповідно так:  $\{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}$ ,  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\}$ ,  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}$ .

**Приклад 5.**  $U(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$ ,  $U(1; 0, 1) = (0, 9; 1, 1)$ .

**Приклад 6.**  $\overset{\circ}{U}(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1) \cup (1; 1 + \varepsilon)$ ,  $\overset{\circ}{U}(1; 0, 1) = (0, 9; 1) \cup (1; 1)$ .

**Приклад 7.**  $\overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = (\varepsilon; +\infty)$ ,  $\overset{\circ}{U}(+\infty; 100) = (100; +\infty)$ ,

$U(+\infty; 100) = (100; +\infty]$ ,  $U(\infty; 100) = (-\infty; 100) \cup (100; +\infty) \cup \{\infty\}$ .

**1.1.3. Модуль дійсного числа.** Модулем дійсного числа  $x$  називають невід'ємне число  $|x|$ , визначене формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

**Приклад 1.**  $|0| = 0$ ,  $\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ,  $|3, 4| = 3, 4$ ,  $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ ,  $|-2| = |2| = 2$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Для будь-яких дійсних чисел  $x$  та  $y$  виконується: а)  $|x| \geq 0$ ; б)  $|x| = |-x|$ ; в)  $|xy| = |x||y|$ ; г)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ; д)  $x \leq |x|$ ; е)  $-x \leq |x|$ ; є)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ; ж)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

**Приклад 2 [3, 8-10].**  $|x - y| = |y - x|$  і  $|x - y| \leq |x| + |y|$ .

**Приклад 3.** Нерівність  $|x| < \alpha$  рівносильна подвійній нерівності  $-\alpha < x < \alpha$ .

**Приклад 4.** Розв'язком нерівності  $|x| < 2$  є проміжок  $(-2; 2)$ .

**Приклад 5.** Нерівність  $|x - a| < \varepsilon$  рівносильна подвійній нерівності  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

**Приклад 6.** Розв'язком нерівності  $|x - 1| < 3$  є проміжок  $(-2; 4)$ .

**Приклад 7.** Розв'язком нерівності  $0 < |x-3| < 1$  є множина  $(2;4) \setminus \{3\}$ , тобто множина  $(2;3) \cup (3;4)$ .

**Приклад 8.**  $\sqrt{x^2} = |x|$  для кожного дійсного числа  $x$ .

Добре відомими є формули:  $(a+x)^1 = a+x$ ,  $(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ ,  $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ . Ці формули можна узагальнити наступним чином.

**Теорема 2 [3, 8-10].**  $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})$ :

$$(a+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} x^k, \quad (1)$$

де

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=m-k+1}^m j}{k!}.$$

Формулу (1), яка називається формулою бінома Ньютона, можна переписати так:

$$(a+x)^m = a^m + mxa^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2a^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^ka^{m-k} + \dots + x^m.$$

Числа  $C_m^k$  називають біноміальними коефіцієнтами. Використовується часто позначення  $C_m^k = \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$ .

**Приклад 9.**  $(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k$ .

**Приклад 10.**  $\sum_{k=0}^m C_m^k = (1+1)^m = 2^m$ .

**Приклад 11 [3, 8-10].**

$$(1+x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k = C_4^0 + C_4^1 x^k + C_4^2 x^k + C_4^3 x^k + C_4^4 x^k = 1 + 4x + \frac{4 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} x^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

**1.1.4. Межі числових множин.** Множина  $H \subset \mathbb{R}$  називається обмеженою [3, 8-10], якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H): |x| \leq K.$$

Множина  $H \subset \mathbb{R}$  називається скінченною, якщо вона складається з скінченної кількості елементів.

**Приклад 1.** Множина  $\{10; 1000; 100000000\}$  є скінченною і є обмеженою.

**Приклад 2.** Кожна скінченна множина є обмеженою.

**Приклад 3.** Множина  $[0; 1]$  є обмеженою і є нескінченною.

**Приклад 4.** Множина  $[0; +\infty)$  є необмеженою і є нескінченною.

**Приклад 5.** Множина  $\mathbb{N}$  є необмеженою і є нескінченною.

**Приклад 6.** Множина  $E = \left\{ \frac{n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$  є нескінченною і є

необмеженою, бо  $\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n-1 + \frac{1}{n+1} \geq n-1$ .

**Приклад 7.** Множина  $E = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$  є нескінченною і є

обмеженою, бо  $0 \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \leq 3$ .

Верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] таке число  $K \in \mathbb{R}$ , що  $(\forall x \in H): x \leq K$ . Множина, яка має верхню межу називається обмеженою зверху. Іншими словами, множина  $H \subset \mathbb{R}$  називається обмеженою зверху, якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H): x \leq K$ . Якщо множина  $H$  має верхню межу  $K$ , то вона має нескінченну кількість верхніх меж.

**Приклад 8.** Якщо  $H = [0; 1]$ , то верхніми межами цієї множини є, зокрема, числа  $K = 1$ ,  $K = 1,5$ ,  $K = 1 + \sqrt{2}$ ,  $K = 3$ ,  $K = 10 + \sqrt{2}$  і т.д.

Точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається найменша з її верхніх меж. Точна верхня межа множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається ще супремумом множини  $H$  і позначається так [3, 8-10]:  $M_0 = \sup H$ . Означення точної верхньої межі можна дати й іншим чином. Власне, точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] таке число  $M_0 \in \mathbb{R}$ , для якого виконуються дві умови: 1)  $(\forall x \in H): x \leq M_0$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x^* \in H): x^* > M_0 - \varepsilon$ . Ці два означення є еквівалентними

Серед скінченного числа дійсних чисел завжди є найменше із них. Але серед нескінченної кількості дійсних чисел не завжди є

найменше. Тому природним є питання про існування точної верхньої межі.

**Приклад 9.** Множина  $H = (0; 5]$  не має найменшого числа, бо  $0 \notin H$ .

**Приклад 10.** Множина  $H = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$  не має найбільшого елемента, бо  $1 \notin H$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо множина  $H \subset \mathbb{R}$  є непорожньою і обмеженою зверху, то вона має точну верхню межу (скінченну).

Нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] таке число  $K \in \mathbb{R}$ , для якого  $(\forall x \in H) : x \geq K$ . Точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається найбільша її нижня межа. Точна нижня межа називається інфімумом і позначається так:  $m_0 = \inf H$ .

Можна дати і наступне еквівалентне означення точної нижньої межі. Число  $m_0$  називається точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо воно задовольняє умови [3, 8-10]: 3)  $(\forall x \in H) : x \geq m_0$ ; 4)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' < m_0 - \varepsilon$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо множина  $H \subset \mathbb{R}$  є непорожньою і обмеженою знизу, то вона має точну нижню межу (скінченну).

Найбільший елемент множини  $H$  позначають так:  $M = \max H$ . Якщо множина має найбільший елемент, то  $M = M_0$ . Найменший елемент множини  $H$  позначаються так:  $m = \min H$ . Якщо множина  $H$  має найменший елемент, то  $\inf H = \min H$ .

**Приклад 11.** Якщо  $H = (-1; 2)$ , то  $\sup H = 2$  і  $\inf H = -1$ ,  $\min H$  не існує і  $\max H$  – не існує.

**Приклад 12.** Якщо  $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ , то  $\inf H = 0$ ,  $\sup H = \max H = 1$ , а  $\min H$  не існує.

Суттєва різниця між найбільшим елементом множини і її точною верхньою межею полягає в тому, що найбільший елемент множини належить цій множині, а точна верхня межа не обов'язково їй належить.

Інколи вважають, що якщо множина є необмеженою зверху, то  $\sup H = +\infty$ , а якщо множина  $H$  є необмеженою знизу, то  $\inf H = -\infty$ .

**Приклад 13.** Якщо  $H = \mathbb{N}$ , то  $\inf H = \min H = 1$ ,  $\sup H = +\infty$ , а  $\max H$  не існує.

**1.1.5. Поняття функції. Способи задання функції в  $\mathbb{R}$ . Класифікація функцій.** Функцією з множини  $H_1$  в множину  $H_2$  називається така відповідність з множини  $H_1$  в множину  $H_2$ , за якої

кожному елементу множини  $H_1$  відповідає не більше одного елемента множини  $H_2$ . Таким чином [3, 8-10], функція з множини  $H_1$  в множину  $H_2$  – це така непорожня множина  $f$  упорядкованих пар  $(x; y)$ , де  $x \in H_1$  і  $y \in H_2$ , що з умов  $(x_1; y_1) \in f$  і  $(x_1; y_2) \in f$  випливає, що  $y_1 = y_2$ . Функції з  $H_1$  в  $H_2$  позначають символами  $f: H_1 \rightarrow H_2$ ,  $H_1 \xrightarrow{\psi} H_2$ ,  $\gamma: H_1 \rightarrow H_2$  або коротше  $f$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $x \rightarrow f(x)$ ,  $y = f(x)$  і т.д. Сукупність  $D(f)$  тих елементів множини  $H_1$ , яким відповідає один елемент множини  $H_2$  називається множиною або областю визначення функції  $f$ , а сукупність  $E(f)$  тих елементів множини  $H_2$ , які відповідають принаймні одному елементу множини  $H_1$ , називається множиною значень функції  $f$ . Терміни “функція”, “відображення”, “оператор” – це синоніми. Якщо  $E(f)$  – числова множина, то таку функцію  $f$  називають числовою функцією або функціоналом. Функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  називається сур’єкцією [3, 8-10], якщо  $E(f) = H_2$ . Функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  називається оборотною [3, 8-10], якщо образами різних елементів із  $H_1$  є різні елементи множини  $H_2$ . Взаємо однозначною відповідністю між множинами  $H_1$  і  $H_2$  називається [3, 8-10] така оборотна функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , для якої  $D(f) = H_1$  і  $E(f) = H_2$ . В математиці вивчаються різні інші класи функцій: послідовності, тобто функції  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ; дійсні функції однієї дійсної змінної, тобто функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ; дійсні функції двох дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ; дійсні функції трьох дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ; дійсні функції  $n$  дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; векторні функції  $n$  дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  і т.д. Такі функції з різних точок вивчаються в основних розділах математики: геометрії (рівняння кривих та поверхонь задаються такими функціями), в алгебрі (рівняння і системи рівнянь задаються такими ж функціями). Графіком функції  $f: H_1 \rightarrow H_2$  в множині  $H_1 \times H_2$  називається [3, 8-10] упорядкована пара  $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$ . Наприклад, функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  часто зображають точками евклідової площини у відповідній системі координат.

Функцією в  $\mathbb{R}$  або дійсною функцією однієї дійсної змінної називається така відповідність в множині дійсних чисел, за якої кожному

дійсному числу відповідає не більше одного дійсного числа. Таким чином [3, 8-10], функція в  $\mathbb{R}$  – це непорожня множина упорядкованих пар  $(x; y)$  дійсних чисел, яка не містить двох різних пар з однаковими першими елементами. Функції в  $\mathbb{R}$  позначають символами  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ ,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  або коротше  $f$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $x \rightarrow f(x)$  і т.д.  $f(x)$  – це значення функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $x \in \mathbb{R}$ . Дійсні функції однієї змінної далі як правило, називаємо функціями, опускаючи інші слова. Якщо ми говоримо, що функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є визначеною на деякій множині  $H$ , то це означає, що  $H \subset D(f)$ . Графіком функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається упорядкована пара  $\text{graf}(f) = (f; \mathbb{R}^2)$  функції  $f$  і множини  $\mathbb{R}^2$ . Геометрично графік функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  зображають у вигляді деякої множини точок евклідової площини у певній системі координат.

Через  $f(A)$  і  $f^{-1}(B)$  далі позначаємо відповідно образ множини  $A$  і прообраз множини  $B$ , тобто  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$  і  $f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$ . Сумою двох функцій  $f_1$  і  $f_2$  називається така функція  $f = f_1 + f_2$ , для якої образом числа  $x \in \mathbb{R}$  є число  $f_1(x) + f_2(x)$ . Зрозуміло, що  $D(f_1 + f_2) = D(f_1) \cap D(f_2)$ . Добутком функції  $f_1$  на число  $c$  називається така функція  $f = cf_1$ , для якої образом числа  $x \in \mathbb{R}$  є число  $cf_1(x)$ . Аналогічно дається означення добутку і частки двох функцій.

Дві функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називаються рівними, якщо  $D(f_1) = D(f_2)$  і  $(\forall x \in D(f_1)) : f_1(x) = f_2(x)$ . Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою, якщо знайдеться таке число  $C$ , що  $f(x) = C$  для всіх  $x \in D(f)$ . Нулем функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $a$ , що  $f(a) = 0$ , тобто нуль функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – це корінь рівняння  $f(x) = 0$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = 2x$ , то образом числа  $x = 1$  є число  $y = 2$ , прообразом числа  $y = 1$  є число  $x = 1/2$ ,  $f([0; 1]) = [0; 2]$ ,  $f^{-1}([1; 2]) = [1/2; 1]$ .

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = \arcsin x$ , то  $f([2; 3]) = \emptyset$ ,  $f([0; 2]) = [0; \pi/2]$ ,  $f^{-1}([3; 4]) = \emptyset$  і  $f^{-1}([\pi/6; \pi]) = [1/2; 1]$ .

Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати різними способами.

**Приклад 3.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати аналітично, тобто формулою:  $y = 1 + \ln \sqrt{\cos x}$ ,  $y = e^{-\text{ctg}(\ln x)}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{якщо } x < 1, \\ 5, & \text{якщо } 1 \leq x < 5, \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases}$$

**Приклад 4.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати графічно, тобто зображенням в евклідовій площині її графіка.

**Приклад 5.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень аргументу і значень функції.

**Приклад 6.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати словесно-описово, тобто словесним описанням відповідності.

**Приклад 7.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  найбільше ціле число  $[x]$  (тобто цілу частину  $x$ ), яке не перевищує  $x$ . Одержимо функцію, яка позначається так:  $f(x) = [x]$ .

**Приклад 8.** Поставимо у відповідність кожному числу  $x > 0$  число 1, числу 0 – число 0, а кожному  $x < 0$  – число  $-1$ . Одержимо функцію, яка позначається через  $\operatorname{sgn} x$ . Її можна задати і так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

**Приклад 9.** Кожному раціональному числу поставимо у відповідність 1, а кожному ірраціональному – число 0. Отримаємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ – раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ – ірраціональне,} \end{cases}$$

яка називається функцією Діріхле.

**Приклад 10.** Функцію можна задати параметрично, тобто системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  – відомі функції. Такий спосіб задання слід розуміти так: числу  $x$  ставимо у відповідність число  $y$ , якщо існує таке число  $t \in [\alpha; \beta]$ , що упорядкована трійка  $(x; y; t)$  є розв'язком цієї системи.

**Приклад 11.** Функцію  $y = x^2$  можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

**Приклад 12.** Функцію  $y = \sqrt{1-x^2}$  також можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

**Приклад 13.** Система, якою задається параметрично функція може бути досить складною:

$$\begin{cases} x = e^{-\operatorname{tg} t} + \sin t, \\ y = 1 - \cos t + e^{-\operatorname{tg} t}. \end{cases}$$

**Приклад 14.** Функцію можна задати неявно рівнянням (тобто рівнянням  $F(x, y) = 0$ , з якого ми не обов'язково вміємо виразити  $y$  через  $x$  у вигляді якоїсь формули).

**Приклад 15.** Рівняння  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  можна розв'язати відносно  $y$ . Воно задає, зокрема, функції  $y = \sqrt{1-x^2}$  і  $y = -\sqrt{1-x^2}$ .

**Приклад 16.** Рівняння

$$e^{\operatorname{tg} x} \cos x + \ln(x + \sin y) = 0$$

ми не вміємо розв'язати відносно  $y$ , але можливо, воно має розв'язок і тому може визначати деяку функцію  $y = f(x)$ .

**Приклад 17.** Функцію часто задають як розв'язок деякого функціонального рівняння (диференціального, інтегрального та інших). Невідомим в такому рівнянні є не число, а функція.

**Приклад 18.** Функцію  $y = ax$  називають лінійною функцією, а інколи лінійною однорідною.

**Приклад 19.** Позначимо через  $f$  таку функцію, для якої при всіх  $x \in \mathbb{R}$  виконується  $f'(x) - f(x) = 0$  і  $f(0) = 1$ . Далі переконаємось, що функція  $f(x) = e^x$  є єдиним розв'язком цього рівняння.

**Приклад 20.** Функція  $f(x) = 4 \cos^2 \frac{x}{x^2 - 1} + 4 \sin^2 \frac{x}{x^2 - 1} - 1$  є сталою, бо  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  і  $f(x) = 3$  для всіх  $x \in D(f)$ .

**Приклад 21.** Нулями функції  $f(x) = \sin x$  є числа  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Для знаходження області визначення функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка задана формулою  $y = f(x)$ , потрібно, якщо не вказано на інше, знайти

множину тих  $x$ , для яких ця формула має зміст.

**Приклад 22.** Область визначення функції  $f(x) = \sqrt{x-1}$  складається з тих  $x \in \mathbb{R}$ , для яких  $x-1 \geq 0$ . Отже,  $D(f) = [1; +\infty)$ .

Композицією функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається функція  $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначена формулою  $F(x) = f(\varphi(x))$ . Композицію двох функцій називають інколи складеною функцією.

**Приклад 23.** Якщо  $f(x) = \cos x$  і  $\varphi(x) = 2x$ , то  $F(x) = \cos 2x$ , тобто  $f \circ \varphi(x) = \cos 2x$ . Якщо ж  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(x) = e^x$ , то  $F(x) = \sin e^x$ , тобто  $f \circ \varphi(x) = \sin e^x$ .

Функції  $f(x) = C$ ,  $f(x) = x^\mu$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \arccos x$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  та  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ , де  $\mu \in \mathbb{R}$  і  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$  – деякі числа, називають основними елементарними функціями. Функція називається елементарною, якщо її можна задати формулою  $y = F(x)$ , яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій основних елементарних функцій.

**Приклад 24.** Функція

$$F(x) = \exp\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(\lg\left(1 + \sqrt{x}\right)\right)}\right) + \exp\left(\frac{\ln(1 + \arcsin 3x)}{\operatorname{arctg}(1 + e^x)}\right)$$

є елементарною.

Елементарні функції можна поділити на різноманітні класи за різними ознаками [3, 8-10].

**Приклад 25.** Одночленом називають функцію  $f(x) = ax^n$ , де  $a \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}_0$  – деякі числа.

**Приклад 26.** Багаточленом (многочленом, поліномом) називають скінченну суму одночленів, тобто функцію  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , де  $a_0 \in \mathbb{R}$ , ...,  $a_n \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}_0$  – деякі числа. Багаточлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  називають багаточленом степеня  $n \in \mathbb{N}_0$ , якщо  $a_n \neq 0$ .

**Приклад 27.** Багаточлен нульового степеня – це стала функція  $f(x) = C$ . Багаточлен першого степеня – це афінна функція  $f(x) = ax + b$ . Зокрема, лінійна функція  $f(x) = ax$ , де  $a \in \mathbb{R}$ , є багаточленом першого степеня.

**Приклад 28.** Багаточлен другого степеня – це квадратний тричлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Функція  $f(x) = 1 - 4x + 10x^5 - 6x^7$  є багаточленом сьомого степеня.

**Приклад 29.** Раціональна функція – це частка двох багаточленів.

Функція  $f(x) = \frac{1 - 3x^4 + 4x^5}{2 + 7x^5 - x^8}$  є раціональною.

**Приклад 30.** Ірраціональні функції – це функції, які є елементарними і які можуть бути задані за допомогою формули  $y = F(x)$ , яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій раціональних і степеневих функцій з раціональним показником. Функції  $f(x) = \sqrt{x}$  і  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{3/2} + 1}{(x^5 + 6x + 1)^{4/7}}}$  є ірраціональними.

**Приклад 31.** Трансцендентні функції – це елементарні функції, які не є ні раціональними, ні ірраціональними.

**Приклад 32.** Функції  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \arccos x$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  та  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$  є трансцендентними.

**Приклад 33.** Функції  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$  і  $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$  є

трансцендентними. Використовується також позначення  $\operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$ .

Функції  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$  і  $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

називаються відповідно гіперболічним синусом, гіперболічним косинусом, гіперболічним тангенсом та гіперболічним котангенсом. Ці функції є елементарними. Використовуються також позначення  $\operatorname{sinh} x = \operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{cosh} x = \operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{tanh} x = \operatorname{th} x$  та  $\operatorname{coth} x = \operatorname{cth} x$ .

В математичному аналізі вивчаються і функції, які не є елементарними. Наприклад, гамма-функція, циліндричні функції та інші. Такі функції широко використовуються у фізиці та інших науках. Вони задаються як розв'язки деяких функціональних рівнянь, рядами та іншими способами.

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] парною, якщо  $(\forall x \in D(f)): f(-x) = f(x)$ . Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається непарною, якщо  $(\forall x \in D(f)): f(-x) = -f(x)$ . Для того щоб показати, що функція не

є парною досить вказати значення  $x \in D(f)$ , для якого  $f(-x) \neq f(x)$ . Аналогічно, для того щоб показати, що функція  $f$  не є непарною досить показати, що  $(\exists x \in D(f)): f(-x) \neq -f(x)$ . Графіки парних функцій симетричні відносно осі  $OY$ , а непарних – відносно початку координат. Існують функції, які є ні парними ні непарними.

**Приклад 34.** Функція  $f(x) = |x|$  є парною, бо  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Функція  $f(x) = x^2$  є парною, бо  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Функція  $f(x) = \cos x$  також є парною, бо  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 35.** Функція  $f(x) = x$  є непарною, бо  $f(-x) = -x = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Функція  $f(x) = x^3$  є непарною, бо  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Функція  $f(x) = \sin x$  також є непарною, бо  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 36.** Якщо  $f(x) = 2x + 1$ , то  $f(1) = 3$ ,  $f(-1) = -1$  і  $-f(1) = -3$ . Тому ця функція є ні парною ні непарною.

**Приклад 37.** Функція  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$  є також ні парною ні непарною, бо  $f(2) = 12$ ,  $f(-2) = 0$ . Разом з цим, і  $f(1) = f(-1) = 0$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] періодичною, якщо існує таке число  $T \neq 0$ , що  $(\forall x \in D(f)): f(x \pm T) = f(x)$ . Періодом функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $T \neq 0$ , для якого виконується остання рівність. З означення випливає, що разом із числом  $T \neq 0$  періодом функції є також кожне число  $\tilde{T} = nT$ , де  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Приклад 38.** Будь-яке число  $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  є періодом сталої функції  $f(x) = C$  і, таким чином, існують періодичні функції, які не мають найменшого додатного періоду.

**Приклад 39.** Функція  $f(x) = x^2$  не є періодичною. Справді, якщо б функція була періодичною, то існувало б  $T \neq 0$  таке, що для всіх  $x \in \mathbb{R}$  виконувалось би  $(x+T)^2 = x^2$ . Взявши тут  $x=0$  отримуємо  $T^2 = 0$ , тобто  $T = 0$ , що суперечить припущенню.

**Приклад 40.** Функція  $f(x) = \sin \sqrt{2}x$  є періодичною і кожне число  $T = 2\pi t / \sqrt{2}$ ,  $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  є її періодом.

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається зростаючою на множині  $H$ ,

якщо [3, 8-10]

$$(\forall\{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2). \quad (1)$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неспадною або монотонно зростаючою на множині  $H$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall\{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2) : f(x_1) \leq f(x_2). \quad (2)$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається спадною на множині  $H$ , якщо

$$(\forall\{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2) : f(x_1) > f(x_2). \quad (3)$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається незростаючою або монотонно спадною на множині  $H$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall\{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2) : f(x_1) \geq f(x_2). \quad (4)$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка задовольняє принаймні одну із умов (1)-(4) називається [3, 8-10] монотонною на множині  $H$ . Функція, яка задовольняє умову (1) або умову (3) називається строго монотонною на множині  $H$ .

Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на множинах  $H'$  і  $H''$ , то вона не обов'язково є зростаючою на множині  $H = H' \cup H''$ .

**Приклад 41.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є зростаючою на проміжках  $H' = (-\pi/2; \pi/2)$  і  $H'' = (\pi/2; 3\pi/2)$ , але вона не є зростаючою на множині  $H = (-\pi/2; \pi/2) \cup (\pi/2; 3\pi/2)$ .

**Приклад 42.** Функція  $f(x) = 2x + 1$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 = f(x_2)$ , якщо  $x_1 < x_2$ .

**Приклад 43.** Функція  $f(x) = x \sin x$  не є монотонною на  $\mathbb{R}$ , бо  $0 = f(x_1) < f(x_2) = \pi/2$ ,  $\pi/2 = f(x_2) > f(x_3) = 0$  і  $x_1 < x_2 < x_3$ , якщо  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi/2$  і  $x_3 = \pi$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] обмеженою на множині  $H$ , якщо  $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : |f(x)| \leq c$ . Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є обмеженою на множині  $H$ , називається необмеженою на  $H$ . Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] обмеженою зверху на множині  $H$ , якщо  $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : f(x) \leq c$ . Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою знизу на множині  $H$ , якщо  $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : f(x) \geq c$ .

**Приклад 44.** Функція  $f(x) = \sin x$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ , бо  $|\sin x| \leq 1$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

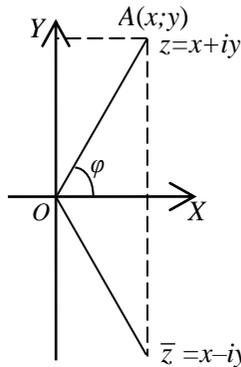
**Приклад 45.** Функція  $f(x) = 2x + 1$  є необмеженою на  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 46.** Функція  $f(x) = x^2$  є обмеженою знизу на  $\mathbb{R}$ , але не

є обмеженою зверху на  $\mathbb{R}$ . Функція  $f(x) = -x^2 + 1$  є обмеженою зверху на  $\mathbb{R}$ , але не є обмеженою знизу на  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 47.** Функція  $f(x) = 1/x$  є обмеженою на множині  $H = (1; +\infty)$ , є необмеженою на множині  $H = (0; +\infty)$ , є обмеженою знизу на множині  $H = (0; +\infty)$ , є необмеженою зверху на  $H = (0; +\infty)$ .

**1.1.6. Основні відомості про комплексні числа.** Комплексним числом називається упорядкована пара  $z = (x; y)$  дійсних чисел  $x$  і  $y$ , причому число  $x$  називається дійсною частиною комплексного числа  $z$  і позначається  $x = \operatorname{Re} z$ , а  $y$  – уявною і позначається  $y = \operatorname{Im} z$ . Два комплексні числа  $z_1 = (x_1; y_1)$  і  $z_2 = (x_2; y_2)$  називаються рівними [7, 10], якщо рівними є їх дійсні та уявні частини. Число  $(x; 0)$  позначають через  $x$ :  $x = (x; 0)$ . Зокрема,  $1 = (1; 0)$ . Число  $(0; y)$  називається чисто уявним, а число  $i = (0; 1)$  називається уявною одиницею.



Додавання і множення комплексних чисел визначаються відповідно так:  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ ,  $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$ . Із означення випливає, що  $i^2 = i \cdot i = -1$  і кожне комплексне число  $z = (x; y)$  можна подати в алгебраїчній формі:  $z = x + iy$ . Множину всіх комплексних чисел позначають через  $\mathbb{C}$ . Між множинами  $\mathbb{C}$  і  $\mathbb{R}^2$  існує взаємно однозначна відповідність [7, 10]: числу  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  відповідає точка  $A(x; y) \in \mathbb{R}^2$ . Тому комплексні числа можна зображати точками площини в декартовій системі координат  $XOY$ . Число  $\bar{z} = x - iy$  називається спряженим до числа  $z$ . Число  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  називається модулем комплексного числа  $z$ . Модуль числа  $z \in \mathbb{C}$  дорівнює довжині вектора

$\overline{OA}$ , який називається радіус-вектором числа  $z$ . Безпосередньо із означення випливає, що  $\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq 0, |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$  і  $|\bar{z}| = |z|$ . Крім того,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|, \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$  і

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z_1 z_2}}{\overline{z_2 z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Правильні також нерівності [7, 10]:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, |\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

За означенням, для довільного комплексного числа  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  виконується [7, 10]:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Аргументом комплексного числа  $z$  називається кут  $\varphi = \operatorname{Arg} z$ , утворений радіус-вектором числа  $z$  і додатним променем осі  $OX$ . Аргумент визначається з точністю до  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Головним значенням  $\operatorname{Arg} z$  називається таке число  $\arg z \in \operatorname{Arg} z$ , яке належить проміжку  $[-\pi; \pi)$ . Справедлива формула  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Для знаходження головного значення аргументу числа  $z \neq 0$  справедлива формула [7, 10]:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, \quad y > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Точніше кажучи, головним значенням аргументу комплексного числа  $z \neq 0$  називається число  $\arg z$ , визначене рівністю (1). Множина  $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  називається [7, 10] множиною аргументів числа  $z \neq 0$ . Інколи головне значення аргументу береться з проміжку  $[0; 2\pi)$  (тоді формулу (1) потрібно відповідним чином змінити), а символами “ $\operatorname{Arg} z$ ” і “ $\arg z$ ” позначають довільний елемент множини аргументів та інші речі. Тому в кожній конкретній ситуації потрібно

з'ясувати зміст цих символів. Оскільки  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  і  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  (формула Ейлера), то комплексне число  $z$  можна записати також у тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

та показниковій

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (3)$$

Якщо число  $z$  записано у формі (2) чи (3), то  $r = |z|$ , а  $\varphi \in \text{Arg } z$ . Для арифметичних операцій над дійсними числами справедливі ті ж правила, що і для арифметичних операцій над дійсними числами.

Коренем  $n$ -го степеня, де  $n \in \mathbb{N}$ , комплексного числа  $z$  називається таке число  $w$ , для якого  $w^n = z$ . Множина всіх коренів  $n$ -го степеня з числа  $z$  позначається через  $w = \sqrt[n]{z}$ . Цим же символом позначається довільний елемент цієї множини. Якщо  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $w = \rho e^{i\theta}$ , то  $\rho^n = r$ ,  $n\theta = \varphi + 2k\pi$ . Тому [7, 10]

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \overline{0; n-1},$$

де  $\varphi \in \text{Arg } z$  – будь-яке значення аргументу  $z$  і  $\sqrt[n]{|z|}$  – арифметичне значення кореня  $n$ -го степеня з невід'ємного числа  $|z|$ .

Логарифмом комплексного числа  $z$  називається таке число  $w$ , яке є розв'язком рівняння  $e^w = z$ . Множина всіх таких чисел  $w$  позначається [7, 10] через  $\text{Ln } z$ :

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

або

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z,$$

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$  – головне значення логарифма ( $\arg z \in [-\pi; \pi)$ ).

За означенням,  $z^a = \exp(a \text{Ln } z)$ . Зокрема,  $e^z = \exp(z \text{Ln } e)$ .

Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  – задана функція, то [7, 10] її можна подати у вигляді  $f = f_1 + i f_2$ , де  $f_1 = \text{Re } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2 = \text{Im } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – дійсні функції дійсної змінної.

**Приклад 1.**  $i^3 = i^2 i = -i$ .

**Приклад 2.**  $\arg 2 = 0$ ,  $\arg(-4) = -\pi$ ,  $\arg 3i = \pi/2$ ,

$$\arg(-3i) = -\pi / 2.$$

**Приклад 3.**  $|1 + 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ ,  $\arg(1 + 3i) = \arctg 3$ ,

$$1 + 3i = \sqrt{10}e^{i \arctg 3}, \quad 1 + 3i = \sqrt{10}(\cos \arctg 3 + i \sin \arctg 3).$$

**Приклад 4 [7, 10].**

$$e^{i(\varphi+2k\pi)} = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 5 [7, 10].**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

**Приклад 6.**  $|2e^{i\pi/3}| = 2$ ,  $\arg(2e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3}$ ,

$$2e^{i\pi/3} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

**Приклад 7 [7, 10].**  $|-2e^{i\pi/3}| = 2$ ,  $-2e^{i\pi/3} = 2e^{-i\pi} e^{i\pi/3} = 2e^{-i2\pi/3}$ ,

$$\arg(-2e^{i\pi/3}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

**Приклад 8.**

$$\frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2-i)^2}{|2+i|^2} = \frac{4-4i+i^2}{4+1} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

**Приклад 9.**  $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ ,  $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$ ,

$\text{Arg } z^n = n \text{Arg } z$ ,  $|z^n| = |z|^n$ ,  $z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r = |z|$ ,  $\varphi \in \text{Arg } z$ .

**Приклад 10 [7, 10].**

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), \quad k \in \overline{0; 2}.$$

Тому

$$(\sqrt{-1})_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sqrt{-1})_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad (\sqrt{-1})_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Приклад 11.**

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp(x_1 + x_2) (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \\ &= \exp(x_1 + x_2) (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) = \\ &= \exp(x_1 + x_2) (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \exp(z_1) \exp(z_2). \end{aligned}$$

**Приклад 12.**  $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 13.**  $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}.$

**Приклад 14.**  $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$

**Приклад 15.**  $\text{Ln } e = 1 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 16.**  $i^i = \exp(i \text{Ln } i) = \exp(-2k\pi - \pi/2), \quad k \in \mathbb{Z}.$

**Приклад 17.**

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\right) &= \frac{1}{2} (e^{i(i+\pi/4)} + e^{-i(i+\pi/4)}) = \frac{1}{2} (e^{-1+i\pi/4} + e^{1-i\pi/4}) = \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-1} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) + e \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \left( e + \frac{1}{e} \right) \frac{\sqrt{2}}{4} - i \left( e - \frac{1}{e} \right) \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

### 1.1.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення об'єднання двох множин.
2. Сформулюйте означення перетину двох множин.
3. Наведіть три приклади ірраціональних чисел.
4. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, сума яких є раціональним числом.
5. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких є раціональним числом.
6. Чи існують такі два різні раціональні числа  $a$  і  $b$ , що проміжок  $(a;b)$  не містить жодного ірраціонального числа?
7. Серед чисел  $1, (0); 0,9; \sqrt{2}; \sqrt{4}$  виберіть натуральні.
8. Серед чисел  $2; 1,2(7); \sqrt{9}; \sqrt{3}; e; \pi$  виберіть раціональні.

9. Що називається модулем дійсного числа?
10. Порівняйте числа  $|x + y|$  і  $|x| + |y|$ .
11. Порівняйте числа  $||x| - |y||$  і  $|x - y|$ .
12. Порівняйте числа  $|y| - |x|$  і  $|x - y|$ .
13. Порівняйте числа  $||a| - |b||$  і  $|a + b|$ .
14. Порівняйте числа  $|x + y|$  і  $|x - y|$ .
15. Сформулюйте принцип вкладених проміжків.
16. Сформулюйте означення обмеженої множини.
17. Наведіть приклад нескінченної обмеженої множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
18. Наведіть приклад нескінченної необмеженої множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
19. Сформулюйте означення обмеженої зверху множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
20. Сформулюйте означення верхньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
21. Сформулюйте два означення точної верхньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
22. Сформулюйте означення обмеженої знизу множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
23. Сформулюйте означення нижньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
24. Сформулюйте два означення точної нижньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
25. Наведіть приклад множини  $H \subset \mathbb{R}$ , яка є обмеженою зверху і необмеженою знизу.
26. Наведіть приклад множини  $H \subset \mathbb{R}$ , яка є необмеженою зверху і обмеженою знизу.
27. Сформулюйте теорему про існування точної верхньої межі.
28. Наведіть приклад такої множини  $H \subset \mathbb{R}$ , що вона не має найменшого елемента, має найбільший елемент,  $\inf H = -4$  і  $\max H = -2$ .
29. Сформулюйте означення функції.
30. Сформулюйте означення оборотної функції.
31. Сформулюйте означення взаємно однозначної відповідності.
32. Сформулюйте означення парної функції.
33. Сформулюйте означення непарної функції.
34. Сформулюйте означення періодичної функції.
35. Сформулюйте означення періоду функції.
36. Сформулюйте означення неспадної функції.
37. Сформулюйте означення незростаючої функції.
38. Сформулюйте означення монотонної функції.
39. Сформулюйте означення спадної функції.
40. Сформулюйте означення зростаючої функції.
41. Що називаємо модулем та аргументом комплексного числа?
42. Запишіть формулу Муавра.

43. Сформулюйте означення кореня  $n$ -го степеня з комплексного числа і запишіть формулу для його знаходження.
44. Сформулюйте означення  $e^z$  та доведіть, що  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ .
45. Сформулюйте означення логарифма комплексного числа і запишіть формулу для знаходження логарифмів.
46. Сформулюйте означення  $z^\alpha$ .

### 1.1.8. Вправи і задачі.

1. Знайдіть множину (область) визначення функцій  $f_1$ ,  $f_2$  і  $f_1 + f_2$ :

1.  $f_1(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ,  $f_2(x) = \sqrt{\arccos x}$ .

2.  $f_1(x) = \arctg|x|$ ,  $f_2(x) = |\ln x|$ .

3.  $f_1(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ ,  $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ .

4.  $f_1(x) = \ln \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ,  $f_2(x) = \sin|x|$ .

5.  $f_1(x) = |2^x - 3^{x+1}|$ ,  $f_2(x) = e^{|x|} - 1$ .

6.  $f_1(x) = x^2 - 1$ ,  $f_2(x) = (x-1)^3$ .

2. Знайдіть множину значень функції:

1.  $f(x) = x^2 + 1$ .

2.  $f(x) = 1 + \arcsin x$ .

3.  $f(x) = 1 + \ln x$ .

4.  $f(x) = e^x + 1$ .

5.  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

6.  $f(x) = \arctg|x| + \frac{\pi}{2}$ .

3. Знайдіть нулі функції:

1.  $f(x) = \sin x$ .

2.  $f(x) = \cos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

5.  $f(x) = 4^{\sqrt{x-2}} - 2^{\sqrt{x-2}}$ .

6.  $f(x) = (2^x - 3^x)(\ln x + 1)$ .

7.  $f(x) = (2^{|x|} - 2)(\ln x - 1)$ .

8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ .

9.  $f(x) = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} - 3$ .

10.  $f(x) = |x| - 2\sqrt{|x|} + 1$ .

4. Зобразіть графік функції:

1.  $y = |x| + 1$ .

2.  $y = (x+1)^2$ .

3.  $y = \frac{1}{x^2} + 1$ .

4.  $y = 2^{x+1}$ .

5.  $y = 2^x + 1$ .

6.  $y = 2 \lg x$ .

7.  $y = -\lg|x|$ .

8.  $y = 2^{-|x|}$ .

9.  $y = |\sin x|$ .

10.  $y = -\arctg x$ .

11.  $y = -\arccos x$ .

12.  $y = -|\arctg x|$ .

13.  $y = \arcsin|x|$ .

14.  $y = \operatorname{arccctg}|x|$ .

15.  $y = (x-1)^3$ .

16.  $y = -(x+1)^3$ .

17.  $y = 1 + \sqrt{x}$ .

18.  $y = -\sqrt{x+1}$ .

19.  $y = -|\cos x|$ .

20.  $y = \operatorname{tg}(x + \pi/4)$ .

5. Знайдіть ті точки, в яких функція приймає значення  $A$ :

1.  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $A = 1/2$ .

2.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ ,  $A = 1/3$ .

3.  $f(x) = |x+1| + |x|$ ,  $A = 1/2$ .

4.  $f(x) = |\ln|x||$ ,  $A = 2$ .

5.  $f(x) = 5^{x+1} - 5^{x-1}$ ,  $A = 24$ .

6.  $f(x) = \arcsin^2 \sqrt{x}$ ,  $A = 1/2$ .

7.  $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$ ,  $A = 24$ .

8.  $f(x) = \log_2 x^2$ ,  $A = 4$ .

9.  $f(x) = \sin^2 x + 2|\sin x|$ ,  $A = 0$ .

10.  $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ ,  $A = 1/2$ .

6. Знайдіть множину точок, в яких функція приймає додатні значення:

1.  $f(x) = \sin x$ .

2.  $f(x) = \cos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

5.  $f(x) = \ln x$ .

6.  $f(x) = \operatorname{arccctg} x$ .

7.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$ .

8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ .

9.  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}$ .

10.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}$ .

7. Знайдіть абсциси тих точок, для яких графік функції лежить під віссю абсцис:

1.  $f(x) = (x-1)(x+2)$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{x+3} - 6$ .

3.  $f(x) = |x+1| - |x|$ .

4.  $f(x) = ||x+1| - |x-1||$ .

5.  $f(x) = \log_{1/2} x + 1$ .

6.  $f(x) = \log_2 x^2$ .

7.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ .

8.  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ .

9.  $f(x) = \sqrt{x^2} - x$ .

10.  $f(x) = \lg|x| - 1$ .

8. З'ясуйте, чи функція є парною, непарною, ні парною ні непарною:

- |                                            |                                          |
|--------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .                | 2. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ . |
| 3. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ . | 4. $f(x) = \arccos x^2$ .                |
| 5. $f(x) = \ln x$ .                        | 6. $f(x) = x^2 + 1$ .                    |
| 7. $f(x) = e^x$ .                          | 8. $f(x) = x + \arctg x$ .               |
| 9. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .              | 10. $f(x) = x^2 - 2x$ .                  |
| 11. $f(x) = x \ln  x $ .                   | 12. $f(x) = \cos(x+2)$ .                 |
| 13. $f(x) = \sin(x-1)$ .                   | 14. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .              |
| 15. $f(x) = \sin^2 x$ .                    | 16. $f(x) = x \cos x$ .                  |
| 17. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .            | 18. $f(x) = x + \sin x$ .                |
| 19. $f(x) = 2x + 1$ .                      | 20. $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ .         |

9. З'ясуйте, чи множина  $H$  є: а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу; в) обмеженою; г) має найбільший елемент; д) має найменший елемент:

- |                                                                       |                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1. $H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (0; \pi)\}$ .                  | 2. $H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (\pi/6; \pi/3)\}$ .                 |
| 3. $H = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .    | 4. $H = \left\{ \frac{2n^4}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .        |
| 5. $H = \left\{ \frac{(-2)^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . | 6. $H = \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . |
| 7. $H = \left\{ \frac{2+n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .       | 8. $H = \left\{ n(\sqrt{n^2+1} - n) : n \in \mathbb{N} \right\}$ .         |
| 9. $H = \left\{ \frac{2^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .    | 10. $H = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .       |

10. З'ясуйте, чи функція є обмеженою, обмеженою знизу та обмеженою зверху на множині  $H$  :

- |                                                                |                                                                     |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ , $H = (1; +\infty)$ .                 | 2. $f(x) = \frac{1}{x}$ , $H = (0; 1)$ .                            |
| 3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . | 4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , $H = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ . |
| 5. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , $H = (0; +\infty)$ .            | 6. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ , $H = (0; +\infty)$ .                 |

7.  $f(x) = x^2$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

8.  $f(x) = -x^2 + 1$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

11. Виходячи з означення з'ясуйте, чи функція є монотонною на області визначення:

1.  $f(x) = 2x + 3$ .

2.  $f(x) = x^2 + 2$ .

3.  $f(x) = |x|$ .

4.  $f(x) = [x]$ .

5.  $f(x) = x[x]$ .

6.  $f(x) = |x|[x]$ .

7.  $f(x) = \operatorname{sh} x$ .

8.  $f(x) = \operatorname{ch} x$ .

12. Розв'яжіть рівняння:

1.  $\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ .

2.  $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}$ .

3.  $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ .

