№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

УДК 378.51.14+517.5

https://doi.org/10.52058/2786-6025-2026-2(56)-1283-1298

Хаць Руслан Васильович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Матурін Юрій Петрович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329

Комарницька Леся Іванівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038

МАТЕМАТИЧНИЙ ТА МЕТОДИЧНИЙ АСПЕКТИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАСТУПНОСТІ У ВИВЧЕННІ ФУНКЦІЙ

Анотація. У статті розкрито математичні та методичні засади забезпечення наступності між шкільною та університетською математичною освітою на матеріалі формування поняття функції та опанування способів її задання.

Показано, що типові труднощі учнів і студентів зумовлені насамперед зміною рівня абстракції: від інтуїтивно-наочного уявлення про залежність величин у школі до строгого теоретико-множинного розуміння функції як відображення між множинами з фіксацією області визначення й множини значень, а також із використанням понять ін’єкції, сюр’єкції та бієкції.

Систематизовано способи задання функцій у шкільному курсі (аналітичний, табличний, графічний, словесно-описовий) та у курсах вищої математики, алгебри й математичного аналізу (параметричний, неявний, а також задання як розв’язку функціональних рівнянь).

Окреслено дидактичні можливості кожного способу та роль цілеспрямованих переходів між репрезентаціями у формуванні функціонального, алгоритмічного й абстрактного мислення: від «формули» до «таблиці» і «графіка», а згодом - до дослідження властивостей, інтерпретації моделей та розв’язування рівнянь і нерівностей. Наголошено на методичній трансформації у ЗВО: область визначення часто не задається наперед і встановлюється в процесі дослідження; змістовно зростає роль мови множин, операцій з образами й прообразами та коректного читання графіка.

Окрему увагу приділено роботі зі звуженням і продовженням функцій як засобу подолання розриву між шкільними уявленнями та університетською строгістю: ці операції інтерпретовано як інструмент узгодження математичної моделі з предметною областю задачі, пояснення оборотності/необоротності відображень і підготовки до подальших тем аналізу та алгебри. Підкреслено потенціал цифрових інструментів (динамічні математичні середовища на кшталт GeoGebra, Desmos тощо) як «містка» між формалізмом і наочністю: вони забезпечують швидку візуалізацію параметричних кривих і неявно заданих залежностей, дослідження впливу параметрів та демонстрацію логічних умов, що визначають область визначення або звуження функції. Зроблено висновок, що наступність у вивченні функцій досягається не простим повторенням, а якісним поглибленням змісту через теорію множин, розширення арсеналу репрезентацій і систематичне керування переходами між ними, з опорою на цифрові засоби та дослідницькі стратегії навчання.

Ключові слова: елементарна і вища математика, алгебра, дискретна математика, математичний аналіз, наступність навчання, цифрові інструменти, функція, область визначення, аналітичний спосіб, параметрично задана функція, неявна функція.

Ruslan V. Khats’ Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Yuriy P. Maturin Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329

Lesia I. Komarnytska Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038

MATHEMATICAL AND METHODOLOGICAL ASPECTS OF ENSURING CONTINUITY IN THE STUDY OF FUNCTIONS

Abstract. The article elaborates the mathematical and methodological foundations for ensuring continuity between school and university mathematics education, using the formation of the concept of a function and the mastery of ways of defining it as the main content basis. It is shown that typical difficulties faced by pupils and students are primarily caused by a change in the level of abstraction: from an intuitive, visual understanding of the dependence between quantities at school to

№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

a rigorous set-theoretic understanding of a function as a mapping between sets with a specified domain and codomain (range), as well as by the use of the notions of injection, surjection, and bijection.

The ways of defining functions in the school curriculum (analytic, tabular, graphical, and verbal/descriptive) and in higher mathematics, algebra, and mathematical analysis (parametric, implicit, and definition as a solution of functional equations) are systematized. The didactic potential of each method is outlined, as is the role of purposeful transitions between representations in developing functional, algorithmic, and abstract thinking: from a “formula” to a “table” and a “graph,” and later to investigating properties, interpreting models, and solving equations and inequalities. Emphasis is placed on the methodological transformation at higher education institutions: the domain is often not specified in advance and is determined in the course of investigation; the role of set language, operations with images and preimages, and correct reading of graphs increases substantially.

Special attention is given to working with restrictions and extensions of functions as a means of overcoming the gap between school-level intuitions and university-level rigor. These operations are interpreted as tools for aligning a mathematical model with the subject area of a problem, explaining the invertibility/non-invertibility of mappings, and preparing for subsequent topics in analysis and algebra. The potential of digital tools (dynamic mathematics environments such as GeoGebra, Desmos, etc.) is highlighted as a “bridge” between formalism and visualization: they provide rapid visualization of parametric curves and implicitly defined relationships, exploration of parameter effects, and demonstration of logical conditions that determine the domain or restriction of a function. It is concluded that continuity in studying functions is achieved not through simple repetition, but through a qualitative deepening of content via set theory, an expanded repertoire of representations, and systematic management of transitions between them, supported by digital tools and inquiry-based learning strategies.

Keywords: elementary and higher mathematics, algebra, discrete mathematics, mathematical analysis, continuity of learning, digital tools, function, domain of a function, analytical method, parametric function, implicit function.

