Журнал «Перспективи та інновації науки»
№ 2(60) 2026
ISSN 2786-4952 Online

УДК 510.2:37.016:51

https://doi.org/10.52058/2786-4952-2026-2(60)-1572-1585

Хаць Руслан Васильович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Комарницька Леся Іванівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038

Матурін Юрій Петрович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329

АКСІОМАТИЧНИЙ ТА КОНСТРУКТИВНИЙ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ ТЕОРІЙ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН

Анотація. У статті здійснено методологічний аналіз двох базових стратегій побудови математичних теорій - аксіоматичної та конструктивної - на матеріалі формування числових множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

Показано, як вибір первісних понять і системи аксіом організовує логічну архітектоніку теорії та визначає тип доведень, а також як конструктивні процедури (зокрема побудова $\mathbb{Q}$ через класи упорядкованих пар та $\mathbb{R}$ через дедекіндові прорізи / інші еквівалентні моделі) забезпечують «прозору» генетичну мотивацію ключових властивостей чисел.

Окрему увагу приділено дидактично значущим вузлам: (і) аксіоматиці Пеано та ролі індукції як принципу доведення і як універсального методу побудови рекурсивних означень, що є спільним інструментом для дискретної математики й теорії алгоритмів; (ii) аксіоматиці $\mathbb{R}$ із неперервністю (у формі принципу вкладених проміжків) та її еквівалентним формулюванням через аксіому існування точної верхньої межі, що виводить на поняття повноти й забезпечує строгий фундамент границь, неперервності, рядів і теорем існування в математичному аналізі.

Аргументовано, що запропонований у статті синтез підходів має безпосередні навчально-методичні застосування:

- у математичному аналізі - як логічне обґрунтування повноти $\mathbb{R}$ (вкладені проміжки / супремум) і як коректне введення базових аналітичних понять;

-у лінійній алгебрі - як прояснення статусу поля скалярів ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), залежності властивостей векторних просторів та лінійних операторів від алгебраїчних і порядкових аксіом чисел;

ISSN 2786-4952 Online

- в алгебрі та теорії чисел - як демонстрація переходу від структур ℕ (індукція, рекурсія) до ℤ, ℚ, та як методологічне підґрунтя для понять еквівалентності, факторизації, гомоморфізмів і «конструкцій через класи»;

- у математичній логіці - як природне поле для роботи з поняттями аксіоми, моделі, несуперечливості й (не)повноти теорій у зв'язку з підходом до побудови теорії;

- у дискретній математиці - як узгоджене введення відношень, еквівалентностей та індуктивних доведень, що підтримує формування культури строгого міркування.

Отримані висновки можуть бути використані для побудови «наскрізних» модулів між курсами (аналіз ↔ логіка ↔ дискретна математика ↔ алгебра ↔ лінійна алгебра), де одна й та сама ідея (аксіома/конструкція/модель) працює як спільна методологічна рамка, підвищуючи цілісність математичної підготовки здобувачів освіти.

Ключові слова: аксіоматичний метод; конструктивний підхід; аксіоми Пеано; математична індукція; дедекіндові прорізи; повнота ℝ; принцип вкладених проміжків; точна верхня межа; математичний аналіз; лінійна алгебра; алгебра і теорія чисел; математична логіка; дискретна математика.

Ruslan V. Khats', Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Lesia I. Komarnytska, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038.

Yuriy P. Maturin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329.

AXIOMATIC AND CONSTRUCTIVE APPROACHES TO BUILDING THEORIES OF NUMBER SETS

Abstract. The article provides a methodological analysis of two fundamental strategies for constructing mathematical theories-axiomatic and constructive—using the formation of the number sets ℕ, ℚ, and ℝ as the central case study. It is shown how the selection of primitive notions and an axiom system shapes the logical architecture of a theory and determines the character of proofs, and how constructive procedures (in particular, constructing ℚ via equivalence classes of ordered pairs and constructing ℝ via Dedekind cuts and other equivalent models) offer a transparent "genetic" motivation for the key properties of numbers.