4.  $\sin x + \sin 2x = 0$ .

5.  $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$ .

6.  $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$ .

7.  $\left(\cos^2 x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$ .

8.  $\sin x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

9.  $\log_2 x = 3$ .

10.  $\lg x = 2 - \lg 5$ .

11.  $4^{5-2x} = 0,25$ .

12.  $3^{x+2} + 3^{x+1} = 28$ .

13. Розв'яжіть нерівність:

1.  $x^2 + 2x + 1 > 0$ .

2.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ .

3.  $-2x^2 - 10x - 8 > 0$ .

4.  $x^2 + x + 4 \leq 0$ .

5.  $(x^2 + 1)(x - 2) \geq 0$ .

6.  $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ .

7.  $\frac{6}{x-3} < 2$ .

8.  $|x| < 4$ .

9.  $1 < (x-1)^2 < 4$ .

10.  $|x-5| < 1$ .

11.  $\sin x \geq 1/2$ .

12.  $\ln x < -1$ .

13.  $|\cos x| > \sqrt{2}/2$ .

14.  $2^{x^2} > (0,5)^{2x-3}$ .

15.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9}$ .

16.  $1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25$ .

14. Знайдіть модуль і аргумент комплексного числа  $z$ :

1.  $z = i^5$ .

2.  $z = i^3$ .

3.  $z = i^6$ .

4.  $z = 3i^4$ .

5.  $z = 1 - i$ .

6.  $z = 1 + i$ .

7.  $z = -1 - 2i$ .

8.  $z = -2 + i$ .



- |                                                 |                                            |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 7. $A = \{x: x^2 + x > 0\}$ ,                   | $B = \{x:  x + 2  > 1\}$ .                 |
| 8. $A = \{x: x^2 - x < 0\}$ ,                   | $B = \{x: 0 <  x + 2  \leq 1\}$ .          |
| 9. $A = \{x:  x - 1  +  x + 2  > 1\}$ ,         | $B = \{x: x^2 > 4\}$ .                     |
| 10. $A = \{x:  x + 1  +  x - 1  > 2\}$ ,        | $B = \{x: x^2 \leq 4\}$ .                  |
| 11. $A = \{x:  x - 1  +  x - 2  \leq 1\}$ ,     | $B = \{x:  x  > 1\}$ .                     |
| 12. $A = \{x:  x  +  x - 2  > 1\}$ ,            | $B = \{x: x^2 + x > 0\}$ .                 |
| 13. $A = \{x:  x  +  x + 2  > 1\}$ ,            | $B = \{x: x^2 + x \leq 0\}$ .              |
| 14. $A = \{x:  x  +  x - 1  > 2\}$ ,            | $B = \{x: x^2 - x \geq 0\}$ .              |
| 15. $A = \{x:  x  +  x - 1  \leq 1\}$ ,         | $B = \{x: x^2 - x < 0\}$ .                 |
| 16. $A = \{x:  x  +  x + 1  > 1\}$ ,            | $B = \{x: x^2 < 9\}$ .                     |
| 17. $A = \{x:  x  +  x + 1  \leq 1\}$ ,         | $B = \{x: x^2 \geq 9\}$ .                  |
| 18. $A = \{x:  x  >  x + 2 \}$ ,                | $B = \{x: 0 < x^2 \leq 4\}$ .              |
| 19. $A = \{x:  x  \leq  x + 2 \}$ ,             | $B = \{x: (x - 1)^2 > 4\}$ .               |
| 20. $A = \{x:  x  \leq x\}$ ,                   | $B = \{x:  x  = 1\}$ .                     |
| 21. $A = \{x: x^2 \leq x\}$ ,                   | $B = \{x:  x  \leq 1\}$ .                  |
| 22. $A = \{x: \sqrt{x^2} \leq x\}$ ,            | $B = \{x:  x  \geq 1\}$ .                  |
| 23. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} \leq 1\}$ ,      | $B = \{x:  x - 1  \geq 1\}$ .              |
| 24. $A = \{x: \sin x > 1/2\}$ ,                 | $B = \{x: \cos x \leq 1/2\}$ .             |
| 25. $A = \{x: 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0\}$ , | $B = \{x: \log_{1/2}(x - 3/2) > 1\}$ .     |
| 26. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} < 1\}$ ,         | $B = \{x:  x + 2  < 1\}$ .                 |
| 27. $A = \{x: x^2 + x + 1 > 0\}$ ,              | $B = \{x:  x - 2  < 1\}$ .                 |
| 28. $A = \{x:  x - 1  +  x  < 2\}$ ,            | $B = \{x:  x^2 + 2  < 1\}$ .               |
| 29. $A = \{x:  x + 1  +  x  \geq 1\}$ ,         | $B = \{x:  x - 1  +  x  -  x + 1  = 1\}$ . |
| 30. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} > 1\}$ ,         | $B = \{x:  x - 1  > 0\}$ .                 |

2. Знайдіть множину (область) визначення функції:

1.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \ln x$ .
2.  $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\ln x}$ .
3.  $f(x) = \sqrt{\sin x} + \ln \sqrt{x}$ .
4.  $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{x}$ .
5.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$ .
6.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arccotg} x}$ .
7.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$ .
8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ .
9.  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}$ .
10.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}$ .
11.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$ .
12.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}$ .
13.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ .
14.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x - 1}}$ .
15.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 8}}$ .
16.  $f(x) = \ln^2 \frac{x^2 + 1}{x}$ .
17.  $f(x) = \frac{2+x}{|x|-x}$ .
18.  $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x-1}$ .
19.  $f(x) = \sqrt{2 - 3x + x^2}$ .
20.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3 + 4x - x^2}}$ .
21.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ .
22.  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .
23.  $f(x) = \frac{1}{x + |x|}$ .
24.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ .
25.  $f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ .
26.  $f(x) = \arccos(1 - |x|)$ .
27.  $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$ .
28.  $f(x) = \cos \frac{x-1}{x+1}$ .
29.  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ .
30.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .

3. З'ясуйте, чи функція є періодичною:

1.  $f(x) = \sin^2 x$ .
2.  $f(x) = x \cos x$ .
3.  $f(x) = x^2 + 1$ .
4.  $f(x) = \cos^2 x$ .
5.  $f(x) = \cos x^2$ .
6.  $f(x) = x^2$ .

7.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .
8.  $f(x) = x + \cos x$
9.  $f(x) = 2^x$ .
10.  $f(x) = (x+1)^2$ .
11.  $f(x) = x^3 + x^2$ .
12.  $f(x) = \sin x^2$ .
13.  $f(x) = \sin(x-1)$ .
14.  $f(x) = 2 \cos(2x/3)$ .
15.  $f(x) = \sin x + 2 \cos \frac{x}{2}$ .
16.  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ .
17.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .
18.  $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ .
19.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ .
20.  $f(x) = \sin(\sqrt{2}x)$ .
21.  $f(x) = \cos(\sqrt{3}x)$ .
22.  $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$ .
23.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .
24.  $f(x) = 2 \cos \sqrt{x}$ .
25.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ .
26.  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ .
27.  $f(x) = \sin 2x + \cos x$ .
28.  $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ .
29.  $f(x) = 2$ .
30.  $f(x) = -x^4 + 1$ .

4. Знайдіть:

1.  $\sqrt[4]{-1}$ .
2.  $\sqrt[3]{i}$ .
3.  $\sqrt[3]{-i}$ .
4.  $\sqrt[6]{1}$ .
5.  $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$ .
6.  $(1+i)^{100}$ .
7.  $\frac{(1+2i)^3}{(1-i)^2}$ .
8.  $\left(\frac{3+i^{65}}{i^{16}+2i}\right)^3$ .
9.  $(1-i)^{17}$ .
10.  $\sqrt[3]{-8}$ .
11.  $\operatorname{Ln}(-1-i)$ .
12.  $\cos(3i + \pi/3)$ .
13.  $\operatorname{Ln}(1+i)$ .
14.  $\sin(1 + \pi i/2)$ .
15.  $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ .
16.  $i^i$ .
17.  $(-i)^i$ .
18.  $(3-4i)^{1+i}$ .
19.  $\operatorname{tg}(1 + \pi i/4)$ .
20.  $\operatorname{ctg}(\pi i/4)$ .
21.  $\sqrt[3]{3-3i}$ .
22.  $\sqrt{(1-i)(1+i)}$ .

23.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$ .

24.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{127}$ .

25.  $\text{Ln}(-2+i)$ .

26.  $\sqrt[6]{-1-i}$ .

27.  $\sin(1+\pi i/2)$ .

28.  $\text{ch}(3+\pi i/4)$ .

29.  $(-i)^{101} + (1+i)(1-i)$ .

30.  $\cos(i\pi)$ .

## 1.2. Границя і неперервність функції

В цьому підрозділі вивчаються основні властивості границі функції в  $\mathbb{R}$ . Це поняття є одним з основних в математичному аналізі, яке використовується при вивченні багатьох інших понять та в різних розділах математики.

**1.2.1. Числова послідовність.** Числовою послідовністю називається така функція, область визначення якої є множина натуральних чисел, а множина значень належить  $\mathbb{R}$ . Надалі числові послідовності будемо називати послідовностями або послідовностями точок із  $\mathbb{R}$ , опускаючи слово “числова”. Отже, послідовність є функцією з  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{R}$ . Для послідовностей використовуються такі ж позначення як і для функцій [3, 8-10]:  $x(n)$ ,  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  і т.д. Разом з цим, для позначення послідовностей використовуються і спеціальні позначення:  $(x_n)$ ,  $x = (x_n)$ ,  $(x_1; x_2; \dots; x_n; \dots)$ ,  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_n: n \in \mathbb{N})$ , .... Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  називаються членами послідовності, відповідно першим, другим,  $n$ -ним і т.д.,  $x_n$  називають ще загальним членом послідовності  $(x_n)$ . Слід розрізняти послідовність  $x = (x_n)$  і множину її значень  $D(x) = \{x_n\}$ . Щоб задати послідовність, досить кожному натуральному числу  $n$  поставити у відповідність одне дійсне число  $x_n$ . Послідовність задається різними способами.

**Приклад 1.** *Послідовність можна задати аналітично, тобто за допомогою формули  $x_n = f(n)$ .*

**Приклад 2.** *Рівність  $x_n = n^2 + 1$  задає послідовність  $(x_n)$ .*

**Приклад 3.** *Послідовність можна задати рекурентно. Цей спосіб полягає в тому, що вказується кілька членів послідовності і вказується спосіб знаходження наступних членів через попередні.*

**Приклад 4.** *Нехай  $x_1 = 2$  і  $x_n = 4x_{n-1}$ , якщо  $n > 1$ .*

**Приклад 5.** Послідовність можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень  $n$  і відповідних значень  $x_n$ .

**Приклад 6.** Послідовність можна задати графічно, тобто зображенням в деякій системі координат точок  $A_n(n; x_n)$ .

**Приклад 7.** Послідовність можна задати словесно-описово, тобто словесним описом відповідності.

**Приклад 8.** Нехай  $(x_n)$  – це така послідовність, перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний вдвічі більший за попередній.

При розгляді різних послідовностей бачимо, що члени одних послідовностей при зростанні номера  $n$  наближаються до певного дійсного числа, а члени інших послідовностей такою властивістю не володіють.

**Приклад 9.** Послідовність  $(2) = (2; 2; 2; \dots; 2; \dots)$ , є сталою. Всі члени цієї послідовності дорівнюють 2.

**Приклад 10.** Члени послідовності

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\right),$$

при зростанні номера  $n$  наближаються до числа 0.

**Приклад 11.** Члени послідовності

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; \frac{n-1}{n}; \dots\right)$$

при зростанні номера  $n$  наближаються до числа 1.

**Приклад 12.** Члени послідовності

$$((-1)^n) = (-1; 1; -1; 1; -1; \dots; (-1)^n; \dots),$$

при зростанні номера  $n$  не наближаються до якогось числа, а дорівнюють 1 або  $-1$ .

**Приклад 13.** Члени послідовності

$$(n^2) = (1; 4; 9; 16; 25; \dots; n^2; \dots).$$

при зростанні номера  $n$  стають все більшими (наближаючись до  $+\infty$ ).

**1.2.2. Означення границі послідовності. Властивості збіжних послідовностей.** Число  $a \in \mathbb{R}$  називається границею послідовності  $(x_n)$  або границею в  $\mathbb{R}$  послідовності  $(x_n)$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо число  $a \in \mathbb{R}$  є границею послідовності  $(x_n)$ , то цей факт відзначають одним із символів [3, 8-10]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \quad x_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Послідовність, яка має границю  $a \in \mathbb{R}$ , називається збіжною або збіжною в  $\mathbb{R}$ . Послідовність, яка не є збіжною в  $\mathbb{R}$ , називається розбіжною або розбіжною в  $\mathbb{R}$ . Якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ , то кажуть, що границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує в  $\mathbb{R}$ . Якщо послідовність  $(x_n)$  є розбіжною в  $\mathbb{R}$ , то кажуть, що границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує в  $\mathbb{R}$ .

З означення границі послідовності випливає, що зміна скінченного числа членів послідовності не впливає на збіжність і границю послідовності, а також, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , якщо остання границя існує. Послідовність  $(x_n)$  називається сталою, якщо [3, 8-10]

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n = c.$$

**Теорема 1 [3, 8-10].** *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ .*

**Приклад 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . *Справді, потрібно показати, що*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

*Шукаємо це  $n^*$ . Маємо  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$ . Тому нерівність  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , тобто якщо  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Тому за  $n^*$  можна взяти будь-яке натуральне число, більше за  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Наприклад,  $n^* = [1/\varepsilon] + 1$ . Тому*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*) : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

*Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .*

**Приклад 3.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ , якщо  $\beta \in (0; +\infty)$ , бо  $\left| \frac{1}{n^\beta} - 0 \right| < \varepsilon$ , якщо  $n > 1/\varepsilon^{1/\beta}$ .

**Приклад 4.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , якщо  $|q| < 1$ .

**Приклад 5.** Послідовності  $x_n = (-1)^n$  і  $x_n = n$  є розбіжними в  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Послідовність не може мати більше однієї границі.

Послідовність  $(x_n)$  називається обмеженою [3, 8-10], якщо

$$(\exists K \in (0; +\infty)) (\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n| \leq K.$$

**Теорема 3 [3, 8-10].** Якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ , то вона є обмеженою в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 6.** Послідовність  $x_n = (-1)^n$  є обмеженою, бо  $|x_n| \leq 1$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і не є збіжною в  $\mathbb{R}$ . Отже, твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим.

**Приклад 7.** Послідовність  $x_n = \frac{2^n}{n!}$  є обмеженою, бо

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1 \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}. \quad \text{Отже,}$$

$|x_{n+1}| \leq |x_n| \leq \dots \leq |x_1| = 2$ . Тому  $|x_n| \leq 2$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 8.** Послідовність  $x_n = \frac{(2n+3)\sin n}{n+1}$  є обмеженою, бо

$$|x_n| = \frac{(2n+3)|\sin n|}{n+1} \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq 2+1=3 \quad \text{для}$$

всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 9.** Послідовність  $x_n = n$  є необмеженою.

**Приклад 10.** Послідовність  $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}$  є необмеженою, бо

$$|x_n| = \left| (-1)^n \frac{n^2}{n+1} \right| = \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = n-1.$$

Нехай  $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  – така нескінченна підмножина множини  $\mathbb{N}$ , що

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad (1)$$

Підпослідовністю послідовності  $(x_n)$  називається [3, 8-10] така послідовність  $(b_k)$ , для якої знайдеться підмножина  $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  множини  $\mathbb{N}$  з властивістю (1), що для всіх  $k \in \mathbb{N}$  виконується  $b_k = x_{n_k}$ .

Підпоследовність послідовності  $(x_n)$  позначають так  $(x_{n_k})$ . Кожна послідовність  $(x_n)$  має нескінченну кількість підпоследовностей.

**Приклад 11.** Підпоследовностями послідовності  $x_n = (-1)^n + 1/n^2$ , є, зокрема, послідовності  $x_{2k} = (-1)^{2k} + 1/(2k)^2$  та  $x_{4k+3} = (-1)^{4k+3} + 1/(4k+3)^2$ . В першому випадку  $n_k = 2k$ , а в другому  $n_k = 4k+3$ .

**Теорема 4 [3, 8-10].** Якщо збіжною є послідовність  $(x_n)$ , то збіжною є будь-яка її підпоследовність  $(x_{n_k})$  і має ту ж границю, що і послідовність  $(x_n)$ .

**Приклад 12.** Послідовність  $x_n = (-1)^n$  є розбіжною, бо  $x_{2k} = 1$  і  $x_{2k+1} = -1$  – її підпоследовності,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = -1$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\mathbb{R}$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**Приклад 12.** Якщо  $x_n = 0$  і  $y_n = 1/n$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n < y_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Тому, якщо виконуються всі умови теореми 1 і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n < y_n$ , то нерівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не обов'язково є справедливою.

**Теорема 6.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

**Теорема 7 [3, 8-10].** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $a < b$ , то

$$(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'): x_n < b.$$

**Приклад 13.** Якщо  $x_n = 0$ ,  $y_n = 1/n$  і  $z_n = 1/(2n)$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n < z_n < y_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Приклад 14.** Нехай  $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$  і  $\alpha \in (0;1)$ . Тоді  $0 \leq x_n = n^\alpha ((1+1/n)^\alpha - 1) \leq n^\alpha ((1+1/n) - 1) = n^{\alpha-1}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = 0$ .

**1.2.3. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Нескінченні границі.** Послідовність  $(\alpha_n)$  називається нескінченно малою, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Можна також сказати, що послідовність  $(\alpha_n)$

називається нескінченно малою, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |\alpha_n| < \varepsilon.$$

**Теорема 1 [3, 8-10].** Для того щоб число  $a \in \mathbb{R}$  було границею послідовності  $(x_n)$ , необхідно і достатньо, щоб послідовність  $(x_n)$  можна було подати у вигляді  $x_n = a + \alpha_n$ , де  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність.

Сумою, добутком, різницею і часткою двох послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$  називаються відповідно послідовності  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n y_n)$ ,  $(x_n - y_n)$  і  $(x_n / y_n)$ . Добутком послідовності  $(x_n)$  на число  $c$  називається послідовність  $(cx_n)$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Наслідок 1.** Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

**Теорема 3 [3, 8-10].** Добуток обмеженої і нескінченно малої послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Теорема 4 [3, 8-10].** Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Приклад 1.** Послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ .

**Приклад 2.** Послідовність  $(1/2^n)$  є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^n = 0$ .

**Приклад 3.** Послідовність  $(\sin n/n)$  є нескінченно малою, бо послідовність  $(\sin n)$  є обмеженою, а послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою.

**Приклад 4.** Послідовність  $(1/n^2)$  є нескінченно малою, бо вона є добутком двох нескінченно малих послідовностей  $(1/n)$  і  $(1/n)$ .

Послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  називається нескінченно великою, якщо  $(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n| > E$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Для того щоб послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  була нескінченно великою, необхідно і достатньо, щоб послідовність  $\alpha_n = 1/x_n$  була нескінченно малою.

Точка  $\infty$  називається границею послідовності  $(x_n)$ , якщо послідовність  $(x_n)$  є нескінченно великою. Послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ , яка має границю  $\infty$  або скінченну границю  $a \in \mathbb{R}$ , називається збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ . Точка  $+\infty$  називається границею послідовності  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , якщо [3, 8-10]  $(\forall E > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'): x_n > E$ . Точка  $-\infty$  називається границею послідовності  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , якщо [3, 8-10]:  $(\forall E > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'): x_n < -E$ . Послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ , яка має границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , називається збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ . Якщо точки  $\infty, +\infty, -\infty$  є границями послідовності  $(x_n)$ , то це записують відповідно так [3, 8-10]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Останні границі називаються нескінченними границями.

**Приклад 5.** Послідовність  $(n)$  є нескінченно великою, бо послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою. Послідовність  $x_n = 2^n$  також є нескінченно великою.

**Приклад 6.** Послідовність  $x_n = q^n$ ,  $|q| > 1$ , також є нескінченно великою, бо послідовність  $1/q^n$  є нескінченно малою.

**Приклад 7.** Послідовність  $((-1)^n n)$  є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$ . Послідовність  $((-1)^n n)$  є розбіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

#### 1.2.4. Основні теореми про границі послідовностей.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Границя суми двох послідовностей дорівнює сумі границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (1)$$

**Теорема 2 [3, 8-10].** Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (2)$$

**Наслідок 1.** Сталу можна виносити за знак границі, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  для кожної сталої  $c \in \mathbb{R}$ , якщо остання границя існує.

**Теорема 3 [3, 8-10].** Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$  і границя знаменника не дорівнює нулеві:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}. \quad (3)$$

**Зауваження 1.** Якщо принаймні одна з границь  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи, не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку, коли при цьому не виникають невизначені вирази  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і інші.

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n + y_n = 0$  і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$ , але цю границю не можна знайти за формулою (1), бо границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не існують.

**Приклад 2.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n y_n = -1$  і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -1$ , але цю границю не можна знайти за формулою (2), бо границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не існують.

**Приклад 3.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = 1/n$ , то  $(x_n y_n)$  є нескінченно малою послідовністю як добуток обмеженої і нескінченно малої. Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ . Але останню границю не можна знайти за формулою (2), бо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує.

**Приклад 4.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 2}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + 2 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^2} + 4 \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 4} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 5.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32}{3} \left( \frac{3}{4} \right)^n = \frac{32}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n = 0.$$

**Приклад 6.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4}{2 + 4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Приклад 7. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^4}{n^5 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^5}} = 0.$$

$$\text{Приклад 8. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}} = \infty.$$

**Зауваження 2.** В прикладах 6-8 потрібно було знайти границю частки двох нескінченно великих послідовностей, тобто ми мали невизначеність  $\frac{\infty}{\infty}$  в кожному із цих прикладів. Разом з цим, в кожному з них одержали іншу відповідь. Крім того, в кожному з прикладів 6-8 теореми 1-3 не можна було використовувати, бо була невизначеність. Проте, ми змогли скористатись цими теоремами, зробивши спочатку певні перетворення. Подібним чином поступають часто при знаходженні границь. Взагалі, знаходження кожної границі доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

$$\text{Приклад 9. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0, \text{ бо для } n \geq 4$$

$$0 \leq \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4} = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-3}} \leq \frac{32}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

**Приклад 10.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ , якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і всі  $x_n \geq 0$ . Крім того,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$ , якщо остання границя існує.

$$\text{Приклад 11. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+2n}{1+3n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3+1/n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**Приклад 12.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  для кожного  $a \in (0; +\infty)$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$  для кожного  $a \in (0; +\infty)$  і для кожної нескінченно малої послідовності  $(\delta_n)$  раціональних чисел.

$$\text{Приклад 13. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} = 1, \text{ бо}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{3n^4} = \sqrt[3]{3} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 = 1.$$

### 1.2.5. Існування границі монотонної послідовності.

Послідовність  $(x_n)$  називається неспадною, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq x_{n+1}$ .  
Послідовність  $(x_n)$  називається [3, 8-10] обмеженою зверху, якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq K$ .

**Теорема 1 (Вейєрштрасса) [3, 8-10].** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і обмеженою зверху, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і необмеженою зверху, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**Наслідок 1 [3, 8-10].** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається [3, 8-10] незростаючою, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \geq x_{n+1}$ . Послідовність  $(x_n)$  називається обмеженою знизу, якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \geq K$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і обмеженою знизу, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і необмеженою знизу, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Наслідок 2.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається монотонною, якщо вона є неспадною або незростаючою.

**Наслідок 3.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є монотонною, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Наслідок 4.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є монотонною і обмеженою, то вона є збіжною в  $\mathbb{R}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається [3, 8-10] зростаючою, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n < x_{n+1}$ . Послідовність  $(x_n)$  називається спадною, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n > x_{n+1}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = 2n + (-1)^n$ , то

$$x_{n+1} - x_n = 2(n+1) + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n = 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n \geq 0.$$

Тому послідовність  $(x_n)$  є неспадною. Вона є обмеженою знизу, бо всі  $x_n \geq 0$ . Вона є необмеженою зверху, бо всі  $x_n \geq 2n - 1$ .

**Приклад 2.** Якщо  $x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$ , то  $x_n \leq x_{n+1}$  і

$x_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$ . Тому розглядувана послідовність  $(x_n)$  є неспадною і обмеженою зверху. Отже, є збіжною в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 3.** Нехай  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ . Тоді  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$ ,

$x_{n+1} \leq x_n$  і  $0 \leq x_n$ , тобто послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і обмеженою знизу. Крім цього,  $x_{n+1} = x_n \frac{2}{n+1}$ . Отже, послідовність  $(x_n)$

має скінченну границю  $a$  і  $a = a \cdot 0$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

**Приклад 4.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq a$ .

Не кожна обмежена послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність  $x_n = (-1)^n$  є обмеженою, але границі не має. Разом з цим, справедлива наступна теорема.

**Теорема 3 (Больцано-Вейєрштрасса) [3, 8-10].** Для кожної обмеженої послідовності існує її збіжна підпослідовність.

**Теорема 4 [3, 8-10].** Для кожної послідовності існує її збіжна в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  підпослідовність.

**Приклад 5.** Послідовність  $x_n = (-1)^n + 1/n$  є обмеженою, бо  $(\forall n \in \mathbb{N}): |x_n| \leq 2$ . Її збіжними підпослідовностями є, зокрема, такі:

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}, \quad x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}, \quad x_{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3}.$$

**1.2.6. Число  $e$ .** Число  $e$  визначається так [3, 8-10]:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n. \quad (1)$$

**Теорема 1 [3, 8-10].** Границя (1) існує в  $\mathbb{R}$ .

**Наслідок 1.**  $2 \leq e \leq 4$ .

**Зауваження 1 [3, 8-10].** Можна переконатись, що число  $e$  є ірраціональним і  $e \approx 2.71828\dots$

**Приклад 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+n} \right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+1/n} \right)^n \cdot \left( \frac{n}{1+n} \right)^3 = \frac{1}{e}.$

**Приклад 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{-n} =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right)} = \frac{1}{e}.$

**Приклад 3.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$

**Приклад 4 [3, 8-10].**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{p_n} \right)^{p_n} = e$ , де  $(p_n)$  – послідовність натуральних чисел таких, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^{n+3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n} \cdot \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^3 = \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3.$

**Приклад 6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n^2+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n^2+1} \right)^{-(n^2+1) \frac{1-n}{(n^2+1)(n+1)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1}} = e^0 = 1.$

**Приклад 7.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{1+3n} \right)^n = 0$ , бо

$$\frac{n}{1+3n} \leq \frac{n}{3n} \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \left( \frac{n}{1+3n} \right)^n \leq \left( \frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0.$$

**Приклад 8.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n}{1+n} \right)^n = +\infty$ , бо

$$\frac{2^n}{1+n} \geq \frac{2^n}{2n} \geq \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{4} \geq 2, \quad n \geq 9, \quad \left( \frac{2^n}{1+n} \right)^n \geq 2^n \rightarrow +\infty.$$

**Приклад 9 [3, 8-10].** Послідовність  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  є неспадною і

обмеженою зверху.

**1.2.7. Означення границі функції. Однобічні границі.**

Границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  або при  $x \rightarrow a$  називається [3, 8-10] таке число  $A \in \mathbb{R}$ , що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

З означення границі випливає, що значення функції в точці  $a$  не впливає на границю, бо вона з розгляду виключається (на це вказано в нерівності  $0 < |x - a| < \delta$ ). Докладніше це означення можна сформулювати в наступній формі. Границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] таке число  $A \in \mathbb{R}$ , що для кожного як завгодно малого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , яке може залежати від  $\varepsilon$ , що для всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$ , виконується  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Це означення границі функції називають означенням границі на мові “ $\varepsilon - \delta$ ” (або означенням Коші).

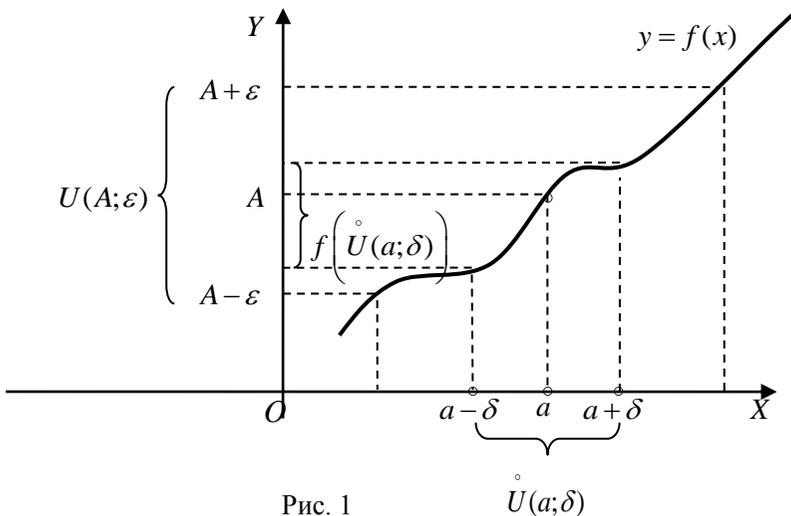


Рис. 1

$$U(a; \delta)$$

Якщо число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то це позначають одним з символів [3, 8-10]:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow a} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow a,$$

$$f(x) \rightarrow A, \mathbb{R} \ni x \rightarrow a, f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A.$$

Означення границі функції можна сформулювати і в наступній еквівалентній формі (на мові околів). Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$

точки  $A \in \mathbb{R}$  знайдеться [3, 8-10] такий проколений  $\delta$ -окол  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$  точки  $a$ , образ якого належить  $U(A; \varepsilon)$ , тобто  $f\left(\overset{\circ}{U}(a; \delta)\right) \subset U(A; \varepsilon)$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою на множині  $H$ , якщо існує таке число  $C \in \mathbb{R}$ , що  $f(x) = C$  для всіх  $x \in H$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто  $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ .*

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . *Справді, потрібно показати, що для кожного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$  виконується  $|x - a| < \varepsilon$ . Але це так, бо можна взяти  $\delta = \varepsilon$  і тоді  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |x - a| < \varepsilon$ .*

**Приклад 2.** Нехай  $f(x) = 2x$ . Тоді  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . *Справді, потрібно показати, що для кожного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - 1| < \delta$  виконується  $|2x - 2| < \varepsilon$ . Але це так, бо можна взяти  $\delta = \varepsilon/2$  і тоді*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon/2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta): |2x - 2| < \varepsilon.$$

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ . *Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta): |x^2 - 4| < \varepsilon$ . Розглянемо останню нерівність. Її можна переписати так  $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ . Підберемо для кожного  $\varepsilon > 0$  відповідне  $\delta > 0$ . Можемо вважати, що  $\delta \leq 1$ . Тоді, якщо  $|x - 2| < \delta$ , то  $|x| \leq 2 + \delta \leq 3$ . Тому нерівність  $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x - 2| \cdot 5 < \varepsilon$ . Бачимо, що  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ , якщо  $|x - 2| < \varepsilon/5$ . Таким чином, можна взяти  $\delta = \min\{1; \varepsilon/5\}$ . Отже,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \min\{1; \varepsilon/5\} > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta): |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$  для довільного  $a \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$  для довільного  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\left| |x| - |a| \right| \leq |x - a|$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

Теорема 2 дає можливість сформулювати ще одне означення границі функції (означення границі функції на мові послідовностей або означення границі функції за Гейне), яке є еквівалентним раніше розглянутим. Число  $A \in \mathbb{R}$  називають [3, 8-10] границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не існує. Справді, якщо  $x_n = \frac{1}{\pi n}$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Якщо ж  $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Отже, за означенням границі на мові послідовності дана границя не існує.

**Теорема 3 [3, 8-10].** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  може мати не більше однієї границі.

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається правою границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a < x < a + \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також для позначення  $A = f(a+0)$ ,  $A = f(a+)$ ,  $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  та інші. Число  $A \in \mathbb{R}$  називається лівою границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a - \delta < x < a): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також позначення  $A = f(a-0)$ ,  $A = f(a-)$ ,  $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  та інші.

**Теорема 4 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n > a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Теорема 6 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $a < x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Приклад 7.** Нехай (рис. 2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ x-1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

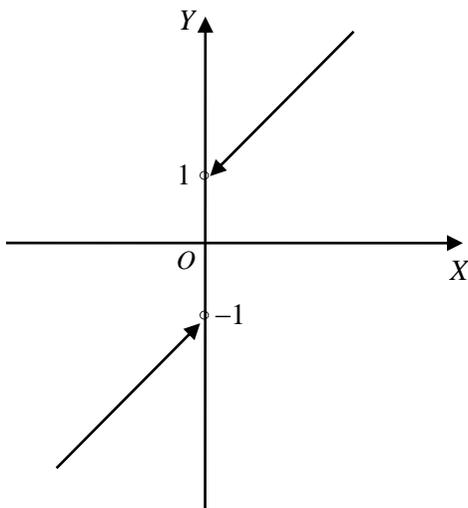


Рис. 2

**1.2.8. Перша важлива границя. Властивості функції, яка має границю.**

Правильна наступна теорема [3, 8-10].

**Теорема 1 (перша важлива границя).**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**Приклад 1.**  $(\forall x \in (0; \pi/2)) : \sin x < x < \operatorname{tg} x$  і  $(\forall x \in \mathbb{R}) : |\sin x| \leq |x|$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Тому  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$  і

нерівність  $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x-a| < \varepsilon$ . Таким чином,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon$ .

**Приклад 3.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1.$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою при  $x \rightarrow a$ , якщо вона є обмеженою в деякому проколеному околі точки  $a$ , тобто якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x-a| < \delta) : |f(x)| \leq K.$$

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має границю в точці  $a$ , то вона є обмеженою при  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 4.** Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  є

обмеженою в деякому проколеному околі  $U^0(0; \delta)$  точки  $0$ . Якщо  $x \notin U^0(0; \delta)$ , то  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta}$ . Тому функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  є обмеженою на множині  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . До того ж висновку приходимо використовуючи нерівність  $|\sin x| \leq |x|$ .

**Теорема 3 [3, 8-10].** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$  і для всіх  $x$  з деякого проколеного околу точки  $a$  виконується  $f_1(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x)$ ,

то  $\lim_{x \rightarrow a} f_3(x) = A$ .

**Теорема 4 [3, 8-10].** Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$  і для всіх  $x$  з деякого проколеного околу точки  $a$  виконується  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  і  $A > B$ , то знайдеться такий проколений окіл точки  $a$ , що для всіх точок з цього околу виконується  $f(x) > B$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  і  $0 \leq x^2 \leq |x|$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ .

**1.2.9. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Нескінченні границі. Границя в  $\infty$ .** Функція  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається нескінченно малою в точці  $a$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , тобто якщо [3, 8-10]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Функція  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою в точці  $a$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |\beta(x)| \leq K$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Число  $A$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді й тільки тоді, коли функція  $f$  подається у вигляді  $f(x) = A + \alpha(x)$ , де  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, яка є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 1.**  $\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$ , де  $\alpha$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Сума двох нескінченно малих функцій при  $x \rightarrow a$  є функція нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Теорема 3 [3, 8-10].** Добуток обмеженої і нескінченно малої при  $x \rightarrow a$  функцій є функція нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Наслідок 1.** Добуток двох нескінченно малих при  $x \rightarrow a$  функцій є функція нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ . Справді, функція  $\alpha(x) = x$  є

нескінченно малою при  $x \rightarrow 0$ , а функція  $\beta(x) = \sin \frac{1}{x}$  є обмеженою при  $x \rightarrow 0$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0$  називається нескінченно великою в точці  $a \in \mathbb{R}$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): |f(x)| > E.$$

**Теорема 4 [3, 8-10].** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0$  є нескінченно великою при  $x \rightarrow a$  тоді й тільки тоді, коли функція  $\alpha = 1/f$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ .

Якщо функція  $f$  є нескінченно великою при  $x \rightarrow a$ , то це записують так:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = 1/x$  є нескінченно великою при  $x \rightarrow 0$ , бо функція  $\alpha(x) = 1/f(x) = x$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow 0$ .

Точка  $\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо вона є нескінченно великою в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

Точка  $+\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): f(x) > E.$$

Точка  $-\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): f(x) < -E.$$

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ .

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $\infty$  або при  $x \rightarrow \infty$ , якщо [3, 8-10]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, |x| > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $+\infty$ , якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$ . Число

$A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $-\infty$ , якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x < -\delta): |f(x) - A| < \varepsilon$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

**Теорема 6 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Теорема 7 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Теорема 8 [3, 8-10].** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2} = 0$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta): 1/x^2 < \varepsilon$ . Оскільки  $x^2 \geq x$ , якщо  $x \geq 1$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \max\{1/\varepsilon; 1\})(\forall x, x > \delta): 1/x^2 < \varepsilon.$$

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta): a^x > \varepsilon$ . Оскільки  $a^x > \varepsilon$ , якщо  $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta): a^x > \varepsilon.$$

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , якщо  $a \in (0; 1)$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta): a^x < \varepsilon$ . Оскільки  $a^x < \varepsilon$ , якщо  $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta): |a^x| < \varepsilon.$$

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = 0$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ .

**Приклад 9.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty$ , якщо  $a \in (0; 1)$ .

**Приклад 10.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$  не існує, якщо  $a \in (1; +\infty)$ , бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

**Приклад 11.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$  не існує, якщо  $a \in (0; 1)$ , бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

**Приклад 12.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x = 0$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2+x^2} = 0$ . Отже,  
$$\frac{1+x}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad x > \delta.$$

Тому

$$0 \leq \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

**Приклад 13.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = +\infty$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+|x|}{2+x^2} = 0$ .

Отже,  $\frac{1+|x|}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $x < -\delta$ . Тому

$$\left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

**Приклад 14.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x$  не існує, бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = 0$  і

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = +\infty.$$

**1.2.10. Теорема про границі функцій. Границя композиції функцій.**

**Теорема 1 [3, 8-10].** Границя суми двох функцій дорівнює сумі границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

**Теорема 2 [3, 8-10].** *Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

**Наслідок 1.** *Сталу можна виносити за знак границі, тобто для кожної сталої  $c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

якщо остання границя існує.

**Теорема 3 [3, 8-10].** *Границя частки двох функцій дорівнює частці границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$  і границя знаменника не дорівнює нулеві:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2.$$

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = A^2$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \text{ Справді,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A^2.$$

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$  і для кожного  $n \in \mathbb{N}$ .

Справді, для  $n=1$  дане твердження правильне. Припустимо, що воно справджується для  $n=k$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow a} (x x^k) = \lim_{x \rightarrow a} x \lim_{x \rightarrow a} x^k = a a^k = a^{k+1},$$

і за принципом математичної індукції отримуємо потрібний висновок.

**Зауваження 1.** Якщо принаймні одна з границь  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$  і

$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи, не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку, коли при цьому не виникають невизначені вирази  $\frac{0}{0}$ ,

$\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і інші. Взагалі, знаходження кожної граници доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

**Теорема 4 [3, 8-10].** Якщо  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  і для кожного  $\sigma > 0$  знайдеться таке  $\delta > 0$ , що  $\varphi(U(\alpha; \delta)) \subset U(a; \sigma)$ , то  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = A$ , тобто  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Приклад 4.**  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , бо  $\varphi(t) = 2t \rightarrow 0$ , якщо  $t \rightarrow 0$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{t \rightarrow a} \sin 2t = \lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\varphi(t) := 2t \rightarrow 2a$ , якщо  $t \rightarrow a$  і  $\lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$ .

**Приклад 6.** Для кожного  $a \in \mathbb{R}$ :  
 $\lim_{t \rightarrow a} \cos t = \lim_{t \rightarrow a} \sin(-t + \pi/2) = \lim_{x \rightarrow -a + \pi/2} \sin x = \sin(-a + \pi/2) = \cos a$ .

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$ .

**Приклад 8.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

**Зауваження 2 [3, 8-10].** Далі ми покажемо, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

для кожної основної елементарної функції  $f$  і для кожної точки  $x_0$ , яка належить довільному відкритому проміжку з області визначення функції  $f$  (для функцій  $f(x) = x^n$ ,  $f(x) = \sin x$  та  $f(x) = \cos x$  це вже доведено вище) і дослідимо поведінку цих функцій на кінцях відповідних проміжків. В результаті переконаємось в справедливості наступних рівностей:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\mu = x_0^\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\mu = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = 0, \quad \mu \in (-\infty; 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = +\infty, \quad \mu \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad a \in (0; +\infty), \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}, \quad x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad x_0 = \pi k + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad x_0 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in (-1; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 = -1,$$

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0.$$

**Приклад 9.**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$$

**Приклад 10.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

**Приклад 11.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x}} = \sqrt{3}.$

### 1.2.11. Друга важлива границя.

**Теорема 1 [3, 8-10].**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$ .

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$

**Приклад 3.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{1 + x^2}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{-1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2} = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

**Зауваження 1 [3, 8-10].** Далі ми покажемо, що  $\lim_{t \rightarrow a} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)\right)$ , якщо функція  $f$  є основною елементарною та існує границя  $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = a \in D(f)$  (якщо  $a$  не належить жодному відкритому проміжку з  $D(f)$ , то границі потрібно замінити відповідними односторонніми границями). Зокрема, за відповідних умов

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} (\varphi(t))^\mu = \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right)^\mu,$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} a^{\varphi(t)} = a^{\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)},$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \log_a \varphi(t) = \log_a \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \sin \varphi(t) = \sin \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \cos \varphi(t) = \cos \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi(t) = \operatorname{tg} \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} \varphi(t) = \operatorname{ctg} \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \arcsin \varphi(t) = \arcsin \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \arccos \varphi(t) = \arccos \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} \varphi(t) = \operatorname{arctg} \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arccctg} \varphi(t) = \operatorname{arccctg} \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) \right),$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \alpha} (u(t))^{v(t)} &= \lim_{t \rightarrow \alpha} e^{v(t) \ln u(t)} = \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln u(t)} = e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) \right)} = \left( \lim_{t \rightarrow \alpha} u(t) \right)^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t)}. \end{aligned}$$

**Наслідок 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right) = \ln e = 1.$

**Наслідок 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$

**Наслідок 3.**  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a, \quad a > 0.$

Справді,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t \ln a} \ln a = \ln a.$

**Наслідок 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$

Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{x} \right) = \mu.$

**Приклад 4.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

**Приклад 5.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2\sin x} - 1}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - 1}{2\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x} = 2.$$

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1+x)^{\sqrt{2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( (1+x)^2 - 1 \right) - \left( (1+x)^{\sqrt{2}} - 1 \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow 2} x^{(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} x^{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1)} = 2^3 = 8.$

**Приклад 9.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^0 = 1.$

**Приклад 10.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{2}.$

**1.2.12. Означення неперервності функції. Властивості функцій, які неперервні у точці.** Поняття неперервності функції є одним з основних понять математичного аналізу. Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $\lim_{D(f) \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Докладніше

умову неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  можна виразити у вигляді трьох умов [3, 8-10]: 1) функція повинна бути визначеною в деякому околі точки  $a$ ; 2) в точці  $a$  вона повинна мати скінченну границю; 3) ця границя повинна дорівнювати значенню функції в точці  $a$ . Як і означення границі, означення неперервності можна сформулювати в наступних еквівалентних формах [3, 8-10]: на мові "ε-δ", на мові околів, на мові послідовностей, на мові приростів (еквівалентність цих означень випливає безпосередньо з відповідних

теорем про границі).