Постановка проблеми. Поняття функції є фундаментальним об’єктом вивчення як у шкільному курсі алгебри, так і у вищій математиці та математичному аналізі, оскільки воно відображає залежність одних величин від інших [1-6]. Водночас перехід від елементарної до вищої та дискретної математики, алгебри й математичного аналізу, часто супроводжується методичними труднощами, зумовленими розширенням трактування поняття функції, узагальненням її означення та появою нових способів задання і репрезентації [7-14]. У цьому контексті забезпечення наступності навчання між

ISSN 2786-6025 Online

шкільним і університетським курсами математичних дисциплін є ключовою умовою формування цілісного математичного мислення студентів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Поняття функції посідає центральне місце у шкільному курсі математики та є базовим для подальшого вивчення алгебри, дискретної математики та математичної логіки, математичного аналізу й прикладних дисциплін [1-14]. У процесі навчання важливо не лише ознайомити учнів з означенням функції, а й сформувати уявлення про різні способи її задання, кожен з яких відображає функціональну залежність з певного аспекту. Методично доцільним є таке вивчення функцій, за якого усвідомлюється взаємозв'язок між аналітичним, табличним, графічним та словесним способами їх задання. Це сприяє розвитку функціонального мислення, глибшому розумінню математичних моделей та формуванню вмінь застосовувати математичні знання у практичних ситуаціях.

Мета статті − теоретичне обґрунтування та методичний аналіз забезпечення наступності у вивченні функцій та різних способів їх задання у шкільному курсі математики та при вивченні алгебри й математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу.

1. Поняття функції. Основою вивчення функцій є поняття відповідності між множинами. Розглядаючи різні відповідності бачимо, що деяким елементам множини H_1 може відповідати один або більше елементів множини H_2 і можуть бути такі елементи множини H_1, яким не відповідає жодний елемент множини H_2. Функцією з множини H_1 в множину H_2 називається [1-6] така відповідність з множини H_1 в множину H_2, за якої кожному елементу множини H_1 відповідає не більше одного елемента множини H_2. Таким чином, функція з множини H_1 в множину H_2 – це така непорожня множина f упорядкованих пар $(x;y)$, де $x \in H_1$ і $y \in H_2$, що з умов $(x_1;y_1) \in f$ і $(x_1;y_2) \in f$ випливає, що $y_1 = y_2$ [1]. Функції з H_1 в H_2 позначають символами $f: H_1 \to H_2$, $H_1 \xrightarrow{\psi} H_2$, $\gamma: H_1 \to H_2$ або коротше f, γ, ψ, $x \to f(x)$ і т.д. Сукупність $D(f)$ тих елементів множини H_1, яким відповідає один елемент множини H_2 називається множиною або областю визначення функції f, а сукупність $E(f)$ тих елементів множини H_2, які відповідають принаймні одному елементу множини H_1, називається множиною значень функції f. Таким чином, $f(x)$ – це значення функції $f: H_1 \to H_2$ в точці x. Інколи пишуть fx або $f(t)\big|_{t=x}$ замість $f(x)$. Якщо $f: H_1 \to H_2$ – деяка функція і $y = f(x)$, то y називається образом елемента x, а x прообразом елемента y. Упорядковані пари $(x;y)$, де $x \in D(f)$ і $y = f(x)$, називають точками функції

№ 2(56) 2026
і ТЕХНІКА НАУКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online
$f:H_1 \to H_2$. Якщо $f:H_1 \to H_2$ – деяка функція і $E_1 \subset H_1$, то $f(E_1)$ – це образ множини E_1, тобто $f(E_1)=\{y \in H_2 : y = f(x), x \in E_1\}$. Якщо $f:H_1 \to H_2$ – деяка функція і $E_2 \subset H_2$, то $f^{-1}(E_2)$ – це прообраз множини E_2, тобто $f^{-1}(E_2)=\{x \in H_1 : y = f(x) \in E_2\}$. Кажуть, що функція $f:H_1 \to H_2$ відображає множину $E_1 \subset H_1$ в множину $E_2 \subset H_2$, якщо $f(E_1) \subset E_2$. Кажуть, що функція $f:H_1 \to H_2$ відображає множину $E_1 \subset H_1$ на множину $E_2 \subset H_2$, якщо $f(E_1) = E_2$. У вищій школі терміни “функція”, “відображення”, “оператор” – це синоніми. Важливим аспектом наступності є перехід від інтуїтивного розуміння залежності до операцій з множинами. Якщо $E(f)$ – числова множина, то таку функцію f називають числовою функцією або функціоналом.

Функція $f:H_1 \to H_2$ називається [1] сур’єкцією або накриттям, якщо $E(f)=H_2$. Функція $f:H_1 \to H_2$ називається оборотною (однолистою, ін’єкцією), якщо образами різних елементів із H_1 є різні елементи множини H_2. Інакше можна сказати, що функція $f:H_1 \to H_2$ називається [1] оборотною, якщо для кожного $y \in E(f)$ рівняння $f(x)=y$ має єдиний розв’язок $x \in D(f)$, тобто якщо з рівності $f(x_1)=f(x_2)$ випливає, що $x_1 = x_2$. Взаємо однозначною відповідністю між множинами H_1 і H_2 або бієкцією між H_1 і H_2 називається [1] така оборотна функція $f:H_1 \to H_2$, для якої $D(f)=H_1$ і $E(f)=H_2$. Функція $f:H_1 \to H_2$ є [1] бієкцією між H_1 і H_2 тоді і тільки тоді, коли вона є сур’єкцією, ін’єкцією і $D(f)=H_1$.