Special attention is given to didactically significant focal points: (i) the Peano axioms and the role of mathematical induction both as a principle of proof and as a universal mechanism for defining recursive objects, which serves as a shared tool for discrete mathematics and the theory of algorithms; (ii) the axiomatics of $\mathbb{R}$ with continuity (in the form of the nested intervals principle) and its equivalent formulation through the least upper bound axiom, which leads to the notion of completeness and provides a rigorous foundation for limits, continuity, series, and existence theorems in mathematical analysis.

It is argued that the proposed synthesis of approaches has direct instructional and methodological applications:

- in mathematical analysis-as a logical justification of the completeness of $\mathbb{R}$ (nested intervals / supremum) and as a coherent entry point to core analytical concepts;
- in linear algebra-as a clarification of the status of the scalar field ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) and of how the properties of vector spaces and linear operators depend on the algebraic and order axioms of the number system;
- in algebra and number theory-as an illustration of the transition from the structures of $\mathbb{N}$ (induction, recursion) to $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$, and as a methodological basis for the notions of equivalence, factorization, homomorphisms, and “constructions via equivalence classes”;
- in mathematical logic-as a natural context for working with the concepts of axioms, models, consistency, and (in)completeness of theories in relation to the chosen construction paradigm;
- in discrete mathematics-as a coherent introduction to relations, equivalence relations, and inductive proofs that supports the development of rigorous reasoning.

The findings can be used to design “cross-cutting” modules connecting courses (analysis ↔ logic ↔ discrete mathematics ↔ algebra ↔ linear algebra), where the same core idea (axiom/construction/model) functions as a unifying methodological framework, thereby strengthening the coherence of students’ mathematical preparation.

Keywords: axiomatic method; constructive approach; Peano axioms; mathematical induction; Dedekind cuts; completeness of $\mathbb{R}$; nested intervals principle; least upper bound; mathematical analysis; linear algebra; algebra and number theory; mathematical logic; discrete mathematics.

Постановка проблеми. Питання походження та обґрунтування властивостей числових множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ є фундаментальним для всієї системи університетських математичних дисциплін. Саме через ці множини «прошиваються» ключові поняття математичного аналізу (границя, неперервність, повнота), лінійної алгебри (поле скалярів, структура векторного простору), алгебри й теорії чисел (алгебраїчні структури, факторизація, гомоморфізми), математичної логіки (аксіоми, моделі, коректність доведень), дискретної математики (індукція, рекурсія, відношення та еквівалентність) [1]-[23]. Проте в

ISSN 2786-4952 Online

реальній практиці викладання для студентів фізико-математичних і технічних спеціальностей ці питання часто подаються фрагментарно: аксіоматичний підхід зводиться до формальних означень без пояснення їх методологічної ролі, а конструктивні побудови (наприклад, $\mathbb{Q}$ як класи пар, $\mathbb{R}$ через дедекіндові прорізи) або зовсім опускаються, або подаються як «історичні відступи». Унаслідок цього в студентів формуються розриви між інтуїтивним і строгим розумінням чисел, знижується якість засвоєння доказових схем (індукція, еквівалентні формулювання повноти, робота з класами еквівалентності), що ускладнює подальше навчання в аналізі, алгебрі, логіці та дискретній математиці.

У зв'язку з цим виникає педагогічна проблема: як методично обґрунтовано інтегрувати аксіоматичний і конструктивний підходи до побудови числових множин у систему викладання базових курсів (математичний аналіз, лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, математична логіка, дискретна математика), щоб підсилити цілісність математичної підготовки та сформувати стійку культуру строгого міркування?