**Означення неперервності на мові "ε-δ".** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f), |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

**Означення неперервності на мові околів.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для кожного ε-околу  $U(f(a); \varepsilon)$  точки  $f(a)$  знайдеться такий δ-окол  $U(a; \delta)$  точки  $a$ , образ якого належить  $U(f(a); \varepsilon)$ , тобто  $f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon)$ .

**Означення неперервності на мові послідовностей.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Означення неперервності на мові приростів.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0$ , де  $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  – приріст функції в точці  $a$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , називається розривною в цій в точці.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^2$ , то

$$\Delta f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2.$$

**Приклад 2.** Стала функція  $f(x) = C$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C = f(a)$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = x^2$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$ .

**Приклад 5.** Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  функція  $f(x) = x^n$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n = f(a)$ .

**Приклад 6 [3, 8-10].** Функція  $f(x) = \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Тому  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$  і

нерівність  $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x-a| < \varepsilon$ . Таким чином,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

тобто  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = |x|$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,  $||x| - |a|| \leq |x-a|$  і тому  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a| = f(a)$ .

**Зауваження 1.** Основні елементарні функції ( $f(x) = C$ ,  $f(x) = x^\mu$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \arccos x$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  та  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ , де  $C, \mu \in \mathbb{R}$  і  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ ) є неперервними в кожній точці своєї області визначення.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними в точці  $a$ , то в цій точці є неперервними також функції  $f_1 + f_2$  і  $f_1 f_2$ . Якщо, крім цього,  $f_2(a) \neq 0$ , то функція  $f_1/f_2$  також є неперервною в точці  $a$ .

**Приклад 8.** Функція  $f(x) = x \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$  як добуток двох неперервних функцій.

**Приклад 9.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$  як частка двох неперервних функцій.

**Приклад 10.** Функції  $f_1(x) = \sin x - \operatorname{sgn} x$  і  $f_2(x) = \operatorname{sgn} x$  не є неперервними в точці  $a = 0$ , але їхня сума є функцією, неперервною в цій точці.

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то функція  $F(t) = f(\varphi(t))$  є неперервною в  $\alpha$ .

**Приклад 11.** Функція  $F(t) = \sin t^2$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $F(t) = f(\varphi(t))$ , де  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(t) = t^2$  – неперервні функції.

**Приклад 12.** Функція  $F(t) = \cos t$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $F(t) = f(\varphi(t))$ , де  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(t) = -t + \pi/2$  – неперервні функції.

**Теорема 3 [3, 8-10] (граничний перехід під знаком неперервної функції).** Якщо існує  $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$  і функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною

в точці  $a$ , то  $\lim_{t \rightarrow a} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)\right)$ .

**Приклад 13.** Функція  $f(x) = \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ . Тому  $\lim_{t \rightarrow a} \sin(\varphi(t)) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t)\right)$ , якщо існує  $\lim_{t \rightarrow a} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 14.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\right)\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

**1.2.13. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація.** Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва, якщо  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ , тобто якщо  $f(a-) = f(a)$ . Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа, якщо  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ , тобто якщо  $f(a+) = f(a)$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді й тільки тоді, коли вона є неперервною в цій точці зліва і справа, тобто щоб  $f(a-) = f(a+) = f(a)$ .

Точка  $a \in \mathbb{R}$ , в якій функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не є неперервною, називається точкою розриву функції  $f$ . Якщо існують скінченні границі  $f(a-) := \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  і  $f(a+) := \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ , то точка  $a \in \mathbb{R}$  розриву функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається точкою розриву першого роду. При цьому, число  $f(a+) - f(a-)$  називається стрибком функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ . Точка  $a \in \mathbb{R}$  розриву першого роду, для якої  $f(a+) = f(a-)$ , є точкою усунутого розриву. Останній термін пов'язаний з тим, що приписавши в точці  $a$  функції  $f$  значення  $f(a) = f(a+) = f(a-)$ , отримаємо функцію, неперервну в точці  $a$ , тобто розрив можна усунути. Таким чином [3, 8-10], функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має усунувий розрив в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки

тоді, коли існує  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$  (точка  $a$  може належати області визначення функції, а може і не належати). Точка розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є точкою розриву першого роду, називається точкою розриву другого роду.

**Приклад 1 [3, 8-10].** Функція  $f(x) = \sin x / x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , оскільки є часткою двох всюди неперервних функцій. В точці  $a = 0$  функція не є визначеною, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, і має в цій точці усувний розрив, бо

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

тобто  $f(0+) = f(0-) = 1$ . Якщо прийняти  $f(0) = 1$ , то одержимо функцію, неперервну в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

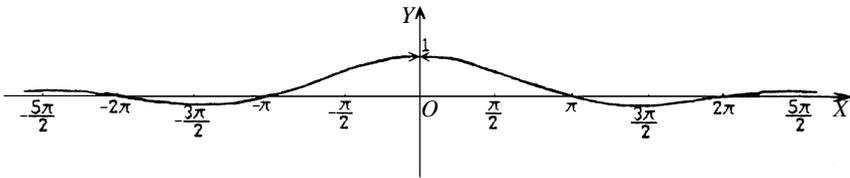


Рис. 1

**Приклад 2 [3, 8-10].** Функція  $f(x) = \sin(1/x)$  є неперервною в усіх точках  $a \neq 0$ , як композиція неперервних функцій. В точці  $a = 0$  функція має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо границі  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$  і  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$  не існують. Цій функції не можна приписати в точці  $a = 0$  певного значення так, щоб вона стала неперервною в ній.

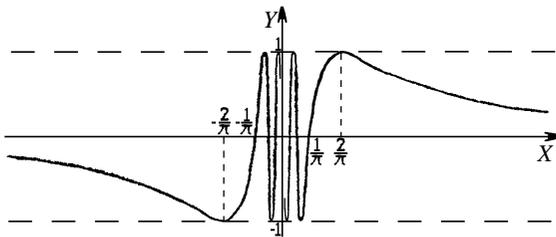


Рис. 2

**Приклад 3 [3, 8-10].** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є неперервною в усіх точках  $a_k \neq k\pi + \pi/2$ , як частка двох всюди неперервних функцій. В кожній точці  $a_k = k\pi + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо  $\lim_{x \rightarrow a_k^-} \operatorname{tg} x = +\infty$  і

$\lim_{x \rightarrow a_k^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ . Цій функції не можна приписати в точках  $a_k$  певних

значень так, щоб вона стала неперервною в цих точках

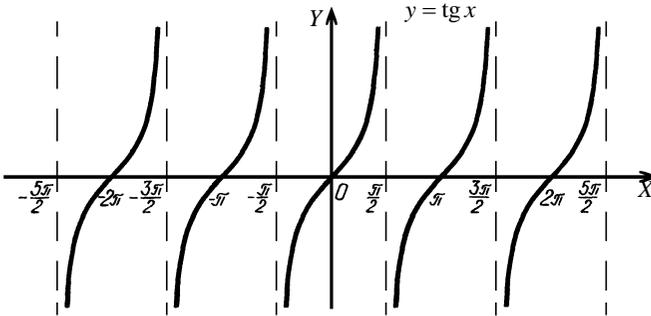


Рис. 3

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \ln x$ , як функція з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , має розриви другого роду в кожній точці проміжку  $(-\infty; 0]$  і є неперервною в кожній точці проміжку  $(0; +\infty)$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = \arcsin x$ , як функція з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , має розриви другого роду в кожній точці проміжку  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$  і є неперервною в кожній точці проміжку  $(-1; 1)$ .

**1.2.14. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку.** Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на проміжку  $(a; b)$ , якщо вона є неперервною в кожній точці цього проміжку. Функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , якщо вона є неперервною в кожній точці проміжку  $(a; b)$ , неперервною в точці  $a$  справа і неперервною в точці  $b$  зліва. Функція  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на множині  $H$ , якщо вона є неперервною в кожній точці множини  $H$  за множиною  $H$ . Для  $H = (a; b)$  і  $H = [a; b]$  останнє означення співпадає з вище наведеними.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = [x]$  є неперервною на проміжку  $(0; 1)$ , є неперервною на проміжку  $[0; 1)$ , але не є неперервною на проміжку  $[0; 1]$ .

**Теорема 1 (перша теорема Вейєрштрасса) [3, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$ , то вона є обмеженою на ньому.

**Приклад 2.** Функція  $f(x)=1/x$  є неперервною на відкритому проміжку  $(0;1)$ , але не є обмеженою на ньому. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 1, є істотною.

**Теорема 2 (друга теорема Вейєрштрасса) [3, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$ , то вона досягає на цьому проміжку своєї точної верхньої і точної нижньої меж, тобто

$$(\exists x_0 \in [a;b]) : \max\{f(x) : x \in [a;b]\} = \sup\{f(x) : x \in [a;b]\} = f(x_0),$$

$$(\exists x_1 \in [a;b]) : \min\{f(x) : x \in [a;b]\} = \inf\{f(x) : x \in [a;b]\} = f(x_1).$$

**Приклад 3.** Функція  $f(x)=1/x$  є неперервною на відкритому проміжку  $(0;1)$ , але не досягає на цьому проміжку своєї точної верхньої межі. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 2, є істотною.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = -\frac{1}{1-x^2}$  є неперервною на відкритому проміжку  $(-1;1)$  і не є неперервною на замкненому проміжку  $[-1;1]$ , але приймає на проміжку  $(-1;1)$  найбільше значення в точці 0, але не досягає на  $(-1;1)$  своєї точної нижньої межі.

**Теорема 3 (перша теорема Больцано-Коші) [3, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то  $(\exists c \in (a;b)) : f(c) = 0$ .

Теорему 3 інакше можна сформулювати так. Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на його кінцях приймає значення протилежних знаків, то її графік принаймні один раз перетинає вісь  $OX$  в точці, яка належить проміжку  $(a;b)$ , тобто рівняння  $f(x) = 0$  має принаймні один корінь на проміжку  $(a;b)$ .

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то рівняння  $f(x) = 0$  на проміжку  $(a;b)$  має принаймні один корінь.

**Наслідок 2.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку

приймає значення протилежних знаків, то рівняння  $f(x)=0$  на проміжку  $(a;b)$  має єдиний корінь.

**Приклад 5.** Функція  $f(x)=x^2+3$  є неперервною на замкненому проміжку  $[1;3]$ , проте  $f(x)\neq 0$  для всіх  $x\in[1;3]$ . Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 є істотною.

**Приклад 6.** Функція  $f(x)=x^2-4$  є неперервною на замкненому проміжку  $[-4;4]$ , на його кінцях приймає значення одного знаку і має два нулі на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 не є необхідною.

**Приклад 7.** Функція  $f(x)=x^5+x-1$  є неперервною на проміжку  $[-2;1]$ ,  $f(-2)<0$  і  $f(1)>0$ . Тому рівняння  $x^5+x-1=0$  має принаймні один розв'язок, який належить проміжку  $[-2;1]$ .

**Приклад 8.** Функція  $f(x)=\sin x$  на проміжку  $[-\pi/2;5\pi/2]$  задовольняє всі умови теореми 3 і має на вказаному проміжку три нулі. Тому за виконання умов теореми 3 точок  $c$ , про існування яких говориться в теоремі 3, може бути декілька.

**Теорема 4 (друга теорема Больцано-Коші) [3, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$ , то для будь-якого  $D$ , що лежить між  $f(a)$  і  $f(b)$  знайдеться така точка  $c\in[a;b]$ , що  $f(c)=D$ .

**Наслідок 3.** Якщо функція  $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$ , то  $f([a;b])=[m;M]$ , де  $M=\max\{f(x):x\in[a;b]\}$  і  $m=\min\{f(x):x\in[a;b]\}$ .

**Наслідок 4.** Якщо функція  $f:(a;b)\rightarrow\mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $(a;b)$ , то  $f((a;b))=(m_0;M_0)$ , де  $M_0=\sup\{f(x):x\in(a;b)\}$  і  $m_0=\inf\{f(x):x\in(a;b)\}$ .

**Наслідок 5.** Якщо функція  $f:(a;b)\rightarrow\mathbb{R}$  є зростаючою на проміжку  $[a;b]$ , то  $f((a;b))=(m;M_0)$ , де  $M_0=\sup\{f(x):x\in(a;b)\}$  і  $m=\min\{f(x):x\in[a;b]\}$ .

**Приклад 9.** Число 2,5 лежить між  $f(-1)=-1$  і  $f(3)=3$ , якщо  $f(x)=[x]$ . Проте  $f(x)\neq 2,5$  для всіх  $x\in[-1;3]$ . Тому вимога неперервності функції в теоремі 4 є істотною.

**Приклад 10.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і  $f([a;b]) \subset [a;b]$ , то рівняння  $f(x) = x$  має принаймні один корінь на проміжку  $[a;b]$ .

**Наслідок 6.** Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $(a;b)$  і  $\{x_k : k \in \overline{1;n}\}$ ,  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ , – множина її нулів, то на кожному проміжку  $(x_k; x_{k+1})$ ,  $k \in \overline{0;n}$ , функція  $f$  приймає значення одного знаку (додатні або від'ємні), де  $x_0 = a$  і  $x_{n+1} = b$ .

На наслідку 6 базується метод проміжків розв'язування нерівностей.

**Приклад 11.** Функція  $f(x) = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1}$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і має нулі в точках  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 0$  та  $x_3 = 2$ . Згідно з наслідком 6 на кожному з проміжків  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(0; 2)$  та  $(2; +\infty)$  функція зберігає знак. Оскільки  $f(-4) > 0$ ,  $f(-2) < 0$ ,  $f(1) > 0$  і  $f(3) > 0$ , то розв'язком нерівності  $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} > 0$  є множина  $(-\infty; -3) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ , а розв'язком нерівності  $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} < 0$  є множина  $(-3; 0)$ .

### 1.2.15. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Напишіть  $\varepsilon$ -окіл точки 2, якщо  $\varepsilon = 0,1$ .
3. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Напишіть проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $-3$ , якщо  $\varepsilon = 0,01$ .
5. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = +\infty$ .
6. Напишіть  $\varepsilon$ -окіл точки  $+\infty$ , якщо  $\varepsilon = 10$ .
7. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = +\infty$ .
8. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = -\infty$ .
9. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = -\infty$ .
10. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = \infty$ .
11. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = \infty$ .
12. Напишіть проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $\infty$ , якщо  $\varepsilon = 100$ .
13. Які з рівностей 1)  $\frac{0}{0} = 1$ ; 2)  $\frac{1}{0} = \infty$ ; 3)  $\frac{2}{\infty} = 0$ ; 4)  $\frac{\infty}{\infty} = 1$ ; 5)  $0 \cdot \infty = 0$ ; 6)  $1 \cdot \infty = \infty$ ; 7)  $\infty - \infty = 0$ , є правильними в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ ?

14. Сформулюйте означення послідовності.
15. Сформулюйте означення границі послідовності на мові околів.
16. Сформулюйте означення збіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності.
17. Сформулюйте означення сталої послідовності.
18. Сформулюйте теорему про границю сталої послідовності.
19. Наведіть приклад необмеженої послідовності, яка має скінченну часткову границю.
20. Наведіть приклади розбіжних послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких послідовності  $(x_n + y_n)$  та  $(x_n \cdot y_n)$  є збіжними.
21. Відомо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Чому дорівнює  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} + x_{n-1})$ ?
22. Сформулюйте означення обмеженої послідовності.
23. Сформулюйте означення нескінченно малої послідовності.
24. Сформулюйте означення нескінченно великої послідовності.
25. Сформулюйте означення неспадної послідовності.
26. Сформулюйте означення обмеженої зверху послідовності.
27. Сформулюйте означення необмеженої зверху послідовності.
28. Сформулюйте означення обмеженої знизу послідовності.
29. Сформулюйте означення необмеженої знизу послідовності.
30. Сформулюйте означення незростаючої послідовності.
31. Сформулюйте означення зростаючої послідовності.
32. Сформулюйте означення спадної послідовності.
33. Сформулюйте означення монотонної послідовності.
34. Сформулюйте теорему про обмеженість збіжної послідовності.
35. Сформулюйте теорему про єдиність границі послідовності.
36. Сформулюйте теорему про підпослідовність збіжної послідовності.
37. Сформулюйте теорему про граничний перехід в нерівностях.
38. Сформулюйте теорему про нескінченно малі послідовності.
39. Сформулюйте теорему про границю неспадної послідовності.
40. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = i$  і обґрунтуйте її.
41. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = i$  і обґрунтуйте її.
42. Сформулюйте означення числа  $e$  і обґрунтуйте його існування.
43. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = i$  і обґрунтуйте її.
44. Сформулюйте теорему Больцано-Вейєрштрасса.
45. Сформулюйте означення границі функції.
46. Сформулюйте означення границі функції на мові околів.
47. Сформулюйте означення границі функції на мові послідовностей.
48. Сформулюйте теорему про еквівалентність означення границі функції

на мові "  $\varepsilon - \delta$  " і на мові послідовностей.

49. Сформулюйте теорему про першу важливу границю.
50. Сформулюйте теорему про єдиність границі функції.
51. Сформулюйте означення функції, обмеженої в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$ .
52. Сформулюйте теорему про обмеженість функції, яка має границю.
53. Сформулюйте теорему про перехід до границі в нерівностях (для функцій в  $\mathbb{R}$ ).
54. Сформулюйте означення нескінченно малої функції.
55. Сформулюйте означення нескінченно великої функції.
56. Сформулюйте теорему про нескінченно малі функції.
57. Сформулюйте теорему про границю суми.
58. Сформулюйте теорему про границю добутку.
59. Сформулюйте теорему про границю частки.
60. Сформулюйте означення правої границі.
61. Сформулюйте означення лівої границі.
62. Сформулюйте теорему про однобічні границі.
63. Сформулюйте теорему про другу визначну границю.
64. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  і

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

65. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не існує і

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

66. Завершіть написання формули  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x =$  і обґрунтуйте її.

67. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =$ .

68. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$  і обґрунтуйте її.

69. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} =$  і обґрунтуйте її.

70. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} =$  і обґрунтуйте її.

71. Сформулюйте теорему про існування границі монотонної функції.

72. Сформулюйте критерій Коші існування границі функції.

73. На мові "  $\varepsilon - \delta$  " сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ,

$$A \in \mathbb{R}.$$

74. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
75. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ,  
 $A \in \mathbb{R}$ .
76. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ,  
 $A \in \mathbb{R}$ .
77. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  
 $a \in \mathbb{R}$ .
78. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  
 $a \in \mathbb{R}$ .
79. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
80. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .
81. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці.
82. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові "ε-δ".
83. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові околів.
84. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові послідовностей.
85. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові приростів.
86. Чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .
87. Чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .
88. Сформулюйте теорему про неперервність суми, добутку та частки.
89. Наведіть приклад таких функцій  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що вони не є неперервними в точці  $a = 0$ , але їхній добуток є функцією, неперервною в цій точці.
90. Сформулюйте теорему про неперервність композиції функцій.
91. Сформулюйте теорему про граничний перехід під знаком неперервної функції.

92. За яких умов справедлива рівність  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \cos(\varphi(t)) = \cos\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$ ?
93. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа.
94. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва.
95. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа на мові послідовностей.
96. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва на мові послідовностей.
97. Сформулюйте означення точки розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
98. Сформулюйте означення точки розриву першого роду і стрибка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
99. Сформулюйте означення точки усунюго розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
100. Сформулюйте означення точки розриву другого роду функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
101. Сформулюйте критерій неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в термінах однобічних неперервностей.
102. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має усунний розрив у точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
103. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має розрив першого роду в точці  $a = 0$ , розрив другого роду в точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
104. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною зліва в точці  $a = 0$ , не є неперервною справа в цій точці, має розрив другого роду в точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
105. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною в кожній точці проміжку  $[0; 1)$  і є розривною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
106. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має розрив другого роду в точках  $a = -1$ ,  $a = 0$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
107. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку  $(a; b)$ .
108. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку  $[a; b]$ .
109. Сформулюйте означення функції, неперервної на множині  $H$ .
110. Сформулюйте першу теорему Вейерштрасса.
111. Сформулюйте другу теорему Вейерштрасса.
112. Сформулюйте першу теорему Больцано-Коші.
113. Сформулюйте другу теорему Больцано-Коші.

### 1.2.16. Вправи і задачі.

1. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{1 + 4n^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^3 + 9n^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^2 + 9n^3}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n^2}{2n + 2}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 4}{2n^3 + 1}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{2n^2 + 1}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 + 4}{n^3 + 1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n}{n^4 + 1}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{n+4}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + 4n + 1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{n! - (n-1)!}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n!n + (n-1)!}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 2}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 1}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 5}}{8n^2 + 3}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2}}{1 + 3n^3}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 + (n-1)^4}{n^4 + 1}$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (2n-1)^4}{(2n+1)^3}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{n^3 + 1}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n}{1 + 100n^3}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{(n+1)^4}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^2}$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

2. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (0,2)^n}{2 + (0,3)^n}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0,8)^n + 2}{(-0,3)^n + 3}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{2^n + 5^n}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n} + (\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{5^n}}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2 + 2n + 4}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (3k-1)}{n^2 + 1}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^k}{4 \cdot 2^n + 3}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right).$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (4k+1)}{k^2 + 3}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (5k+7)}{2k^2 + 1}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^{2n+3} + (-1)^{n+1}}{(-1)^n + 9^n}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-2)^{2n+3}}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^{k-1}}{\sum_{k=1}^n 3^{k-1}}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-4)^k}{\sum_{k=1}^n 3^k}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-0,2)^n}{2 - (0,3)^n}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-0,8)^n + 2}{(-0,3)^n - 3}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{2 + 4n^2}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)(k-1)k}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + (-1)^n}{(-1)^n + 9^n}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^k + 2^k}{6^k}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + (\sqrt{5})^n}{2^n + (\sqrt{5})^n}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{7}{k^2 + k - 2}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-4)^n}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3^{-2k} (1 + 4^k).$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n} - (-\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{3^n}}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{9k^2 + 3k - 2}.$$

3. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-4n}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-2n+1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-3}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n-1}{3^n+1}\right)^{3^n-2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+5}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1-2n}\right)^{2n-5}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{-n}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-1}{4n}\right)^{-n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3}\right)^{-2n^3-1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-4n-2}{n^2-4n-1}\right)^{n^2-4n}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-4n}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2n+1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-3}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n-1}{3^n}\right)^{3^n-2}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n+5}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{1+2n} \right)^{2n-5}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{4n+1} \right)^n.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n+1}{2n} \right)^n.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3+1}{n^3} \right)^{2n^3-1}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+4n+2}{n^2+4n+1} \right)^{n^2+4n}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n} \right)^{2n}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n+3}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n+1}{3^n} \right)^{3^n+2}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-5}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{1+2n} \right)^{-2n+5}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2n}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n^2} \right)^{n^2+1}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} \right)^{n^2+3n+1}.$$

4. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{27x^3 + 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x^3 - 27}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}.$$

$$21. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{20} - 1}{t^{40} - 1}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}.$$

$$27. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{11} - 1}{y - 1}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 4x^2 + 3x}{x^3 - 3x + 2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 5x - 2}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - x - 12}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + 9x - 10}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 17x + 15}{x^2 - 6x - 27}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 2x + 1)^2}.$$

$$28. \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{40} - 1}{t^{80} - 1}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x - 1}{x^4 - 2x^2 - x}.$$

5. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x^3 + 100x^2}{10x^2 + 3x^3 - x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 8x^5}{1000x + 7x^5}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x^2 + 5}{2x^2 - 2x + 1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 + 9}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 7x + 9}{x^4 - 2 - 5x^5}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{2 + 3x^2 + x^5}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 7x + 1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 9}{x^5 - 10x^2 + 7}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 7x^9}{x^4 + 8x^9}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 - 100x^{11}}{10000x^9 - 0,1x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x}{3x + 2x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8 - 9x^7 + 1}{x + x^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^3 - x^5}{2x + x^2 + x^4}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^3 - x^{10}}{2x^9 + 1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x + x^2 + 1}{x^4 + x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3x^3 - x^7}{2x + 3x^2 - 2x^4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x^3 - x^{10}}{x - x^2 - 2x^{11}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x^3}{4 + x^2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^3 + x}{x + 81x^2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^3 + 20}{x^2 + 3x^3 + 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^5}{100x - 0,1x^2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 + x^9}{2x + 3x^3 + 2x^8}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 4x^3 - x^{10}}{2x^2 + x^3 + 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 4x^8 + 1}{2x^8 + x^3 + 4}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2x^2 + 4x^9}{1 + 3x^3 - 2x^8}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 - 4x^9}{1 + x^3 - 2x^{10}}$$

6. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+16} - 4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{2x^2}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{\sqrt{x} - 3}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3x^2 + x^3}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 1}{3x^2 + x^3}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{6x+1} - 5}.$$

7. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{3x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{4x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x \sin x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos^3 x - 2}{5x^2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2(x+1)}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{1 - \cos x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x + \sin^2 x}{x^2}.$$

8. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x+1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+5}{5x+1} \right)^{5x+2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x-1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x-1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x-1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+4} \right)^{2x+5}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x-1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x+1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x}{-1+x} \right)^{x+2}.$$

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-2+x}{2+x} \right)^{2x-1}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x+3}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{2x+1}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-9}{x} \right)^{3x+1}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3+3x} \right)^{2x+1}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+5x}{5+5x} \right)^{1-x}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+9}{2+2x} \right)^{x+3}$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4+9}{2+x^4} \right)^{x^2+3}$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{1+x^2} \right)^{1/x}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}+1}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{2x}-1}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}+2}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{-2}{x}-2}$ .

9. Дослідіть функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву і їхній тип:

1.  $f(x) = 2^{1/(x-3)}$ .

2.  $f(x) = 5^{1/(x-3)} + 1$ .

3.  $f(x) = \frac{x}{x-2}$ .

4.  $f(x) = \frac{x-8}{x+1}$ .

5.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$ .

6.  $f(x) = \frac{x+3}{(x-4)(x+5)}$ .

7.  $f(x) = \frac{x-8}{(x^2+1)(x-7)}$ .

8.  $f(x) = \frac{2^{1/x}}{x+7}$ .

9.  $f(x) = \frac{x+2}{2^{1/x}}$ .

10.  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ .

11.  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ .

12.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$ .

$$13. f(x) = \frac{x+7}{\cos x}.$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < \pi/2, \\ \sin x, & x \geq \pi/2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \arccos(\cos x).$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x).$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x, & 1 \leq x < 2, \\ 3, & 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \ln \ln(1+x).$$

$$14. f(x) = \frac{x+1}{-x^2+x+3}.$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x^2-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \cos(\arccos x)$$

$$24. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$

$$28. f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

### 1.2.17. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} + \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} \right).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin n}{n} + \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2n^2 + n} \right).$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n+1} \right).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{2n^2+2} + \frac{3n^2 + n}{1+n^2} \right).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + (-2)^n}{3 + 3^n} + \frac{\sqrt[3]{3} \sin \frac{n^3}{n+1}}{n+1} \right)$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^3 + 3} \cos(2n)! + \frac{n^{\sqrt{2}} + 1}{n^2 + n} \right).$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{3n} + \frac{(n+1)^4}{2n^4 + 2} \right).$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{3n+1}{3n} \right)^{3n+1} + \frac{(3n+1)^5}{n^6 + 2} \right).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{4n}{4n+1} \right)^{4n+5} + \frac{2n^5 + 1}{(n+1)^5} \right).$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{4^n + 1}{4^n} \right)^{4^n + 3} + \frac{(2n+1)^{10}}{(n+1)^{10}} \right).$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{5^n}{5^n + 1} \right)^{5^n + 2} + \frac{2n^{\sqrt{8}} + 1}{(n+1)^3} \right).$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} + \frac{\sqrt[4]{4} \sin n}{(2n+1)^4} \right).$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + e^n}{4^n - 3^n} \sin n! + \frac{\sqrt[4]{3}}{(3n+1)^2} \right).$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + (-3)^n}{1 + 4^n} \cos n! + \frac{\sqrt[4]{2n}}{2n+1} \right).$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + (0,3)^n}{1 + (0,4)^n} + \frac{\sqrt[4]{2} \sin n^2}{n^2 + 1} \right).$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(2n-1)^4}{n^5 + 3} \right).$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^\pi + n^\pi}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 + 1}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{2 + n^2}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{4^n - 3^n} (-1)^{n+1} + \frac{\sqrt[4]{3}}{(3n+1)^2} \right).$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin \sqrt{n}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \cos \sqrt{n}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 3n}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n!}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) n^{2/3} + \frac{\sqrt[4]{3}}{n+1} \right).$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (1 + 1/n)^{n+1}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n} + \sqrt[n]{n} \frac{2 + \sqrt{n}}{n+1} \right).$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(-1)^n - 2}{n+4} + \frac{n^3(-1)^n}{n^5 + \sqrt{3}} \right).$$

2. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^6 - x^3}{x^3 + x} \right).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - x^8}{x^6 + 2x^3} \right).$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x+1} \right)$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} - \frac{1-x^2 + 2x}{x^2 - 4} \right)$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - x}{x-1} \right)$ .
7.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n - 1}{t^m - 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .
8.  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{10} - 1}{y - 1}$ .
9.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 - 1}{x}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^4}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x^6 + 2x^3} - \frac{x-2}{x^2} \right)$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^5 + 1}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^7 - 1}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x + 2}$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^3 - x}$ .

3. Знайдіть границю:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}$ .

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^5 - 13x^2 + 7}{4x^5 - x^2 + 1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^4 + x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x^3 - x^7 + 2x}{2x^8 + x^7 - 2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 31x^4 + 1}{-2x^3 + x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^6 - 3x^4 + 1}{2x^2 - x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - x^4 + 10}{x^3 + x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^6 - x^4 + 1}{x^5 - 10x^2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right)^{x+1}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+9}{x} \right)^{2x+2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2-5x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+9}{x} \right)^{2x+2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2-5x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x-3}{x-1} \right)^{\frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x^4 + x^3 + 1}{x^4 - 2x^2 - x + 2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + x + 2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x^6 + 1}{-3x^6 - 2x^8 + x + 1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^6 + x}{-4x^4 + x^2 + 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^7 + 3x^2}{3x^3 + 2x^2 + 1}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x^2}{3x^2} \right)^{-x^4}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-1}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{1+2x} \right)^{-x+1}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-1}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{1+2x} \right)^{-x+1}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x+2}{1+x} \right)^{2 \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}.$$

4. Знайдіть границю:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} x \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -8} 3 \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} \sqrt{2x} \right)$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)\sqrt{x}}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{2x}\sqrt{x^2 - 4}}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+2x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+3x}}{((1+3x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+2x}}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x^2} - 1)\sqrt{1+x}}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)\sqrt{4+x}}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x})$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 4}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 6} + |x|}{\sqrt[4]{x^2} - 1}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{2x(x-1)}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{(x^3 + x^2)\sqrt{4+x}}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-1} + 2}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} + 3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{2}}$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$ .
24.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{2}}{x - 2}, n \in \mathbb{N}$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^4 + 1}}{\sqrt{x^4 - 10x^2}}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2}}{x^2 + 2x + 1}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{x}{x^2 - 3} \right)$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2 - 3} \right)$ .

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1} \right).$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

5. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{4x\sqrt{1+2x}}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{\sin 2x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x \sin x)}{x^2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin 2\pi x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 \cos x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x \cos x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sqrt{\cos x}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2 \sqrt{x+1}}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2 \sqrt{4-2x}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2 \sqrt{9+2x}}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\operatorname{tg} x - 1) \sin x}{x - \pi/4}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{4x - \pi}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sqrt{4x} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\cos \left( \frac{2\pi}{6} - x \right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} - 2 \cos x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x \cos x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin 2x} - \sqrt{\sin x}}{\cos x - 1}.$$

6. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) \cos \pi x}{3^{x-1} - \sqrt{x}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{x-1} - \ln x}{x^3 - 1}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{x^2 - 16}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x) - \log_3(1+x)}{x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln^2(x+1) - \ln^2 x).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2\sqrt{-x})^{2\sqrt{2}} - 1}{x - \sqrt{-x}}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -9} \frac{x}{(4 + \sqrt{-x})^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} - \sqrt[4]{1 + 2x}}{x + \sqrt{x}}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+2x}}{(1 + \sin x)^{\sqrt{2}} - 1}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{(1 + 2\sin x)^{\sqrt{2}} - 1}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x^2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2^{x-1} - \ln x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^x - 100}{x^3 - 8}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2^2(1 + \sqrt[3]{x})}{\log_3^3(1 + \sqrt{x})}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x}{(1 + 3x)^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5-x)^{2\sqrt{2}} - 1}{(x-4)\sqrt{6-x}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{-x} - 1}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{x + \ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sqrt{2}}{\ln \cos 2x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} \right) x.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1+2x)}.$$

7. Дослідіть функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву, їхній тип та зобразіть графік:

$$1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 4, \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & x < 0, \\ x \sin(1/x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ x+1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+5}.$$

$$16. f(x) = \frac{2x}{x^2-1}.$$

$$17. f(x) = \frac{x+7}{2^x-1}.$$

$$18. f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

$$19. f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

$$20. f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}.$$

$$21. f(x) = \frac{1}{-x^2+2x+3}.$$

$$22. f(x) = 2^{x/(x-1)}.$$

$$23. f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+3}.$$

$$24. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$25. f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

$$26. f(x) = \frac{e^{1/x}+1}{e^x-1}.$$

$$27. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

$$28. f(x) = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}.$$

$$29. f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$30. f(x) = \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}+2}.$$

## Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

### 2.1. Похідна і диференціал функції

Похідна і диференціал функції є одними з основних інструментів дослідження функцій, рівнянь, багатьох природних явищ та суспільних проблем. Власне саме ці поняття і було введене в зв'язку з дослідженням рухів та інших фізичних процесів.

**2.1.1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну.** Похідною функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $x_0$  називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля [3, 8-10]:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

де  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  – приріст функції  $f$  у точці  $x_0$ . Якщо границя (1) існує і є скінченною, то кажуть, що в точці  $x_0$  функція  $f$  має похідну, а якщо границя (1) не існує або рівна  $\infty$ , то кажуть, що функція  $f$  у точці  $x_0$  похідної не має. Інколи, правда, коли границя рівна  $-\infty$ ,  $+\infty$  або  $\infty$ , кажуть, що в точці  $x_0$  функція має відповідну нескінченну похідну. Означення похідної можна записати і так [3, 8-10]:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Для позначення похідної використовують також символи

$$\frac{df}{dx}(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, f', y', \dot{y}, Dy, \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

та інші, а приріст функції  $f$  у точці  $x_0$  позначають через  $\Delta y$ . Тому означення похідної можна записати й так:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Природним

чином, визначаються права і ліва похідні функції  $f$  в точці  $x_0$ :

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x_0$ , то вона є неперервною в цій точці.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^2$ , то

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

тобто  $(x^2)' = 2x$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = |x|$  не має похідної в точці  $x_0 = 0$ .

Справді,  $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$ . Отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Тому розглядувана функція не має похідної в точці  $x_0 = 0$ . Функція  $f(x) = |x|$  є неперервною в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$  і цей приклад показує, що твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим. Більше того, існують неперервні всюди функції, які не мають похідної в жодній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 3.**  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\begin{aligned}
 (x^\mu)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^\mu \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \\
 &= x^{\mu-1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\mu - 1}{t} = \mu x^{\mu-1}.
 \end{aligned}$$

**Приклад 4.**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді, використовуючи неперервність косинуса, отримуємо

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.
 \end{aligned}$$

**Приклад 5.**  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді, використовуючи неперервність синуса, отримуємо

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\
 &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = - \sin x.
 \end{aligned}$$

**Приклад 6.**  $(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Кажуть, що функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $[a; b]$ , якщо вона має похідну в кожній точці  $x \in (a; b)$ , має праву похідну в точці  $a$  і має ліву похідну в точці  $b$ .

**2.1.2. Дотична і нормаль до графіка функції. Геометричний і механічний зміст похідної.** Графік функції  $y = f(x)$  геометрично в

прямокутній декартовій системі координат зображається у вигляді деякої лінії. Візьмемо на графіку дві точки  $M_0(x_0; y_0)$  і  $M(x; y)$ , і проведемо через ці точки пряму, яку будемо називати січною. Дотичною до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0; y_0)$  називається така пряма  $T$ , яка проходить через цю точку і є граничним положенням січної  $M_0M$ ,

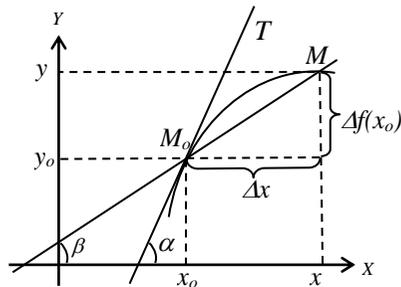


Рис. 1

коли  $M$  прямує до  $M_0$  по графіку функції. Якщо  $T$  перпендикулярна до осі  $Ox$ , то  $T$  називається вертикальною дотичною, а в протилежному випадку – похилою дотичною.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Графік неперервної в точці  $x_0$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в точці  $(x_0; y_0)$ , де  $y_0 = f(x_0)$ , похилу дотичну тоді і тільки тоді, коли  $f$  має скінченну похідну в точці  $x_0$  і при цьому рівняння дотичної має вигляд  $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ . Графік неперервної в точці  $x_0$  функції  $f$  має в точці  $(x_0; y_0)$  вертикальну дотичну тоді і тільки тоді, коли  $f$  має нескінченну похідну в точці  $x_0$  і при цьому рівняння вертикальної дотичної має вигляд  $x = x_0$ .

З теореми 1 випливає такий геометричний зміст похідної [3, 8-10]: похідна функції  $f$  в точці  $x_0$  рівна кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції  $f$  в точці  $(x_0; f(x_0))$ , тобто  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , де  $\alpha$  – кут, утворений дотичною з додатним променем осі абсцис. Зокрема,  $f'(x_0) = 0$  тоді і тільки тоді, коли дотична до графіка функції в точці  $(x_0; f(x_0))$  є паралельною осі абсцис.

**Приклад 1.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = \sin x$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = \pi/3$ . Оскільки  $f'(x) = \cos x$ ,  $f(x_0) = \sqrt{3}/2$  і  $f'(x_0) = 1/2$ , то  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi/3)$  – шукане рівняння.

**Приклад 2.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = x^3$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = 0$ . Оскільки  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f(x_0) = 0$  і  $f'(x_0) = 0$ , то  $y = 0$  – шукане рівняння.

**Приклад 3.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = 0$ . Оскільки  $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$ , функція  $f$  є неперервною у точці  $x_0$  і  $f'(x_0) = \infty$ , то  $x = 0$  – шукане рівняння.

**Приклад 4.** Знайдемо ті точки графіка функції  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$ , дотична в яких є паралельною осі абсцис. Оскільки  $f'(x) = x^2 + 3x - 4$ , то  $f'(x) = 0$ , якщо  $x = -4$  або  $x = 1$ . Тому точки  $\left(-4; \frac{59}{3}\right)$  і  $\left(1; -\frac{7}{6}\right)$  є шуканими.

Нормаллю до графіка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $(x_0; y_0)$  називається така пряма, яка проходить через цю точку і є перпендикулярною до дотичної, проведеної в цій же точці. З умов перпендикулярності двох прямих випливає, що  $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$  є рівнянням нормалі.

### 2.1.3. Основні правила диференціювання.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Похідна сталої функції дорівнює нулеві, тобто  $(C)' = 0$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Похідна суми двох функцій  $u$  і  $v$  дорівнює сумі похідних, якщо останні існують:  $(u + v)' = u' + v'$ .

**Теорема 3 [3, 8-10].** Похідна добутку двох функцій  $u$  і  $v$  знаходиться за формулою  $(uv)' = u'v + uv'$ , якщо похідні  $u'$  і  $v'$  існують.

**Наслідок 1.** Сталу можна виносити за знак похідної, тобто  $(Cu)' = Cu'$  для довільної сталої  $C$ , якщо  $u'$  існує.

**Теорема 4 [3, 8-10].** Похідна частки двох функцій  $u$  і  $v$  знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

якщо похідні  $u'(x)$  і  $v'(x)$  існують і  $v(x) \neq 0$ .

**Приклад 1.**  $(x + \cos x)' = (x)' + (\cos x)' = 1 - \sin x$ .

**Приклад 2.**  $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$ .

**Приклад 3.**  $\left(\frac{x^3}{5}\right)' = \left(\frac{1}{5}x^3\right)' = \frac{1}{5}(x^3)' = \frac{1}{5} \cdot 3x^2 = \frac{3}{5}x^2$ .

**Приклад 4.**  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ . Справді,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Приклад 5.**  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ . Справді,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

#### 2.1.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

##### Похідна складеної функції.

Таблиця похідних основних елементарних функцій [3, 8-10]:

- |                                                      |                                                        |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. $(C)' = 0$ .                                      | 2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ , $\mu \in \mathbb{R}$ . |
| 3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .             | 4. $(e^x)' = e^x$ .                                    |
| 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .                        | 6. $(\sin x)' = \cos x$ .                              |
| 7. $(\cos x)' = -\sin x$ .                           | 8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ .     |
| 9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ . | 10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .          |

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$16. (a^x)' = a^x \ln a, \quad a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$$

$$17. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$$

Ці формули справедливі в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ , в якій обидві частини відповідної рівності мають зміст. Частина цих формул вже доведена в попередніх пунктах. Решту формул отримаємо в наступних пунктах.

**Теорема 1 [3, 8-10] (похідна складеної функції).** Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x_0$ , а функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $y_0 = \varphi(x_0)$ , то функція  $F(x) = f(\varphi(x))$  має похідну в точці  $x_0$  і

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0), \quad (1)$$

тобто  $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ .

В довільній точці  $x$  рівність (1) можна записати і в інших формах:

$$F'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \quad (f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad z'_x = z'_y \cdot y'_x, \quad (f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Таким чином, за виконання відповідних умов  $(e^\varphi)' = e^\varphi \varphi'$ ,

$$(\sin \varphi)' = \cos \varphi \cdot \varphi', \quad (\cos \varphi)' = -\sin \varphi \cdot \varphi', \quad (\ln \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2} \text{ і т.д.}$$

**Приклад 1.**  $(\sin 2x)' = \sin'(2x)(2x)' = 2 \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$

**Приклад 2.**  $(e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = e^{x^2} 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$

**Приклад 3.**  $(e^{-x})' = e^{-x} (-x)' = -e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$

**Приклад 4.**

$$(\sin^4 2x^3)' = 4 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3 (2x^3)' = 24x^2 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 5.**

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 6.**

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 7.**  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . *Справді,*

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

**Приклад 8.**  $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$ .

**Приклад 9.**  $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$ .

**Приклад 10.**  $(e^{\sin^2 3x})' = e^{\sin^2 3x} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3e^{\sin^2 3x} \sin 6x$ .

**Приклад 11.** Якщо  $f(x) = \sin 2x + \cos^3 2x$ , то

$$f'(x) = 2 \cos 2x + 6 \cos^2 2x \sin 2x \quad \text{і} \quad f'(0) = 2.$$

### 2.1.5. Похідні показниково-степеневих функцій.

**Логарифмічна похідна. Похідна оберненої функції.** Показниково-степенева функція задається формулою  $y = u^v$ , де  $u$  і  $v$  – функції, які мають похідні в точці  $x$ . Для знаходження похідної такої функції слід скористатись формулою  $u = e^{\ln u}$ . Тоді  $u^v = e^{v \ln u}$  і [3, 8-10]

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

**Приклад 1.**

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Інколи похідну функції  $y = u^v$  простіше знаходити наступним чином [3, 8-10]:  $\ln y = v \ln u$ ,  $\frac{y'}{y} = (v \ln u)'$ ,

$$y' = y \cdot (v \ln u)' = u^v (v \ln u)' = u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

**Приклад 2.** Якщо  $y = x^x$ , то  $\ln y = x \ln x$ ,  $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$  і

$$y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Похідна логарифма функції називається логарифмічною похідною:  $(\ln f)' = f' / f$ .