В математичному аналізі вивчаються різні інші класи функцій [1-6]: послідовності, тобто функції $f:\mathrm{N} \to \mathrm{R}$, дійсні функції однієї дійсної змінної, тобто функції $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$, дійсні функції двох дійсних змінних, тобто функції $f:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, дійсні функції трьох дійсних змінних, тобто функції $f:\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, дійсні функції n дійсних змінних, тобто функції $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, векторні функції n дійсних змінних, тобто функції $f:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ і т.д. Такі ж функції з іншої точки зору вивчаються в геометрії (рівняння кривих та поверхонь задаються такими функціями), в алгебрі (рівняння і системи рівнянь задаються такими ж функціями) та в інших розділах математики. Графіком функції $f:H_1 \to H_2$ в множині $H_1 \times H_2$ називається [1] упорядкована пара $\mathrm{graf}(f)=(f;H_1 \times H_2)$. Коли вживають терміни “графік функції”, то мають на увазі певне геометричне зображення точок функції. Наприклад, функцію $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ часто зображають точками евклідової площини у відповідній системі координат.

№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

Зауваження 1. *Ще раз підкреслимо, що* $f(x)$ *– це образ елемента* x. *Коли кажуть "розглянемо функцію* $f(x)$*" або "розглянемо функцію* $y=f(x)$*", то це слід розуміти так. Розглядається така функція, для якої образом елемента* x *є елемент* $y=f(x)$. *Наприклад, якщо говорити, що розглянемо функцію* $y=\sin x$, *то розуміємо, що розглядається функція* $\sin:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, *для якої образом кожного дійсного числа* x *є число* $y=\sin x$.

Зауваження 2. *Згідно з означенням, якщо задана функція* $f:H_1\to H_2$, *то задано множини* H_1 *і* H_2, *множину визначення функції* $D(f)\subset H_1$ *і її множину значень* $E(f)\subset H_2$. *Проте, в дійсності так буває рідко. Частіше в математичному аналізі функція* f *задається деякою формулою* $y=f(x)$ *і її множина визначення складається, якщо не вказано на інше, з тих* x, *для яких ця формула має зміст. При цьому множину визначення і множину значень функції потрібно знаходити. Для цього, потрібно провести дослідження функції. Розробка методів дослідження функцій є одним із основних завдань математичного аналізу. Якщо деяка функція* $f:H_1\to H_2$ *задана формулою* $y=f(x)$, *то* x *називають інколи незалежною змінною або аргументом функції, а* y *–залежною змінною. Інколи при розгляді функції* $f:H_1\to H_2$, *визначеної формулою* $y=f(x)$, *множина* H_1 *вказується. Від вибору множин* H_1 *в значній мірі залежать властивості такої функції* f.

Приклад 1. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу x *дійсне число* x^2. *Така відповідність* $f:x\to x^2$ *є функцією із* R *в* R, *тобто є функцією в* $\mathbb{R}$. *Її позначають* $f(x)=x^2$ *або* $y=x^2$. *Ця функція* $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *не є оборотною, оскільки* $f(-2)=f(2)=4$. *Разом з цим, функція* f, *визначена формулою* $y=x^2$, *є оборотною як функція з* $[0;+\infty)$ *в* $\mathbb{R}$. *Для неї* $D(f)=E(f)=[0;+\infty)$.

Приклад 2. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу x *дійсне число* y, *яке є розв'язком рівняння* $y^2=x$. *Така відповідність не є функцією в* R. *Проте, така відповідність є функцією в* $[0;+\infty)$. *Її позначають* $f(x)=\sqrt{x}$ *або* $y=\sqrt{x}$. *Для неї* $D(f)=E(f)=[0;+\infty)$.

Приклад 3. К*ожному дійсному числу* x *поставимо у відповідність число* y, *яке розв'язком рівняння* $\sin y=x$. *Така відповідність не є функцією в* R, *але є функцією з* R *в* $[-\pi/2;\pi/2]$.

Приклад 4. К*ожному дійсному числу* x *поставимо у відповідність число* $y=\sin x$. *Така відповідність є функцією в* R. *При цьому,* $\sin(\mathrm{R})=[-1;1]$ *і* $\sin^{-1}(\mathrm{R})=\mathrm{R}$.

ISSN 2786-6025 Online

Приклад 5. *Кожному дійсному числу* x *поставимо у відповідність число* $y=\sqrt[4]{x}$. *Така відповідність* $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ *є функцією в* R. *При цьому,* $D(f)=E(f)=[0;+\infty)$, $f(\mathrm{R})=[0;+\infty)$ *і* $f^{-1}(\mathrm{R})=[0;+\infty)$.