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика співвідношення аксіоматичного та конструктивного підходів має потужну традицію у фундаментальній математиці та її дидактиці: у класичних працях закладено різні моделі побудови $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і різні аксіоматичні формулювання властивостей дійсних чисел (зокрема через принцип вкладених проміжків та аксіому існування точної верхньої межі). У методиці навчання математики досліджуються питання формування доказового мислення, узгодження інтуїтивних уявлень із формальними означеннями, дидактичні труднощі засвоєння повноти $\mathbb{R}$, індукції та рекурсивних означень, а також педагогічний потенціал «наскрізних» понять (модель, структура, відношення еквівалентності) для зв'язування різних навчальних курсів.

Разом із тим у більшості методичних публікацій ці підходи розглядаються або ізольовано в межах одного курсу (переважно аналізу чи логіки), або без чіткої технології перенесення результатів у суміжні дисципліни (лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, дискретна математика). Це створює потребу в узгодженій, предметно-орієнтованій методиці, яка б демонструвала студентам єдину логіку переходів між числовими системами та одночасно показувала, як ці переходи «працюють» у типових навчальних темах різних курсів.

Мета статті – виробити методичні рекомендації щодо викладання теми побудови числових множин на основі поєднання аксіоматичного та конструктивного підходів і запропонувати дидактичну модель їх «наскрізного» використання в курсах математичного аналізу, лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, математичної логіки та дискретної математики з акцентом на формування доказових компетентностей, коректної роботи з означеннями та перенесенням ідей між розділами математики.

ISSN 2786-4952 Online

Виклад основного матеріалу.

1. Вступ

Побудова математичних теорій є однією з фундаментальних проблем як власне математики, так і методології її викладання. Математичні теорії зазвичай будують або конструктивно – на основі вже побудованих теорій (див., наприклад, побудову теорії множини дійсних чисел за Дедекіндом [12] та побудову множини раціональних чисел), або аксіоматично (див. далі аксіоматику натуральних чисел і аксіоматику дійсних чисел), що передбачає задання множини первісних понять і системи аксіом, на яких ґрунтується подальший логічний розвиток теорії. Обидва підходи широко застосовуються при побудові теорій числових множин і відіграють важливу роль у формуванні змісту курсу математичного аналізу. Кожна математична теорія досліджує властивості понять, що до неї входять. Нові поняття вводяться на основі раніше визначених. Процес зведення нових понять до вже введених не може бути нескінченним. У процесі побудови будь-якої математичної теорії виникає необхідність виділення первісних понять та тверджень, істинність яких приймається без доведення. Зауважимо, що вибір первісних понять для однієї й тієї самої теорії може бути різним.

Приклад 1.1. *Діаметр кола – це хорда кола, яка має найбільшу довжину. Хорда кола – це відрізок прямої, якій належать дві точки кола. Відрізок – це множина точок прямої, які лежать між двома її точками.*

Властивості понять формулюють у вигляді істинних висловлень, які називають **теоремами**. Справедливість кожної теореми обґрунтовують на основі вже відомих теорем шляхом логічних міркувань, які називають **доведеннями**. Висловлення, істинність яких приймають без доведення, називають **аксіомами** або **постулатами** відповідної теорії.

2. Аксіоматичний підхід

Аксіоматичний метод побудови відповідної теорії зводиться до наступного: 1) складається список первісних понять, яким означення не даються (в первісні поняття не вкладається жодного конкретного змісту, ними можуть бути об’єкти довільної природи); 2) формулюються аксіоми, які описують співвідношення між первісними поняттями (аксіоми − це істинні висловлення, істинність яких приймається без доведення, вони, фактично, замінюють означення первісних понять); 3) на основі первісних понять і раніше уведених понять вводяться нові поняття; 4) істинність або хибність висловлень про введені поняття або про первісні поняття, які не містяться в аксіомах, доводяться на основі аксіом і раніше доведених теорем, які б очевидними ці висловлення не були [4], [10].