**Приклад 3 [3, 8-10].** Якщо  $y = x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ , то

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1), \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1},$$

*i*

$$y' = y \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1} \right) = x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1} \right) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \left( 1 + \frac{2x^2}{x^4 - 1} \right).$$

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є строго монотонною і неперервною на проміжку  $(a; b)$ , має похідну  $f'(x_0) \neq 0$  в точці  $x_0 \in (a; b)$ , то функція  $f^{-1}$ , обернена до  $f$ , має похідну в точці  $y_0 = f(x_0)$  і

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

**Зауваження 1.** Формулу (1) можна записати так:

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Отже, в точці  $x$  похідна оберненої функції знаходиться за формулою

$$f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Формулу (1) записують також так:  $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = \sin x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Тому

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \arccos x$  є оберненою функцією до звуження функції  $f$  на проміжок  $[0; \pi]$ . Тому

$$\begin{aligned} \arccos' x &= \frac{1}{f'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $(-\pi/2; \pi/2)$ . Тому

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $(0; \pi)$ . Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg}' x &= \frac{1}{f'(\operatorname{arcctg} x)} = -\sin^2(\operatorname{arcctg} x) = \\ &= \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Приклад 8.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \ln x$  є оберненою до функції  $f$ . Тому

$$\ln' x = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

**Приклад 9.** Якщо  $f(x) = a^x$ ,  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$  то функція  $f^{-1}(x) = \log_a x$  є оберненою до функції  $f$ . Тому

$$\log'_a x = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in (0; +\infty).$$

**2.1.6. Диференціал функції. Основні властивості диференціала.** Функція  $f$  називається [3, 8-10] диференційовною в точці  $x_0$ , якщо її приріст  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  в цій точці можна подати у вигляді  $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ , де  $A$  – деяке число, яке від  $\Delta x$  не залежить ( $A$  залежить від функції  $f$  і від  $x_0$ ), а  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$ , якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ . Якщо функція  $f$  є диференційованою, то  $A \cdot \Delta x$  називається її диференціалом в точці  $x_0$  і позначається  $df(x_0)$ ,  $dy$ ,  $d(f(x_0); \Delta x)$  і т.д. Отже,  $df(x_0) = A \cdot \Delta x$ . Замість  $\Delta x$  часто пишуть  $dx$  і тоді  $df(x_0) = A \cdot dx$ . Бачимо, що за сталого  $x_0$  диференціал є лінійною функцією змінної  $\Delta x$ .

**Приклад 1.** Нехай  $f(x) = x^2$ . Тоді  $\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$ . Отже,  $df(x_0) = 2x_0 dx$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Для того щоб функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  була диференційовною в точці  $x_0$ , необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці. Якщо ця умова виконана, то

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \quad (1)$$

Отже, функція має похідну в точці тоді і тільки тоді, коли вона є диференційовна в цій точці. Тому функції, які мають похідну, часто називають диференційовними, а правила знаходження похідних – правилами диференціювання.

**Зауваження 1.** Формулу (1) в довільній точці  $x$  записують так  $dy = f'(x)dx$ . В цій формулі  $dx = \Delta x$  – довільне число, яке не залежить від  $x$ .

**Приклад 2.** Нехай  $f(x) = e^{2x}$ . Тоді  $f'(x) = 2e^{2x}$ . Отже,  $df(x) = 2e^{2x}dx$ . Зокрема,  $d(f(0); 0,1) = 0,2$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо  $c$  – стала функція, а  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  – диференційовні функції в точці  $x$ , то: 1)  $d(c) = 0$ ; 2)  $d(u + v) = du + dv$ ; 3)  $d(uv) = vdu + u dv$ ; 4)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ , якщо  $v(x) \neq 0$ .

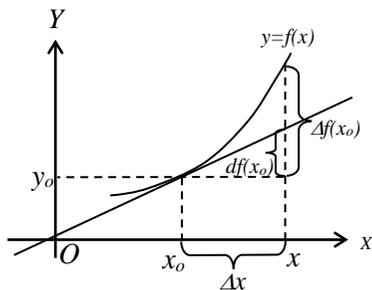
**Приклад 3.**  $d(xe^x) = xd(e^x) + e^x dx = xe^x dx + e^x dx = (xe^x + e^x)dx$ .

Нехай функція  $f$  є диференційовною в точці  $x_0$ . Тоді її приріст  $\Delta f(x_0) = \Delta(f(x_0); \Delta x)$  можна подати [3, 8-10] у вигляді  $\Delta f(x_0) = df(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$  і  $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ . Якщо  $f'(x_0) \neq 0$ , то для малих  $\Delta x$  маємо  $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ . Отже,  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Ця наближена формула інколи використовується для наближеного знаходження значення функції  $f$  у точці  $x$ , якщо відомим є значення в близькій точці  $x_0$ .

**Приклад 4.** Для знаходження наближеного значення  $\sqrt[4]{17}$  розглянемо функцію  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  та її значення в точках  $x = 17$  і  $x_0 = 16$ . Тоді  $f(16) = 2$ ,  $x - x_0 = 1$ ,  $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ ,  $f'(16) = \frac{1}{4}(16)^{-3/4} = \frac{1}{32}$ . Тому

$$\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} = \frac{65}{32}.$$

Подивимось на диференціал іще з одного боку. Диференційовна в точці  $x_0$  функція  $f$  має в цій точці дотичну і з графіка видно, що диференціал функції в точці  $x_0$  дорівнює приросту функції



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (приросту ординати дотичної), що відповідає приросту  $\Delta x = x - x_0$  незалежної змінної.

Нехай функція  $f$  є диференційовною в кожній точці проміжку  $(a; b)$ . Тоді її диференціал в точці  $x \in (a; b)$  знаходиться за формулою [3, 8-10]

$$dy = f'(x)dx. \quad (2)$$

Нехай тепер на проміжку  $(\alpha; \beta)$  задано функцію  $x: (\alpha; \beta) \rightarrow (a; b)$ , яка диференційовна на  $(\alpha; \beta)$ . Тоді диференціал функції  $y = f(x(t))$  знаходиться за формулою  $dy = f'(x(t))x'(t)dt$  або  $dy = f'(x(t))dx(t)$ . Опустивши в останній формулі  $t$ , знову маємо

$$dy = f'(x)dx. \quad (3)$$

Отже, незалежно від того, чи є  $x$  незалежною змінною, чи  $x$  є функцією, диференціал функції  $y = f(x)$  знаходиться за формулами (2)-(3). Ця властивість називається інваріантністю форми першого диференціала. Вона часто використовується на практиці. Формули (2)-(3) однакові за формою, але вони різні за змістом. У формулі (2)  $dx = \Delta x$  – довільне число, а в формулі (3)  $dx$  – це диференціал функції  $x = x(t)$  і не завжди в цьому випадку  $dx = \Delta x$ .

**Зауваження 2.** З інваріантності форми першого диференціала випливає, що похідна функції в якійсь точці дорівнює частці диференціалів:  $y'_x = \frac{dy}{dx}$ . При цьому знаходити значення диференціалів можна по будь-якій змінній.

**Приклад 5.** Якщо  $\varphi(x) = e^x$ ,  $x(t) = t^2$  і  $f(t) = e^{t^2}$ , то  $\varphi'(x) = e^x$  і

$$\varphi'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{e^{t^2} 2tdt}{2tdt} = e^{t^2} = e^x.$$

**Приклад 6 [3, 8-10].**

$$\begin{aligned} d(\ln^2 \sin^3 4x) &= 2 \ln \sin^3 4x d(\ln \sin^3 4x) = \frac{2 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} d(\sin^3 4x) = \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} \sin^2 4x d(\sin 4x) = \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} d(\sin 4x) = \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x d(4x) = \frac{24 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x dx. \end{aligned}$$

**2.1.7. Похідні і диференціали вищих порядків.** Нехай функція  $f$  має похідну в кожній точці  $x \in (a; b)$ . Тоді функція  $f': x \rightarrow f'(x)$

називається похідною функцією функції  $f$  або першою похідною функції  $f$ . Похідна функції  $f'$  в точці  $x_0$  називається другою похідною функції  $f$  в точці  $x_0$  і позначається через  $f''(x_0)$ . Отже [3, 8-10],

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Другу похідну позначають також так  $y''$ ,  $f^{(2)}(x_0)$ ,  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ ,  $\ddot{y}$ ,  $y''_{x^2}(x_0)$  і т.д.

Означення другої похідної можна також записати так:  $f''(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$ . Аналогічно даємо означення похідної  $n$ -го порядку:  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'(x_0)$ . Крім цього, за означенням  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$  – похідна нульового порядку.

**Теорема 1 [3, 8-10].**  $(Cu)^{(n)} = C u^{(n)}$  для довільних  $C \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , якщо  $u^{(n)}$  існує.

**Теорема 2 [3, 8-10].**  $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$  для довільного  $C \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , якщо похідні  $u^{(n)}$  і  $v^{(n)}$  існують.

**Теорема 3 (формула Лейбніца) [3, 8-10].**  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

для довільного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо похідні  $u^{(n)}$  і  $v^{(n)}$  існують.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = xe^x$ , то

$$f''(x) = (xe^x)'' = \left( (xe^x)' \right)' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x).$$

Зокрема,  $f''(0) = 2$ .

**Приклад 2.** Знайдемо  $n$ -ну похідну функції  $f(x) = \sin x$ . Маємо,

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2), \quad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right). \text{ Зокрема,}$$

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то

$$f^{(n)}(x) = \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right)^{(n)} = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = x^\mu$ , то  $f'(x) = \mu x^{\mu-1}$ ,  $f''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$  і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що  $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$ .

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = \ln x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$  і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ , то позначивши  $u = x^2 - 1$  і  $v = e^x$ , отримуємо, що  $v^{(n)} = e^x$ ,  $u^{(0)} = x^2 - 1$ ,  $u' = 2x$ ,  $u'' = 2$ ,  $u''' = 0$ ,  $u^{(4)} = 0$ , .... Тому, скориставшись формулою Лейбніца, одержуємо

$$f^{(20)}(x) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(k)} v^{(20-k)} = C_{20}^0 u^{(0)} v^{(20)} + C_{20}^1 u^{(1)} v^{(19)} + C_{20}^2 u^{(2)} v^{(18)} = \\ = (x^2 - 1)e^x + 40xe^x + 380e^x = (x^2 + 40x + 379)e^x.$$

Якщо функція  $f$  є диференційовною на  $(a; b)$ , то її диференціал в кожній точці  $x \in (a; b)$  знаходиться за формулою  $dy = f'(x)dx$ , який називається ще першим диференціалом функції  $f$ . Перший диференціал є функцією двох змінних:  $x$  і  $dx$ . При цьому  $dx$  від  $x$  не залежить. При сталому  $dx$  функція  $dy$  є функцією в  $\mathbb{R}$ . Якщо вона диференційовна, то її диференціал  $\delta(dy)$  знаходиться [3, 8-10] за формулою  $\delta(dy) = (f'(x)dx)' \delta x = f''(x)dx \delta x$ , де  $dx$  і  $\delta x$  – довільні числа. Значення диференціала від першого диференціала при  $\delta x = dx$  називається другим диференціалом функції  $f$  в точці  $x$  і позначається  $d^2y$ . Таким чином, другий диференціал знаходиться за формулою  $d^2y = f''(x)dx^2$ , де  $dx^2 := dx \cdot dx = (dx)^2$  і  $dx$  – довільна стала, незалежна від  $x$ . Аналогічно дається означення диференціала  $n$ -го порядку. Для знаходження диференціала  $n$ -го порядку справедлива формула [3, 8-10]:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

**Зауваження 1.** Слід розрізняти позначення  $d^n x$ ,  $dx^n$  та  $d(x^n)$ :

$$d^n x = \begin{cases} 0, n > 1, \\ dx, n = 1, \end{cases} \quad dx^n = (dx)^n, \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

**Зауваження 2.** Другий диференціал не має властивості інваріантності форми.

**Теорема 4 [3, 8-10].**  $d^n(u+v) = d^n u + d^n v$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо диференціали  $d^n u$  та  $d^n v$  існують.

**Теорема 5 [3, 8-10].**  $d^n(Cu) = Cd^n u$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$  і кожного  $C \in \mathbb{N}$ , якщо диференціал  $d^n u$  існує.

**Теорема 6 [3, 8-10].**  $d^n(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u d^k v$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо диференціали  $d^n u$  та  $d^n v$  існують.

**Зауваження 3.** Символічно останню формулу записують так  $d^n(uv) = \{du + dv\}^{\{n\}}$ . В цих формулах  $u$  і  $v$   $n$ -раз диференційовні функції і  $d^0 u = u$ .

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то  $f''(x) = e^x$ . Тому  $d^2 f(x) = e^x dx^2$ .

**2.1.8. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично.** Нехай функція  $y = f(x)$  задана неявно рівністю  $F(x, y) = 0$ . Для знаходження похідної по  $x$  треба продиференціювати тотожність  $F(x, y(x)) \equiv 0$ , використовуючи правило диференціювання складеної функції і враховуючи, що  $y$  залежить від  $x$ . Після цього розв'язати рівняння, яке отримали відносно  $y'$ .

**Приклад 1.** Знайдемо похідну  $y'$ , якщо  $x^2 + y^2 = a^2$ . Маємо  $2x + 2yy' = 0$ , звідки  $y' = -x/y$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається заданою параметрично системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta), \quad (1)$$

якщо  $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  та  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  – деякі функції, функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  має обернену функцію і  $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрично системою (1), а функції  $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$

мають похідні в точці  $t$  і  $\varphi'(t) \neq 0$ , то функція  $f$  має похідну в точці  $x = \varphi(t)$  і

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2)$$

Формулу (2) коротко записують так  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

Щоб знайти другу похідну функції  $f$  слід  $f'$  розглядати як функцію, задану параметрично системою

$$\begin{cases} y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Тоді за виконання відповідних умов

$$f''(x) = \frac{\left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t}{\varphi'(t)},$$

або коротше [3, 8-10]

$$y''_{x^2} = \frac{\left( \frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t}{x'_t}.$$

**Приклад 2.** Знайдемо другу похідну функції  $f(x)$ , заданої параметрично системою

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2],$$

в точці  $x = \sqrt{2}$ . Маємо

$$f'(x) = \frac{2\cos t}{-2\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad f''(x) = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(2\cos t)'_t} = -\frac{1}{2\sin^3 t}.$$

Якщо  $x = \sqrt{2}$ , то  $t = \pi/4$ . Тому  $f''(\sqrt{2}) = -1/(2\sin^3(\pi/4)) = -\sqrt{2}$ .

**Зауваження 1.** Другу і вищі похідні функції, заданої параметрично, можна знаходити іншим методом, використовуючи інваріантність форми першого диференціала і формули

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2 y - d^2 x dy}{dx^3}.$$

### 2.1.9. Запитання для самоконтролю.

1. Дайте означення похідної функції в точці.
2. Дайте означення дотичної до графіка функції і напишіть її рівняння.
3. Опишіть геометричний зміст похідної.
4. Сформулюйте теорему про неперервність складеної функції.
5. Сформулюйте теорему про неперервність функції, яка має похідну.
6. Сформулюйте теорему про похідну суми.
7. Сформулюйте теорему про похідну добутку і наслідок з неї.
8. Сформулюйте теорему про похідну частки.
9. Сформулюйте теорему про похідну композиції функцій.
10. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції.
11. Завершіть написання формули  $(c)' =$  і доведіть її.
12. Завершіть написання формули  $(x^u)' =$  і доведіть її.
13. Завершіть написання формули  $(e^x)' =$  і доведіть її.
14. Завершіть написання формули  $(\ln x)' =$  і доведіть її.
15. Завершіть написання формули  $(\sin x)' =$  і доведіть її.
16. Завершіть написання формули  $(\cos x)' =$  і доведіть її.
17. Завершіть написання формули  $(\operatorname{tg} x)' =$  і доведіть її.
18. Завершіть написання формули  $(\operatorname{ctg} x)' =$  і доведіть її.
19. Завершіть написання формули  $(\arcsin x)' =$  і доведіть її.
20. Завершіть написання формули  $(\arccos x)' =$  і доведіть її.
21. Завершіть написання формули  $(\operatorname{arctg} x)' =$  і доведіть її.
22. Завершіть написання формули  $(\operatorname{arcctg} x)' =$  і доведіть її.
23. Завершіть написання формули  $(\operatorname{sh} x)' =$  і доведіть її.
24. Завершіть написання формули  $(\operatorname{ch} x)' =$  і доведіть її.
25. Сформулюйте теорему про неперервність суми, добутку і частки двох неперервних функцій.
26. Сформулюйте теорему про зв'язок між існуванням похідної і диференційовністю.
27. Сформулюйте теорему про похідну функції, заданої параметрично.
28. Наведіть приклад функції, дотична до графіка якої перетинає його в двох точках.
29. Наведіть приклад функції графік якої в точці  $(0;0)$  має вертикальну дотичну.
30. Сформулюйте означення другої похідної.
31. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такої, що  $f'(0) = 1$ , а  $f''(0)$  не існує.

32. Сформулюйте означення диференційовної функції і диференціала.
33. Запишіть основні правила знаходження диференціала.
34. Інтерпретуйте геометричний зміст диференціала.
35. Інтерпретуйте інваріантність форми першого диференціала.
36. Сформулюйте означення другої похідної і запишіть основні правила знаходження  $n$ -ої похідної.
37. Сформулюйте означення другого диференціала і запишіть основні формули для знаходження  $n$ -го диференціала.

### 2.1.10. Вправи і задачі.

1. Знайдіть похідну функції у вказаній точці:

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}, x_0 = 1.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{x}, x_0 = -1.$$

$$3. f(t) = \frac{1}{2t}, t_0 = -1.$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, x_0 = 1.$$

$$5. f(x) = \frac{2}{x^3}, x_0 = 1.$$

$$6. f(u) = 2u - 4 + \sqrt{2u^2}, u_0 = 0.$$

$$7. f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2} - \frac{2}{x^2}, x_0 = -1.$$

$$8. f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + x^2 \sqrt{2}, x_0 = 1.$$

$$9. f(s) = s^{\sqrt{2}}, s_0 = 1.$$

$$10. f(x) = \sqrt{2}x^{-\sqrt{3}} + \pi^{-\sqrt{2}}, x_0 = 1.$$

$$11. f(x) = e^{\sqrt{\pi}} + x^{\pi^2}, x_0 = 1.$$

$$12. f(x) = x^5 \sqrt{x} + 2x\sqrt{2x}, x_0 = 1.$$

$$13. f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x}} + \frac{\sqrt{2x}}{x^3}, x_0 = 1.$$

$$14. f(y) = 4 - 2^y + \log_2 3, y_0 = 0.$$

$$15. f(\tau) = \sqrt{\tau} + \frac{1}{\tau}, \tau_0 = 1.$$

$$16. f(x) = 2 \sin x + \ln 2, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$17. f(x) = e^2 \cos x, x_0 = 0.$$

$$18. f(x) = -2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 1, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$19. f(x) = e^{\sin \sqrt{2}} \operatorname{ch} x, x_0 = 0.$$

$$20. f(w) = \frac{\operatorname{sh} w}{e^{\sqrt{2}}}, w_0 = 1.$$

$$21. f(x) = e^{\sin \sqrt{2}} + \ln x, x_0 = e.$$

$$22. f(x) = \arcsin x + \ln 3, x_0 = -1.$$

$$23. f(x) = \sqrt{3} \arccos x, x_0 = 0.$$

$$24. f(x) = \operatorname{arctg} x + \ln \frac{1}{2}, x_0 = 1.$$

$$25. f(y) = \frac{y^2}{2} + \operatorname{arcctg} y, y_0 = 1.$$

$$26. f(x) = \frac{\lg \frac{1}{3}}{2} + \operatorname{arcctg} x, x_0 = 1.$$

$$27. f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{\cos x}{2}, x_0 = \pi/2. \quad 28. f(x) = 1 + \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}, x_0 = 1.$$

$$29. f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arcctg} x}{2}, x_0 = 1. \quad 30. f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{ch} x, x_0 = 0.$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = x^2 e^x.$$

$$2. y = (x^2 + 1) \ln x.$$

$$3. y = (2x^3 + 6) \cos x.$$

$$4. y = \sqrt{x} \sin x.$$

$$5. y = x \arccos x.$$

$$6. y = x^2 \operatorname{arctg} x.$$

$$7. y = x \arcsin x.$$

$$8. y = x^2 \arccos x.$$

$$9. y = e^x \operatorname{ch} x.$$

$$10. y = \ln x \operatorname{ch} x.$$

$$11. y = \sin x (\operatorname{tg} x + 1).$$

$$12. y = (\cos x + 1) \operatorname{ctg} x.$$

$$13. y = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$14. y = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

$$15. y = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}.$$

$$16. y = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}.$$

$$17. y = \frac{1}{1 - \ln x}.$$

$$18. y = \frac{1}{1 - e^x}.$$

$$19. y = \frac{1}{2 - \sin x}.$$

$$20. y = \frac{1}{3 - \cos x}.$$

$$21. y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

$$22. y = \frac{1}{1-x^4}.$$

$$23. y = \frac{1}{x - \arcsin x}.$$

$$24. y = \frac{1}{2 \operatorname{arctg} x}.$$

$$25. y = \frac{1}{x \operatorname{sh} x}.$$

$$26. y = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}.$$

$$27. y = \frac{1}{x + \operatorname{tg} x}.$$

$$28. y = \frac{1}{x - \operatorname{ctg} x}.$$

$$29. y = \frac{1}{x^3 + 1}.$$

$$30. y = \frac{1}{1-x^4}.$$

3. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = x^{-x}.$$

$$2. y = \lg x^{\operatorname{tg} x}.$$

$$3. y = x^{\sin x \cos x}.$$

$$4. y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}.$$

5.  $y = x^{2\sqrt{x}}$ .
6.  $y = x^{-x^3}$ .
7.  $y = x^{-x^{\cos x}}$ .
8.  $y = \arcsin^2(4x - 1)$ .
9.  $y = \sin x^{\sqrt{x}}$ .
10.  $y = x^{x^x}$ .
11.  $y = \operatorname{arctg}(2x^3)$ .
12.  $y = \operatorname{arccos}^2(7 - 2x)$ .
13.  $y = e^{\sin^2 x}$ .
14.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{5x}$ .
15.  $y = e^{-\sin^2(1-3x)}$ .
16.  $y = \operatorname{tg}^3(1 - 3x^2)$ .
17.  $y = e^{-4\sin^2 \sqrt{4x}}$ .
18.  $y = \ln \ln^2 x$ .
19.  $y = \ln \ln \ln^2 x$ .
20.  $y = \ln \arcsin x$ .
21.  $y = e^{\sin^3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}$ .
22.  $y = \sin e^{2\cos x}$ .
23.  $y = (1 - 7x)^{10}$ .
24.  $y = (\sqrt{1-x})^{101}$ .
25.  $y = \operatorname{sh}^2(1-x)^8$ .
26.  $y = \operatorname{tg}^2(1-2x^2)^8$ .
27.  $y = e^{\operatorname{arctg}^2 x^2}$ .
28.  $y = \ln^2 \operatorname{ch}^3 4x$ .
29.  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ .
30.  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ .

4. Знайдіть похідну функції:

1.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
2.  $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{-2x} + 1}$ .
3.  $y = x^2 \sin^2 x$ .
4.  $y = \sqrt{x-1} e^{-2x}$ .
5.  $y = \operatorname{sh} 2x \cdot \cos 2x$ .
6.  $y = \operatorname{ch}(1-2x) \cdot \sin(1-2x)$ .
7.  $y = (1+2x)^5(1-2x)^{10}$ .
8.  $y = (1-x)^7(1+2x)^6$ .
9.  $y = x^9(1-9x)^9$ .
10.  $y = (1-2x)^2(x-1)(1+2x)^8$ .
11.  $y = x e^x \cos x$ .
12.  $y = x^2 2^x \operatorname{tg} x$ .
13.  $y = x \cdot \cos x \cdot e^x \cdot \operatorname{ctg} x$ .
14.  $y = x^3 \cdot \ln x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{arctg} x$ .
15.  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a > 0$ .
16.  $y = \frac{\sqrt{3}}{1-2x}$ .
17.  $y = \frac{a^2 + \sqrt{3}}{(1-4x)^2}, a > 0$ .
18.  $y = \frac{1+a^2}{(1-x)^8}, a > 0$ .

$$19. y = \frac{1+2x}{\ln(1+2x)}.$$

$$20. y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

$$21. y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

$$22. y = \frac{1-x}{\ln(1+x)}.$$

$$23. y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}.$$

$$24. y = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

$$25. y = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 + \sin^2 x}.$$

$$26. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$27. y = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}.$$

$$28. y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$29. y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$30. y = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}.$$

5. Знайдіть диференціал функції:

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^{\sqrt{2}}} + \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

$$2. f(x) = \sin(x - x^2).$$

$$3. f(x) = (1-x)^7.$$

$$4. f(x) = (1-2x)^{-5}.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sin(1-x)}.$$

$$6. f(x) = \sin^2 2x.$$

6. Обчисліть приблизно з використанням диференціала:

$$1. \sqrt{9,01}.$$

$$2. \sqrt{\frac{4,1^2 + 4}{4,1^2 - 12}}.$$

$$3. \sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}.$$

$$4. \operatorname{arctg} 1,05.$$

$$5. \sin 29^\circ.$$

$$6. \cos 151^\circ.$$

7. Знайдіть похідну функції порядку  $n$ :

$$1. y = \frac{\ln x}{x}, n = 6.$$

$$2. y = x \ln x, n = 5.$$

$$3. y = e^x x^2, n = 10.$$

$$4. y = \frac{e^x}{x}, n = 8.$$

$$5. y = e^x \sin x, n \in \mathbb{N}.$$

$$6. y = e^x \cos x, n \in \mathbb{N}.$$

7.  $y = e^x \operatorname{sh} x, n = 4.$

8.  $y = e^x \operatorname{ch} x, n \in 4.$

9.  $y = x^4 \operatorname{sh} x, n = 5.$

10.  $y = x^2 \operatorname{ch} x, n = 4.$

11.  $y = x^3 \ln x, n = 5.$

12.  $y = x^3 \ln(1 + x^2), n = 4.$

8. Знайдіть першу та другу похідну функції  $f$ , заданої параметрично:

1. 
$$\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 3t - t^2. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

4. 
$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

5. 
$$\begin{cases} x = \cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{t}, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

7. 
$$\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

8. 
$$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

9. Напишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції  $f$  в точці  $(x_0; f(x_0))$ :

1.  $f(x) = x^3, x_0 = 0.$

2.  $f(x) = x^{2/3}, x_0 = 0.$

3.  $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$

4.  $f(x) = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}.$

5.  $f(x) = \ln x, x_0 = 1.$

6.  $f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}.$

7. 
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} x_0 = \pi.$$

8. 
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} x_0 = \frac{1}{8}.$$

10. Знайдіть диференціали вказаного порядку:

1.  $y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, n = 2.$

2.  $y = x^{2/3}, n = 2.$

3.  $y = (x + 1)^3 (x - 1)^2, n = 2.$

4.  $y = \frac{e^x}{x}, n = 3.$

5.  $y = x^3, n \in \mathbb{N}.$

6.  $y = x e^{-x}, n \in \mathbb{N}.$

7.  $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}), n = 2.$

8.  $y = \ln(3x + 1), n = 2.$

### 2.1.11. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x + 1}$$

$$2. y = \frac{1}{x \operatorname{arctg} x + 1}.$$

$$3. y = \frac{1}{3 \operatorname{arcsin} x}.$$

$$4. y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$5. y = \frac{1 - x - x^2}{1 + x + x^2}.$$

$$6. y = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$7. y = \operatorname{ctg}^3 x.$$

$$8. y = \sin^2 x.$$

$$9. y = \operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{arccos} x.$$

$$10. y = \cos x \operatorname{ctg} x.$$

$$11. y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

$$12. y = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x.$$

$$13. y = \operatorname{arcctg}(1 - x).$$

$$14. y = \operatorname{arccos}^2 x.$$

$$15. y = \operatorname{arcsin} x^2.$$

$$16. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$17. y = \sin^3 x^2.$$

$$18. y = \cos^2(1 - x^3).$$

$$19. y = \operatorname{sh}^2(1 - 2\sqrt{x}).$$

$$20. y = \operatorname{ch}^3(1 - x^2).$$

$$21. y = e^{\cos^2 x}.$$

$$22. y = \operatorname{arcctg} \ln^2 x.$$

$$23. y = \operatorname{arctg}^2 \ln x.$$

$$24. y = \sqrt{\operatorname{tg}(1 - 3x^2)}.$$

$$25. y = e^{-\sin^2 \ln x}.$$

$$26. y = \ln^2 \ln x.$$

$$27. y = \ln^2 \ln \ln x.$$

$$28. y = \ln \operatorname{arcsin}^2 x.$$

$$29. y = e^{\sin^2 \operatorname{ctg}^3 \sqrt{-x}}.$$

$$30. y = \sin^2 e^{-\cos^3(1-2x)}.$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}.$$

$$2. y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}}.$$

$$4. y = \sqrt{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}.$$

$$5. y = \sqrt{1 + x\sqrt{x+3}}.$$

$$6. y = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$$

$$7. y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$8. y = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$9. y = 2^{x \operatorname{tg} x}.$$

$$10. y = e^{1/\ln x}.$$

11.  $y = 3^{\frac{1}{2x \operatorname{sh} x}}$ .

12.  $y = e^{-\frac{2}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}}$ .

13.  $y = \ln \sqrt{2 \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ .

14.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$ .

15.  $y = \sin \left( \sin \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \right)$ .

16.  $y = \cos \left( \cos \frac{1}{2x} \right)$ .

17.  $y = (1 - \operatorname{sh} \sqrt{x})^{11}$ .

18.  $y = \left( 2 - \operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^{10}$ .

19.  $y = 10^{-x \arcsin x}$ .

20.  $y = \frac{1}{2^{x^2 \operatorname{arctg} x}}$ .

21.  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}}$ .

22.  $y = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}}}$ .

23.  $y = e^{-x \ln^2 x}$ .

24.  $y = \left( 1 + \ln \frac{1}{x} \right)^5$ .

25.  $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}$ .

26.  $y = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x^2}$ .

27.  $y = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right), a > 0$ .

28.  $y = \sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0$ .

29.  $y = \ln \left( \sqrt{x^2 - a^2} - x \right), a > 0$ .

30.  $y = \log_x (x^2 + 4)$ .

3. Знайдіть похідну функції:

1.  $y = x^{\frac{x}{\ln x}}$ .

2.  $y = (x^2 + 1)^{2x}$ .

3.  $y = x^{\frac{\ln x}{x}}$ .

4.  $y = \operatorname{tg}^{\frac{x}{\ln x}} x$ .

5.  $y = x^{e^{\sqrt{x}}}$ .

6.  $y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}$ .

7.  $y = x^{2^x} 2^x$ .

8.  $y = 9^{x^9} x^9$ .

9.  $y = e^{x^2} \ln x \operatorname{ctg}^x x \sin x$ .

10.  $y = 2^{x^3} \sqrt{-x} \arcsin^x x \cos x$ .

11.  $y = \operatorname{arctg} x^{\operatorname{arctg} x}$ .

12.  $y = \operatorname{arcctg}^{\operatorname{arctg} x} x$ .

13.  $y = \operatorname{arccos} x^{\operatorname{arccos} x}$ .

14.  $y = \operatorname{arccos}^{\operatorname{arccos} x} x$ .

15.  $y = \operatorname{arcsin} x^{\operatorname{arcsin} x}$ .

16.  $y = \operatorname{arcsin}^{\operatorname{arcsin} x} x$ .

17.  $y = \ln^x x$ .

19.  $y = x^{\cos x \sin x}$ .

21.  $y = x^{-2x^2}$ .

23.  $y = (\operatorname{tg} x)^{-\operatorname{ctg} x}$ .

25.  $y = \cos x^{\sqrt{x}}$ .

27.  $y = x^{x^{\arcsin x}}$ .

29.  $y = \sin^x x \operatorname{arctg} x$ .

18.  $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x}$ .

20.  $y = x^{\cos \sin x}$ .

22.  $y = (\sqrt{x})^{-\sqrt{x}}$ .

24.  $y = \operatorname{tg} x^{-\operatorname{ctg} x}$ .

26.  $y = x^{-x^2}$ .

28.  $y = x^{-x^{\arccos x}}$ .

30.  $y = \sqrt{1-x} \operatorname{ch}^x x$ .

4. Знайдіть похідну функції:

1.  $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} - \frac{4}{(x-2)^5}$ .

2.  $y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}$ .

3.  $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg} 5x^3$ .

4.  $y = 2^{\operatorname{tg} x} \arcsin 7x^4$ .

5.  $y = \frac{e^{-\sin x}}{(x+5)^{10}}$ .

6.  $y = \frac{(x-4)^7}{e^{\operatorname{ctg} x}}$ .

7.  $y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\ln(5x+1)}$ .

8.  $y = \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$ .

9.  $y = \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}$ .

10.  $y = \frac{7 \log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$ .

11.  $y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}$ .

12.  $y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2 - 3x + 7}$ .

13.  $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} 3x^5$ .

14.  $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$ .

15.  $y = \frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$ .

16.  $y = \frac{5x^2 + 4x - 2}{e^{-x}}$ .

17.  $y = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\log_2(7x-5)}$ .

18.  $y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$ .

19.  $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2)$ .

20.  $y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3(x^2 + x + 4)$ .

21.  $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \frac{4}{(x-4)^4}$ .

22.  $y = \sqrt[4]{(x+4)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}$ .

$$23. y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 5x^4.$$

$$25. y = \frac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}.$$

$$27. y = \frac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}.$$

$$29. y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)}.$$

$$24. y = (2-x)^7 \cdot \arccos \sqrt{x}.$$

$$26. y = \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$28. y = \frac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}.$$

$$30. y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}.$$

5. Знайдіть похідну функції вказаного порядку  $n$  у вказаній точці:

$$1. f(x) = e^x \cos x, n = 2, x_0 = 0.$$

$$2. f(x) = e^{-x} \sin x, n = 2, x_0 = 0.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}, n = 2, x_0 = 0.$$

$$4. f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, n = 2, x_0 = 1.$$

$$5. f(x) = \frac{x}{3^x}, n = 4, x_0 = 0.$$

$$6. f(x) = \frac{2^x}{x}, n = 2, x_0 = 1.$$

$$7. f(x) = \frac{x^2}{1-x}, n = 2, x_0 = 0.$$

$$8. f(x) = \frac{x^2}{1+x}, n = 2, x_0 = 1.$$

$$9. f(x) = \frac{1}{1-x}, n = 4, x_0 = -1.$$

$$10. f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}, n = 2, x_0 = \pi.$$

$$11. f(x) = \arcsin x, n = 2, x_0 = 1/2.$$

$$12. f(x) = \operatorname{arctg} x, n = 2, x_0 = 1.$$

$$13. f(x) = \arccos x, n = 2, x_0 = 1.$$

$$14. f(x) = \frac{\ln x}{x}, n = 2, x_0 = 1.$$

$$15. f(x) = 2^{-x}, n = 3, x_0 = 0.$$

$$16. f(x) = \operatorname{sh} 2x, n = 2, x_0 = 0.$$

$$17. f(x) = xe^{-x^2}, n = 2, x_0 = 0.$$

$$18. f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x, n = 2, x_0 = 1.$$

$$19. f(x) = x \ln x, n = 4, x_0 = 1.$$

$$20. f(x) = x^2 e^{-2x}, n = 3, x_0 = 0.$$

$$21. f(x) = \operatorname{ch}(-x), n = 2, x_0 = 0.$$

$$22. f(x) = \operatorname{arctg} 1, n = 2, x_0 = 0.$$

$$23. f(x) = \operatorname{sh} 2x, n = 3, x_0 = 0.$$

$$24. f(x) = x \cos x, n = 2, x_0 = 0.$$

$$25. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, n = 2, x_0 = 0.$$

$$26. f(x) = \frac{e^{-x}}{x}, n = 4, x_0 = 1.$$

$$27. f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, n = 3, x_0 = 1.$$

$$28. f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, n = 2, x_0 = 1.$$

$$29. f(x) = \frac{x}{e^{3x}}, n = 3, x_0 = 0.$$

$$30. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}, n = 2, x_0 = 0.$$

## 2.2. Застосування похідної

### 2.2.1. Основні теореми диференціального числення. Правила Лопіталаля.

**Теорема 1 (Ферма) [3, 8-10].** Якщо функція  $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $c \in (a;b)$  приймає найбільше або найменше значення на цьому проміжку  $(a;b)$  і існує похідна  $f'(c)$ , то  $f'(c) = 0$ .

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = x$  приймає на замкненому проміжку  $[0;1]$  найбільше значення в точці  $c=1$ , але її похідна в цій точці не дорівнює нулеві. Тому для замкненого проміжку теорема Ферма не є справедливою.

**Наслідок 1.** Якщо виконуються умови теореми Ферма, то дотична до графіка функції  $f$  у точці  $(c; f(c))$  є паралельною осі абсцис.

**Теорема 2 (Ролля) [3, 8-10].** Нехай функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a;b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a;b)$ ; 3)  $f(b) = f(a)$ . Тоді  $(\exists c \in (a;b)) : f'(c) = 0$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = |x| - 3$  є неперервною на проміжку  $[-1;1]$ ,  $f(-1) = f(1) = -2$  і не існує такої точки  $c$ , що  $f'(c) = 0$ .

**Теорема 3 (Лагранжа) [3, 8-10].** Нехай функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a;b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a;b)$ . Тоді

$$(\exists c \in (a;b)) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

**Приклад 3.**  $\sin 2 - \sin 1 = \cos c$ ,  $c \in (1;2)$ .

**Приклад 4.** Якщо  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1)$ ,  $c \in (x_1; x_2)$ . Тому

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leq |x_2 - x_1|, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

**Наслідок 2.** Якщо виконуються умови теореми Лагранжа, то існує така точка  $c \in (a;b)$ , що дотична до графіка функції  $f$  у точці  $(c; f(c))$  є паралельною прямою, яка проходить через точки  $(a; f(a))$  і  $(b; f(b))$ .

**Теорема 4 (Коші) [3, 8-10].** Нехай функції  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) є неперервними на

проміжку  $[a;b]$ ; 2) мають похідні на проміжку  $(a;b)$ ; 3)  $(\forall x \in (a;b)) : \varphi'(x) \neq 0$ . Тоді

$$(\exists c \in (a;b)) : \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Теорема 5 (перше правило Лопіталя: невизначеність  $0/0$ ) [3, 8-10].** Нехай функції  $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на проміжку  $(a;b)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = 0$ ; 3)  $\varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$ ; 4) існує границя

(скінченна або нескінченна)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$ . Тоді  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ .

**Теорема 6 (друге правило Лопіталя: невизначеність  $\infty/\infty$ ) [3, 8-10].** Нехай функції  $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на  $(a;b)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \infty$ ; 3)  $\varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a;b)$ ; 4) існує границя

(скінченна або нескінченна)  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$ . Тоді  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ .

**Зауваження 1 [3, 8-10].** Ми сформулювали і довели правила Лопіталя для правої границі. Проте, вони залишаються справедливими з відомими змінами у формулюванні і для лівої границі, і для границі, а також для  $a = -\infty$ ,  $a = +\infty$  та  $a = \infty$ . Останні випадки можна звести до випадку  $a = 0$  шляхом розгляду функцій  $f_1(t) = f(1/t)$  і  $\varphi_1(t) = \varphi(1/t)$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1'(t)}{\varphi_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{\varphi'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Зауваження 2 [3, 8-10].** При застосуванні правил Лопіталя потрібно дивитись, чи виконуються відповідні умови, бо можна прийти, інколи, до неправильних висновків. Правила Лопіталя можна застосовувати і до інших невизначеностей ( $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і т.д.).

**Приклад 5.**  $\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$ .

**Приклад 6.**

$$\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} = \frac{1}{2}$ . В той же час

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)'}{(2 + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-\sin x} = 1.$$

Бачимо, що тут правило Лопіталя приводить до хибного результату. Це пов'язано з тим, що не виконується умова 2) теореми 1.

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1$ . Разом з цим,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} - \text{не існує і тому правила Лопіталя тут застосувати не}$$

можна.

**Приклад 9.**  $0 \cdot \infty : \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$ .

**Приклад 10 [3, 8-10].**

$$\begin{aligned} \infty - \infty : \lim_{x \rightarrow 1+} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 11.**  $0^0 : \lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \right) = 1$ .

**Приклад 12.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ .

**Приклад 13.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0$  для кожного  $a > 1$  і кожного  $\mu \in \mathbb{R}$ , бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1) \cdot \dots \cdot (\mu-n+1) x^{\mu-n}}{a^x \ln^n a} = 0,$$

якщо  $n \geq \mu$ .

**Приклад 14.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$  для кожного  $\varepsilon > 0$ , бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

**Приклад 15.** При використанні правил Лопітала до знаходження границь доцільно знаходити границі тих співмножників (але не доданків) в чисельнику та знаменнику, які мають скінченні і ненульові границі без правил Лопітала. Зокрема,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)\sqrt{2+x^2}}{(1+3\sqrt{\cos x})\sin^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\sin^2 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2}}{1+3\sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4 \sin 2x \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**Приклад 16 [3, 8-10].**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{(1+\sqrt{x})\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{-\sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\ln x}{-\sin^2 \sqrt{x}}} = \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \sin^2 \sqrt{x} \ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} \ln x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} = \\ &= \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

**2.2.2. Формула Тейлора для довільної функції.** Багаточленом Тейлора степеня  $n$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  називається

багаточлен  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ . Нехай  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Тоді  $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$  або [3, 8-10]

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x). \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою Тейлора в точці  $a \in \mathbb{R}$  функції  $f$ , а  $r_n(x)$  – додатковим членом формули Тейлора. Якщо  $a=0$ , то формула

Тейлора (1) приймає вигляд  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)$ .

Останню формулу інколи називають формулою Маклорена. Що являє собою  $r_n(x)$ ? Якщо  $f$  – це багаточлен степеня  $n$ , то  $r_n(x) = 0$  для кожного  $x \in \mathbb{R}$ . В загальному випадку,  $r_n(x)$  не обов'язково дорівнює нулеві.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо для деякого  $h > 0$  на проміжку  $[a-h; a+h]$  функція  $f$  має похідні до порядку  $n+1$  включно, то  $r_n(x)$  можна подати у вигляді Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (2)$$

де  $x \in [a-h; a+h]$  і  $0 < \theta < 1$ .

Формула (1), додатковий член якої записаний у формі (2), називається формулою Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа.

Якщо  $a = 0$ , то формула (2) приймає вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо виконуються умови теореми 1, то додатковий член формули Тейлора можна записати у вигляді Коші

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!} (1-\theta)^n (x-a)^{n+1}, \quad (4)$$

де  $x \in [a-h; a+h]$  і  $0 < \theta < 1$ .

Формула (1), в якій  $r_n(x)$  записаний у формі (4), називається формулою Тейлора з додатковим членом у формі Коші.