Приклад 6. *Функції* $y=2x$ *та* $y=e^x$, *як функції з* R *в* R, *є оборотними.*

Приклад 7. *Функції* $y=\mathrm{tg}\,x$ *та* $y=\sin x$, *як функції з* R *в* R, *не є оборотними.*

Приклад 8. *Функція* $y=\sin x$, *як функція з* $[-\pi/2;\pi/2]$ *в* R, *є оборотною.*

Приклад 9. *Функція* $y=\mathrm{tg}\,x$, *як функція з* $(-\pi/2;\pi/2)$ *в* R, *є оборотною.*

Приклад 10. Якщо $f(x)=2x$, *то* $f([0;3))=[0;6)$.

Приклад 11. Якщо $f(x)=2\sin x$, *то* $f([-\pi/2;7\pi/2))=[-2;2]$.

Приклад 12. Формула $z=x^2+y^2$ ***задає функцію двох дійсних змінних,*** *тобто функцію з* R^2 в R.

Приклад 13. Формула $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ ***задає функцію трьох дійсних змінних,*** *тобто функцію з* R^3 в R.

Приклад 14. Формула $y=x_1+x_2+\ldots+x_n$ ***задає функцію*** n ***дійсних змінних,*** *тобто функцію з* R^n в R.

Приклад 15. *Кожному прямому прямокутному паралелепіпеду (множину таких паралелепіпедів позначимо через* H_1*) з ребрами* x, y *та* z *поставимо у відповідність його об'єм* $V=xyz$. *Отримаємо функцію* $f:H_1\to\mathrm{R}$. *Разом з цим формула* $V=xyz$ *задає функцію трьох дійсних змінних, тобто функцію з* R^3 в R.

Приклад 16. Відповідність $f:H_1\to H_2$, ***зображена на рисунку 1, не є функцією з*** H_1 *в* H_2.

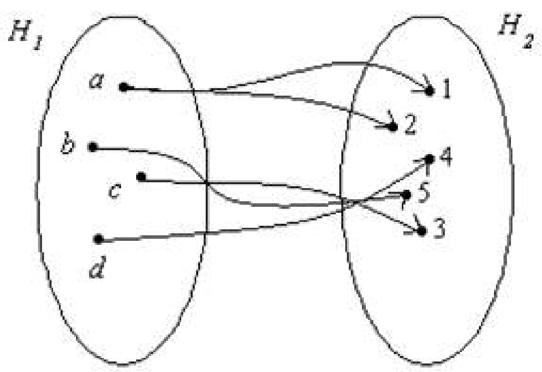

Рис. 1.

Приклад 17. Відповідність $f: H_1 \to H_2$***, зображена на рисунку 2, є функцією з*** H_1 *в* H_2. *Для неї* $D(f)=\{a;b;d\}$ *і* $E(f)=\{1;4\}$.

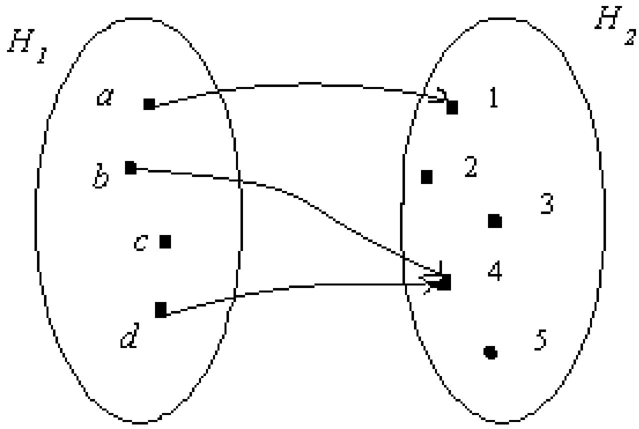

Рис. 2.

Зауваження 3. *Поняття функції відображає факт залежності одних величин від інших. Проте, є певні труднощі з вибором кращого означення цього поняття. Щоб задати функцію* $f: H_1 \to H_2$ *досить вказати її область визначення* $D(f)$ *та правило, за яким кожному* $x \in D(f)$ *ставиться у відповідність елемент* $y \in H_2$. *Приведене вище означення не є загально прийнятим. В літературі зустрічаються й інші.*

2. Забезпечення наступності у вивченні функцій: математичний та методичний аспекти. Функцією в R, або функцією з R в R, або дійсною функцією однієї дійсної змінної називається [1-6] така відповідність в множині дійсних чисел, за якої кожному дійсному числу відповідає не більше одного дійсного числа. Можна також сказати, що функцією з R в R називається така функція, область визначення $D(f)$ і множина значень $E(f)$ якої є підмножинами множини дійсних чисел. Таким чином, функція в R – це непорожня множина упорядкованих пар $(x;y)$ дійсних чисел, яка не містить двох різних пар з однаковими першими елементами. Функції в R позначають символами $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $\mathrm{R}\xrightarrow{\psi}\mathrm{R}$, $\gamma:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ або коротше f, γ, ψ, $x\to f(x)$ і т.д. Отже, $f(x)$ – це значення функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ в точці $x\in\mathrm{R}$. Дійсні функції однієї змінної далі як правило, називаємо функціями, опускаючи інші слова. Якщо ми говоримо, що функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ є визначеною на деякій множині H, то це означає, що $H \subset D(f)$.