**Теорема 3 [3, 8-10].** Якщо функція  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  має похідні до порядку  $n$  включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі Пеано:  $r_n(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$ , де  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow a$ .

**Наслідок 1 [3, 8-10].** Якщо функція  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  має похідні до порядку  $n+1$  включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі:  $r_n(x) = \beta(x)(x-a)^{n+1}$ , де  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, обмежена в деякому проколеному околі точки  $a$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то  $f^{(k)}(x) = e^x$  і  $f^{(k)}(0) = 1$ . Тому

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x).$$

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = \sin x$ , то  $f^{(m)}(x) = \sin(x + m\pi/2)$  і

$$f^{(m)}(0) = \sin(m\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k + 1. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x).$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то  $f^{(m)}(x) = \cos(x + m\pi/2)$  і

$$f^{(m)}(0) = \cos(m\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k + 1, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k. \end{cases}$$

Тому

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x).$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$f^{(k)}(x) = (1+x)^{\alpha-n} \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1) \quad \text{і} \quad f^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1). \quad \text{Тому}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k!} x^k + r_n(x).$$

$$\text{Тут } \prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1.$$

$$\text{Приклад 5. } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + r_n(x).$$

**2.2.3. Умови сталості функції. Зростання та спадання функції на проміжку.** Функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою на множині  $H$ , якщо  $(\exists c)(\forall x \in H): f(x) = c$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Для того щоб функція  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  була сталою на проміжку  $\Delta$  (відкритому, замкненому, напіввідкритому), необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною на ньому і  $f'(x) = 0$  у всіх внутрішніх точках проміжку  $\Delta$ .

$$\text{Приклад 1 [3, 8-10]. } (\forall x \in (-1; +\infty)): \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Справді, позначимо ліву частину цієї рівності через  $f(x)$ . Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 0$$

для всіх  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ . Але  $f(1) = \pi/4$ . Тому  
 $(\forall x \in (-1; +\infty)) : f(x) = \pi/4$ . Зауваживши, що  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$ , маємо  $(\forall x \in (-\infty; -1)) : f(x) = -3\pi/4$ .

**Теорема 2 [3, 8-10].** Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) > 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , то функція  $f$  є зростаючою на  $\Delta$ . Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) < 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , то функція  $f$  є спадною на  $\Delta$ .

**Теорема 3 [3, 8-10].** Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) > 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція  $f$  є зростаючою на  $\Delta$ . Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) < 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція  $f$  є спадною на  $\Delta$ .

В більшості випадків досліджувати функцію на монотонність можна в наступній послідовності [3, 8-10]: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти ті точки з області визначення, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує, та точки, які є кінцями проміжків, що входять в область визначення функції; 3) користуючись методом проміжків знайти знак похідної на кожному з проміжків, утворених вказаними точками; 4) скористатись теоремами 2 та 3 і означенням, якщо потрібно, монотонної функції. В деяких випадках дослідження доцільніше проводити тільки на основі означення.

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = (1-x^2)^3$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = -6x(1-x^2)^2$ . Тоді  $6x(1-x^2)^2 = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$  і  $x_5 = +\infty$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-2) = 108 > 0$ ,  $f'(-1/2) = 27/16 > 0$ ,  $f'(1/2) = -27/16 < 0$  і  $f'(2) = -108 < 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-\infty; -1)$  і

$x \in (-1; 0)$  та  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (0; 1)$  і  $x \in (1; +\infty)$ . Але в точках  $x_2 = -1$  і  $x_4 = 1$  наша функція є неперервною. Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжку  $(-\infty; 0)$  і є спадною на проміжку  $(0; +\infty)$ . Вона також є зростаючою на проміжку  $(-\infty; 0]$  і є спадною на проміжку  $[0; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = x^2 - 2\ln x$ , то  $D(f) = (0; +\infty)$  і  $f'(x) = 2x - 2/x$ . Тоді  $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  і  $x_3 = +\infty$  (областю визначення розглядуваної функції  $f$  є проміжок  $(0; +\infty)$  і тому точки  $-\infty$  та  $-1$  не розглядаємо). Таким чином, розглядаємо два проміжки  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(1/2) = -3 < 0$  і  $f'(2) = 3 > 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (0; 1)$  і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (1; +\infty)$ . Отже, розглядувана функція є спадною на проміжку  $(0; 1)$  і зростаючою на проміжку  $(1; +\infty)$ . Вона також є спадною на проміжку  $(0; 1]$  і є зростаючою на проміжку  $[1; +\infty)$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ , то  $D(f) = [-1; 1]$  і  $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ . Тоді  $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1/\sqrt{2}$ ,  $x_3 = 1/\sqrt{2}$  і  $x_4 = 1$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-1; -1/\sqrt{2})$ ,  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$  і  $(1/\sqrt{2}; 1)$ . Оскільки  $f'(-3/4) < 0$ ,  $f'(0) > 0$  і  $f'(3/4) < 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (-1; -1/\sqrt{2})$  і  $x \in (1/\sqrt{2}; 1)$ , а  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Отже, розглядувана функція є спадною на проміжках  $(-1; -1/\sqrt{2})$  та  $(1/\sqrt{2}; 1)$  (не можна повторювати типову помилку, говорячи, що вона є спадною на множині  $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$ , бо  $f(-3/4) < f(3/4)$ !) і є зростаючою на проміжку  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Вона також є спадною на

проміжках  $[-1; -1/\sqrt{2}]$  та  $[1/\sqrt{2}; 1]$  і є зростаючою на проміжку  $[-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}]$ .

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = x + 1/x$ , то  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  і  $f'(x) = 1 - 1/x^2$ . Тоді  $f'(x) = 0$ , якщо  $1 - 1/x^2 = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$  і  $x_5 = +\infty$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-2) > 0$ ,  $f'(-1/2) < 0$ ,  $f'(1/2) < 0$  і  $f'(2) > 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (-1; 0)$  та  $x \in (0; 1)$  і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-\infty; -1)$  та  $x \in (1; +\infty)$ . Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $(-1; 0)$  та  $(0; 1)$ . Вона також є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -1]$  та  $[1; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $[-1; 0)$  та  $(0; 1]$ . Проте не є спадною на проміжках  $[-1; 0]$  та  $[0; 1]$ , бо  $0 \notin D(f)$ . В даному випадку можна говорити, що функція є зростаючою на множині  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$  і є спадною на множині  $[-1; 0) \cup (0; 1]$ , бо  $f(x) < 0$ , якщо  $x < 0$  і  $f(x) > 0$ , якщо  $x > 0$ .

**2.2.4. Екстремум функції. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку.** Точка  $x_0$  називається точкою максимуму функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо [3, 8-10]

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \leq f(x_0).$$

Точка  $x_0$  називається точкою мінімуму функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \geq f(x_0).$$

Точки мінімуму і максимуму мають спільну назву – точки екстремуму. Значення функції в точці максимуму називається максимумом функції, а значення функції в точці мінімуму називається мінімумом функції. Мінімуми і максимуми мають спільну назву – екстремуми функції. Можна сказати, що екстремум функції – це значення функції в точці екстремуму. Наприклад, для функції  $f$ , графік якої зображений на рис. 1, точки  $x_1$  і  $x_3$  є точками максимуму, точка  $x_2$  є точкою мінімуму, точки  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  є точками екстремуму, числа  $y_1$  і  $y_3$  є максимумами, число  $y_2$  є мінімумом, а числа  $y_1$ ,  $y_2$  і  $y_3$  є

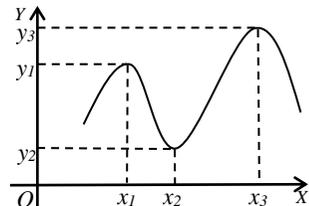


Рис. 1

екстремумами. Деколи говорячи про екстремум, мінімум чи максимум функції додають слово локальний, тобто говорять локальний максимум, локальний мінімум і т.д. Слово локальний означає місцевий і підкреслює той факт, що, наприклад, локальний максимум не є обов'язково найбільшим значенням функції, а тільки є найбільшим в досить малому  $\varepsilon$ -околі відповідної точки.

**Теорема 1 (необхідна умова екстремуму) [3, 8-10].** *Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в точці  $x_0$  екстремум, то  $f'(x_0)$  не існує або  $f'(x_0) = 0$ .*

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулеві називаються стаціонарними точками функції. Точки з області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує називаються критичними точками або точками підозрілими на екстремум. Теорема 1 показує, що екстремум функція може мати лише в критичних точках. Проте не в кожній критичній точці функція має екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум спочатку потрібно знайти критичні точки, а потім перевірити, чи є в кожній критичній точці екстремум. Цю перевірку можна здійснювати використовуючи достатні умови екстремуму або виходячи з означення мінімуму і максимуму шляхом розгляду різниці  $f(x) - f(x_0)$ , де  $x_0$  – критична точка.

**Приклад 1.** *Якщо  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ , то  $D(f) = (0; +\infty)$  і  $f'(x) = x - \frac{1}{x}$ . Тоді  $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Точка  $x_1 = 1$  є стаціонарною точкою і є критичною точкою. Інших критичних точок ця функція не має, бо  $-1 \notin D(f)$  і  $0 \notin D(f)$ .*

**Приклад 2.** *Якщо  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ . Тоді  $f'(x) \neq 0$  і  $f'(x)$  не існує в точці 0. Ця функція не має стаціонарних точок. Точка  $x_1 = 0$  є її єдиною критичною точкою.*

**Приклад 3.** *Точка  $x_0 = 0$  є стаціонарною точкою функції  $f(x) = x^3$ , але екстремуму в цій точці ця функція не має.*

**Теорема 2 (перша достатня умова екстремуму) [3, 8-10].** *Нехай функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $x_0$  і за деякого  $\delta > 0$  має похідну на проміжку  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , за винятком, можливо, точки  $x_0$ . Тоді: 1) якщо  $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)): f'(x) > 0$  і  $(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)): f'(x) < 0$ , то точка  $x_0$  є точкою максимуму; 2) якщо  $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)): f'(x) < 0$  і*

$(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)) : f'(x) > 0$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму; 3) якщо на проміжках  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$  функція  $f'$  приймає значення однакового знаку (+ або -), то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = x^3 - 12x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = 3x^2 - 12$ . Точки  $x_1 = -2$  і  $x_2 = 2$  є стаціонарними точками. Тому розглядаємо проміжки  $(-\infty; -2)$ ,  $(-2; 2)$  і  $(2; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-3) > 0$ ,  $f'(0) < 0$  і  $f'(3) > 0$ , то точка  $x_1 = -2$  є точкою максимуму і  $f(-2) = 16$  – максимум, а точка  $x_2 = 2$  є точкою мінімуму і  $f(2) = -16$  – мінімум.

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = x^{1/3}$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ . Стаціонарних точок ця функція не має. Точка  $x_1 = 0$  є її єдиною критичною точкою. Тому розглядаємо проміжки  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-1) > 0$  і  $f'(1) > 0$ , то точка  $x_1 = 0$  не є точкою екстремуму і екстремумів функція не має.

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = x^3 + x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $f'(x)$  існує всюди і  $f'(x) \neq 0$ . Тому екстремумів функція не має.

**Теорема 3 (друга достатня умова екстремуму) [3, 8-10].** Нехай точка  $x_0$  є стаціонарною точкою функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f''(x_0)$  існує. Тоді: 1) якщо  $f''(x_0) < 0$ , то точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f$ ; 2) якщо  $f''(x_0) > 0$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f$ .

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = x^3 - 3x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , точки  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$  є стаціонарними,  $f''(x) = 6x$ ,  $f''(-1) = -6$  і  $f''(1) = 6$ . Тому точка  $x_1 = -1$  є точкою максимуму і  $f(-1) = 2$  – максимум, а точка  $x_2 = 1$  є точкою мінімуму і  $f(1) = -2$  – мінімум функції.

**Теорема 4 (третя достатня умова екстремуму) [3, 8-10].** Нехай в точці  $x_0$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має всі похідні до порядку  $n \in \mathbb{N}$  включно і  $f^{(m)}(x_0) = 0$ ,  $m \in \overline{0; n-1}$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Тоді: 1) якщо  $n$  – парне число, то у випадку  $f^{(n)}(x_0) < 0$  точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f$ , а у випадку  $f^{(n)}(x_0) > 0$  точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f$ ; 2) якщо  $n$  – непарне число, то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f$ .

**Приклад 8.** Якщо  $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x + 2$ , то  $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ ,  
 $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$ ,  $f^{(3)}(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$ ,  $f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ ,  
 $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$  і  $f^{(4)}(0) = 2$ . Тому функція  
 $f(x) = \operatorname{sh} x - \sin x + 2$  має в точці  $x_0 = 0$  мінімум і  $f(0) = 2$ .

За другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на замкненому проміжку  $[a; b]$  функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  приймає на цьому проміжку найбільше і найменше значення. Проте, ця теорема не вказує способу їх знаходження. Найбільше або найменше значення на  $[a; b]$  функція  $f$  може приймати або в середині проміжку або на кінцях проміжку. Якщо найбільше або найменше значення на  $[a; b]$  функція  $f$  приймає у внутрішній точці проміжку, то ця точка є точкою локального екстремуму. Звідси випливає, що найбільше і найменше значення на проміжку  $[a; b]$  функції  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на  $[a; b]$  можна знаходити так [3, 8-10]: 1) знайти всі критичні точки функції  $f$ , які належать  $(a; b)$ ; 2) знайти значення функції в цих критичних точках та на кінцях проміжку і серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Найбільше значення функції  $f$  на  $[a; b]$  називається глобальним максимумом  $f$  на  $[a; b]$  і позначається  $M = \max\{f(x): x \in [a; b]\}$  або  $M = \max_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ , а найменше значення – глобальним мінімумом на  $[a; b]$  і позначається  $m = \min\{f(x): x \in [a; b]\}$  або  $m = \min_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ .

Неперервна на відкритому проміжку  $(a; b)$  функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  не обов'язково приймає на  $(a; b)$  найбільше і найменше значення. Проте, якщо приймає, то відповідна точка є точкою локального екстремуму.

**Приклад 9.** Знайдемо найбільше значення функції  
 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$  на проміжку  $[0; 3]$ . Оскільки  $f'(x) = x^2 + 3x - 4$ ,  
 точки  $x_1 = -4$  і  $x_2 = 1$  є стаціонарними точками функції,  $x_1 \notin [0; 3]$ ,  $f(0) = 0$ ,  
 $f(1) = -13/6$ ,  $f(3) = 21/2$  і  $M = \max\{f(x): x \in [0; 3]\} = f(3) = 21/2$ .

**Приклад 10.** Знайдемо множину значень функції  $f(x) = xe^{-x}$ .  
 Оскільки  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ , точка  $x_1 = 1$  є єдиною точкою максимуму функції,  $f(1) = 1/e$ , множиною значень функції на проміжках

$(-\infty;1)$  та  $(1;+\infty)$  є відповідно проміжки  $(-\infty;1/e)$  і  $(0;1/e)$ , то  $E(f) = (-\infty;1/e)$ .

**2.2.5. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину.**

Функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] опуклою на проміжку  $[a;b]$ , якщо  $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$  для будь-яких  $x_1 \in [a;b]$ ,  $x_2 \in [a;b]$  і  $\alpha \in [0;1]$ .

**Теорема 1 [3, 8-10].** Для того щоб функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $[a;b]$ , необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

для будь-яких  $x_1, x$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ .

Теорема 1 дає можливість геометрично інтерпретувати опуклі функції. Власне, через точки  $A_1(x_1; f(x_1))$  і  $A_2(x_2; f(x_2))$ , де  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , проведемо пряму. Ця пряма задається рівнянням

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

тобто

$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Бачимо, що функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $[a;b]$  тоді і тільки тоді, коли для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , її графік на проміжку  $[x_1; x_2]$  лежить не вище прямої  $A_1A_2$ .

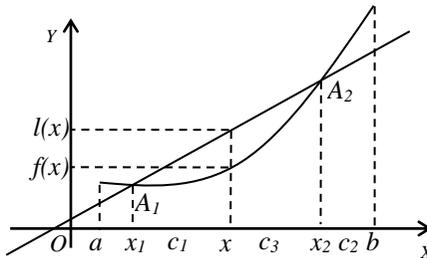


Рис. 1

Функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] опуклою на відкритому проміжку  $(a;b)$ , якщо вона є опуклою на кожному замкненому проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a;b)$ . Функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] строго опуклою на проміжку  $[a;b]$ , якщо

$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$  для будь-яких  $x_1 \in [a; b]$ ,  $x_2 \in [a; b]$  і  $\alpha \in [0; 1]$ .

**Теорема 2 (достатня умова опуклості) [3, 8-10].** Якщо  $(\forall x \in (a; b)): f''(x) \geq 0$ , то функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ .

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$  і  $(\forall x \in (a; b)): f''(x) \geq 0$ , то функція  $f$  є опуклою на  $[a; b]$ . Якщо  $(\forall x \in (a; b)): f''(x) > 0$ , то функція  $f$  є строго опуклою на  $(a; b)$ .

Функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається [3, 8-10] вгнутою на проміжку  $[a; b]$ , якщо  $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$  для будь-яких  $x_1 \in [a; b]$ ,  $x_2 \in [a; b]$  і  $\alpha \in [0; 1]$ . Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається вгнутою на  $(a; b)$ , якщо вона є вгнутою на кожному проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ .

**Теорема 3 (достатня умова вгнутості) [3, 8-10].** Якщо  $(\forall x \in (a; b)): f''(x) \leq 0$ , то функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є вгнутою на проміжку  $(a; b)$ .

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = e^x$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , бо  $f''(x) = e^x$  і  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \ln x$  є вгнутою на проміжку  $(0; +\infty)$ , бо  $f''(x) = -1/x^2$  і  $f''(x) < 0$  для всіх  $x \in (0; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = x$  є вгнутою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і опуклою на цьому проміжку, бо  $f''(x) = 0$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = x^3$  є опуклою на проміжку  $[0; +\infty)$  і вгнутою на проміжку  $(-\infty; 0]$ , бо  $f''(x) = 6x$  і  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (0; +\infty)$  і  $f''(x) < 0$  для всіх  $x \in (-\infty; 0)$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = x^{2/3}$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , вгнутою на кожному з проміжків  $(-\infty; 0]$  і  $[0; +\infty)$ , не є вгнутою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і не має похідної в точці  $x_0 = 0$ .

Точка  $x_0 \in (a; b)$  називається [3, 8-10] точкою перегину функції  $f$ , якщо вона є неперервною в цій точці і для деякого  $\delta > 0$  на проміжку  $[x_0 - \delta; x_0]$  є вгнутою, а на проміжку  $[x_0; x_0 + \delta]$  є опуклою або навпаки.

Якщо точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то точка  $(x_0; f(x_0))$  називається точкою перегину графіка функції  $f$ .

**Теорема 4 [3, 8-10].** Якщо функція  $f$  має на проміжку  $(a; b)$  другу похідну, функція  $f''$  є неперервною в точці  $x_0$  і точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

**Теорема 5 [3, 8-10].** Якщо точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то  $f''(x_0) = 0$  або  $f''(x_0)$  не існує.

Таким чином, за виконання відповідних умов точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості функції можна знаходити наступним чином: 1) знайти точки  $x_k$ , в яких друга похідна функції дорівнює нулеві, або не існує, або є кінцями проміжків визначення; 2) розглянути проміжки  $(x_k; x_{k+1})$ , які належать області визначення функції і знайти знак другої похідної на кожному з них; 3) користуючись означеннями та наведеними вище теоремами знайти проміжки опуклості, проміжки вгнутості та точки перегину.

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = x^3$ , то  $f'(x) = 3x^2$  і  $f''(x) = 6x$ , якщо  $x = 0$ . Тому маємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = 0$  і  $x_3 = +\infty$  та проміжки  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . При цьому,  $f''(-1) = -6 < 0$  і  $f''(1) = 6 > 0$ . Отже, розглядувана функція є вгнутою на проміжку  $(-\infty; 0)$ , опуклою на проміжку  $(0; +\infty)$  і точка  $x_2 = 0$  є точкою її перегину.

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то  $f'(x) = 2 \sin x / \cos^3 x$ ,  $f''(x) = 0$  в точках  $x_k = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  і  $f''(x)$  не існує в точках  $x_k = \pi k + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тому отримуємо проміжки,  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  та  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . На кожному з проміжків  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$  друга похідна є від'ємною, а на кожному з проміжків  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$  друга похідна є додатною. Тому проміжки  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є проміжками вгнутості, проміжки  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є проміжками опуклості, а точки  $x_k = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є точками перегину.

**Приклад 8.** Якщо  $f(x) = e^{x^2}$ , то  $f'(x) = 2e^{x^2}x$  і  $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$  і  $f''(x) \neq 0$ . Тому маємо дві точки  $x_1 = -\infty$  і  $x_2 = +\infty$  та проміжок  $(-\infty; +\infty)$ . Оскільки  $f''(0) = 2 > 0$ , то на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  функція є опуклою, а точок перегину нема.

**2.2.6. Асимптоти графіка функції.** Похилою асимптотою функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $+\infty$  або при  $x \rightarrow +\infty$  називається [3, 8-10] така пряма  $y = kx + b$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ . Число  $\Delta = |f(x) - kx - b|$  – це відстань між точками графіків функцій  $y = kx + b$  і  $y = f(x)$  з однаковою абсцисою, рівною  $x$ .

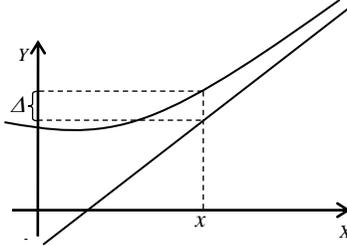


Рис. 1.

**Теорема 1 [3, 8-10].** Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \quad (2)$$

то пряма  $y = kx + b$  є похилою асимптотою функції  $f$  в  $+\infty$ . Якщо ж принаймні одна з границь (1) або (2) не існує або рівна  $\infty$ , то похилої асимптоти в  $+\infty$  функція  $f$  не має.

Аналогічно визначається асимптота в  $-\infty$  і в  $\infty$ .

Вертикальною асимптотою функції  $f$  називається така пряма  $x = x_0$ , що принаймні одна з границь  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  рівна  $\infty$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x + \arctg x$ , то

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Тому прями  $y = x + \pi/2$  і  $y = x - \pi/2$  є похилими асимптотами функції  $f$  в  $+\infty$  і в  $-\infty$  відповідно. Похилої асимптоти в  $\infty$  ця функція не має.

Не має вона також вертикальних асимптот.

**Приклад 2.** Нехай  $f(x) = 1/x$ . Тоді

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0) = 0.$$

Тому пряма  $y=0$  є похилою асимптотою функції  $f$  в  $\infty$ . Крім цього,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . Тому пряма  $x=0$  є вертикальною асимптотою цієї функції.

**2.2.7. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.** Дослідження функцій і побудову їх графіків можна здійснювати за наступною схемою [3, 8-10]: знайти область визначення, множини точок неперервності і точок розриву; знайти координати точок перетину з осями координат; дослідити функцію на парність і періодичність; знайти асимптоти функцій; знайти проміжки монотонності, точки екстремуму і екстремуми; знайти проміжки опуклості і точки перегину графіка функції; зобразити графік функції.

**Приклад 1 [3, 8-10].** Дослідимо функцію  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  і

зобразимо її графік. 1. Оскільки задана функція є раціональною, то вона невизначена в тих точках, де знаменник дорівнює нулеві:  $x^2 - 1 = 0$ . Отже, областю визначення заданої функції є множина  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ . Функція є неперервною на області визначення. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

то точки  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$  є точками розриву другого роду. 2. Знаходимо асимптоти. Оскільки

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

то пряма  $y = x$  є похилою асимптотою. Прямі  $x = -1$  і  $x = 1$  є вертикальними асимптотами. 3. Функція є неперіодичною і непарною, бо

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

4. Знайдемо проміжки монотонності. Оскільки

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

для  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ , то функція є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $(-\sqrt{3}; -1)$ ,  $(-1; 1)$  і  $(1; \sqrt{3})$ . Знайдемо точки екстремуму і екстремуми. Розв'язавши рівняння

$$f'(x) = 0, \text{ тобто рівняння } \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0, \text{ знаходимо, що точки}$$

$x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 0$  і  $x_3 = \sqrt{3}$  є підозрілими на екстремум. Оскільки похідна в точці  $x_1$  змінює знак з "+" на "-", в точці  $x_2$  не змінює знак, а в точці  $x_3$  змінює знак з "-" на "+", то точка  $x_1$  є точкою максимуму, точка  $x_2$  не є точкою екстремуму, а точка  $x_3$  є точкою мінімуму і

$$y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y_{\max} = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. Знайдемо проміжки опуклості і точки перегину. Оскільки

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(4x^3 - 6x) - 2(x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0$$

для  $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ , то функція є опуклою на проміжках  $(-1; 0)$ ,  $(1; +\infty)$  і вгнутою на проміжках  $(-\infty; -1)$ ,  $(0; 1)$ . Оскільки єдиним коренем рівняння  $f''(x) = 0$  є  $x = 0$  і в точці  $x = 0$  друга похідна змінює знак з "+" на "-", то ця точка є точкою перегину функції, а точка  $(0; 0)$  є точкою перегину графіка функції. 6. Точка  $(0; 0)$  є точкою перетину графіка функції з осями координат. Дослідимо поведінку функції в точках  $-\infty$  і  $+\infty$ . Маємо

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

7. Зображуємо графік функції.

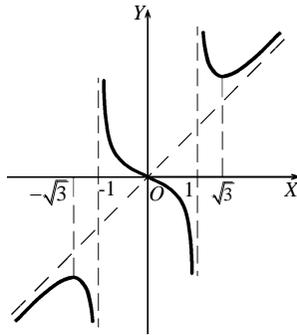


Рис. 1

### 2.2.8. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення точок мінімуму, максимуму і екстремуму.
2. Сформулюйте означення мінімуму, максимуму і екстремуму.
3. Сформулюйте означення стаціонарних і критичних точок.
4. Сформулюйте необхідну умову екстремуму.
5. Сформулюйте означення опуклої функції.
6. Сформулюйте означення вгнутої функції.
7. Сформулюйте означення точки перегину.
8. Сформулюйте означення похилої і вертикальної асимптот.
9. Наведіть приклад функції такої, що її асимптота перетинає її графік у двох точках.
10. Сформулюйте теорему Ферма.
11. Чи можна в теоремі Ферма проміжок  $(a;b)$  замінити проміжком:
  1.  $[a;b]$ , 2.  $(a;b]$ , 3.  $[a;b)$  ?
12. Сформулюйте теорему Ролля.
13. Сформулюйте теорему Лагранжа.
14. Сформулюйте теорему Коші про середнє.
15. Сформулюйте перше правило Лопітала.
16. Сформулюйте друге правило Лопітала.
17. Сформулюйте теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Коші і Лагранжа.
18. Сформулюйте теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Пеано.
19. Сформулюйте теорему про умови постійності функції.
20. Сформулюйте теорему про умови монотонності функції.
21. Наведіть приклад зростаючої на  $(-\infty; +\infty)$  функції  $f$ , яка не має похідної в трьох точках.
22. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.

23. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах другої похідної.
24. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах  $n$ -ої похідної.
25. Сформулюйте теорему про достатні умови опуклості функції.
26. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є опуклою на кожному і проміжків  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ , але не є опуклою на  $(-\infty; +\infty)$ .
27. Сформулюйте теорему про асимптоти функції.
28. Наведіть приклад функції, асимптота якої перетинає її графік.

### 2.2.9. Вправи і задачі.

1. Знайдіть границю за правилом Лопіталя:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{1/x^2}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$ .
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$ .
8.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$ .
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$ .
10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin 2x)^{\operatorname{tg} 2x}$ .
11.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(1-x^4) - 5(1-x^5)}{(1-x^4)(1-x^5)}$ .
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$ .
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left( \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{x} \right)}{\ln(1+x)}$ .
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \ln x$ .
15.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)^x$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 + 1} \right)^{1/x}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}}{x^8}$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^2}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^x}{3^x - 9}$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 4^x}{2^x - 16}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}$ .

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} \right).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^2(1+x)}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right) \sqrt{x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

2. Знайдіть проміжки монотонності функції:

$$1. f(x) = 2 - 3x + x^3.$$

$$2. f(x) = (x^2 - 1)^{3/2}.$$

$$3. f(x) = xe^{-2x}.$$

$$4. f(x) = (2-x)(x+1)^2.$$

$$5. f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

$$6. f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

$$7. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

$$8. f(x) = x^3 + 6x - 7.$$

$$9. f(x) = x + \cos x.$$

$$10. f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

$$11. f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$12. f(x) = x^4 - 2x^2 - 8.$$

$$13. f(x) = 2x - \ln x.$$

$$14. f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7.$$

$$15. f(x) = (1+1/x)^x.$$

$$16. f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

$$17. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$18. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$19. f(x) = x^2 - 10 \ln x.$$

$$20. f(x) = \exp(-3x).$$

$$21. f(x) = \exp(x)/x.$$

$$22. f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2.$$

$$23. f(x) = 8x^3 - x^4.$$

$$24. f(x) = xe^x.$$

$$25. f(x) = x^3 - 3x - \ln x.$$

$$26. f(x) = 2e^{2x} - 4e^x.$$

$$27. f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

$$28. f(x) = x^2 + 1/x^2.$$

$$29. f(x) = x + \ln(x^2 - 4).$$

$$30. f(x) = \frac{x^3}{9-x^3}.$$

3. Знайдіть екстремуми функції:

1.  $f(x) = 6x - x^3$ .

2.  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ .

3.  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ .

4.  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$ .

5.  $f(x) = xe^x$ .

6.  $f(x) = x^2e^x$ .

7.  $f(x) = x^3e^{-4x}$ .

8.  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ .

9.  $f(x) = \sin 2x - x$ .

10.  $f(x) = \ln \sin x$ .

11.  $f(x) = e^x - 2x - e^{-x}$ .

12.  $f(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ .

13.  $f(x) = \frac{2^x}{x}$ .

14.  $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$ .

15.  $f(x) = x^2\sqrt{e}$ .

16.  $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ .

17.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$ .

18.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ .

19.  $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ .

20.  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ .

21.  $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ .

22.  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ .

23.  $f(x) = x^x$ .

24.  $f(x) = x + \sin x$ .

25.  $f(x) = (x^2 - 3)\ln x - \frac{3}{2}x^2$ .

26.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

27.  $f(x) = (1+x)^2(x-2)$ .

28.  $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$ .

29.  $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ .

30.  $f(x) = \exp(\sqrt[3]{x})$ .

4. Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції:

1.  $f(x) = e^{-x} + x^2$ .

2.  $f(x) = e^x + x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = x^4 - 12$ .

5.  $f(x) = x^x$ .

6.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

7.  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

8.  $f(x) = e^{-x^2}$ .

9.  $f(x) = \begin{cases} -e^x + \frac{4}{3}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{3}e^x, & x > 0. \end{cases}$

10.  $f(x) = 1 + |x^2 - 4|$ .

$$11. \begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = te^t. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \frac{t^2}{4(1-t)}, \\ y = \frac{t^3}{8(1-t)}. \end{cases}$$

5. Знайдіть асимптоти функції:

$$1. f(x) = \frac{x^4}{4(x-2)}.$$

$$2. f(x) = 3x - \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$3. f(x) = \frac{2x^2}{x-1}.$$

$$4. f(x) = \frac{3}{x^2 - x}.$$

$$5. f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}.$$

$$6. f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+4)}.$$

$$7. f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$9. f(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)(x^2-1)}.$$

$$10. f(x) = xe^{-1/x}.$$

$$11. f(x) = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$12. f(x) = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x^3+3}}{x}.$$

$$13. f(x) = 2x + 1 - \frac{\sin 3x}{x^2 + 1}.$$

$$14. f(x) = x \arctg x.$$

$$15. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x.$$

$$16. f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

$$17. f(x) = x^2 e^{-x}.$$

$$18. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

$$19. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$$

$$20. f(x) = \frac{x}{2x-1} + 2x.$$

$$21. f(x) = 2x + \frac{\cos x}{x}.$$

$$22. f(x) = 2x + \frac{\sin^2 x}{x}.$$

$$23. f(x) = 2x + \sin x.$$

$$24. f(x) = -x - \cos x.$$

$$25. f(x) = x + \arctg^2 x.$$

$$26. f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x.$$

$$27. f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$28. f(x) = \frac{1 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}.$$

$$29. f(x) = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$30. f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

6. Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік:

$$1. f(x) = e^{2-x^2}.$$

$$2. f(x) = xe^x.$$

$$3. f(x) = (4e^{x^2} - 1)e^{-x}.$$

$$4. f(x) = xe^{1/x}.$$

$$5. f(x) = (x+2)e^{1-x}.$$

$$6. f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}.$$

$$7. f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

$$8. f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$9. y = x + \frac{1}{x+1}.$$

$$10. f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}.$$

$$11. f(x) = x - \ln(1+x^2).$$

$$12. f(x) = -x \ln^2 x.$$

$$13. f(x) = x \sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

$$14. f(x) = x + \ln(x^2 - 4).$$

$$15. f(x) = x - \ln(x^2 - 1).$$

$$16. y = \ln \frac{x+6}{x} - 1.$$

$$17. f(x) = (2+x)(x+1)^{-2}.$$

$$18. f(x) = x \ln^2 x.$$

$$19. f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x-2}.$$

$$20. f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

$$21. f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

$$22. f(x) = \frac{x^3}{9-x^3}.$$

$$23. f(x) = \frac{4x}{4+x^2}.$$

$$24. f(x) = \ln(x^2 - 2x + 6).$$

$$25. f(x) = \ln(4-x^2).$$

$$26. f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}.$$

$$27. f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4.$$

$$28. f(x) = e^{-1/x^2}.$$

$$29. f(x) = \frac{e^x}{16-x^2}.$$

$$30. f(x) = \arctg \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

### 2.2.10. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть границю за правилом Лопітала:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right).$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\ln x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^2} - 1).$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4}{1-x^4} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x - 1}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\sin^2 x}.$$

2. Знайдіть екстремуми функції:

$$1. f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

$$2. f(x) = (x+3)^3(x+2)^{-2}.$$

3.  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ .
4.  $f(x) = 3x^3 - 6x$ .
5.  $f(x) = (1-x)^3$ .
6.  $f(x) = x^{2/5}$ .
7.  $f(x) = e^x + x^3$ .
8.  $f(x) = -x^5 - 4x^3 - x$ .
9.  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ .
10.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ .
11.  $f(x) = \frac{x}{x^4 + 4}$ .
12.  $f(x) = -x^2 \sqrt{x^2 + 2}$ .
13.  $f(x) = x - \ln(1+x)$ .
14.  $f(x) = x + 1/x$ .
15.  $f(x) = \ln(1+x^2) - 2 \operatorname{arctg} x$ .
16.  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ .
17.  $f(x) = x^5 + 5x - 6$ .
18.  $f(x) = x^6 + 4x^2$ .
19.  $f(x) = x^2 - x^8$ .
20.  $f(x) = (x-5)^{5/3} + 2$ .
21.  $f(x) = xe^x$ .
22.  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$ .
23.  $f(x) = x + \log_2(x-1)$ .
24.  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x + 18$ .
25.  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ .
26.  $f(x) = x^4 + x^2 + 3^x$ .
27.  $f(x) = -x^2 \sqrt{x^2 + 2}$ .
28.  $f(x) = \ln(1+x^3)$ .
29.  $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$ .
30.  $f(x) = (x+1)^4 + 2^x$ .

**3.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f$  на вказаному проміжку:

1.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 1}$ ,  $[-4; 6]$ .
2.  $f(x) = \frac{3x^2}{x - 2}$ ,  $[-1; 1]$ .
3.  $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$ ,  $[-10; 1]$ .
4.  $f(x) = x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}$ ,  $[-2; 1]$ .
5.  $f(x) = x^3(x-1)^2$ ,  $[-1; 1]$ .
6.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $[1; 4]$ .
7.  $f(x) = x - \ln(1+x)$ ,  $[1; 4]$ .
8.  $f(x) = x \ln x$ ,  $[1/e^2; 1]$ .
9.  $f(x) = x^3 e^{-x}$ ,  $[-1; 4]$ .
10.  $f(x) = e^{2x-x^2}$ ,  $[-2; 2]$ .
11.  $f(x) = xe^{2x}$ ,  $[1; 3]$ .
12.  $f(x) = (3-x)e^{-x}$ ,  $[0; 5]$ .
13.  $f(x) = \frac{2x^3}{2x^2 - 9}$ ,  $[4; 6]$ .
14.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $[0; 2]$ .
15.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $[0; 3]$ .
16.  $f(x) = \ln x + 1/x$ ,  $[1; e]$ .

17.  $f(x) = 108x - x^4$ ,  $[-1; 4]$ .

18.  $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$ ,  $[-1; 2]$ .

19.  $f(x) = e^{4x-x^2}$ ,  $[1; 3]$ .

20.  $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{\ln 3}$ ,  $[-2; 1]$ .

21.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $[-\pi/4; \pi/2)$ .

22.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ ,  $[0; +\infty)$ .

23.  $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ ,  $[0; 3]$ .

24.  $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ ,  $[-\pi/4; \pi/4]$ .

25.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ ,  $[-2; 2]$ .

26.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ,  $[-1; 2]$ .

27.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $[0; 2]$ .

28.  $f(x) = e^{2x} - e^x$ ,  $[0; 1]$ .

29.  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $[0; +\infty)$ .

30.  $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ ,  $[0; 4]$ .

4. Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік:

1.  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ .

2.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ .

3.  $f(x) = x^2 + x^{-2}$ .

4.  $f(x) = xe^{-x}$ .

5.  $f(x) = x \sin x$ .

6.  $f(x) = xe^{-1/x}$ .

7.  $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ .

8.  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

9.  $f(x) = x + \cos x$ .

10.  $y = x \ln x$ .

11.  $f(x) = e^{8x-x^4-14}$ .

12.  $f(x) = e^{2x-x^2}$ .

13.  $f(x) = 36x(x-1)^3$ .

14.  $f(x) = x - \arcsin x$ .

15.  $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ .

16.  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ .

17.  $f(x) = \cos x - \cos^2 x$ .

18.  $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ .

19.  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ .

20.  $f(x) = x^2\sqrt{1-x}$ .

21.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$ .

22.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$ .

23.  $f(x) = x + \sin x$ .

24.  $f(x) = xe^{-4x}$ .

25.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

26.  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ .

27.  $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ .

28.  $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ .

29.  $y = \frac{x}{1+x^2}$ .

30.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$ .

## Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

### 3.1. Первісна і невизначений інтеграл

У попередньому розділі було розглянуто методи знаходження похідних функцій та способи використання похідної для їх дослідження. У цьому розділі увагу зосереджено на оберненій задачі – знаходженні функції за заданою похідною. Така задача виникає під час розв'язування як теоретичних проблем (зокрема, у процесі дослідження диференціальних рівнянь), так і прикладних задач (наприклад, при визначенні швидкості матеріальної точки за відомим прискоренням, обчисленні площі криволінійної трапеції тощо).

**3.1.1. Первісна і невизначений інтеграл. Властивості невизначеного інтегралу.** Первісною функції  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  на проміжку  $\Delta$  називається така функція  $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $(\forall x \in \Delta): F'(x) = f(x)$ . Сукупність, тобто множина, всіх первісних функції  $f$  на проміжку  $\Delta$  називається невизначеним інтегралом функції  $f$  на  $\Delta$  і позначається  $\int f(x)dx$ .

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f$  має первісну  $F$  на проміжку  $\Delta$ , то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де  $C$  – довільна стала.

**Наслідок 1.** Дві первісні однієї функції відрізняються на сталий доданок.

**Приклад 1.** Первісною функції  $x^2$  є функція  $x^3/3$  і тому

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

**Приклад 2.** Первісною функції  $f(x) = |x|$  на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  є функція

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \geq 0, \\ -x^2/2, & x < 0. \end{cases}$$

**Приклад 3.** Якщо функція  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  має первісну на проміжку  $\Delta$ , то вона не може мати розривів першого роду.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = [x]$  не має первісної на жодному проміжку  $\Delta$ , довжина якого є більшою за 1.

**Приклад 5.** Нехай  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція, неперервна в усіх

точках проміжку  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, а  $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  – функції, неперервні на проміжку  $\Delta$ , для яких рівності  $F'(x) = f(x)$  і  $\Phi'(x) = f(x)$  виконуються всюди на  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок. Тоді знайдеться така стала  $C$ , що  $\Phi(x) = F(x) + C$  для всіх  $x \in \Delta$ .

Виділимо наступні найпростіші властивості невизначеного інтегралу [4, 8-10]:

1°. Якщо  $f$  має похідну на  $\Delta$ , то

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

2°. Якщо  $f$  має первісну на  $\Delta$ , то  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ .

3° (адитивність).  $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ , якщо останні інтеграли існують.

4° (однорідність).  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$  для будь-якої сталої  $k \neq 0$ , якщо останній інтеграл існує.

5° (лінійність).  $\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx$  для будь-яких сталих  $k_1$  і  $k_2$  таких, що  $|k_1| + |k_2| \neq 0$ , якщо останні інтеграли існують.

### 3.1.2. Таблиця основних інтегралів.

1.  $\int dx = x + C$ .
2.  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1, m \in \mathbb{R}$ .
3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ .
4.  $\int e^x dx = e^x + C$ .
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$ .
7.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ .
8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ .

9.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
11.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
12.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
13.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
14.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
15.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
17.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
18.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
19.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$
20.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$
21.  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Формули 1-21 справедливі на кожному проміжку з області визначення підінтегральної функції. В цих формулах  $C \in \mathbb{R}$  і  $a \in (0; +\infty)$  – довільні сталі. Ці формули випливають безпосередньо з означення первісної і невизначеного інтеграла. Доведемо, наприклад, формулу 2. Справді, за правилами знаходження похідної

$$\left( \frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' = \frac{1}{m+1} (x^{m+1})' = x^m.$$

Формула 3 є справедливою на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . На другому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

а на першому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Тому формула 3 доведена, а інші доводяться аналогічно.

Використовуючи таблицю основних інтегралів багато невизначених інтегралів можна виразити через основні елементарні функції. Для знаходження невизначених інтегралів достатньо пам'ятати перші десять табличних інтегралів, оскільки інші можна отримати на їх основі методами інтегрування, що ми і зробимо далі.

**Зауваження 1.** При знаходженні невизначених інтегралів різними способами можна отримати різні правильні відповіді (насправді, відповіді однакові, але не завжди легко показати, що одна з первісних відрізняється від іншої на сталий доданок). Правильність знайденої відповіді можна встановити шляхом знаходження похідної первісної.

**Зауваження 2 [4, 8-10].** При знаходженні невизначених інтегралів у відповіді входить довільна стала  $C$ , яка може бути будь-яким дійсним числом і можна записати  $C = 2 + C_1$ ,  $C = 74 - C_2$ , ..., де  $C_1$ ,  $C_2$ , ... – довільні сталі. При цьому, якщо, наприклад,  $C_2$  пробігає множину всіх дійсних чисел, то і  $C$  пробігає множину всіх дійсних чисел і навпаки.