Графіком функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називається [1] упорядкована пара $\mathrm{graf}(f)=(f;\mathrm{R}^2)$ функції f і множини R^2. Геометрично графік функції

№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ зображають у вигляді деякої множини точок евклідової площини у певній системі координат. Через $f(A)$ і $f^{-1}(B)$ позначаємо відповідно образ множини A і прообраз множини B, тобто $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ і $f^{-1}(B)=\{x\in D(f): f(x)\in B\}$.

Сумою двох функцій f_1 і f_2 називається така функція $f=f_1+f_2$, для якої образом числа $x\in\mathrm{R}$ є число $f_1(x)+f_2(x)$. Зрозуміло, що $D(f_1+f_2)=D(f_1)\cap D(f_2)$. Добутком функції f_1 на число c називається така функція $f=cf_1$, для якої образом числа $x\in\mathrm{R}$ є число $cf_1(x)$. Аналогічно дається означення добутку і частки двох функцій.

Дві функції $f_1:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ і $f_2:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називаються рівними [1], якщо $D(f_1)=D(f_2)$ і $(\forall x\in D(f_1)): f_1(x)=f_2(x)$. Функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називається сталою, якщо знайдеться таке число C, що $f(x)=C$ для всіх $x\in D(f)$.

Нулем функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ називається таке число a, що $f(a)=0$, тобто нуль функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ – це корінь рівняння $f(x)=0$.

Приклад 18. *Якщо* $f(x)=2x$, *то образом числа* $x=1$ *є число* $y=2$, *прообразом числа* $y=1$ *є число* $x=1/2$, $f([0;1])=[0;2]$, $f^{-1}([1;2])=[1/2;1]$.

Приклад 19. *Якщо* $f(x)=\arcsin x$, *то* $f([2;3])=\varnothing$, $f([0;2])=[0;\pi/2]$, $f^{-1}([3;4])=\varnothing$ *і* $f^{-1}([\pi/6;\pi])=[1/2;1]$.

Шкільна математика переважно зосереджена на числових функціях однієї змінної [4, 7-9]. Вища математика розширює цей спектр до функцій багатьох змінних (n-дійсних змінних), векторних функцій та функціоналів [1-3, 5, 6].

Функцію в R можна задати [1-6] різними способами (дивись наступні приклади).

Приклад 20. *Функцію* в R *можна задати аналітично, тобто формулою:* $y=1+\ln\sqrt{\sin x}$, $y=e^{\mathrm{tg}(\ln x)}$ *або*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<1, \\ 2, & 1\le x<3, \\ x^2-5, & x\ge 3. \end{cases}$$

Аналітичний спосіб задання функції полягає у поданні залежності між змінними за допомогою формули. У шкільному курсі цей спосіб є основним при вивченні лінійної, квадратичної, степеневої, показникової та інших функцій. ***Методичні акценти:*** формування навичок читання та інтерпретації формул; встановлення зв’язку між виглядом формули та властивостями функції; поєднання аналітичного способу з графічним.

ISSN 2786-6025 Online

Приклад 21. *Учням пропонується функція* $y=2x+1$. *Спочатку з'ясовується зміст коефіцієнтів, далі складається таблиця значень, після чого будується графік. Таким чином реалізується перехід від аналітичного до табличного й графічного способів задання функції.*

Приклад 22. *Функцію* в R *можна задати графічно, тобто зображенням в евклідовій площині її графіка.*

Графічний спосіб задання функції забезпечує наочне уявлення про характер зміни функції. Він широко використовується як засіб дослідження властивостей функцій і розв'язування задач.

Методичні акценти: формування вмінь «читати» графік; встановлення зв'язку між графіком і формулою; використання графічного методу при розв'язуванні рівнянь та нерівностей.

Приклад 23. *Учням пропонується графік функції без формули. За графіком необхідно визначити проміжки зростання і спадання, нулі функції та орієнтовний вигляд формули.*

Приклад 24. *Функцію* в R *можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень аргументу і значень функції.*

Табличний спосіб є особливо ефективним на початкових етапах формування поняття функції. ***Методичні акценти:*** використання реальних залежностей (час – шлях, ціна – вартість); аналіз зміни значень функції при зміні аргументу; підготовка до побудови графіка.

Приклад 25. *За таблицею залежності температури повітря від часу доби визначити, у який період температура зростала, а у який – спадала. Побудувати відповідний графік.*

Приклад 26. *Функцію* в R *можна задати словесно-описово, тобто словесним описанням відповідності.*

Словесний спосіб задання функції є характерним для прикладних задач і сприяє розвитку математичної грамотності. ***Методичні акценти:*** переклад текстового опису мовою математики; побудова математичної моделі реальної ситуації; поєднання словесного та табличного способів.

Приклад 27. *Вартість поїздки на таксі складається з фіксованої плати та плати за кожен кілометр шляху. Учням пропонується задати цю залежність словесно, таблично, графічно та аналітично.*

Приклад 28. *Поставимо у відповідність кожному дійсному числу* x *найбільше ціле число* $[x]$ *(тобто цілу частину* x *), яке не перевищує* x . *Одержимо функцію, яка позначається так:* $f(x)=[x]$.