**Приклад 1.**  $\int (e^x + 1 + 2x)dx = \int e^x dx + \int dx + 2\int x dx = e^x + x + x^2 + C.$

Ця відповідь є правильною, оскільки  $(e^x + x + x^2)' = e^x + 1 + 2x.$

**Приклад 2.**  $\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C.$

**Приклад 3.**  $\int \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} (\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx) = \frac{1}{3} x^{3/2} + \sqrt{x} + C.$

**Зауваження 3 [4, 8-10].** Є такі інтеграли, які існують, але їхні первісні не є елементарними функціями. Тому ці інтеграли не можна виразити через елементарні функції. До таких інтегралів належать, наприклад,

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin \varphi}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin \varphi} d\varphi,$$

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \int \frac{\cos x}{x^n} dx, n \in \mathbb{N}.$$

Ці інтеграли відіграють важливу роль в математичному аналізі та його застосуваннях. Їхні первісні виражаються через так звані спеціальні функції. Тому відповідь, наприклад, до завдання „знайти інтеграл  $\int e^{-x^2} dx$ ” є такою: первісна підінтегральної функції не є елементарною функцією. Ця відповідь є правильною, якщо передбачається, що відповідач не зобов'язаний бути знайомим зі спеціальною функцією Erf. В протилежному випадку,  $\int e^{-x^2} dx = \text{Erf}(x) + C$  – правильна відповідь.

### 3.1.3. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів.

**Теорема 1 [4, 8-10] (інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів).** Нехай функція  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  має первісну  $F$  на проміжку  $\Delta$ , а функція  $\varphi: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $\Delta_1$  і  $\varphi(\Delta_1) \subset \Delta$ . Тоді функція  $F(\varphi(t))$  є первісною функції  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на проміжку  $\Delta_1$  і

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (1)$$

Справді, за теоремою про похідну складеної функції  $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$  і (1) доведено.

**Зауваження 1.** Формулу (1) записують у вигляді

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)},$$

або у вигляді

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Якщо функція  $\varphi$  має обернену функцію  $\varphi^{-1}$ , то її можна записати так

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

**Наслідок 1 (інтегрування методом внесення під диференціал).**

Якщо функція  $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $\Delta$ , то

$$\int f^m(x)f'(x)dx = \int f^m(x)df(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + C,$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = \int e^{f(x)}df(x) = e^{f(x)} + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int d \ln f(x) = \ln |f(x)| + C, f(x) \neq 0,$$

$$\int f'(x) \sin f(x) dx = \int \sin f(x) df(x) = -\cos f(x) + C$$

і т.д.

**Приклад 1 [4, 8-10].** Відповідно до написаних вище формул інтеграл  $\int \sin(2x+1) dx$  можна знаходити наступними способами.

1.  $\int \sin(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1) 2 dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$

2. Нехай  $2x+1=t$ . Тоді  $x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$ ,  $dx = \frac{1}{2} dt$  і

$$\int \sin(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

3 (метод внесення під диференціал).  $\int \sin(2x+1) dx =$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(2x+1) d(2x+1) = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

**Приклад 2.**  $\int e^{-x} dx = -\int e^{-x} d(-x) = -e^{-x} + C.$

**Приклад 3.**  $\int (1+4x)^{19} dx = \frac{1}{4} \int (1+4x)^{19} d(1+4x) = \frac{(1+4x)^{20}}{80} + C.$

**Приклад 4.**  $\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$

$$= \int \sin x dx + \int \cos^2 x d \cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

**Приклад 5.**  $\int x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2) =$

$$= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C.$$

**Приклад 6.** Для знаходження інтегралу  $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$  зробимо заміну

$\sqrt{x} = t$ . Тоді  $x = t^2$  і  $dx = 2t dt$ . Тому

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int \frac{2t^2+2-2}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= 2t - 2 \arctg t + C = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} + C.$$

**Приклад 7.**  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$ , якщо

$x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{Приклад 8. } \int a^x dx &= \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a} d(x \ln a) = \\ &= \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад 9. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

$$\text{Приклад 10. } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 11. } \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 12. } \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \\ &= \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad \text{якщо } x \in (\pi k; \pi(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 13. } \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} &= \int \frac{dx}{x^2 + 3x + (3/2)^2 - (3/2)^2 + 3} = \\ &= \int \frac{dx}{(x+3/2)^2 + 3/4} = \int \frac{d(x+3/2)}{(x+3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 14. } \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \int (x+1)^{-2} d(x+1) = -\frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 15. } \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} &= \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{x+1} d(x+1) - \int \frac{1}{x+2} d(x+2) = \ln|x+1| - \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

**Приклад 16.** Для знаходження інтеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  зробимо заміну  $x = a \operatorname{sh} t$ . Тоді  $dx = a \operatorname{ch} t dt$ ,  $t = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$ . Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} \\ &= \int dt = t + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Приклад 17.** Для знаходження інтеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$  зробимо заміну  $x = a \operatorname{ch} t$ . Тоді  $dx = a \operatorname{sh} t dt$  і  $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a$ , якщо  $x > a$ . Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2}} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} \\ &= \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{|\operatorname{sh} t|} = t + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C, \quad x > a. \end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= -\int \frac{d(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}} = -\ln|-x + \sqrt{x^2 - a^2}| + \ln a + C \\ &= -\ln\left|\frac{a^2}{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + \ln a + C = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C, \quad x < -a. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1, \quad |x| > a, \quad a > 0.$$

**Приклад 18.** Для знаходження інтеграла  $\int \frac{e^{x^2} dx}{x^3}$  зробимо заміну  $x^2 = t$ . Тоді  $x = \sqrt{t}$  і  $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ . Тому  $\int \frac{e^{x^2} dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t dt}{t^2}$ . Первісна функції  $f(t) = e^t / t^2$  не є елементарною функцією. Тому розглядуваний інтеграл не виражається через елементарні функції.

**Теорема 2 [4, 8-10]** (інтегрування частинами невизначених

**інтегралів).** Якщо функції  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  диференційовні на проміжку  $\Delta$ , то

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2)$$

Справді, за правилом знаходження похідної добутку  $(uv)' = uv' + u'v$ . Тому  $\int u dv = \int uv' dx = \int (uv)' dx - \int vu' dx = uv - \int v du$ .

Формула (2) називається формулою інтегрування частинами.

**Зауваження 2.** Інтегруванням частинами знаходяться інтеграли (тут  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ )

$$\int x^n e^{\alpha x} dx, \int x^n \sin \alpha x dx, \int x^n \arcsin x dx, \\ \int x^n \ln x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

та інші. При використанні методу інтегрування частинами важливим є вдалий вибір  $u$  та  $dv$ .

**Приклад 19.** Для знаходження інтеграла  $\int x \sin x dx$  позначимо  $u = x$  і  $dv = \sin x dx$ . Тоді  $du = dx$  і  $v = -\cos x$ . Тому

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 20.** Для знаходження інтеграла  $\int \ln x dx$  позначимо  $u = \ln x$  і  $dv = dx$ . Тоді  $du = \frac{1}{x} dx$  і  $v = x$ . Тому

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x > 0.$$

**Приклад 21.** Для знаходження інтеграла  $\int \arctg x dx$  позначимо  $u = \arctg x$  і  $dv = dx$ . Тоді  $du = \frac{1}{1+x^2} dx$  і  $v = x$ . Тому

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \\ = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 22.** Двічі використовуючи формулу інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = \\ = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 23 [4, 8-10].** Використовуючи формулу інтегрування

частинами  $n$  разів знаходимо

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - nx^{n-1} e^x + n(n-1) \int x^{n-2} e^x dx = \\ &= \dots = x^n e^x - nx^{n-1} e^x + \dots + (-1)^n n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot \int e^x dx = \\ &= \dots = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Приклад 24.** 
$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx =$$

$$= x \operatorname{tg} x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

на кожному проміжку  $\Delta$ , який не містить точок  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 25.** Для знаходження інтеграла  $\int e^{\sqrt{x}} dx$  спочатку зробимо заміну  $t = \sqrt{x}$ , а потім проінтегруємо частинами. Тоді  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$  і

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2t e^t - 2 \int e^t dt = \\ &= 2t e^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Приклад 26.** Для знаходження інтеграла  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ,  $a > 0$ , позначимо  $u = \sqrt{a^2 - x^2}$  і  $dv = dx$ . Тоді  $du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$  і  $v = x$ . Тому

$$\begin{aligned} I &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - I, \end{aligned}$$

звідки

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$$

**Приклад 27 [4, 8-10].**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\ &= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx. \end{aligned}$$

Тому

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 28.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx. \end{aligned}$$

Тому

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a > 0, \quad |x| > a.$$

**Приклад 29 [4, 8-10].** Нехай

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Інтегруючи двічі частинами отримуємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left( \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \right) = \\ &= \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I, \end{aligned}$$

звідки

$$I \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2}.$$

Таким чином,

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 30 [4, 8-10].** Розглянемо інтеграл

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

Якщо  $m=1$ , то цей інтеграл є табличним і  $I_1 = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a}$ . Нехай

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^m} \quad \text{і} \quad dv = dt. \quad \text{Тоді} \quad du = -\frac{2mtdt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}, \quad v = t. \quad \text{Тому,}$$

інтегруючи частинами, отримуємо

$$I_m = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{m+1}} dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} - 2ma^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}},$$

тобто

$$I_m = 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^m},$$

звідки

$$I_{m+1} = \frac{2m-1}{2ma^2} I_m + \frac{t}{2ma^2(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, послідовно знаходимо

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + C,$$

$$I_3 = \frac{3}{4a^2} I_2 + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{3t}{8a^4(t^2 + a^2)} + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} + C$$

і т.д. Приходимо до висновку, що для кожного  $m \in \mathbb{N}$  інтеграл  $I_m$  можна виразити через основні елементарні функції.

### 3.1.4. Інтегрування елементарних раціональних дробів.

Елементарні раціональні дроби над множиною дійсних чисел – це функції, визначені формулами [4, 8-10]:

$$f(x) = \frac{A}{x-b}, \quad f(x) = \frac{A}{(x-b)^n},$$

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},$$

де  $A \in \mathbb{R}$ ,  $B \in \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $b \in \mathbb{R}$  – числові сталі, а квадратний тричлен  $x^2 + px + q$  не має дійсних коренів, тобто  $p^2 - 4q < 0$ .

**Теорема 1 [4, 8-10].** *Первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.*

Справді,

$$\int \frac{1}{x-b} dx = \int \frac{d(x-b)}{x-b} = \ln|x-b| + C.$$

$$\int \frac{1}{(x-b)^n} dx = \int \frac{d(x-b)}{(x-b)^n} =$$

$$= \int (x-b)^{-n} d(x-b) = -\frac{1}{(n-1)(x-b)^{n-1}} + C, \quad n > 1.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{At dt}{t^2+a^2} + \int \frac{\left(B - \frac{Ap}{2}\right) dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{1}{2a} (2B - Ap) \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C,$$

де  $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$  і  $t = x + \frac{p}{2}$ . Крім цього,

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^m}.$$

Тому

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) + \left(B - A\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right)^m} dx = \int \frac{At+D}{(t^2+a^2)^m} dt =$$

$$= A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^m} dt + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= \frac{A}{2} \int (t^2+a^2)^{-m} d(t^2+a^2) + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} =$$

$$= -\frac{A}{2} \frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m},$$

де  $m > 1$ ,  $t = x + \frac{p}{2}$ ,  $D = B - A\frac{p}{2}$  і  $a = \sqrt{q - p^2/4}$ . Але первісна функції

$\frac{1}{(t^2 + a^2)^m}$  є елементарною функцією і тому ми приходимо до твердження теореми.

**Приклад 1 [4, 8-10].**

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(x + 1/2)^2 + 3/4} dx = \\ &= \int \frac{(x + 1/2) dx}{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + C. \end{aligned}$$

**3.1.5. Інтегрування раціональних функцій.** Багаточлен степеня  $n \in \mathbb{N}_0$  над полем дійсних чисел – це функція  $P$ , визначена формулою  $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$ , де  $d_i \in \mathbb{R}$  і  $d_n \neq 0$ . Числа  $d_i$  називаються коефіцієнтами багаточлена. Якщо число  $x_0$  є нулем багаточлена  $P$ , то  $P(x) = (x - x_0)\tilde{P}(x)$ , де  $\tilde{P}$  – багаточлен степеня  $n - 1$ . Якщо  $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n-1}x^{n-1} + x^n$  і всі коефіцієнти  $d_i$  є цілими числами, то кожне ціле число  $x_0$ , яке є нулем багаточлена  $P$  є дільником вільного члена  $d_0$ . Два багаточлени  $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$  і  $Q = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$  називаються [4, 8-10] рівними, якщо  $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x) = Q(x)$ . Два багаточлени  $P$  і  $Q$  є рівними тоді і тільки тоді, коли рівними є їхні степені і рівними є їхні коефіцієнти при відповідних степенях  $x$ , тобто коли  $m = n$  і  $d_i = b_i$  для всіх  $i \in \overline{1; n}$ . Кожний багаточлен  $Q$  подається у вигляді [4, 8-10]

$Q(x) = b_m(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_vx + q_v)^{\beta_v}$ , (1)  
де  $x_1, \dots, x_k$  – різні дійсні нулі багаточлена  $Q$ ,  $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\beta_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \beta_v \in \mathbb{N}_0$ ,  $q_1 \in \mathbb{R}, \dots, q_v \in \mathbb{R}$ ,  $p_1 \in \mathbb{R}, \dots, p_v \in \mathbb{R}$  – деякі числа і при цьому всі квадратні тричлени  $x^2 + p_ix + q_i$  не мають дійсних нулів, тобто  $p_i^2 - 4q_i < 0$ .

Раціональна функція – це функція, визначена формулою

$R = P/Q$ , де  $P$  і  $Q$  – багаточлени, степеня  $n$  та  $m$ , відповідно. Якщо  $n < m$ , тобто якщо степінь чисельника є меншим за степінь знаменника, то раціональна функція  $R$  називається правильною раціональною функцією або правильним раціональним дробом. Якщо ж  $n \geq m$ , то раціональна функція, називається неправильним раціональним дробом. Кожний неправильний раціональний дріб  $P/Q$  можна записати у формі

$$\frac{P}{Q} = T + \frac{P_1}{Q}, \quad (2)$$

де  $P_1/Q$  – правильний раціональний дріб, а  $T$  – багаточлен. Задля отримання (2) потрібно багаточлен  $P$  поділити на  $Q$ .

Будь-який правильний раціональний дріб  $P_1/Q$  можна представити як суму елементарних раціональних дробів. Для цього  $Q$  слід подати у вигляді (1). Тоді [4, 8-10]

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \\ & + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{1\beta_1}x + N_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \\ & + \dots + \frac{M_{v1}x + N_{v1}}{x^2 + p_vx + q_v} + \dots + \frac{M_{v\beta_v}x + N_{v\beta_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{\beta_v}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для знаходження чисел  $A_{ij}$ ,  $M_{sk}$  і  $N_{sk}$  слід праву частину рівності (3) привести до спільного знаменника. Тоді отримаємо рівність  $P_1/Q = P_2/Q$ , де  $P_2$  – багаточлен. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  багаточленів  $P_1$  і  $P_2$  отримаємо систему, яка містить стільки рівнянь скільки є невідомих і завжди має розв’язок. Розв’язавши цю систему, знаходимо потрібні числа. Таким чином, кожний правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів.

**Приклад 1.** Багаточлен  $Q(x) = (x^5 + x)^6$  подається у вигляді (1) так

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^6(x^4 + 1)^6 = x^6((x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 2x^2)^6 = \\ &= x^6(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)^6 \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)^6. \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Раціональний дріб  $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$  подається у вигляді

(2) так

$$\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Це впливає з наступних записів

$$\begin{array}{r|l} -x^4 + 1 & x^2 + 1 \\ \hline -x^4 + x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x^2 + 1 & \\ -x^2 - 1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

**Приклад 3 [4, 8-10].** Розкладемо дріб  $\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)}$  на

елементарні дроби. Маємо

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+2},$$

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A(x^2+2) + B(x^3+x^2+2x+2) + (Mx+N)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+2)},$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $x$  багаточленів, які стоять в чисельнику останньої рівності, отримуємо систему

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B + N = 0, \\ 2B + M + 2N = 2, \\ A + B + 2M + N = 0, \\ B + M = 0, \end{array} \right.$$

з якої знаходимо  $A = -\frac{6}{9}$ ,  $B = \frac{2}{9}$ ,  $M = -\frac{2}{9}$ ,  $N = \frac{8}{9}$  і тому

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = -\frac{6}{9(x+1)^2} + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{-2x+8}{9(x^2+2)}.$$

**Приклад 4 [4, 8-10].** Для розкладу раціональної функції

$R(x) = \frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2}$  на елементарні дроби слід записати

$$\frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B_1}{x+5} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{M_2x + N_2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Для знаходження інтеграла  $\int R(x)dx$ , де  $R = P/Q$  – раціональна функція, слід подати  $R$  у вигляді  $R = T + P_1/Q$ , де  $T$  – багаточлен, а  $P_1/Q$  – правильний раціональний дріб. Тоді [4, 8-10]

$$\int R(x)dx = \int T(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx.$$

Для знаходження останнього інтеграла слід  $P_1/Q$  записати у вигляді суми елементарних раціональних дробів, а їх інтеграли, як і інтеграл багаточлена, виражається через елементарні функції. Таким чином, справедливе наступне твердження.

**Теорема 1 [4, 8-10].** *Кожна раціональна функція має первісну на кожному проміжку, який належить області її визначення, і ця первісна є елементарною функцією.*

Таким чином, невизначений інтеграл раціональної функції виражається через елементарні функції на кожному проміжку, що входить до області визначення підінтегральної функції.

**Приклад 5.**

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

**Приклад 6.**

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Інколи інтеграл правильного раціонального дроби  $P_1/Q$  простіше знайти методом Остроградського [4, 8-10]. Суть цього методу така. Нехай  $Q(x) = Q_2(x) \cdot Q_3(x)$ , де

$$Q_2(x) = (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_k) \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_vx + q_v).$$

Тоді

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (4)$$

де  $P_2$  і  $P_3$  – багаточлени з невідомими коефіцієнтами, степені яких на одиницю менші за степені багаточленів  $Q_2$  і  $Q_3$  відповідно. Для знаходження цих коефіцієнтів багаточленів  $P_2$  і  $P_3$  продиференціюємо рівність (4). Тоді [4, 8-10]

$$\frac{P_1}{Q} = \left( \frac{P_3}{Q_3} \right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Після перетворень отримаємо рівність  $\frac{P_1}{Q} = \frac{P_4}{Q}$ , де  $P_4$  – багаточлен.

Прирівнявши відповідні коефіцієнти багаточленів  $P_1$  і  $P_4$  знайдемо коефіцієнти багаточленів  $P_2$  і  $P_3$ .

**Приклад 7 [4, 8-10].** Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx \text{ методом Остроградського слід записати}$$

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3}{(x^2+1)^2} + \int \frac{B_0 + B_1x + B_2x^2}{(x^2+1)(x+1)} dx.$$

**3.1.6. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.** Якщо функція  $f$  – раціональна, то інтеграл її виражається через елементарні функції. Якщо ж  $f$  – ірраціональна функція, то її інтеграл виражається через елементарні функції тільки в окремих випадках, хоч сам інтеграл може й існувати [4, 8-10].

1°. Інтеграли

$$\int R \left( x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

де  $R(u;v)$  – раціональна функція двох змінних знаходяться заміною

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}. \text{ Інтеграли}$$

$$\int R \left( x; \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n_1}}; \dots; \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{1}{n_s}} \right) dx,$$

де  $R$  – раціональна функція  $s$  змінних,  $r_i = m_i/n_i$  – раціональні числа,

$m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \overline{1; s}$ , знаходяться заміною  $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , де  $n$  –

спільний знаменник дробів  $r_i = m_i/n_i$ .

Раціональна функція  $s$  змінних – це функція, яка подається у вигляді частки двох багаточленів  $s$  змінних, а багаточлен  $s$  змінних – це функція [4, 8-10]

$$P(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_s \leq k, \\ k_i \in \mathbb{N}_0}} a_{k_1, \dots, k_s} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_s^{k_s},$$

де  $a_{k_1, \dots, k_s} \in \mathbb{R}$ ,  $k_1, \dots, k_s$  – цілі невід'ємні числа.

**Приклад 1.** Функції  $P(x; y) = 4x + 7y + 6$  і  $Q(x; y) = 9x^2 + 8y^2 + 3xy + 4x + 7y + 6$  є багаточленами двох змінних.

**Приклад 2 [4, 8-10].** Інтеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

знаходиться заміною  $t = \sqrt{x}$ . Тоді  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$  і

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1 + t} = \\ &= 2 \int \left( 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$$

слід зробити заміну  $t = \sqrt[6]{x}$ . Тоді  $x = t^6$ ,  $dx = 6t^5 dt$  і

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{6t^7 dt}{1 + t^3}.$$

Отже, ми звели розглядуваний інтеграл до інтегралу раціональної функції, який можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах.

2°. Інтеграли

$$\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

де  $R$  – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою підстановок Ейлера [4, 8-10]: а)  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$ , якщо  $a > 0$ ;

б)  $\pm \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$ , якщо корені  $x_1$  і  $x_2$  підкореневого квадратного тричлена є дійсними різними (в цьому випадку  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , що слід використати при практичному здійсненні заміни);

в)  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{c} \pm xt$ , якщо  $c > 0$ . В цих замінах комбінація знаків  $+$  і  $-$  є довільною, хоч і потрібно враховувати проміжок, на якому знаходимо первісну.

Вказані вище підстановки Ейлера часто приводять до громіздких

перетворень. В багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами. Інтеграли

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

можна знаходити подібно до інтегралів

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Інтеграл

$$\int R(x) \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

в якому  $R$  – раціональна функція можна знайти подавши  $R$  у вигляді  $R = T + R_1$ , де  $T$  – поліном і  $R_1$  – сума елементарних раціональних дробів.

**Приклад 4 [4, 8-10].** Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

зробимо заміну  $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$ . Тоді

$$x + 1 = 2xt + t^2, \quad x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t},$$

$$dx = \frac{2t(1 - 2t) + 2(t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = -\frac{2(t^2 - t + 1)}{(1 - 2t)^2} dt$$

і тому

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = -2 \int \frac{\frac{t^2 - 1}{1 - 2t} \cdot \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}}{(1 - 2t)^2} dt = 2 \int \frac{t^2 - 1}{(1 - 2t)^2} dt.$$

Отже, ми звели розглядуваний інтеграл до інтегралу раціональної функції, який можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах.

Разом з цим, розглядуваний інтеграл можна знайти простіше:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} d(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + 1/2)}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

3°. Інтеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (1)$$

де  $a, b \in \mathbb{R}$ , а  $p, m, n \in \mathbb{Q}$ , зветься інтегралом диференціального бінома. Він виражається через елементарні функції лише в окремих випадках і в цих випадках їх можна знайти за допомогою наступних підстановок Чебишова [4, 8-10]: а)  $x = t^\lambda$ , якщо  $p \in \mathbb{Z}$ , де  $\lambda$  – спільний знаменник дробів  $m$  та  $n$ ; б)  $a + bx^n = t^\mu$ , якщо  $(m+1)/n$  – ціле число, де  $\mu$  – знаменник дробу  $p$ ; в)  $ax^{-n} + b = t^\mu$ , якщо  $p + (m+1)/n$  – ціле число, де  $\mu$  – знаменник дробу  $p$ .

Якщо  $|a| + |b| \neq 0$  і жодне з чисел  $p$ ,  $(m+1)/n$  і  $p + (m+1)/n$  не є цілим числом, то можна переконатись, що інтеграл (1) існує, але через елементарні функції не виражається.

Вказані вище підстановки Чебишова часто приводять до громіздких перетворень. В багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами.

**Приклад 5 [4, 8-10].** Для знаходження інтегралу  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$  зробимо заміну (в даному випадку  $m=2$ ,  $p=-1/2$ ,  $n=2$ ,  $p + (m+1)/n = 1$ )  $x^2 - 1 = t^2$ . Тоді  $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $dx = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt$ . Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (0;1). \end{aligned}$$

**3.1.7. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій.** Інтеграл тригонометричних функцій часто зводяться до табличних за допомогою тригонометричних формул. В складніших випадках доцільніше скористатися відповідними підстановками [4, 8-10].

1°. Інтеграл

$$\int R(\sin x; \cos x) dx, \quad (1)$$

де  $R$  – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою підстановки  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ . Тоді [4, 8-10]

$$dt = \left( \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx, \quad dx = 2(1+t^2)^{-1} dt,$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

і тому інтеграл (1) можна виразити через елементарні функції. Якщо  $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ ,  $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$  або  $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$ , то замість заміни  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  доцільніше використовувати відповідно підстановки  $\cos x = t$ ,  $\sin x = t$  і  $\operatorname{tg} x = t$ .

**Приклад 1.**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x - 4)\cos^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C$$

(заміна  $\operatorname{tg} x = t$ ) на кожному проміжку  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , який не містить коренів рівняння  $\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$ .

**Приклад 2.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x d \sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} - \int d \sin x = \frac{-1}{\sin x} - \sin x + C \end{aligned}$$

(заміна  $\sin x = t$ ) на кожному проміжку  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , який не містить коренів рівняння  $\sin x = 0$ .

**Приклад 3.**

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{tg} x = \int \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x = \\
 &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x + 2 \int d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x = \frac{-1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C
 \end{aligned}$$

(заміна  $\operatorname{tg} x = t$ ) на кожному проміжку  $\Delta \subset \mathbb{R}$ , який не містить точок  $\pi k / 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Приклад 4 [4, 8-10].** Для знаходження інтегралу

$$I(x) = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

зробимо заміну  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тоді, якщо  $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то

$$I(x) = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} + c_n.$$

Оскільки підінтегральна функція є неперервною на  $\mathbb{R}$ , то первісна повинна бути неперервною на  $\mathbb{R}$ . Тому для кожного  $n \in \mathbb{Z}$  повинно

виконуватись  $I(2\pi n + \pi+) = I(2\pi n + \pi-)$ , тобто  $c_n + \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = c_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$ .

Отже,  $c_n = C + \frac{\pi n}{\sqrt{5}}$ , де  $C$  – довільна стала. Але  $n < \frac{x + \pi}{2\pi} < n + 1$ . Тому

$$n = \left[ \frac{x + \pi}{2\pi} \right] i$$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \left[ \frac{x + \pi}{2\pi} \right] \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C, \quad x \neq (2n+1)\pi.$$

Крім цього,

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}} \pi, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Приклад 5.** 
$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (b/a)^2} = \\
 &= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{b} + C, \quad a > 0, \quad b > 0.
 \end{aligned}$$

2°. Інтеграли

$$I_{\mu, \nu} = \int \sin^\mu x \cos^\nu x dx$$

зводяться [4, 8-10] до інтеграла диференціального бінома замінами

$\cos x = t$  та  $\sin x = t$ . В багатьох випадках їх можна знайти різними іншими прийомами з використанням тригонометричних формул, виведенням рекурентних формул і т.д.

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \\ &= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \int \frac{1 + \cos 4x}{8} dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 7 [4, 8-10].**

$$\begin{aligned} I_n(x) &:= \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = I_{n-2}(x) + \int \cos^{n-2} x \sin x d \cos x = \\ &= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \\ &= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

**Приклад 8 [4, 8-10].**

$$\tilde{I}_n(x) := \int \sin^n x dx = - \int \cos^n \left( \frac{\pi}{2} - x \right) d \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -I_n \left( \frac{\pi}{2} - x \right).$$

Тому

$$\tilde{I}_n(x) = -I_n \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{n-1}{n} \tilde{I}_{n-2}(x) - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

3°. Інтеграл

$$\begin{aligned} &\int \sin(ax+b) \cos(cx+d) dx, \quad \int \cos(ax+b) \cos(cx+d) dx, \\ &\int \sin(ax+b) \sin(cx+d) dx \end{aligned}$$

можуть бути зведені до табличних через застосування формул [4, 8-10]

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}, \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 9.**

$$\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

4°. Інтегралі гіперболічних функцій знаходяться подібно до інтегралів тригонометричних функцій. Разом з цим, часто краще скористатись формулами  $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$  та  $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ .

**Приклад 10.**

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \int \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} d \operatorname{th} \frac{x}{2} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5°. Інтегралі

$$\int (a^2 - x^2)^\beta dx, \int (a^2 + x^2)^\beta dx, \int (x^2 - a^2)^\beta dx$$

та їм подібні часто доцільно знаходити [4, 8-10] підстановками  $x = a \operatorname{cost}$ ,  $x = a \operatorname{shint}$ ,  $x = a \operatorname{cht}$ ,  $x = a / \operatorname{sh} t$  і т.д.

**Приклад 11.** Для знаходження інтегралу  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$  зробимо

заміну  $x = \operatorname{sh} t$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t dt}{\operatorname{cost}} = \int \operatorname{sh}^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C = \\ &= \frac{\operatorname{arcsin} x}{2} - \frac{\sin(2 \operatorname{arcsin} x)}{4} + C = \frac{\operatorname{arcsin} x}{2} - \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

### 3.1.8. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення первісної.
2. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла.
3. Сформулюйте та обґрунтуйте найпростіші властивості невизначеного інтеграла.
4. Запишіть таблицю основних інтегралів.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.
6. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування частинами невизначених інтегралів.
7. Які функції називають елементарними раціональними дробами?
8. Покажіть, що первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.
9. Опишіть метод подання правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних раціональних дробів.
10. Опишіть метод знаходження невизначених інтегралів раціональних функцій.

### 3.1.9. Вправи і задачі.

1. Знайдіть:

$$1. \int \frac{(1+x)^2}{2x+2x^3} dx.$$

$$3. \int \sqrt{x^3} dx.$$

$$5. \int (2x+1) dx.$$

$$7. \int (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1) dx.$$

$$9. \int (a-x^2) da.$$

$$11. \int \left( \frac{1-u}{u} \right)^2 du.$$

$$13. \int \left( 2x^4 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x} + 1 \right) dx.$$

$$15. \int \frac{dy}{\sqrt{9-9y^2}}.$$

$$17. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$19. \int |\sin x| dx.$$

$$21. \int \frac{1+2x^2}{x^2+x^4} dx.$$

$$23. \int \frac{3}{2\sin^2 x} dx.$$

$$25. \int \sin|x| dx.$$

$$27. \int \frac{(1+2x)^2}{\sqrt{2x}} dx.$$

$$29. \int \sqrt{2}(x^3 + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$2. \int \frac{1+x^2}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$4. \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$6. \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$8. \int (\sqrt{2}-2u) du.$$

$$10. \int (x_2^2 - x_1) dx_1.$$

$$12. \int \frac{dx}{2+2x^2}.$$

$$14. \int \frac{(1+y)^3}{\sqrt{y}} dy.$$

$$16. \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx.$$

$$18. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$20. \int |x| dx.$$

$$22. \int \frac{1+x^2}{2+\sqrt{a}} dx, a > 0.$$

$$24. \int \frac{\sqrt{3}}{4\cos^2 x} dx.$$

$$26. \int \frac{3dx}{\sqrt{2}}.$$

$$28. \int \frac{(3+2x)^3}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$30. \int \frac{2}{4+x^2} dx.$$

2. Методом внесення під диференціал знайдіть:

1.  $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^5(x+1)}.$
2.  $\int \frac{dx}{(x+2)^3}.$
3.  $\int 3x^2 \cos x^3 dx.$
4.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$
5.  $\int \left( (-x+3)^{10} + \frac{1}{\sqrt{-2x+1}} \right) dx.$
6.  $\int \frac{dx}{3-4x}.$
7.  $\int \left( \frac{1}{(x+2)^4} + \sqrt[4]{3x-1} \right) dx.$
8.  $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctg x}.$
9.  $\int \frac{dx}{1-3x}.$
10.  $\int (1-x)^{20} dx.$
11.  $\int (-2x+1)^7 dx.$
12.  $\int \sqrt{1-2x} dx.$
13.  $\int e^{-2x} dx.$
14.  $\int 3x^2 \sin x^3 dx.$
15.  $\int \sin(-x+1) dx.$
16.  $\int e^{-\sin x} \cos x dx.$
17.  $\int \cos(2-x) dx.$
18.  $\int \cos(1-3x) dx.$
19.  $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$
20.  $\int e^{2-4x} dx.$
21.  $\int e^{x^2} x dx.$
22.  $\int x \sin x^2 dx.$
23.  $\int \frac{2x}{1+x^2} dx.$
24.  $\int \frac{\sin \ln x dx}{x}.$
25.  $\int \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} dx.$
26.  $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}} dx.$
27.  $\int (x+3)^{10} dx.$
28.  $\int \sqrt[3]{1+x/3} dx.$
29.  $\int 2\sqrt{1+2x} dx.$
30.  $\int \frac{dx}{1-x/2}.$

3. Зробивши вказану заміну знайдіть:

1.  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}, t = 4 + \sin^2 x.$
2.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, t = 1 + \sqrt{x}.$
3.  $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx, x = 3\operatorname{sh} t.$
4.  $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}, t = 1 + e^x.$

5.  $\int \operatorname{ctg}^3 x dx, t = \operatorname{ctg} x.$
6.  $\int \frac{xdx}{1+\sqrt[5]{x}}, t = 1+\sqrt[5]{x}.$
7.  $\int \sqrt{4-x^2} dx, x = 2\cos t.$
8.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}, t = 1/x.$
9.  $\int (9-x^2)^{3/2} dx, x = 2\sin t.$
10.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}, t = \sqrt{1+e^x}.$
11.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}, t = 1+\ln x.$
12.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, x = \sin t.$
13.  $\int \frac{x^3 dx}{2+x^8}, t = x^4.$
14.  $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2+x}}, t = \sqrt[3]{2+x}.$
15.  $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}, t = x^2+1.$
16.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}, t = \sqrt[3]{x}.$
17.  $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{tg} x.$
18.  $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx, x = 3\operatorname{tg} t.$
19.  $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{sh} x.$
20.  $\int \frac{(x^2-x)dx}{(x-2)^3}, t = x-2.$
21.  $\int x\sqrt{1-x} dx, t = \sqrt{1-x}.$
22.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, t = \sqrt{1+x}.$
23.  $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx, t = e^x.$
24.  $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, t = 1+\sqrt{x}.$
25.  $\int \frac{x^3 dx}{2+x^8}, t = x^4.$
26.  $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{tg} x.$
27.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}, t = \arcsin x.$
28.  $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, t = e^x.$
29.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, x-a = (b-a)\sin^2 t.$
30.  $\int \frac{xdx}{1+x^4}, t = x^2.$

4. Інтегруючи частинами знайдіть:

1.  $\int (1+x^3) \ln x dx$
2.  $\int x^{10} \ln x dx.$
3.  $\int (x^2+x) \sin x dx.$
4.  $\int (x+1) \arcsin x dx.$

5.  $\int (x^2 - x)e^x dx$ .
6.  $\int (x^2 + x)e^{-2x} dx$ .
7.  $\int (x^3 + x)\sin x dx$ .
8.  $\int (x^3 - x)\cos 2x dx$ .
9.  $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ .
10.  $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} dx$ .
11.  $\int x^5 \cos x dx$ .
12.  $\int (x^2 + 1)e^{-3x} dx$ .
13.  $\int (x^3 + 5)e^{-2x} dx$ .
14.  $\int \ln^2 x dx$ .
15.  $\int (x + 1)^2 \ln x dx$ .
16.  $\int (x^3 - 1)\sin x dx$ .
17.  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ .
18.  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ .
19.  $\int x^3 \cos x dx$ .
20.  $\int x \ln(x - 1) dx$ .
21.  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ .
22.  $\int x \sin^2 x dx$ .
23.  $\int x \cos^2 x dx$ .
24.  $\int \sin \ln x dx$ .
25.  $\int x \sin^2 x dx$ .
26.  $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$ .
27.  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ .
28.  $\int x^2 \ln x dx$ .
29.  $\int x^2 \arcsin x dx$ .
30.  $\int x^4 e^{-x} dx$ .

**5. Знайдіть:**

1.  $\int \frac{1 - x}{1 + 2x^2} dx$ .
2.  $\int \frac{1 + 2x}{x^2 + 1} dx$ .
3.  $\int \frac{2 + 3x}{(x + 1)^3} dx$ .
4.  $\int \frac{2 + 2x}{1 - x^2} dx$ .
5.  $\int \frac{2 + 3x}{(x + 1)^3} dx$ .
6.  $\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx$ .
7.  $\int \frac{x}{x + 2} dx$ .
8.  $\int \frac{x - 1}{x - 2} dx$ .
9.  $\int \frac{x + 1}{2x + 1} dx$ .
10.  $\int \frac{x + 2}{1 - 2x} dx$ .
11.  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ .
12.  $\int \frac{x^2}{1 + 2x^2} dx$ .

13.  $\int \frac{x^2}{x+1} dx.$

15.  $\int \frac{x^3}{x+1} dx.$

17.  $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx.$

19.  $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx.$

21.  $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

23.  $\int \frac{(2x+3)}{x^2+x+2} dx.$

25.  $\int \frac{x}{x^2+4x+3} dx.$

27.  $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}.$

29.  $\int \frac{x+7}{1-x} dx.$

14.  $\int \frac{x^2}{x-1} dx.$

16.  $\int \frac{x^3}{x-1} dx.$

18.  $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$

20.  $\int \frac{x^2-2}{x-2} dx.$

22.  $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

24.  $\int \frac{dx}{(2x+1)(2x+7)}.$

26.  $\int \frac{dx}{(x+1)(-x-2)}.$

28.  $\int \frac{dx}{x^2-x+5}.$

30.  $\int \frac{x+1}{x-1} dx.$

6. Знайдіть:

1.  $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$

3.  $\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx.$

5.  $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

7.  $\int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx.$

9.  $\int \frac{dx}{x^2(x^2-3x+4)}.$

11.  $\int \frac{dx}{x^2+x^4}.$

2.  $\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$

4.  $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

6.  $\int \frac{x-1}{(x+1)^3} dx.$

8.  $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+9)^2} dx.$

10.  $\int \frac{dx}{x^2(x^2-5x+6)}.$

12.  $\int \frac{x^2}{(1+x)^3} dx.$

13.  $\int \frac{x^3 + 2x}{(1+x^2)^3} dx.$

14.  $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$

15.  $\int \frac{x^2 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$

16.  $\int \frac{x}{(2x^2 + x + 1)^2} dx.$

17.  $\int \frac{x}{8+x^3} dx.$

18.  $\int \frac{x}{1+8x^3} dx.$

19.  $\int \frac{x}{(2x^2 - x - 1)^2} dx.$

20.  $\int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$

21.  $\int \frac{x^2}{8+x^3} dx.$

22.  $\int \frac{x^2}{8-x^3} dx.$

23.  $\int \frac{x}{(x^2 + 4)^3} dx.$

24.  $\int \frac{dx}{(4+x^2)^4}.$

25.  $\int \frac{dx}{(1+4x^2)^6}.$

26.  $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$

27.  $\int \frac{dx}{(4+x^2)^3}.$

28.  $\int \frac{x}{(x^2 + 9)^3} dx.$

29.  $\int \frac{x}{(1+x^2)^3} dx.$

30.  $\int \frac{(2x+1)}{(x^2 + 4)^3} dx.$

**3.1.10. Індивідуальні завдання.**

1. Знайдіть:

1.  $\int \frac{2x^5 + 1}{x^2 + x^4} dx.$

2.  $\int \frac{4x^7 - 5x}{(1+x)^3} dx.$

3.  $\int \frac{x^4 + 2x}{(1+x^2)^2} dx.$

4.  $\int \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$

5.  $\int \frac{x^4 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$

6.  $\int \frac{x^7}{2x^2 + x + 1} dx.$

7.  $\int \frac{x^8}{8+x^3} dx.$

8.  $\int \frac{x^9}{1+8x^3} dx.$

9.  $\int \frac{x^6}{(x+1)(x+2)^2} dx.$

10.  $\int \frac{x^5}{(x-2)(x-1)^2} dx.$

11.  $\int \frac{x^9 + 1}{(x-1)^2} dx.$

13.  $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-1)} dx.$

15.  $\int \frac{x^5}{x^2 + x + 1} dx.$

17.  $\int \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 3x + 4} dx.$

19.  $\int \frac{4x^5 + x^2}{2x^2 - x - 1} dx.$

21.  $\int \frac{3x^5 + x}{8 + x^3} dx.$

23.  $\int \frac{x^6}{(x^2 + 4)^3} dx.$

25.  $\int \frac{2x^5 + 4x^2}{(1 + 4x^2)^2} dx.$

27.  $\int \frac{4x^5 + x^2}{(4 + x^2)^2} dx.$

29.  $\int \frac{4x^5 + x^3}{(1 + x^2)^3} dx.$

12.  $\int \frac{2x^5}{(x-1)^2(x+1)} dx.$

14.  $\int \frac{(x-1)^4}{(x+1)^3} dx.$

16.  $\int \frac{(x+1)^4}{x^2 + 2x + 9} dx.$

18.  $\int \frac{5x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$

20.  $\int \frac{2x^5 + x^2}{x^2 - x + 1} dx.$

22.  $\int \frac{4x^4 + x^2}{8 - x^3} dx.$

24.  $\int \frac{x^7 + x^2}{(4 + x^2)^3} dx.$

26.  $\int \frac{x^8 + x^2}{(x^2 + 1)^3} dx.$

28.  $\int \frac{4x^5}{(x^2 + 9)^2} dx.$

30.  $\int \frac{4x^5 + 1}{(x^2 + 4)^2} dx.$

2. Знайдіть:

1.  $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx.$

3.  $\int \frac{\sqrt{1 - \sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

5.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx.$

7.  $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$

2.  $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$

4.  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx.$

6.  $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}}.$

8.  $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

9.  $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$
10.  $\int \frac{x}{1 + \sqrt[5]{x}} dx.$
11.  $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$
12.  $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$
13.  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 4}} dx.$
14.  $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$
15.  $\int \sqrt{-9x^2 - 6x + 2} dx.$
16.  $\int \sqrt{(2-x)(3+x)} dx.$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$
18.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}.$
19.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}.$
20.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-4x^2}}.$
21.  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$
22.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$
23.  $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 3}} dx.$
24.  $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}} dx.$
25.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}.$
26.  $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} dx.$
27.  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 9}} dx.$
28.  $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$
29.  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$
30.  $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

### 3. Знайдіть

1.  $\int (x - \cos x)^3 dx.$
2.  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$
3.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$
4.  $\int \sin^6 x dx.$
5.  $\int \frac{du}{2\cos^2 u + 3\sin^2 u}.$
6.  $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$
7.  $\int \frac{dx}{\cos 2x}.$
8.  $\int \sin^5 x dx.$

9.  $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx.$
11.  $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$
13.  $\int \cos^4 x dx.$
15.  $\int \frac{dx}{5+4\cos x}.$
17.  $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$
19.  $\int \frac{dx}{5-4\sin x-\cos x}.$
21.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$
23.  $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx.$
25.  $\int \frac{dx}{\cos^6 x} dx.$
27.  $\int \cos^2 2x \sin^2 2x dx.$
29.  $\int \sin^3 3x \cos 2x dx.$
10.  $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$
12.  $\int \sin x \cos 2x \sin 3x dx.$
14.  $\int \frac{dx}{5-3\sin x}.$
16.  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$
18.  $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$
20.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$
22.  $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$
24.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$
26.  $\int \sin^2 2x \cos x dx.$
28.  $\int \cos^4 2x dx.$
30.  $\int \cos^3 2x \sin 2x dx.$

**4. Знайдіть:**

1.  $\int x e^{\sqrt{x}} dx.$
3.  $\int \sqrt{4+x^2} dx.$
5.  $\int x^2 \ln(2+x) dx.$
7.  $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$
9.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{3x}} dx.$
11.  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}} dx.$
2.  $\int x \sqrt{9-x^2} dx.$
4.  $\int \ln(4+x^2) dx.$
6.  $\int \ln^2 x dx.$
8.  $\int \frac{x^2}{1+\sqrt{x}} dx.$
10.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x}}.$
12.  $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}.$

13.  $\int \frac{x}{x^2 + x + 9} dx$ .

15.  $\int (2x+1)\sin(2x+1)dx$ .

17.  $\int \arctg \sqrt{4x-1} dx$ .

19.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ .

21.  $\int \frac{x^7}{x^2 + 4} dx$ .

23.  $\int \frac{x^4}{x^2 + x + 3} dx$ .

25.  $\int \sin^2 x \cos^6 x dx$ .

27.  $\int x^2 \cos \sqrt{x} dx$ .

29.  $\int x^3 e^{-\sqrt{x}} dx$ .

14.  $\int \frac{x^5}{x^2 - 4x + 3} dx$ .

16.  $\int (x^2 - 3x + 1)e^x dx$ .

18.  $\int \frac{x}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}} dx$ .

20.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$ .

22.  $\int \frac{x^6}{x^2 - 9} dx$ .

24.  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ .

26.  $\int x^2 \sin \sqrt{x} dx$ .

28.  $\int \sqrt{x} \cos x dx$ .

30.  $\int (4 - 16x^2) \sin 4x dx$ .

5. Знайдіть:

1.  $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$ .

3.  $\int \frac{x + \arctg x}{1 + x^2} dx$ .

5.  $\int \sin^3 x \sqrt{\cos^5 x} dx$ .

7.  $\int \frac{x}{(7-x^2)^7} dx$ .

9.  $\int \sin^2(1-x) dx$ .

11.  $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$ .

13.  $\int e^{-2x} \cos e^{-2x} dx$ .

15.  $\int \frac{x + \arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$ .

2.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx$ .

4.  $\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^3 x} dx$ .

6.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$ .

8.  $\int \frac{dx}{\ln(1-2x)}$ .

10.  $\int \sin^3(1-2x) dx$ .

12.  $\int \frac{\cos(2-x)}{\sqrt[5]{\sin(2-x)}} dx$ .

14.  $\int \frac{dx}{x \cos^2(1-\ln x)}$ .

16.  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ .

17.  $\int \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-4x}} dx.$

18.  $\int x(1-x)^{99} dx.$

19.  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

20.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

21.  $\int \frac{x^2}{(27-x^3)^{3/2}} dx.$

22.  $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx.$

23.  $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-8)^8} dx.$

24.  $\int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx.$

25.  $\int \frac{6^x}{9^x - 4^x} dx.$

26.  $\int \sin(1-x)\sin(1+x) dx.$

27.  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx.$

28.  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$

29.  $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

30.  $\int \frac{1}{\cos^3 x \sin^5 x} dx.$

### 3.2. Визначений інтеграл

Низка задач з різних розділів науки, які буде розглянуто далі, зводиться до знаходження границь певних сум. Такі границі дістали спеціальну назву – інтегралів Рімана, або визначених інтегралів, які й вивчаються в цьому підрозділі. Інші підходи до цього поняття та його найпростіші узагальнення також буде розглянуто.

**3.2.1. Означення визначеного інтеграла та його основні властивості.** Нехай  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  – деякий скінченний проміжок і  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція. Множину  $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$  точок таких, що  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , будемо називати розбиттям проміжку  $[a; b]$  або  $\tau$ -розбиттям, а число  $\lambda = \lambda_\tau = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{1; n-1}\}$ , де  $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$ , – діаметром розбиття. На кожному проміжку  $[x_k; x_{k+1}]$  візьмемо довільну точку  $\xi_k$  і побудуємо суму  $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$  [4, 8-10]:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_0) \Delta x_0 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}.$$

Сума  $\sigma$  називається інтегральною сумою функції  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  на

проміжку  $[a;b]$ . Інтегральна сума  $\sigma$  залежить від функції  $f$ , розбиття  $\tau$  і способу вибору точок  $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ , тобто від множини  $\xi = \{\xi_k\}$ . Таким чином, для кожного проміжку  $[a;b] \subset \mathbb{R}$  інтегральна сума  $\sigma$  є функцією трьох змінних:  $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$ . Визначеним інтегралом або інтегралом Рімана функції  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  на проміжку  $[a;b]$  називається границя [4, 8-10]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (1)$$

Якщо границя (1) існує і є скінченною, то функція  $f$  називається інтегрованою за Ріманом на  $[a;b]$ . Крім цього, за означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

і

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad b < a.$$

До того ж,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a;b]$ , то вона є обмеженою на  $[a;b]$ .

**Приклад 1.** Функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

є обмеженою на проміжку  $[0;1]$ , але не є інтегрованою на  $[0;1]$ .

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на проміжку  $[a;b]$ , то вона є інтегрованою на  $[a;b]$ .

**Теорема 3 [4, 8-10].** Добуток двох інтегровних на  $[a;b]$  функцій  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $g : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є функція інтегровна на  $[a;b]$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = [x]$  є інтегрованою на проміжку  $[-4;5]$ , бо є неспадною на ньому.

**Теорема 4 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на проміжку  $[a;b]$  і неперервною на проміжку  $[a;b]$  всюди, за винятком, хіба-що скінченної кількості точок, то вона є інтегрованою за Ріманом на

$[a; b]$ .

**Теорема 5 [4, 8-10].**  $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$  для будь-якої сталої

$c$ , якщо останній інтеграл існує.

**Теорема 6 [4, 8-10].**

$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$ , якщо останні

інтеграли існують.

**Теорема 7 [4, 8-10].**

$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx$  для будь-яких

чисел  $c_1$  і  $c_2$ , якщо останні інтеграли існують.

**Теорема 8 [4, 8-10].** Якщо  $a \leq b$ , функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$  і  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x \in [a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

**Теорема 9 [4, 8-10].** Якщо  $a \leq b$ , функції  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегровними на проміжку  $[a; b]$  і  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq \varphi(x)$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

**Теорема 10 [4, 8-10].** Якщо  $a \leq b$ , функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$  і  $m \leq f(x) \leq M$  для всіх  $x \in [a; b]$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

**Теорема 11 [4, 8-10].** Якщо  $a \leq b$ , функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$ , то інтегрованою на  $[a; b]$  є також функція  $|f|$  і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

**Теорема 12 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$ , то вона є інтегрованою на будь-якому проміжку  $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ .

**Теорема 13 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжках  $[a; c]$  і  $[c; b]$ ,  $a < c < b$ , то вона інтегрована за Ріманом на проміжку  $[a; b]$  і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**Теорема 14 [4, 8-10].** Якщо  $a \leq b$ , функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперечною на проміжку  $[a; b]$ ,  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x \in [a; b]$  і  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , то  $f(x) = 0$  для всіх  $x \in [a; b]$ .

**Приклад 3.** 
$$\int_0^4 e^{x^2} dx = \int_0^2 e^{x^2} dx + \int_2^4 e^{x^2} dx.$$

**Приклад 4.** 
$$\pi/2 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx < 3\pi/2.$$

**Теорема 15 (перша теорема про середнє) [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперечною на проміжку  $[a; b]$ , то

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

**Теорема 16 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на проміжку  $[a; b]$ , то існує таке  $\mu \in [m(f); M(f)]$ , що

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

**Теорема 17 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперечною

на проміжку  $[a; b]$ , а функція  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою і приймає значення одного знаку на  $[a; b]$ , то

$$(\exists c \in [a; b]): \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 18 [4, 8-10].** Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на проміжку  $[a; b]$ , а функція  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою і приймає значення одного знаку на  $[a; b]$ , то

$$(\exists \mu \in [m(f); M(f)]): \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

**Теорема 19 (друга теорема про середнє) [4, 8-10].** Нехай функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на  $[a; b]$ , а функція  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною і невід'ємною на  $[a; b]$ . Тоді

$$(\exists c \in [a; b]): \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-) \int_a^c f(x)dx.$$

**Теорема 20 [4, 8-10].** Нехай функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на  $[a; b]$ , а функція  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є незростаючою і невід'ємною на  $[a; b]$ . Тоді

$$(\exists c \in [a; b]): \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+) \int_c^b f(x)dx.$$

**Теорема 21 [4, 8-10].** Нехай функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на проміжку  $[a; b]$ , а функція  $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на  $[a; b]$ . Тоді

$$(\exists c \in [a; b]): \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+) \int_a^c f(x)dx + g(b-) \int_c^b f(x)dx.$$

**Приклад 5.**

$$\int_0^{3/2} e^{-x^2} \sin x dx = \int_0^c \sin x dx + e^{-9/4} \int_c^{3/2} \sin x dx, \quad 0 \leq c \leq 3/2 < \pi/2.$$

$$\text{Приклад 6. } \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln(1+c^2) \leq \ln 2.$$

**3.2.2. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Лейбніца-Ньютона.** Функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

називається інтегралом зі змінною верхньою межею.

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $[a; b]$ , то  $(\forall x \in [a; b]) : \Phi'(x) = f(x)$ , тобто

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

**Наслідок 1.** Кожна неперервна на проміжку  $[a; b]$  функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  має первісну на  $[a; b]$ . Однією з її первісних є функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$ , то функція  $\Phi$  є неперервною на  $[a; b]$ .

**Наслідок 2.** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на проміжку  $[a; b]$ , то

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

**Приклад 1.**  $\left( \int_0^x \sin \sqrt{t} dt \right)' = \sin \sqrt{x}.$

**Приклад 2.**  $\left( \int_x^1 \cos^7 t dt \right)' = \left( - \int_1^x \cos^7 t dt \right)' = -\cos^7 x.$

**Приклад 3.**

$$\left( \int_0^{\sqrt{x}} \sin t dt \right)' = \sin \sqrt{x} (\sqrt{x})' = \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

**Приклад 4.**

$$\left( \int_x^{x^2} \cos t dt \right)' = \cos x^2 (x^2)' - \cos x (x)' = 2x \cos x^2 - \cos x.$$

**Приклад 5.** Використовуючи правила Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{e^{x^2} 2x^2 + e^{x^2}}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

**Теорема 3 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де  $F$  – будь-яка первісна функції  $f$ .

**Зауваження 1.** Формулу (1), яку називають формулою Лейбніца-Ньютона, записують так:  $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b$ .

**Приклад 6.**

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (x+1)^{1/2} d(x+1) = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

**Приклад 7.**

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2x} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2\sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2} |\sin x| dx = \\ &= -\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \sqrt{2} \cos x \Big|_{-\pi/2}^0 - \sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 8.** Якщо  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$  то

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

**3.2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.**

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функції  $u : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $v : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовними на проміжку  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

**Приклад 1.**  $\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$ . Тут

$u = x$ ,  $dv = e^{-x} dx$ ,  $du = dx$  і  $v = -e^{-x}$ .

**Теорема 2 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$ , а функція  $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною на проміжку  $[\alpha; \beta]$ ,  $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ . Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

**Наслідок 1 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$ , а функція  $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною і монотонною на проміжку  $[\alpha; \beta]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ . Тоді правильна рівність (1).

**Приклад 2.** Для знаходження інтегралу  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$  зробимо заміну

$\sqrt{x} = t$ . Тоді  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . Якщо  $x = 0$ , то  $t = 0$ . Якщо  $x = 4$ , то  $t = 2$ . Крім цього,  $([0; 2])^2 = [0; 4]$ . Тому

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \int_0^2 \frac{2t dt}{t+1} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \left( \int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} \right) = \\ &= 2 \left( t \Big|_0^2 - \ln(t+1) \Big|_0^2 \right) = 2(2 - \ln 3) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Для знаходження інтегралу  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  зробимо

заміну  $x = 2 \sin t$ . Тоді  $dx = 2 \cos t dt$ . Якщо  $x = 0$ , то  $t = 0$ . Якщо  $x = 2$ , то  $t = \pi/2$ . Крім цього,  $2 \sin([0; \pi/2]) = [0; 2]$ . Тому

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi.$$

**Приклад 4.**  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x d \cos x + \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

**Приклад 5 [4, 8-10].** Для знаходження інтегралу  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

зробимо заміну  $x = \pi - t$ . Тоді  $dx = -dt$ . Якщо  $x = 0$ , то  $t = \pi$ . Якщо  $x = \pi$ , то  $t = 0$ . Тому

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} d(\pi - t) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt,$$

звідки

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Приклад 6 [4, 8-10].** Якщо функція  $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$  є парною і неперервною на проміжку  $[-a; a]$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

**Приклад 7 [4, 8-10].** Якщо функція  $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною і неперервною на проміжку  $[-a; a]$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

**Приклад 8.**

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \pi + \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \frac{1}{2} \left( -\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) = \pi. \end{aligned}$$

**3.2.4. Невласні інтеграли.** В означенні визначеного інтеграла (інтеграла Рімана) припускалось, що проміжок  $[a; b]$  є обмеженим. Крім цього, інтегровними за Ріманом не можуть бути необмежені функції. Тепер ми розширимо поняття інтеграла так, що інтегровними стануть деякі необмежені функції і можна буде знаходити інтеграли по нескінченних проміжках.

Нехай функція  $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегровою за Ріманом на будь-якому проміжку  $[a; \eta]$ , який належить обмеженому або необмеженому

проміжку  $[a; b)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Невласним або невластивим інтегралом функції  $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  на проміжку  $[a; b)$  називається [4, 8-10] границя (якщо  $b = +\infty$ , то  $b^- := +\infty$ )

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^\eta f(x) dx. \quad (1)$$

Якщо границя (1) існує і є скінченною, то функція  $f$  називається інтегрованою у невластому розумінні на  $[a; b)$  (інколи зручніше говорити на  $[a; b]$  або невластому розумінні на  $[a; b]$  з особливою точкою  $b$ ).

Якщо границя (1) не існує або рівна  $\infty$ , то невластий інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називається розбіжним.

**Теорема 1 [4, 8-10].** *Якщо функція  $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b) \subset \mathbb{R}$ , то вона інтегровна на  $[a; b]$  в невластому розумінні і її невластий інтеграл дорівнює інтегралу Рімана.*

Аналогічно визначається невластий інтеграл на лівому кінці проміжку  $(a; b]$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Нехай функція  $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[\eta; b] \subset (a; b]$ . Невласним інтегралом функції  $f$  на  $(a; b]$  (інколи зручніше говорити на  $[a; b]$  або невластим інтегралом на  $[a; b]$  з особливою точкою  $a$ ) називається [4, 8-10] границя (якщо  $a = -\infty$ , то  $a^+ := -\infty$ )

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow a^+} \int_\eta^b f(x) dx.$$

При дослідженні невластих інтегралів потрібно з'ясувати спочатку, в яких точках цей інтеграл є невластим.

**Приклад 1.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^\eta x^{-2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^\eta = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\eta} + 1 \right) = 1$$

**Приклад 2.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = (\arctg x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

**Приклад 3.**

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_0^\eta x e^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( (-x e^{-x}) \Big|_0^\eta + \int_0^\eta e^{-x} dx \right) =$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} ((-\eta e^{-\eta} - e^{-\eta}) + 1) = 1.$$

**Приклад 4 [4, 8-10].**

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_e^{\eta} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( \left( -\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^{\eta} \right) = 1.$$

**Приклад 5 [4, 8-10].** Інтеграл  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$  є розбіжним, бо

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^{\eta} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} d \ln \ln x = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( (\ln \ln \ln x) \Big|_{e^2}^{\eta} \right) = +\infty.$$

**Приклад 6.** Інтеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$  є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_{\eta}^1 = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) = +\infty.$$

**Приклад 7 [4, 8-10].** Інтеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$$

є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 2^-} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\eta \rightarrow 2^-} (\ln |x-2|) \Big|_0^{\eta} = -\infty.$$

**Приклад 8.** Інтеграл  $\int_0^1 \ln x dx$  є розбіжним, бо

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left( x \ln x \Big|_{\eta}^1 - \int_{\eta}^1 dx \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-\eta \ln \eta - 1 + \eta) = -1.$$

**Приклад 9 [4, 8-10].**

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left( (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^{\eta} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

На невласні інтеграли можна перенести більшість властивостей і теорем, які справедливі для інтегралів Рімана [4, 8-10].

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a;b)$  і для деякої первісної  $F$  функції  $f$  на проміжку  $[a;b)$  існує границя  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) := F(b)$ , то

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

**Теорема 3 [4, 8-10].** Нехай функція  $f:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a;b)$ , а функція  $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною на проміжку  $[\alpha;\beta]$ ,  $\varphi([\alpha;\beta]) = [a;b)$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$ . Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Теорема 4 [4, 8-10].** Якщо функції  $u:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $v:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовними на проміжку  $[a;b)$  і існує границя

$$\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) := u(b)v(b), \text{ то } \int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

**Приклад 10.** Для знаходження інтеграла  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  зробимо заміну  $x = \sin t$ . Тоді  $dx = \cos t dt$ ,  $x \in [0;1)$  тоді і тільки тоді, коли  $t \in [0; \pi/2)$  і  $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin t = 1$ . Тому  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \frac{\pi}{2}$ . Бачимо, що після заміни та спрощень невласний інтеграл звівся до інтеграла Рімана. Так буває часто.

**Приклад 11 [4, 8-10].** Для знаходження інтеграла  $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$  зробимо заміну  $x = 2t$ . Тоді

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt.$$

Але

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = - \int_0^{\pi/4} \ln \sin \left( \frac{\pi}{2} - t \right) d \left( \frac{\pi}{2} - t \right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u du.$$

Тому

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

Отже,  $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**Приклад 12.**

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left( -x e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left( -x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

Вище ми розглядали випадок, коли інтегровність за Ріманом у функції  $f$  втрачається на кінцях проміжків. Але функція  $f$  може бути необмеженою і в деякому околі точки  $x_0 \in (a; b)$ . Якщо функція  $f$  є інтегровною хоч-би в невласному розумінні на проміжках  $[a; x_0]$  і  $[x_0; b]$ , то за означенням [4, 8-10]

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx. \quad (2)$$

При цьому, якщо обидва інтеграли з правої частини (2) є збіжними, то функція  $f$  називається інтегровною у невласному розумінні на  $(a; b)$  (інколи кажуть на  $[a; b]$ ). Крім цього, права частина (2), якщо написані в ній інтеграли існують, не залежить від  $x_0$ . Це впливає з властивостей інтеграла Рімана. Аналогічно визначається невласний інтеграл на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\eta_1 \rightarrow -\infty} \int_{\eta_1}^0 f(x) dx + \lim_{\eta_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{\eta_2} f(x) dx. \quad (3)$$

Якщо обидва інтеграли з правої частини (3) є збіжними, то невласний інтеграл [4, 8-10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (4)$$

називається збіжним. Якщо принаймні один із інтегралів з правої частини (3) є розбіжним, то невласний інтеграл (4) називається розбіжним.

Подібно визначається невласний інтеграл у випадку, коли таких особливих точок  $x_0$  на проміжку  $[a; b]$  є декілька.

**Приклад 13 [4, 8-10].** Інтеграл  $\int_{-1}^1 x^{-4} dx$  є розбіжним, бо за

означенням

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^1 \frac{dx}{x^4},$$

а останні два інтеграли є розбіжними.

Інтегралом в розумінні головного значення функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $\infty$  називається границя [4, 8-10]

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x) dx.$$

Інтегралом в розумінні головного значення функції  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $x_0 \in (a; b)$  називається границя [4, 10, 11]

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

**Приклад 14 [4, 8-10].** Інтеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$  є розбіжним як невластний інтеграл, але

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) \Big|_{-\eta}^{\eta} = 0.$$

**Приклад 15.** Інтеграл  $\int_{-1}^1 x^{-1} dx$  є розбіжним як невластний інтеграл, але

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

**Приклад 16.**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$  є розбіжним. Разом з цим,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( -\cos x \Big|_{-a}^a \right) = 0.$$

Розглянемо далі питання про збіжність невластних інтегралів від невід'ємних функцій.

**Теорема 5 [4, 8-10].** Нехай функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[a; \eta] \subset [a; b)$ . Для того щоб невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx \quad (5)$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta \in (a; b))(\forall \eta' \in (\eta; b))(\forall \eta'' \in (\eta; b)) : \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 6 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[a; \eta] \subset [a; b]$ . Для того щоб невластний інтеграл (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\exists c_1)(\forall \eta \in (a; b)) : \int_a^{\eta} f(x)dx \leq c_1.$$

**Теорема 7 [4, 8-10].** Нехай функції  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємними на проміжку  $[a; b]$ , інтегровними за Ріманом на кожному проміжку  $[a; \eta] \subset [a; b]$  і  $(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq c_1 g(x)$ . Тоді: 1) якщо

$$\int_a^b g(x)dx \quad (6)$$

є збіжним, то збіжним є інтеграл (5); 2) якщо інтеграл (5) є розбіжним, то розбіжним є інтеграл (6).

**Теорема 8 [4, 8-10].**  $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx$  є збіжним, якщо  $\alpha > 1$  і є розбіжним, якщо  $\alpha \leq 1$ .

**Наслідок 1 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ . Тоді: 1) якщо  $(\exists \alpha > 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \leq c_1 / x^\alpha$ , то інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad (7)$$

є збіжним; 2) якщо  $(\exists \alpha \geq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \geq c_1 / x^\alpha$ , то невластний інтеграл (7) є розбіжним.

**Наслідок 2 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$  і існує границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \gamma$ . Тоді: 1) якщо  $0 < \gamma < +\infty$  і  $\alpha > 1$ , то інтеграл (7) є збіжним; 2) якщо  $0 < \gamma < +\infty$  і  $\alpha \leq 1$ , то інтеграл (7) є розбіжним.

**Приклад 17.** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2}} dx$  є збіжним, бо збіжним є

інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  і  $\frac{1}{\sqrt{x^4+2}} \leq \frac{1}{x^2}$ , якщо  $x \in [1; +\infty)$ .

**Приклад 18.** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$  є розбіжним, бо розбіжним є

інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  і  $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ , якщо  $x \in [1; +\infty)$ .

**Приклад 19.** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^7+1}} dx$  є збіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^7+1}} = 2.$$

**Приклад 20.** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x+1}} dx$  є розбіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{e^{1/\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x+1}} = \frac{1}{3}.$$

**Теорема 9 [4, 8-10].**  $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$  є збіжним, якщо  $\alpha < 1$  і є

розбіжним, якщо  $\alpha \geq 1$ .

**Наслідок 3 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[\eta;1] \subset (0;1]$ . Тоді:

1) якщо  $(\exists \alpha < 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in (0;1]): f(x) \leq c_1 / x^\alpha$ , то інтеграл

$$\int_0^1 f(x) dx \tag{8}$$

є збіжним; 2) якщо  $(\exists \alpha \geq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in (0;1]): f(x) \geq c_1 / x^\alpha$ , то інтеграл (8) є розбіжним.

**Наслідок 4 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[\eta;1] \subset (0;1]$  і існує границя  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \gamma$ . Тоді: 1) якщо  $0 < \gamma < +\infty$  і  $\alpha < 1$ , то інтеграл

(8) є збіжним; 2) якщо  $0 < \gamma < +\infty$  і  $\alpha \geq 1$ , то інтеграл (8) є розбіжним.

**Приклад 21.** Розбіжним є інтеграл  $\int_0^1 x^{-4} dx$ .

**Приклад 22.** Інтеграл  $\int_0^1 \frac{x+2x^2}{4x^2+3x^3} dx$  є розбіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{x+2x^2}{4x^2+3x^3} = \frac{1}{4}.$$

**Приклад 23.** Інтеграл  $\int_0^1 x^{-3/2} \sin x dx$  є збіжним, бо збіжним є

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx \text{ і } 0 \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0;1].$$

**Приклад 24.** Інтеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad -\infty < a < b < +\infty,$$

є збіжним, якщо  $\alpha < 1$ , і є розбіжним, якщо  $\alpha \geq 1$ , бо

$$\int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-\eta), & \alpha = 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{(b-\eta)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right), & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

**Теорема 10 (Абеля) [4, 8-10].** Нехай функція  $f:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою на проміжку  $[a;+\infty)$ , а функція  $g:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною і обмеженою на проміжку  $[a;+\infty)$ . Тоді невласний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (9)$$

є збіжним.

**Теорема 11 (Діріхле) [4, 8-10].** Нехай функції  $f:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є такою, що

$$(\exists c_1 > 0)(\forall \eta \in [a;+\infty)): \left| \int_a^\eta f(x)dx \right| \leq c_1,$$

а функція  $g:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на проміжку  $[a;+\infty)$  і  $g(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ . Тоді невласний інтеграл (9) є збіжним.

**Приклад 25 [4, 8-10].** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} x^{-1} \sin x dx$  є збіжним, бо

$$\left| \int_1^{\eta} \sin x dx \right| = |-\cos \eta + \cos 1| \leq 2, \quad \eta \in [1; +\infty),$$

а функція  $g(x)=1/x$  є монотонною на  $[1; +\infty)$  і  $g(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 26 [4, 8-10].** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} x^{-1} \cos x dx$  є збіжним, бо

$$\int_1^{\eta} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} + \int_1^{\eta} \frac{\sin x}{x^2} dx, \quad \eta \in [1; +\infty),$$

а функція  $g(x)=1/x$  є монотонною на  $[1; +\infty)$  і  $g(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ .

Невласний інтеграл (5) називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є інтеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx. \quad (10)$$

**Теорема 12 [4, 8-10].** Якщо невластний інтеграл (5) є абсолютно збіжним, то він є збіжним і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Теорема 12 показує, що не всі властивості визначених інтегралів є справедливими і для невластних інтегралів. Нагадаємо [4, 8-10], що якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на проміжку  $[a; b]$ , то на цьому ж проміжку інтегровна за Ріманом і функція  $|f|$ , але якщо функція  $|f|$  є інтегрованою на  $[a; b]$ , то функція  $f$  не обов'язково є інтегрованою на  $[a; b]$ .

**Наслідок 5 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[a; \eta] \subset [a; b)$  і  $(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [a; b)) : |f(x)| \leq c_1 g(x)$ , де  $g : [a; b) \rightarrow [0; +\infty)$  – така функція, що збіжним є інтеграл (6). Тоді невластний інтеграл (5) є абсолютно збіжним.

**Наслідок 6 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$  і

$(\exists \alpha > 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : |f(x)| \leq c_1 / x^\alpha$ . Тоді невластний інтеграл (7) є абсолютно збіжним.

**Наслідок 7 [4, 8-10].** Нехай функція  $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку  $[\eta; 1] \subset (0; 1]$  і

$(\exists \alpha < 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : |f(x)| \leq c_1 / x^\alpha$ . Тоді невластний інтеграл (8) є абсолютно збіжним.

Якщо невластний інтеграл (5) є збіжним, а інтеграл (10) є розбіжним, то невластний інтеграл (5) називають [4, 8-10] умовно збіжним.

**Приклад 27.** Інтеграл  $\int_1^{+\infty} x^{-2} \sin x dx$  є абсолютно збіжним, бо

збіжним є інтеграл  $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$  і  $|x^{-2} \sin x| \leq x^{-2}$ , якщо  $x \in [1; +\infty)$ .

**Приклад 28.** Інтеграл  $\int_0^1 x^{-7/2} \sin^3 x \cos 2x dx$  є абсолютно

збіжним, бо збіжним є інтеграл  $\int_0^1 x^{-1/2} dx$  і  $|x^{-7/2} \sin^3 x \cos 2x| \leq x^{-1/2}$ ,

якщо  $x \in (0; 1]$ .

**Приклад 29 [4, 8-10].** Інтеграли

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{і} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

є умовно збіжними.

### 3.2.5. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте теорему про обмеженість інтегрованої функції.
3. Сформулюйте критерій інтегровності.
4. Сформулюйте теорему про інтегровність неперервної функції.
5. Сформулюйте теорему про інтегровність монотонної функції.
6. Сформулюйте теорему про однорідність інтеграла.
7. Сформулюйте теорему про адитивність інтеграла.
8. Сформулюйте теорему про інтегровність модуля інтегрованої функції.
9. Сформулюйте першу теорему про середнє для визначених інтегралів.
10. Сформулюйте другу теорему про середнє для визначених інтегралів.
11. Сформулюйте теорему про похідну інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею.
12. Запишіть і обґрунтуйте формулу Лейбніца-Ньютона.

13. Сформулюйте теорему про інтегрування частинами визначених інтегралів.
14. Сформулюйте теорему про заміну змінних у визначеному інтегралі.
15. Наведіть приклад функції  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на проміжку  $[0;1)$  і неінтегрованої за Ріманом на  $[0;1]$ .
16. Наведіть приклад функції  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ , диференційовної на проміжку  $[0;1]$ , для якої функція  $f'$  є неінтегрованою за Ріманом на  $[0;1]$ .
17. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $[a;b)$ .
18. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $(a;b]$ .
19. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $[0;+\infty)$ .
20. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $(-\infty;0]$ .
21. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $(-\infty;+\infty)$ .
22. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку  $[-1;1]$  з особливою точкою  $c = 0$ .
23. Сформулюйте означення абсолютно збіжного невласного інтеграла.
24. Сформулюйте означення умовно збіжного невласного інтеграла.
25. Сформулюйте критерій Коші збіжності невласного інтеграла.
26. Сформулюйте теореми про збіжність невласного інтеграла невід'ємної функції.
27. Сформулюйте теорему про зв'язок між збіжністю та абсолютною збіжністю невласного інтеграла.
28. Сформулюйте ознаку Абеля збіжності невласного інтеграла.
29. Сформулюйте ознаку Діріхле збіжності невласного інтеграла.
30. Сформулюйте означення невласного інтеграла в розумінні головного значення в  $\infty$ .

### 3.2.6. Вправи і задачі.

1. Знайдіть:

$$1. \int_1^2 \left( \frac{1}{3x} + \sqrt{2x} \right) dx.$$

$$3. \int_{-4}^{-1} \left( \ln 2 - \frac{1}{2x^2} \right) dx.$$

$$5. \int_0^1 (1-2x)^9 dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{x}{3+2x^2} dx.$$

$$2. \int_{-2}^1 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{3}) dx.$$

$$4. \int_0^1 (e^{-2x+1} - \sqrt{2}) dx.$$

$$6. \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^4}} dx.$$

$$8. \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-x^3} dx.$$

9.  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$
10.  $\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx.$
11.  $\int_{-4}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}}.$
12.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx.$
13.  $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
14.  $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
15.  $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
16.  $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$
17.  $\int_0^{1/\sqrt{2}} x \sin \pi x^2 dx.$
18.  $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 dx.$
19.  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx.$
20.  $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$
21.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 2x} dx.$
22.  $\int_{-4}^{-1} \sqrt{-x} dx.$
23.  $\int_{-8}^0 \sqrt[4]{-x} dx.$
24.  $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$
25.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx.$
26.  $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$
27.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \operatorname{ctg} \sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx.$
28.  $\int_{(\pi/6)^3}^{(\pi/3)^3} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \cos^2 \sqrt[3]{x}} dx.$
29.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{x \sin^2 \ln x} dx.$
30.  $\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$

2. Знайдіть:

1.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$
2.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 2}.$
3.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(-2x+1)(-2x+5)}.$
4.  $\int_2^3 \frac{2+2x}{1-x^2} dx.$

5.  $\int_{-3}^{-2} \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$
6.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$
7.  $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x+2}.$
8.  $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x-2} dx.$
9.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} dx.$
10.  $\int_{-1}^0 \frac{x+2}{1-2x} dx.$
11.  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx.$
12.  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2x^2} dx.$
13.  $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$
14.  $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx.$
15.  $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx.$
16.  $\int_{-2}^0 \frac{x^3}{x-1} dx.$
17.  $\int_2^3 \frac{x^4 dx}{x^2-1}.$
18.  $\int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1}.$
19.  $\int_{-1}^0 \frac{x^2+2}{x+2} dx.$
20.  $\int_{-2}^0 \frac{x^2-2}{x-2} dx.$
21.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$
22.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$
23.  $\int_0^1 \frac{2+2x}{1+x^2} dx.$
24.  $\int_{-1}^0 \frac{1-2x}{x^2+1} dx.$
25.  $\int_0^1 \frac{x+1}{2x+1} dx.$
26.  $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx.$
27.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$
28.  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+3}.$
29.  $\int_0^1 \frac{1+2x}{x^2+1} dx.$
30.  $\int_0^1 \frac{1-x}{1+2x^2} dx.$

**3. Знайдіть:**

1.  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx.$

2.  $\int_1^e \ln^2 x dx.$

3.  $\int_0^1 \arcsin^2 x dx$ .
4.  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$ .
5.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx$ .
6.  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$ .
7.  $\int_1^e (1 - \ln x)^2 dx$ .
8.  $\int_{1/e}^1 x \ln^2 x dx$ .
9.  $\int_1^e (1+x) \ln x dx$ .
10.  $\int_{1/e}^1 x^{10} \ln x dx$ .
11.  $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x) \sin x dx$ .
12.  $\int_{-1}^0 (x+1) \arcsin x dx$ .
13.  $\int_0^1 (x^2 - x) e^x dx$ .
14.  $\int_0^1 (x^2 + x) e^{-2x} dx$ .
15.  $\int_{-\pi}^0 (x^3 + x) \sin x dx$ .
16.  $\int_{-\pi/2}^0 (x^3 - x) \cos 2x dx$ .
17.  $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ .
18.  $\int_{\sqrt{3}/3}^1 x^{-2} \sqrt{1+x^2} dx$ .
19.  $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx$ .
20.  $\int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx$ .
21.  $\int_0^{\pi} x^5 \cos x dx$ .
22.  $\int_{-\pi/2}^0 x^4 \sin x dx$ .
23.  $\int_0^1 \arcsin x dx$ .
24.  $\int_0^1 x \arcsin x dx$ .
25.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ .
26.  $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$ .
27.  $\int_0^1 x^2 \arcsin x dx$ .
28.  $\int_0^1 x^3 \arctg x dx$ .
29.  $\int_0^1 x \arctg x dx$ .
30.  $\int_0^1 x^2 \arctg x dx$ .

4. Знайдіть:

1.  $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$ .
2.  $\int_0^2 \frac{1}{x + \sqrt{4 - x^2}} dx$ .
3.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$ .
4.  $\int_0^3 \frac{1}{(3 + x^2)^{5/2}} dx$ .
5.  $\int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2} dx}{x^2}$ .
6.  $\int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^4} dx$ .
7.  $\int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{(25 - x^2)^3}}{x^4} dx$ .
8.  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ .
9.  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1 + x^2)^3}$ .
10.  $\int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$ .
11.  $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5 - 4x}}$ .
12.  $\int_0^2 (\sqrt{4 - x^2})^3 dx$ .
13.  $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x + 5}}$ .
14.  $\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{2x + 1}} dx$ .
15.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$ .
16.  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 2}} dx$ .
17.  $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} dx$ .
18.  $\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$ .
19.  $\int_0^4 x^3 \sqrt{9 + x^2} dx$ .
20.  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ .
21.  $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1 + x}} dx$ .
22.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + x - x^2}} dx$ .
23.  $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x} - 1} dx$ .
24.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ .
25.  $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ .
26.  $\int_0^3 x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$ .
27.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} dx$ .
28.  $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$ .

$$29. \int_9^{64} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$30. \int_1^4 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}.$$

5. Знайдіть:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos 2x dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin 3x dx.$$

$$5. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1}.$$

$$6. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}.$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{x}{x^3-1} dx.$$

$$8. \int_3^{+\infty} \frac{x}{x^3+1} dx.$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}.$$

$$10. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+3)}.$$

$$11. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

$$12. \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx.$$

$$13. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$14. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$15. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+2x-3}.$$

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$$

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln^2(x+3)}.$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)(x+1)}.$$

$$19. \int_0^{+\infty} (2x+3)e^{-x} dx.$$

$$20. \int_0^{+\infty} (-x+3)e^{-x} dx.$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx.$$

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$25. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$26. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$27. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

$$29. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$29. \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{(1+|x|)^2} dx.$$

$$30. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

6. Знайдіть:

$$1. \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{9-x^5}}.$$

$$3. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}.$$

$$9. \int_{-1}^e \ln|x| dx.$$

$$11. \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$13. \int_0^e \ln^2 x dx.$$

$$15. \int_{-1}^2 \frac{x^3}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

$$17. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

$$19. \int_{-1}^1 \frac{3x+1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

$$21. \int_0^e x \ln x dx.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$4. \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}.$$

$$8. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$10. \int_{-1}^e x \ln|x| dx.$$

$$12. \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$14. \int_0^1 \ln \sqrt{x} dx.$$

$$16. \int_{-1}^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{|x-2|}}.$$

$$18. \int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt{|x-2|}}.$$

$$20. \int_{1/2}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$22. \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

$$23. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$$

$$29. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$24. \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$26. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}.$$

$$28. \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 4}} dx.$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx.$$

7. Знайдіть:

$$1. \text{ v.p. } \int_{-7}^7 \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$3. \text{ v.p. } \int_0^5 \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$5. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

$$7. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$$2. \text{ v.p. } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$4. \text{ v.p. } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$6. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx.$$

$$8. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx.$$

8. Дослідіть на абсолютну і умовну збіжність інтеграли:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x} dx.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{1+x^3} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} x^2 \cos e^x dx.$$

$$8. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

### 3.2.7. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть:

$$1. \int_1^2 (3x^4 + \sqrt{2x}) dx.$$

$$2. \int_{-2}^1 (2\sqrt[4]{x} + \sqrt{3}) dx.$$

3.  $\int_{-4}^{-1} (\ln 2 - x^2) dx .$
4.  $\int_0^1 (e^{-x} - 1) dx .$
5.  $\int_0^1 (1 + 2x)^{11} dx .$
6.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}} dx .$
7.  $\int_0^1 \frac{dx}{1 + 2x^2} .$
8.  $\int_0^1 \sqrt[3]{1 - x} dx .$
9.  $\int_0^1 (2^{-x} - 1) dx .$
10.  $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx .$
11.  $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x} .$
12.  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}(-x) dx .$
13.  $\int_0^1 \frac{dx}{2 + x^2} .$
14.  $\int_0^1 \frac{dx}{2 + 9x^2} .$
15.  $\int_0^1 \sqrt{1 + 2x} dx .$
16.  $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx .$
17.  $\int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx .$
18.  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx .$
19.  $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx .$
20.  $\int_0^3 x \sqrt{9 - x^2} dx .$
21.  $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx .$
22.  $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx .$
23.  $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-1} dx .$
24.  $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx .$
25.  $\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 1} dx .$
26.  $\int_5^6 \frac{1}{x^2 - 4} dx .$
27.  $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - 4x + 3} dx .$
28.  $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 3} dx .$
29.  $\int_{-1}^0 \frac{2x + 3}{x^2 + x + 2} dx .$
30.  $\int_0^1 \frac{1 - 2x}{x^2 - x + 2} dx .$

2. Знайдіть:

1.  $\int_{-1/2}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx.$
2.  $\int_{-1/2}^0 \frac{x}{x^2 - x + 1} dx.$
3.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$
4.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$
5.  $\int_{-2}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2} dx.$
6.  $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$
7.  $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}.$
8.  $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^3} dx.$
9.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - x + 5}.$
10.  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 5}.$
11.  $\int_0^1 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 + 1} dx.$
12.  $\int_{-1}^0 \frac{3x^5 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$
14.  $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$
13.  $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2 + 2x + 9)^2} dx.$
15.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2 - 3x + 4)}.$
16.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2 - 5x + 6)}.$
17.  $\int_0^1 x^2 e^x dx.$
18.  $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$
19.  $\int_{-2}^0 (x^2 + 2)e^{x/2} dx.$
20.  $\int_1^8 \frac{\ln^2 x}{x^{3/2}} dx.$
21.  $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx.$
22.  $\int_0^9 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$
23.  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$
24.  $\int_0^3 (\sqrt{9 - x^2})^3 dx.$
25.  $\int_0^2 \frac{x^2}{(4 + x^2)^2} dx.$
26.  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2} dx.$
27.  $\int_0^2 \sqrt{2x + x^2} dx.$
28.  $\int_1^2 \frac{dx}{(\sqrt{1+x})^3 + \sqrt{1+x}}.$

$$29. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+5x+x^2}}.$$

3. Знайдіть:

$$1. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos^2 x}.$$

$$3. \int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx.$$

$$5. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx.$$

$$9. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$11. \int_0^{16} (\sqrt{256 - x^2})^3 dx.$$

$$13. \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}.$$

$$15. \int_0^1 \frac{x^4}{(2 - x^2)^{3/2}} dx.$$

$$17. \int_0^1 (\sqrt{9 - x^2})^3 dx.$$

$$19. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$21. \int_2^3 (x-1) \ln^2(x-1) dx.$$

$$23. \int_0^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$30. \int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \cos x}.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$6. \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$8. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx.$$

$$10. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$12. \int_{1/2}^2 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$14. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$$

$$16. \int_{0,1}^{10} \frac{\ln x dx}{1 + x^2}.$$

$$18. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$20. \int_0^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$22. \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$24. \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$$

$$25. \int_0^4 x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx .$$

$$27. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2} .$$

$$29. \int_1^9 \sqrt{x} \ln x dx .$$

$$26. \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx .$$

$$28. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{4 + x^2} .$$

$$30. \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx .$$

#### 4. Знайдіть:

$$1. \int_{-1}^2 \sqrt[3]{|x-1|} dx .$$

$$3. \int_{-1}^{1/2} |\arcsin x| dx .$$

$$5. \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\operatorname{arctg} x| dx .$$

$$7. \int_{1/e}^e |1 - \ln x| dx .$$

$$9. \int_{-2}^1 \sqrt{|x-1|} dx .$$

$$11. \int_{-1}^{1/2} \arcsin |x| dx .$$

$$13. \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \operatorname{arctg} |x| dx .$$

$$15. \int_{1/e}^e |1 + \ln x| dx .$$

$$17. \int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx .$$

$$19. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{tg} x| dx .$$

$$21. \int_{-\pi/2}^{\pi/6} |\sin |x|| dx .$$

$$2. \int_{-3}^5 \sqrt[3]{|4-x|} dx .$$

$$4. \int_{-1}^{1/2} |\arccos x| dx .$$

$$6. \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\operatorname{arctg} x| dx .$$

$$8. \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx .$$

$$10. \int_{-2}^6 \sqrt{|4-x|} dx .$$

$$12. \int_{-1}^{1/2} \arccos |x| dx .$$

$$14. \int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \operatorname{arctg} |x| dx .$$

$$16. \int_{-\sqrt{3}/2}^1 |\operatorname{arctg} x| dx .$$

$$18. \int_{-2}^3 |4 - x^2| dx .$$

$$20. \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} |\cos |x|| dx .$$

$$22. \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos |x| dx .$$

$$23. \int_{1/e}^e |\ln^2 x| dx.$$

$$25. \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

$$27. \int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-2; -1), \\ 1, & x \in [-1; 1]. \end{cases}$$

$$28. \int_{-1}^2 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 2]. \end{cases}$$

$$29. \int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2; -1), \\ 2, & x \in [-1; 0), \\ x^3, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$30. \int_1^4 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1; 2), \\ x^2, & x \in [2; 3), \\ x, & x \in [3; 4]. \end{cases}$$

$$24. \int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x| \operatorname{arctg} |x| dx.$$

$$26. \int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x| \operatorname{arctg} x dx.$$

### 5. Знайдіть:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$3. \int_{-\infty}^1 \frac{\exp(\operatorname{arctg} |x|)}{x^2+1} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx.$$

$$9. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$11. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\operatorname{arctg} |x|)}{x^2+1} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+3} dx.$$

$$10. \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x} dx.$$

$$12. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln^2 \ln x} dx.$$

$$14. \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx.$$

$$17. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

$$19. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$23. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$25. \int_0^e \ln x dx.$$

$$27. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$29. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$16. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$18. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x - 1)^2} dx.$$

$$20. \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$22. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$24. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

$$26. \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$28. \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$30. \int_0^3 \frac{x^5 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

### 3.3. Деякі застосування визначеного інтеграла

За допомогою визначеного інтеграла можна обчислювати площі, об'єми, роботу, масу, координати центра мас, статичні моменти, моменти інерції та багато інших характеристик геометричних, природничих і суспільних об'єктів та явищ. У цьому підрозділі ілюструються основні ідеї, що лежать в основі відповідних застосувань.