Приклад 29. *Поставимо у відповідність кожному числу* $x>0$ *– число* 1, *числу* 0 *– число* 0 , *а кожному* $x<0$ *– число* -1 . *Одержимо функцію, яка позначається через* $\operatorname{sgn} x$. *Її можна задати так:*

№ 2(56) 2026
Наука і техніка сьогодні
ISSN 2786-6025 Online

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Приклад 30. *Кожному раціональному числу поставимо у відповідність* 1 *, а кожному ірраціональному – число* 0. *Отримаємо функцію*

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathrm{Q},\\ 0, & x\notin \mathrm{Q},\end{cases}$$

яка називається функцією Діріхле.

Наступність навчання передбачає поступове введення більш складних конструкцій, які є критичними для вищої математики. У курсах алгебри та математичного аналізу поняття функції істотно розширюється, а разом з цим розглядаються нові способи її задання, які спираються на шкільні уявлення, але потребують вищого рівня абстракції. Розглянемо далі основні способи задання функцій у математичному аналізу та їх наступність зі шкільним курсом математики [1-6].

Приклад 31. *Функцію можна задати параметрично, тобто системою*

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in[\alpha;\beta],$$

де φ *і* ψ *– відомі функції. Такий спосіб задання функції слід розуміти так: числу* x *ставимо у відповідність число* y, *якщо існує таке число* $t\in[\alpha;\beta]$, *що упорядкована трійка* $(x;y;t)$ *є розв'язком цієї системи.*

У вищій математиці, алгебрі та математичному аналізі параметричний спосіб задання функції використовується для опису кривих, траєкторій руху та складних функціональних залежностей [1-6]. У шкільному курсі передумови до цього способу формуються під час вивчення руху точки та залежностей між величинами [4, 7-9].

Приклад 32. *Функцію* $y=x^2$ *можна задати параметрично системою*

$$\begin{cases}x=t,\\ y=t^2,\end{cases}\quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Приклад 33. *Функцію* $y=\sqrt{1-x^2}$ *також можна задати параметрично системою*

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad t\in[0;\pi].$$

Приклад 34. *Система, якою задається параметрично функція, може бути досить складною:*

№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

$$\begin{cases} x = e^{\sin t} - \operatorname{tg} t, \\ y = 3 + \sin t + e^{-\operatorname{tg} t}. \end{cases}$$

Приклад 35. *Функцію можна задати неявно рівнянням (тобто рівнянням* $F(x, y) = 0$*, з якого ми не обов'язково вміємо виразити* y *через* x *у вигляді якоїсь формули).*

Неявний спосіб задання функцій широко використовується у математичному аналізі, диференціальній геометрії й теорії диференціальних рівнянь [1-6]. У шкільному курсі елементи неявного задання функції зустрічаються при вивченні кола, еліпса та інших кривих другого порядку, що забезпечує наступність між рівнями освіти [4, 7-14].

Приклад 36. *Рівняння* $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *можна розв'язати відносно* y. *Воно задає, зокрема, функції* $y = \sqrt{1 - x^2}$ *і* $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Приклад 37. *Рівняння*

$$e^{\operatorname{tg} x} \cos x + \ln(x + \sin y) = 0$$

ми не вміємо розв'язати відносно y*, але можливо, воно має розв'язок і тому може визначати деяку функцію* $y = f(x)$.

Приклад 38. *Функцію часто задають як розв'язок деякого функціонального рівняння (диференціального, інтегрального та інших). Невідомим в такому рівнянні є не число, а функція.*

Приклад 39. *Позначимо через* f *таку функцію з* R *в* R*, для якої*

$$(\forall c_1 \in \mathrm{R})(\forall c_2 \in \mathrm{R})(\forall x \in \mathrm{R})(\forall u \in \mathrm{R}): f(c_1 x + c_2 u) = c_1 f(x) + c_2 f(u). \qquad (1)$$

Якщо функція f *задовольняє співвідношення (1), то*

$$f(x) = f(x \cdot 1 + 0 \cdot u) = x \cdot f(1) + 0 \cdot f(u) = x \cdot f(1).$$

Позначивши $f(1) = a$*, отримуємо* $f(x) = ax$. *Функція* $f(x) = ax$ *й справді задовольняє умову (1), бо* $f(c_1 x + c_2 u) = a(c_1 x + c_2 u) = c_1 ax + c_2 au$ $= c_1 f(x) + c_2 f(u)$ *для всіх* $c_1 \in \mathrm{R}$, $c_2 \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}$ *і* $u \in \mathrm{R}$. *Функцію* $y = ax$ *називають лінійною функцією, а інколи лінійною однорідною.*

Приклад 40. *Позначимо через* f *таку функцію, для якої при всіх* $x \in \mathrm{R}$ *виконується* $f'(x) - f(x) = 0$ *і* $f(0) = 1$. *Далі переконаємось, що функція* $f(x) = e^x$ *є єдиним розв'язком цього рівняння.*

Приклад 41. *Функція* $f(x) = 4\cos^2 \dfrac{x}{x^2 - 1} + 4\sin^2 \dfrac{x}{x^2 - 1} - 1$ *є сталою, бо* $D(f) = \mathrm{R} \setminus \{-1; 1\}$ *і* $f(x) = 3$ *для всіх* $x \in D(f)$.

Важливим елементом наступності навчання є зміна підходу до визначення характеристик функції [4, 7-14]. Якщо в школі область визначення

№ 2(56) 2026
НАУКА і ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

функції часто вказується явно, то в математичному аналізі вона часто складається з усіх значень *x*, для яких ця формула має зміст [1-6].

Отже, згідно з означенням, якщо задано функцію $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, то задано множину $D(f)\subset\mathrm{R}$ визначення функції і її множину значень $E(f)\subset\mathrm{R}$. Проте, в дійсності так буває рідко. Частіше в математичному аналізі [1-6] функція f задається деякою формулою $y=f(x)$ і її множина визначення складається, якщо не вказано на інше, з тих x, для яких ця формула має зміст. Таким чином, для знаходження області визначення функції, яка задана формулою $y=f(x)$, потрібно, якщо не вказано на інше, знайти множину тих x, для яких ця формула має зміст.

Приклад 42. *Область визначення функції* $f(x)=\sqrt{x-1}$ *складається з тих* $x\in\mathbb{R}$ *, для яких* $x-1\geq 0$. *Отже,* $D(f)=[1;+\infty)$.

Функція однозначно визначається областю визначення, множиною значень і тим правилом, за яким елементам з області визначення ставляться у відповідність елементи з множини значень.

Проте, інколи вигідно розглядати функцію тільки на деякій підмножині множини визначення [1].

Приклад 43. *Функція* $f(x)=\sin x$ *не є зростаючою на області визначення, але вона є зростаючою на проміжку* $[-\pi/2;\pi/2]$.

Звуженням функції $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ на множину $H\subset D(f)$ називається [1] така функція $f_H:H\to\mathrm{R}$, яку також позначають так: $f:H\to\mathrm{R}$, що $(\forall x\in H):f_H(x)=f(x)$. Часто замість того, щоб говорити “розглянемо звуження функції f на множину H” кажуть “функція f, розглядувана на H”.

Приклад 44. *Функція* $f_H(x)=\sqrt{x}$ *є звуженням функції* $f(x)=\sqrt{|x|}$ *на множину* $H=[0;+\infty)$.

Інколи навпаки вигідно розглядати функцію f на ширшій множині, ніж її область визначення. Продовженням функції f на множину $H\supset D(f)$ називається [1] така функція φ, що $(\forall x\in D(f)):\varphi(x)=f(x)$.

Приклад 45. *Областю визначення функції* $f(x)=\sqrt{x}$ *є множина* $D(f)=[0;+\infty)$. *Її можна продовжити на множину* $(-\infty;+\infty)$ *нескінченною кількістю способів. Зокрема, кожна з функцій*

$$\varphi(x)=\sqrt{|x|},\quad \psi(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ x\geq 0,\\ -\sqrt{|x|},\ x<0,\end{cases}\quad \gamma(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ x\geq 0,\\ 5x^2+7,\ x<0,\end{cases}$$

є таким продовженням.

№ 2(56) 2026
НАУКА І ТЕХНІКА СЬОГОДНІ
ISSN 2786-6025 Online

Для подолання розриву між абстрактним описом функції та її візуальним образом доцільно використовувати цифрові інструменти [9] у забезпеченні наступності, зокрема, динамічне математичне програмне забезпечення (DGS), а саме GeoGebra, Desmos або Mathcad. Так, для візуалізації способів параметричного та неявного задання функцій у GeoGebra команда Curve($x(t)$, $y(t)$, t, min, max) дозволяє миттєво побудувати графік, що важко зробити вручну в шкільних умовах. Використання логічних операторів (наприклад, If (condition, function)) дозволяє наочно продемонструвати звуження функції на підмножину. Створення «повзунків» (sliders) для параметрів у функціональних рівняннях допомагає студентам зрозуміти, як зміна констант впливає на властивості розв'язків.

Висновки. Різні способи задання функцій у шкільному курсі математики мають важливе дидактичне значення. Їх цілеспрямоване та методично обґрунтоване використання дозволяє підвищити ефективність навчання, сформувати в учнів стійкі уявлення про функціональні залежності та підготувати їх до подальшого вивчення математики. Ефективне формування поняття функції можливе лише за умови систематичного використання різних способів її задання та організації переходів між ними як у шкільному курсі математики так і у вищій математиці. Такий підхід забезпечує наступність математичної освіти й сприяє розвитку абстрактного та функціонального мислення.

Отже, забезпечення наступності у вивченні функцій полягає не лише у повторенні шкільного матеріалу, а у його якісному поглибленні через теоретико-множинний підхід та освоєння нових способів задання залежностей (параметричних, неявних, функціональних). Це дозволяє здобувачам освіти перейти від простого обчислення значень за формулою до системного аналізу функціональних моделей, що є основою сучасної вищої математики та математичного аналізу.

У результаті проведеного дослідження математичних та методичних засад забезпечення наступності у вивченні функцій та способів їх задання встановлено наступне:

1. **Концептуальна цілісність поняття.** Наступність забезпечується переходом від інтуїтивного розуміння залежності в школі до строгого теоретико-множинного означення функції $f: H_1 \to H_2$ як відповідності, де кожному елементу $x \in H_1$ відповідає не більше одного елемента $y \in H_2$. Важливо, що терміни «функція», «відображення» та «оператор» у вищій школі розглядаються як синоніми, що розширює математичний кругозір студентів.