**3.3.1. Обчислення площ плоских фігур.** Якщо деяка плоска фігура є об'єднанням скінченної кількості попарно неперетинних многокутників (багатокутників), то її площа дорівнює сумі площ цих трикутників.

Криволінійною трапецією називається [4, 8-10] множина  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ , тобто це множина точок площини, яка обмежена лініями  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  і  $y = f(x)$ , де  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  – невід'ємна функція на проміжку  $[a; b]$ .

Криволінійну трапецію не можна, взагалі кажучи, подати у

вигляді об'єднання скінченного числа многокутників. Для знаходження площі криволінійної трапеції природно поступити так. Розглянемо розбиття  $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ ,  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , проміжку  $[a; b]$  на  $n$  частин (див. рис. 1). Нехай  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  і  $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$ . На кожному проміжку  $[x_k; x_{k+1}]$ , як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами  $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$  і  $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ . Ці прямокутники будемо називати відповідно вхідними і вихідними. Площі  $k$ -го вхідного і вихідного прямокутників відповідно рівні  $m_k \Delta x_k$  і  $M_k \Delta x_k$ . Суми площ вхідних і вихідних прямокутників відповідно дорівнюють [4, 8-10]:

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \bar{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Якщо  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma} = P$ , то число  $P$  приймають за площу криволінійної трапеції.

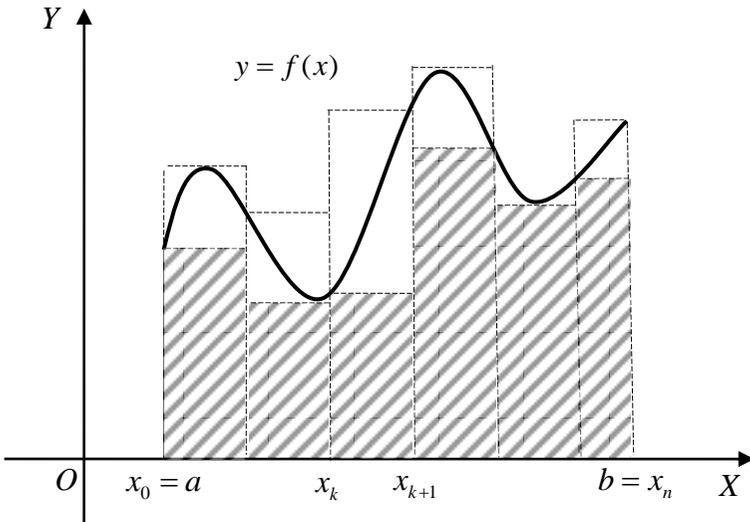


Рис. 1.

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною і неперервною на проміжку  $[a; b]$ , то криволінійна трапеція  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$  має площу  $P$  і

$$P = \int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

З теореми 1 випливає такий геометричний зміст первісної  $F$  функції  $f$ : різниця  $F(b) - F(a)$  дорівнює площі криволінійної трапеції.

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функції  $y_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $y_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними на проміжку  $[a; b]$  і  $y_1(x) \leq y_2(x)$  для  $x \in [a; b]$ , то площа узагальненої криволінійної трапеції  $E = \{(x; y) : y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$  знаходиться за формулою

$$P = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

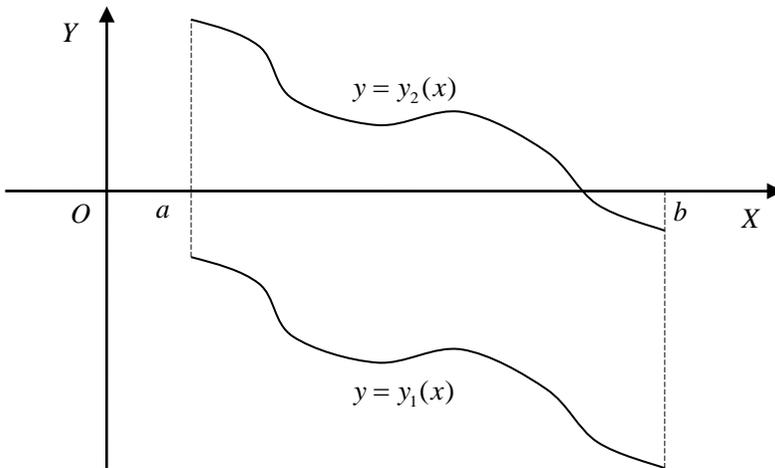


Рис. 2

**Приклад 1.** Якщо  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$ , то

$$P = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

**Приклад 2.** Якщо  $E$  – множина, обмежена кривими  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = e^x$  і  $y = e^{-x}$ , то

$$P = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{2}{e}.$$

**Приклад 3.** Якщо  $E$  – множина, обмежена кривими  $y = x^2$  і

$y = \sqrt{x}$ , то

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Приклад 4.** Якщо  $E$  – множина, обмежена еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

то

$$P = 4 \int_0^a \sqrt{b^2 - b^2 \frac{x^2}{a^2}} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

**Зауваження 1 [4, 8-10].** Формула (1) придатна і для знаходження площі криволінійної трапеції  $E$ , якщо функція  $f$  задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

В цьому випадку формула (1) приймає вигляд

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dx(t),$$

якщо функція  $x: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[\alpha; \beta]$  і  $x'(t) > 0$  для всіх  $t \in [\alpha; \beta]$ .

**Приклад 5 [4, 8-10].** Знаходячи площу фігури, яка обмежена віссю абсцис і однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

отримуємо

$$P = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt - \int_0^{2\pi} 2 \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3\pi.$$

Кожній точці  $A$  площини з декартовими координатами  $(x; y)$  можна поставити у відповідність полярні координати  $(\varphi; \rho)$ , де  $\rho$  – відстань від точки  $O$  (початку координат) до точки  $A$ , а  $\varphi$  – кут між вектором  $\overrightarrow{OA}$  і додатним напрямом осі  $OX$  (тобто вектором  $\vec{i}$ ). Декартові координати  $(x; y)$  і полярні координати  $(\varphi; \rho)$  точки  $A$  площини пов'язані формулами [4, 8-10]:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

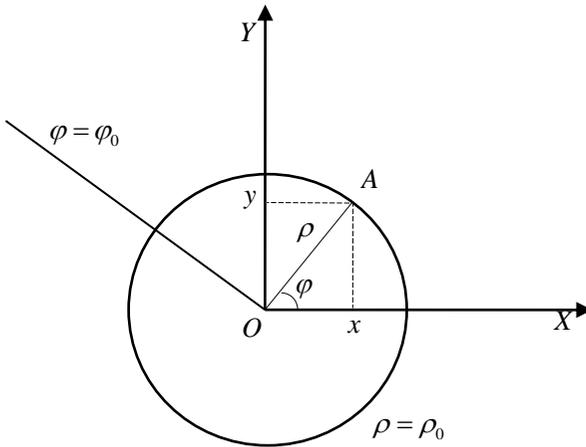


Рис. 3

В полярній системі координат  $\varphi = \varphi_0$  – це рівняння променя, а  $\rho = \rho_0$  – рівняння кола. В полярній системі координат  $\rho$  – відстань і тому  $\rho \geq 0$ . Проте, інколи на формули (2) дивляться як на формули, що задають відображення однієї площини на іншу, і тоді  $\rho$  може бути і від'ємним. Відомо, що площа кругового сектора знаходиться за формулою  $P = \frac{1}{2} R^2 \varphi$ .

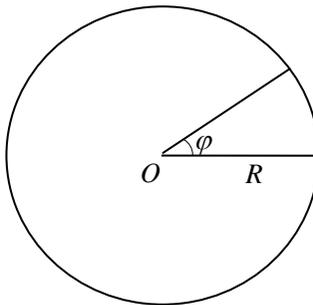


Рис. 4

Криволінійним сектором називається задана в полярній системі координат множина  $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ , де  $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка невід’ємна функція на проміжку  $[\alpha; \beta]$ . Іншими словами, криволінійний сектор – це фігура  $E$ , обмежена променями  $\varphi = \alpha$  та  $\varphi = \beta$  і деякою кривою, яка в полярній системі координат має рівняння  $\rho = \rho(\varphi)$ .

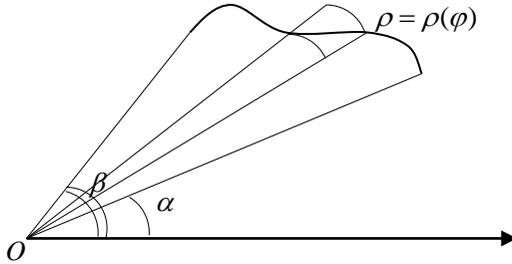


Рис. 5

**Теорема 3 [4, 8-10].** Якщо функція  $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і невід’ємною на проміжку  $[\alpha; \beta]$ , то площа криволінійного сектора  $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$  знаходиться за формулою

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

**Приклад 6 [4, 8-10].** Якщо  $E$  – множина, обмежена кардіоїдою  $\rho = 1 + \cos \varphi$ , то

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

**Приклад 7 [4, 8-10].** Якщо  $E = \{(\varphi; \rho) : 1 + \cos \varphi \leq \rho \leq 3 \cos \varphi\}$ , то

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (3 \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \varphi d\varphi + 4 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \pi. \end{aligned}$$

**3.3.2. Довжина кривої.** Кожна неперервна крива (шлях)  $\gamma$  задається параметрично

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (1)$$

де  $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  – функції, неперервні на проміжку  $[\alpha; \beta]$ .

Точки  $A(\gamma_1(\alpha); \gamma_2(\alpha))$  називають початком шляху, а точки  $B(\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta))$  – його кінцем. Для знаходження довжини шляху  $\gamma$  розглянемо розбиття  $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; n}\}$ ,  $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$ , проміжку  $[\alpha; \beta]$  (див. рис. 1). Нехай  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  і  $\lambda = \max\{\Delta t_k : k \in \overline{0; n-1}\}$ . Точкам  $t_k$  на шляху відповідають точки  $M_k(x_k; y_k)$ , де  $x_k = \gamma_1(t_k)$  і  $y_k = \gamma_2(t_k)$ . З'єднаємо послідовно точки  $M_k$  відрізками. Отримаємо ламану з довжиною  $l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$ . Шлях  $\gamma$  називається [4, 8-10] спрямлюваним, якщо  $\sup\{l_\tau : \tau\} = L < +\infty$ . При цьому число  $L$  називається довжиною спрямлюваного шляху  $\gamma$ .

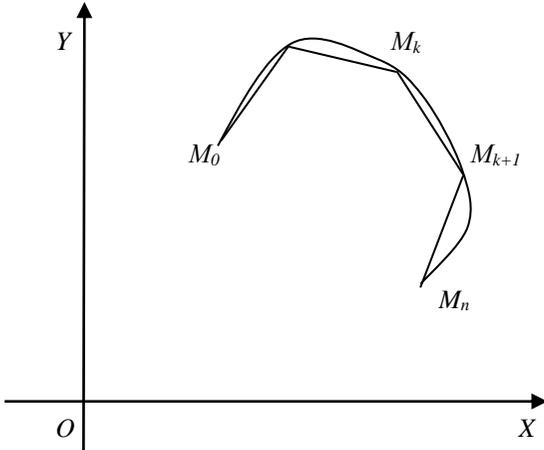


Рис. 1

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функції  $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовними на проміжку  $[\alpha; \beta]$ , то шлях, заданий системою (1), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt.$$

**Наслідок 1 [4, 8-10].** Якщо шлях  $\gamma$  заданий рівнянням  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , і функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною на проміжку  $[a; b]$ , то цей шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**Наслідок 2 [4, 8-10].** Якщо шлях  $\gamma$ , заданий в полярній системі координат рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$ , і функція  $\rho: [\alpha; \beta] \rightarrow [0; +\infty)$  є неперервно диференційовною і невід'ємною на проміжку  $[\alpha; \beta]$ , то такий шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Якщо  $\gamma$  – спрямлюваний шлях, то його частина, що відповідає проміжку  $[a; t]$  також спрямлюваний шлях. Якщо функції  $\gamma_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\gamma_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовними на проміжку  $[a; b]$ , то довжина цієї частини шляху (він називається дугою) знаходиться за формулою [4, 8-10]:

$$l = \int_a^t \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau.$$

Диференціал  $dl$  функції  $l: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається [4, 8-10] диференціалом дуги, тобто  $dl = \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau$ .

Аналогічно,  $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$  і  $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$ , якщо відповідний шлях заданий рівнянням  $y = y(x)$  і  $\rho = \rho(\varphi)$ , відповідно.

Шлях  $\gamma$  в просторі  $\mathbb{R}^3$  задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases} \quad (2)$$

Означення спрямлюваного шляху в  $\mathbb{R}^3$  формулюється за аналогією.

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функції  $\gamma_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\gamma_3: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовними на проміжку  $[a; b]$ , то шлях  $\gamma$ , заданий системою (2), є спрямлюваним і його довжина

знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} dt.$$

**Приклад 1 [4, 8-10].** Якщо  $\gamma$  – це астроида

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

то

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\cos^2 t \sin^4 t} dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6.$$

**Приклад 2.** Якщо  $\gamma$  – це частина параболи  $y = x^2/2$ ,  $x \in [0; 1]$ ,

то

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1).$$

**Приклад 3.** Якщо  $\gamma$  – це частина логарифмічної спіралі  $\rho = e^\varphi$ ,  $\varphi \in [0; \pi]$ , то

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^\varphi d\varphi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

**Приклад 4.** Якщо  $\gamma$  – це просторова крива

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \quad t \in [0; \pi/2], \end{cases}$$

то

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} dt = \pi\sqrt{2}/2.$$

**3.3.3. Площа поверхні обертання.** Нехай крива  $\gamma$  задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ . При обертанні навколо осі  $OX$  ця крива описує поверхню  $\Delta$ , яка називається поверхнею обертання.

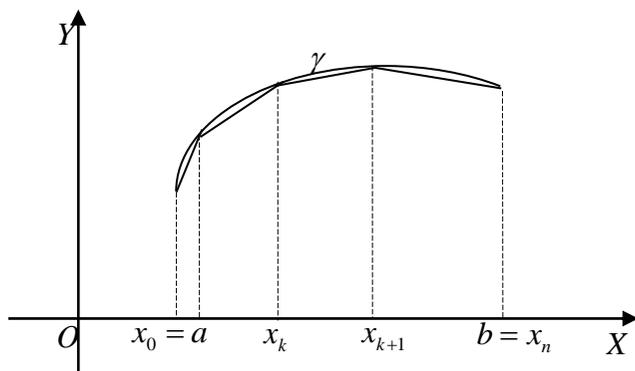


Рис.1

Для знаходження площі поверхні обертання розглянемо розбиття  $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ ,  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , проміжку  $[a; b]$  на  $n$  частин. Нехай  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  і  $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$ . Кожній точці  $x_k$  на кривій відповідає точка  $M_k(x_k; y_k)$ , де  $y_k = f(x_k)$ . З'єднаємо послідовно точки  $M_k$ . Отримаємо ламану. Ця ламана при обертанні опише фігуру з площею  $S_\tau$ , яка є об'єднанням бічних поверхонь зрізаних конусів. Якщо існує скінченна границя  $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau$ , то [4, 8-10] ця границя називається площею поверхні обертання.

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною на проміжку  $[a; b]$ , то поверхня, утворена обертанням кривої  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , навколо осі  $OX$  має площу, яку можна знайти за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (1)$$

**Приклад 1 [4, 8-10].** Якщо  $\Delta$  – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис частини синусоїди  $y = \sin x$ ,  $x \in [0; \pi]$ , то

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} d \cos x = \\ &= -\pi \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \Big|_0^\pi - \pi \ln \left( \cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right) \Big|_0^\pi = \end{aligned}$$

$$= 2\pi\sqrt{2} + \pi \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \ln(1+\sqrt{2}).$$

**Зауваження 1 [4, 8-10].** Оскільки  $\sqrt{1+y'^2} dx = dl$ , то формулу (1) можна переписати у вигляді

$$S = 2\pi \int_a^b |y| dl.$$

За останньою формулою можна знаходити площу поверхні обертання і тоді, коли крива  $\gamma$  задана параметрично або в полярній системі координат

**Приклад 2 [4, 8-10].** Якщо  $\Delta$  – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис лемніскати  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ , то

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi} dl = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{2}).$$

**3.3.4. Об'єм тіла обертання.** Нехай  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$  – криволінійна трапеція і функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є невід'ємною на проміжку  $[a; b]$ . При обертанні навколо осі  $OX$  ця трапеція опише певну фігуру  $T$ , яка називається тілом обертання. Знайдемо його об'єм. Для цього розглянемо розбиття  $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ ,  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , проміжку  $[a; b]$  на  $n$  частин. Нехай  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$  і  $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$ . На кожному проміжку  $[x_k; x_{k+1}]$ , як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами  $m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$  і  $M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ . Об'єм тіл (це циліндри), які опишуть відповідно  $k$ -й вхідний і  $k$ -й вихідний прямокутники рівні  $\pi m_k^2 \Delta x_k$  і  $\pi M_k^2 \Delta x_k$ . Суми об'ємів всіх вхідних і вихідних циліндрів відповідно рівні  $\underline{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta x_k$  і  $\bar{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta x_k$ . Якщо існують скінченні границі  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{V} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{V} = V$ , то число  $V$  приймають за об'єм тіла обертання [4, 8-10].

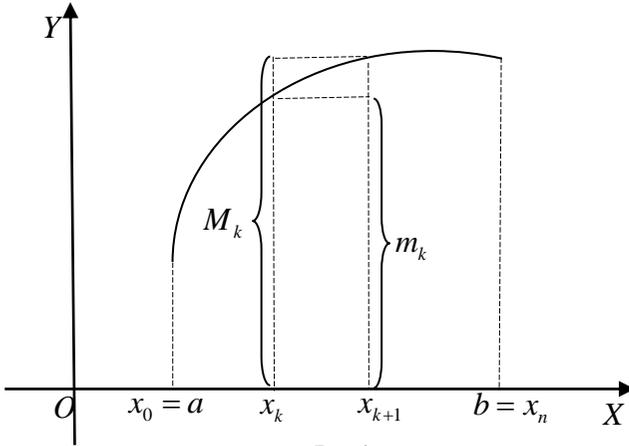


Рис.1

**Теорема 1 [4, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і невід'ємною на проміжку  $[a;b]$ , то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$  навколо осі  $OX$  має об'єм і

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx .$$

**Теорема 2 [4, 8-10].** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і невід'ємною на проміжку  $[a;b]$ , то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції  $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$  навколо осі  $OY$  має об'єм і

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx .$$

**Приклад 1.** Якщо  $T$  – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис частини криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$  і  $x = \pi$ , то

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2} .$$

**Приклад 2.** Якщо  $T$  – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями  $y = x^3$  і  $y = x$ , то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{4\pi}{21}.$$

**Приклад 3.** Якщо  $T$  – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями  $y = x^3$ ,  $y = -x$  і  $x = 1$ , то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{3},$$

бо  $x^3 \leq x$ , якщо  $x \in [0; 1]$ .

**Приклад 4 [4, 8-10].** Якщо  $T$  – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями

$$y = 0, \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad x = \pi,$$

то

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi^2}{2}.$$

**Приклад 5 [4, 8-10].** Якщо  $T$  – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями, які задані в полярній системі координат рівняннями  $\rho = e^{\varphi}$ ,  $\varphi = 0$  і  $\varphi = \pi$ , то  $x = \rho \cos \varphi = e^{\varphi} \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi = e^{\varphi} \sin \varphi$ ,  $dx = e^{\varphi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi$  і

$$V = \pi \int_{\pi}^0 e^{3\varphi} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{15} (e^{3\pi} + 1).$$

**Теорема 3 [4, 8-10].** Нехай просторове тіло  $T$  розміщене між двома площинами  $x = a$  та  $x = b$  і при перетині його площиною  $\pi_x$  перпендикулярною до осі  $OX$ , яка проходить через точку осі  $OX$  з абсцисою  $x$ , утворює в перерізі фігуру з площею  $P(x)$ . Нехай ця функція  $P: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$  і, крім цього, нехай будь-які два таких перерізи є такими, що їх проєкції на площину  $YOZ$  містяться один в одному. Тоді об'єм тіла  $T$  знаходиться за формулою

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

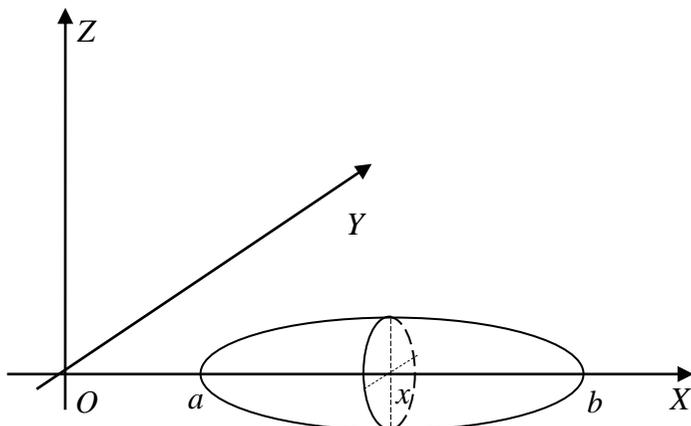


Рис. 2

**Приклад 6 [4, 8-10].** Для знаходження об'єму еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

зауважимо, що це тіло  $T$  лежить між площинами  $x = -a$  та  $x = a$  і при перетині його площиною, перпендикулярною до осі  $OX$ , що проходить через точку цієї осі з абсцисою  $x$ , в перетині утворюється

еліпс  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ , площа якого  $P(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)$ . Тому

$$V = \int_{-a}^a \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

### 3.3.5. Запитання для самоконтролю.

1. Що приймають за площу криволінійної трапеції?
2. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійної трапеції.
3. Що приймають за площу криволінійного сектора?
4. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійного сектора.
5. Який шлях називають спрямлюваним?
6. Що називають довжиною спрямлюваного шляху?
7. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження довжини спрямлюваного шляху.
8. Що приймають за площу поверхні обертання?
9. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі поверхні

обертання.

10. Що приймають за об'єм тіла обертання?

11. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження об'єму тіла обертання.

### 3.3.6. Вправи і задачі.

1. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

1.  $y = -x^2 - x + 2$ ,  $y = x + 2$ .

2.  $y = 1 - x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ .

3.  $y = -x^2 + 4x$ ,  $y = -x + 4$ .

4.  $y = 2 - x$ ,  $y = x^2$ .

5.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $y = -3x + 4$ .

6.  $y = (4 - x^2)$ ,  $y = x^2 - 2x$ .

7.  $y = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = -3x + 4$ .

8.  $y = x^2$ ,  $y = 2x - 1$ ,  $x = 0$ .

9.  $y = x^2$ ,  $y = (x - 2)^2$ ,  $y = 4$ .

10.  $y = (x + 2)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

11.  $y^2 + x^2 = 1$ ,  $y + x = 1$ .

12.  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 4 - x^2$ .

13.  $y = -x^2$ ,  $y = -(x - 2)^2$ ,  $y = -3$ .

14.  $y = -x^2$ ,  $y = -2x - 1$ ,  $x = 0$ .

15.  $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ .

16.  $y^2 = x + 1$ ,  $y^2 = 9 - x$ .

17.  $y = (x - 2)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

18.  $x = 4 - y^2$ ,  $x = y^2 - 2y$ .

19.  $x = 4 - (y - 1)^2$ ,  $x = y^2 - 4y + 3$ .

20.  $y = x^2$ ,  $y + x = 2$ .

21.  $y = 2^x$ ,  $y = 2$ ,  $x = 2$ .

22.  $y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ .

23.  $y^2 = x^3$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ .

24.  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$ .

25.  $y = x^2 - 4x + 7, y = x + 3$ .

26.  $y = -x^2, x = 0, y = -3x - 4$ .

27.  $y = -x^2 + 4, y = x + 2$ .

28.  $y = -3x^2 + x + 2, y = -x + 1$ .

29.  $y^2 = 4x, 4y = x^2$ .

30.  $xy = 6, y = -x + 7$ .

2. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

1.  $y = |\lg x|, y = 0, x = 0,1, x = 10$ .

2.  $y = \arcsin|x|, y = \pi/3$ .

3.  $y = x \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}$ .

4.  $y = -x^2, y = 0, y = -3x - 4$ .

5.  $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3$ .

6.  $y = -x^2, x = 0, y = -3x - 4$ .

7.  $y = x^2, y = (x-2)^2, x = 0$ .

8.  $y = 2 \operatorname{tg} x, y = \frac{4}{3} \cos x$ .

9.  $y = -x^2, y = -(x+2)^2, x = 0$ .

10.  $y = |\operatorname{arctg} x|, y = \pi/3$ .

11.  $y = e^{|x|}, y = 0, x = -1, x = 1$ .

12.  $y = |\sin x|, y = 0, x = -\pi/4, x = \pi/4$ .

13.  $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0$ .

14.  $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x^2}{2}$ .

15.  $y = \ln x, y = \ln^2 x$ .

16.  $y = |\ln x|, y = 1$ .

17.  $y = |\arcsin x|, y = \pi/3$ .

18.  $y = \arccos|x|$ ,  $y = \pi/3$ .
  19.  $y = |\operatorname{arctg} x|$ ,  $y = \pi/4$ .
  20.  $y = \frac{\ln x}{4x}$ ,  $y = x \ln x$ .
  21.  $y = |-x^2 - 4x|$ ,  $y = 0$ .
  22.  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x^2 - 2y^2 \leq 1/4$ .
  23.  $y = \arccos|x|$ ,  $y = 1/2$ .
  24.  $4y = 8x - x^2$ ,  $4y = x + 6$ .
  25.  $y = \sqrt{e^x - 1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = \ln 2$ .
  26.  $xy = 6$ ,  $y = 7 - x$ .
  27.  $y = |x - 2|$ ,  $y = |x|$ ,  $y = 0$ .
  28.  $y = x - 1$ ,  $y^2 = x + 1$ .
  29.  $y = x^2 e^{-x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ .
  30.  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .
3. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими в полярній системі координат, або задана іншими вказаними умовами:
1.  $\rho = 1$ ,  $\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) = 1$ .
  2.  $\rho = \sin \varphi$ .
  3.  $\rho = \sin 2\varphi$ .
  4.  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = \cos 2\varphi$ .
  5.  $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ .
  6.  $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi$ .
  7.  $\rho = 3/2$ ,  $\rho = 2 + \cos \varphi$ .
  8.  $\rho = 2 \cos \varphi$ ,  $\rho = 3 \cos \varphi$ .
  9.  $\rho = 2 \sin \varphi$ ,  $\rho = 4 \sin \varphi$ .
  10.  $\rho = 3 + \cos 2\varphi$ .
  11.  $\rho = 2$ ,  $\rho = 3 - 2 \cos \varphi$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/4$ .
  12.  $\rho = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \varphi}$ .
  13.  $\rho = 4$ ,  $\rho = 1 + \cos \varphi$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/4$ .
  14.  $\rho = \cos \varphi$ ,  $\rho = 2 \cos \varphi$ .

15.  $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi$ .
16.  $\rho = 3 + 2 \cos \varphi$ .
17.  $\rho^2 + \varphi^2 = 1$ .
18.  $\rho = \varphi, \varphi = 0$ .
19.  $\rho = 2 \sin 2\varphi$ .
20.  $\rho = \cos 5\varphi$ .
21.  $\rho = 2 + \cos 2\varphi, \rho = 2 + \sin \varphi$ .
22.  $\rho = 2 - \cos 4\varphi, \rho = 3 + \cos 4\varphi$ .
23.  $\rho = \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \pi/4$ .
24.  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ .
25.  $(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1/2$ .
26.  $\rho = \cos 4\varphi$ .
27.  $\rho = 1 + \sin 4\varphi$ .
28.  $x^4 + y^4 = xy$ .
29.  $x^4 + y^4 = x^2$ .
30.  $\rho = 1 + \cos 4\varphi$ .

4. Знайдіть об'єм тіл, утворених при обертанні навколо осі  $OX$  плоских фігур, обмежених вказаними кривими:

1.  $x^4 + y^4 = x^2$ .
2.  $y = 3 \sin x, y = \sin x, x = \pi/2$ .
3.  $y = 2x - x^2, y = -x + 2$ .
4.  $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x, y = 0$ .
5.  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ .
6.  $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
7.  $y = \sin x, y = -x, x = \pi/2$ .
8.  $y = xe^x, y = 0, x = 1$ .
9.  $y = 2x - x^2, y = 0$ .
10.  $y = \operatorname{tg} x, y = -x, x = \pi/4$ .
11.  $y = \cos x, y = -x, x = \pi/4$ .

12.  $\rho = \varphi^2, \rho = 5.$
13.  $y = \arcsin x, y = x, x = 1/2.$
14.  $\varphi = (\rho + 1/\rho)/2, \rho = 1, \rho = 3.$
15.  $y = \operatorname{arctg} x, y = x, x = 1.$
16.  $x^4 + y^4 = xy.$
17.  $y = \cos x, y = -x, x = \pi/2.$
18.  $y = \arccos x, y = -x, x = 1.$
19.  $y = \operatorname{arcctg} x, y = -x, x = \sqrt{3}.$
20.  $(y - 3)^2 + 3x = 0.$
21.  $x^2 + xy + y^2 = 0.$
22.  $\rho = \sin 2\varphi.$
23.  $\rho = 1 + \cos \varphi.$
24.  $y = 0, x = 3/2, x = 3, \begin{cases} x = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(t - \sin t). \end{cases}$
25.  $y = e^x, y = 1 + x, x = 1.$
26.  $y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$
27.  $y = \sin x, y = 2x/\pi, x = \pi/3, x = \pi/4.$
28.  $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$
29.  $\rho = e^\varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi.$
30.  $y = \ln(1 + x), y = -x, x = 1.$

5. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі  $OY$  плоскої фігури, обмеженої вказаними кривими:

1.  $y = x^2, y = 4.$
2.  $y = \sqrt{x}, y = x.$
3.  $y = x^2, y = -x.$
4.  $y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1.$
5.  $y = x^2, y = -x, x = 1.$
6.  $y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$
7.  $y = 2x - x^2, y = 0.$
8.  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$

### 3.3.7. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

1.  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

2.  $y = x^2 - 4x + 4$ ,  $y = x$ .

3.  $y = -x^2 + x + 2$ ,  $y = -x + 2$ .

4.  $y = -x^2 - 4x$ ,  $y = x + 4$ .

5.  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = -x + 2$ .

6.  $y = -3x^2 - x + 2$ ,  $y = x + 1$ .

7.  $y = -x^2 + 1$ ,  $y = x^2 - 1$ .

8.  $y^2 = -x + 1$ ,  $y^2 = x - 1$ .

9.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 2x$ .

10.  $\sqrt{y} = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 2$ .

11.  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ .  $x = 0$ .

12.  $y = x^2$ ,  $y = (x - 2)^2$ ,  $y = 4$ .

13.  $y = \frac{1}{1 + \cos x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\pi/2$ ,  $x = \pi/2$ .

14.  $y = \arctg|x|$ ,  $y = \pi/3$ .

15.  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$ ,  $\frac{x^2}{2} - y^2 \geq 1$ .

16.  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .

17.  $y = \arccos x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = 0$ .

18.  $y = \arctg x$ ,  $y = \text{arcctg } x$ ,  $x = 0$ .

19.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \in [1; 4], \varphi \in [0; \pi]\}$ .

20.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi/2]\}$ .

21.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \geq \sqrt{\cos 2\varphi}, \rho \leq \sqrt{2}/2\}$ .

22.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi/2]\}$ .

23.  $\rho = \cos \varphi$ .

24.  $\rho = 2\sin \varphi$ .

25.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \cos \varphi, \rho \geq \cos 2\varphi\}$ .

26.  $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \sqrt{3} + 3\sin \varphi, \rho \geq \sin \varphi\}$ .
27.  $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, y \geq x, y \leq -\sqrt{3}x$ .
28.  $(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy$ .
29.  $x^4 + y^4 \leq x^2y$ .
30.  $\varphi = 4\rho - \rho^2, \varphi = 0$ .

2. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими параметрично або іншими вказаними умовами:

1.  $x \geq 0, \begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} t \in [0; 2\pi]$ .
3. (евольвента кола)  $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} t \in [0; 2\pi], x = 2$ .
4.  $y \geq 0, \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$
5.  $y \geq 0, \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t. \end{cases}$
6.  $y \geq 0, \begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
7.  $x \geq 0, \begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
8.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .
9.  $x \geq 0, \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$
10.  $x = 0, x = 1/2, \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$
11.  $x = 0, \begin{cases} x = 4t^2 - 6t, \\ y = 2t. \end{cases}$

$$12. \begin{cases} x = 3t/(1+t^3), \\ y = 3t^2/(1+t^3). \end{cases}$$

$$13. y = 0, y = 3, \begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$$

$$14. x = 0, \begin{cases} x = 4\cos^4 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$$

$$15. y \leq 0, \begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$$

$$16. y \geq x, \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$18. (y-x)^2 = x^5.$$

$$19. y^2 = (1-x^2)^3.$$

$$20. (\text{епіциклоїда}) \begin{cases} x = (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t, \\ y = (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t, \end{cases} \quad R > r > 0.$$

$$21. (\text{гіпоциклоїда}) \begin{cases} x = (R-r)\cos t - r\cos\frac{R-r}{r}t, \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t, \end{cases} \quad R > r > 0, \frac{R}{r} \in \mathbb{N}.$$

$$22. (\text{астроїда}) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

$$23. \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$24. (\text{кардіоїда}) \begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad a > 0.$$

25. (трактриса)  $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ ,  $y \in (0; a)$

(указівка:  $y = \sin t$ ).

26. (лист Декарта)  $x^3 + y^3 = 3axy$  (указівка:  $x = 3at/(1+t^3)$ ,  
 $y = 3at^2/(1+t^3)$ ).

27.  $y \geq 0$ ,  $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

28.  $\begin{cases} x = t^2/(1+t^2), \\ y = (t-t^3)/(1+t^3). \end{cases}$

29.  $y^2 = x(x-1)^2$ .

30.  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $y=4$ ,  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t). \end{cases}$

3. Знайдіть об'єм тіла, яке обмежене поверхнями:

1.  $z = 4x^2 + y^2$ ,  $z = 2$ .

2.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

3.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1$ ,  $z = 12$ .

4.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = x$ .

5.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

6.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$ ,  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$ .

7.  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 6$ ,  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ .

8.  $z = x^2 + 2y^2$ ,  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ .

9.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

10.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1$ ,  $z = 16$ .

11.  $\frac{x^2}{16} + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$
12.  $y = 2\sqrt{1 - x^2/3}, z = y\sqrt{3}, z = 0.$
13.  $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4.$
14.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$
15.  $z = x^2 + 5y^2, z = 5.$
16.  $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6.$
17.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z = 0, z = 7.$
18.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 0, z = 6.$
19.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$
20.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$
21.  $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$
22.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 0, z = 5.$
23.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$
24.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$
25.  $y = \sqrt{9 - x^2}, z = x, z = 0.$
26.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$
27.  $y = 4\sqrt{1 - x^2/9}, z = y\sqrt{3}, z = 0.$
28.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 0, z = 3.$
29.  $y = \sqrt{9 - x^2}, z = y, z = 0.$

$$30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, \quad z = 0, \quad z = 4.$$

4. Знайдіть довжину кривої:

$$1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$3. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad \varphi \in [-\pi/3; 0].$$

$$4. \rho = 2e^{3\varphi/3}, \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$5. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$6. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \quad t \in [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad t \in [\pi/2; \pi]. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

$$15. y = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

$$16. y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \quad x \in [0; 8/9].$$

17.  $y = 2 + \operatorname{ch} x$ ,  $x \in [0; 1]$ .
18.  $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ ,  $x \in [\ln \sqrt{15}; \ln \sqrt{24}]$ .
19.  $y = 1 - \ln \sin x$ ,  $x \in [\pi/6; \pi/3]$ .
20.  $y = 2 - e^x$ ,  $x \in [\ln \sqrt{3}; \ln \sqrt{8}]$ .
21.  $y = \operatorname{ch} x + 3$ ,  $x \in [0; 1]$ .
22.  $y = \ln \cos x + 2$ ,  $x \in [0; \pi/6]$ .
23.  $y = \operatorname{sh} x + 3$ ,  $x \in [0; 2]$ .
24.  $y = \ln \frac{5}{2x}$ ,  $x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}]$ .
25.  $y = \ln(1 - x^2)$ ,  $x \in [0; 1/4]$ .
26.  $\rho = 3\varphi$ ,  $\varphi \in [0; 4/3]$ .
27.  $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ .
28.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .
29.  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in [\pi/3; \pi/2]$ .
30.  $\rho = 3e^{3\varphi/2}$ ,  $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

5. Знайдіть площу поверхні, утвореної оберганням навколо осі  $OX$  вказаної кривої:

1.  $y = x\sqrt{x}$ ,  $x \in [0; 1]$ .
2.  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .
3.  $y^2 = 2x$ ,  $x \in [0; 3]$ .
4.  $y = \sin x$ ,  $x \in [0; \pi]$ .
5.  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $x \in [0; \pi/4]$ .
6. 
$$\begin{cases} x = e^t \operatorname{cost}, \\ y = e^t \operatorname{sint}, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2].$$
7. 
$$\begin{cases} x = t - \operatorname{sint}, \\ y = 1 - \operatorname{cost}, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$
8.  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ .
9.  $\rho = \cos 2\varphi$ .
10.  $\rho = 2a \sin \varphi$ ,  $a > 0$ .
11.  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ,  $x \in [0; a]$ ,  $a > 0$ .

12.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0.$
13.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a > 0.$
14. 
$$\begin{cases} x = a \left( \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$$
15. 
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$
16.  $(y - a/2)^2 + x^2 = a^2, a > 0.$
17.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0.$
18.  $y = x^2, x \in [0; 1].$
19.  $y = a \cos(\pi x / 2a), x \in [-a; a], a > 0.$
20.  $4x^2 + 3y^2 = 12.$
21.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, x \in [1; e].$
22.  $y = x^3 / 4, x \in [0; 2].$
23.  $y = e^{-x}, x \in [0; +\infty).$
24.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0.$
25.  $x^2 + y^2 = y.$
26.  $x^2 + y^2 = x.$
27.  $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}.$
28.  $(y - 1/2)^2 + x^2 = 1.$
29.  $y = 1/x, x \in [1; e].$
30.  $y = \cos(\pi x / 2), x \in [-1; 1].$

## Список використаних джерел

1. Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. К.: НТУУ «КПІ», 2013. 252 с.
2. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. Ч.1. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2016. 180 с.
3. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. Ч.2. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2017. 176 с.
4. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. Ч.3. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2018. 136 с.
5. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В., Дільний В.М. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. Ч.4. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2019. 186 с.
6. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В., Дільний В.М., Шавала О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. Ч.5. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2020. 125 с.
7. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Основи одновимірного комплексного аналізу: навчально-методичний посібник. Дрогобич: Швидкодрук, 2012. 273 с.
8. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2013. Ч.1. 503 с.; Ч.2. 484 с.
9. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. 2-ге вид., доп. та перероб. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. Ч.1. 517 с.; Ч.2. 511 с.
10. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: приклади і задачі: навчально-методичний посібник. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2026. 394 с.
11. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. К.: Вища шк., 1990. Ч.1. 380 с.; Ч.2. 1991. 365 с.; Ч.3. 1992. 360 с.
12. Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Інтеграл по багатовидах: навчальний посібник. Дрогобич: РВВ ДДПУ, 2021. 160 с.
13. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Либідь, 1993. Ч.1. 320 с.; Ч.2. 299 с.

14. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. К.: А.С.К., 2001. 648 с.
15. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. К.: Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
16. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2002. Ч.1. 463 с; Ч.2. 2003. 470 с.
17. Дюженкова Л.І., Носаль Т.В. Вища математика: Практикум. К.: Вища шк., 1991. 407 с.
18. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
19. Лиман Ф.М., Власенко В.Ф., Петренко С.В. Вища математика. Суми: Університетська книга, 2012. 614 с.
20. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Вища математика. Практикум: У 2-х ч. К.: КНЕУ, 2009. Ч.1. 2009. 706 с.; Ч.2. 2012. 748 с.
21. Лютий О.І., Макаренко О.І. Збірник задач з вищої математики. К.: КНЕУ, 2003. 305 с.
22. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Вища шк., 1992. Ч.1. 495 с.; Ч.2. 1993. 375 с.
23. Малярець Л.М., Афанасьєва Л.М., Ігначкова А.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.1. Х.: Вид. ХНЕУ, 2011. 392 с.
24. Михайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. Київ: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. 121 с.
25. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2-х ч. К.: Техніка, 1984. Ч.1. 600 с.
26. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. К.: Либідь, 1996. 440 с.
27. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. К.: Діал, 2003. 461 с.
28. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Х.: ХНУРЕ, 2002. 552 с.
29. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Х.: ХНУРЕ, 2002. 440 с.
30. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Х.: ХНУРЕ, 2002. 596 с.

31. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-ге вид. доп. і доопр. Х.: Рубікон, 1999. 320 с.
32. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 403 с.
33. Тріщ Б.М. Вища математика. Збірник індивідуальних завдань: навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2020. 149 с.
34. Хаць Р.В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: навчальний посібник. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2023. 130 с.
35. Хаць Р.В. Вища математика в прикладах і задачах. Ч.1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія: навчально-методичний посібник. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2025. 181 с.
36. Чікіна Н.О., Антонова І.В., Балака Л.О. та ін. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: У 2-х ч. Ч.1. Х.: Підручник НТУ «ХПІ», 2012. 224 с.
37. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. К.: Вища шк., 1984. 391 с.
38. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. К.: Вища школа, 1986. 512 с.
39. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2005. Ч.1. 447 с.; Ч. 2. 510 с.
40. Adams R.A., Essex C. Calculus: Complete course. 10th edition. Toronto: Pearson Canada, 2021. 1200 p.
41. Guichard D. Calculus: Early transcendentals. Calgary: Lyryx Learning Inc., 2021. 610 p.
42. Howard A., Bivens I., Stephen D. Calculus. 12th edition. Wiley: John Wiley & Sons, Inc., 2022. 1152 p.

Електронне навчально-методичне видання

**Руслан Хаць**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І  
ЗАДАЧАХ. Ч. 2. ВСТУП ДО  
МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ  
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ**

Навчально-методичний посібник  
для студентів спеціальностей  
F3 «Комп'ютерні науки», D3 «Менеджмент»,  
A4 «Середня освіта (Технології)»,  
A5 «Професійна освіта (Транспорт)»

**Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка**

*В авторській редакції*

**Технічний редактор**  
Руслан Хаць

Здано до набору 01.04.2026. Формат 60x90/16. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 15,31. Зам. 28.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.