2. **Розширення арсеналу способів задання.** Якщо шкільний курс зосереджений на аналітичному, графічному, табличному та словесному способах, то вища математика вимагає опанування параметричного задання

ISSN 2786-6025 Online

(через системи рівнянь), неявного задання (рівняннями типу $F(x, y) = 0$) та використання функціональних рівнянь. Це дозволяє моделювати складні процеси, де пряма залежність *y* від *x* не може бути виражена явно.

3. **Методична трансформація аналізу.** Наступність передбачає зміну акцентів у дослідженні функцій: у вищій школі область визначення часто не вказується заздалегідь, а потребує знаходження як множини тих значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст. Крім того, важливим елементом є вивчення властивостей функції через її звуження на підмножину (наприклад, для досягнення оборотності) або її продовження на ширшу множину.

4. **Практична роль цифровізації.** Застосування спеціалізованого програмного забезпечення (GeoGebra, Desmos тощо) стає сполучною ланкою, що дозволяє візуалізувати складні абстракції (наприклад, графік функції Діріхле або динаміку параметричних кривих), забезпечуючи глибше розуміння матеріалу та розвиток візуального мислення.

Література:

1. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: У 2-х ч. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2013. Ч. 1. 503 с.
2. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2005. Ч. 1. 447 с.
3. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2002. Ч. 1. 463 с.
4. Шкіль М.І., Слєпкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10-11 кл. Київ: Зодіак-ЕКО, 2001. 656 с.
5. Howard A., Bivens I.C., Davis S. Calculus. 12th edition. Wiley: John Wiley & Sons, Inc., 2022. 1152 p.
6. Tall D. Functions and Calculus. In: Bishop A.J., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (eds), International Handbook of Mathematics Education. Kluwer International Handbooks of Education, Vol. 4: Springer, Dordrecht, 1996, 289-325.
7. Бевз Г.П. Методи навчання математики: навчально-методичний посібник. Київ: Генеза, 2010. 117 с.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. К.: Вища школа, 2006.512с.
9. Раков С.А. Математична освіта*:* компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Харків*:* “Факт”, 2005. 360 с.
10. Sajka M. A secondary school student’s understanding of the concept of function - A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 2003, 229-254.
11. Vinner S., Dreyfus T. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20 (4), 1989, 356-366.
12. Sierpinska A. On understanding the notion of function. In E. Dubinsky and G. Harel (eds.), The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, vol. 25, 1992, 25-58.
13. Eisenberg T. Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,

ISSN 2786-6025 Online
1991, 140-152.

14. Even R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, 21 (6), 1990, 521-554.

References:

1. Vynnytskyi, B. V., Shapovalovskyi, O. V., Sharan, V. L., & Khats, R. V. (2013). Matematychnyi analiz funktsii odniiei zminnoi [Mathematical analysis of functions of one variable] (Pt. 1). Drohobych, Ukraine: DDPU im. I. Franka [in Ukrainian].

2. Shkil, M. I. (2005). Matematychnyi analiz [Mathematical analysis] (Pt. 1). Kyiv, Ukraine: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

3. Diuzhenkova, L. I., Kolesnyk, T. V., Liashenko, M. Ya., Mykhalin, H. O., & Shkil, M. I. (2002). Matematychnyi analiz u zadachakh i prykladakh [Mathematical analysis in problems and examples] (Pt. 1). Kyiv, Ukraine: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

4. Shkil, M. I., Sliepkan, Z. I., & Dubynchuk, O. S. (2001). Alhebra i pochatky analizu [Algebra and the beginnings of analysis] (Textbook for grades 10–11). Kyiv, Ukraine: Zodiak-EKO [in Ukrainian].

5. Howard, A., Bivens, I. C., & Davis, S. (2022). Calculus (12th ed.). Hoboken, NJ: Wiley.

6. Tall, D. (1996). Functions and calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (Vol. 4, pp. 289–325). Dordrecht, Netherlands: Springer.

7. Bevz, H. P. (2010). Metody navchannia matematyky [Methods of teaching mathematics]. Kyiv, Ukraine: Heneza [in Ukrainian].

8. Sliepkan, Z. I. (2006). Metodyka navchannia matematyky [Methods of teaching mathematics]. Kyiv, Ukraine: Vyshcha shkola [in Ukrainian].

9. Rakov, S. A. (2005). Matematychna osvita: kompetentnisnyi pidkhid z vykorystanniam IKT [Mathematics education: A competency-based approach using ICT]. Kharkiv, Ukraine: Fakt [in Ukrainian].

10. Sajka, M. (2003). A secondary school student’s understanding of the concept of function: A case study. Educational Studies in Mathematics, 53, 229–254.

11. Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 356–366.

12. Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Vol. 25, pp. 25–58). Washington, DC: Mathematical Association of America.

13. Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 140–152). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

14. Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. Educational Studies in Mathematics, 21(6), 521–554.

Дата першого надходження статті до видання: 02.02.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 17.02.2026