Зауваження 2.1. *В аксіоматичній теорії Пеано натуральних чисел (див. далі) є чотири аксіоми і первісним поняттям є поняття слідування.*

Основні вимоги до системи аксіом: а) несуперечливість; б) незалежність; в) повнота. Основною вимогою є несуперечливість. Вона полягає в тому, що

ISSN 2786-4952 Online

серед теорем та аксіом аксіоматичної теорії не повинно бути таких висловлень p, що $p=1$ і $\overline{p}=1$, тобто в теорії не повинно бути суперечливих тверджень. Основним методом дослідження несуперечливості теорії є побудова моделі, тобто вибір понять іншої за первісні поняття розглядуваної. Тоді аксіоми останньої стають теоремами в моделі. Якщо аксіоматика була б суперечливою, то ми б отримали в інтерпретації дві суперечливі теореми. З'ясування несуперечливості багатьох аксіоматичних теорій можна звести до несуперечливості теорії натуральних чисел, а останню залишається прийняти несуперечливою як таку, що не суперечить практиці.

Зауваження 2.2. *Модель аксіоматичної теорії дійсних чисел можна побудувати у вигляді нескінченних десяткових дробів, у вигляді прорізів в множині раціональних чисел, у вигляді певних класів фундаментальних послідовностей раціональних чисел та у вигляді інших об'єктів. Всі ці моделі ізоморфні, тобто між ними існує певна взаємно однозначна відповідність.*

Вимога незалежності полягає в тому, що жодну з аксіом не можна було б довести як теорему на основі інших аксіом. Вимога повноти полягає в тому, щоб в рамках розглядуваної аксіоматичної теорії можна довести істинність чи хибність будь-якого твердження, яке стосується понять теорії. Проте Гедель довів, що засобами кожної достатньо багатої аксіоматичної теорії можна сформулювати твердження істинність чи хибність якого в рамках цієї теорії довести не можна (в деяких випадках таким твердженням є твердження про несуперечливість теорії). В цьому розумінні кожна аксіоматична теорія є неповною. В зв'язку з цим, повноту систем аксіом часто розуміють інакше. Власне, система аксіом називається повною, якщо між будь-якими її моделями існує взаємно однозначна відповідність.

Зауваження 2.3. *Наведене вище трактування аксіоматичної теорії є досить вільним і широким. В такій трактовці вона вперше була здійснена Евклідом при побудові аксіоматичної теорії класичної геометрії. В кінці 19 століття основи математики піддавались серйозному аналізу в зв'язку з труднощами наївної теорії множин, які до певної міри були зумовлені розглядом нескінченних множин як даних об'єктів і довільним перенесенням на нескінченні множини прийомів, придатних для скінченних множин. До таких труднощів відносилось саме поняття множини через наявність парадоксів (поняття множина всіх множин, множина всіх множин, які не є підмножинами самої себе та інші є суперечливими). Аналіз цієї проблеми привів до переосмислення поняття аксіоматичної теорії. Виявилось, що при побудові аксіоматичних теорій слід звертати увагу на алфавіт, мову, спосіб утворення нових понять і на те, що таке доведення. Вперше в такому розумінні аксіоматичну теорію (аксіоматичну теорію евклідової геометрії) побудував Гільберт. В такому розумінні аксіоматична теорія є частиною логіки і одним з основних моментів такої теорії є дослідження її повноти та несуперечливості. Гільберт висунув програму побудови такої аксіоматичної теорії всієї математики. Проте,*

ISSN 2786-4952 Online

теорема Геделя про неповноту показала, що всю математику не можна звести до логіки.

3. Конструктивний підхід

Конструктивний метод передбачає безпосередню побудову числових множин і операцій над ними на основі попередніх теорій [15].

3.1. Поняття про конструктивну побудову Множини раціональних чисел

Якщо множини натуральних і цілих чисел уже введені, то множину $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел можна визначити наступним чином. Нехай $\mathbb{Q}$ – множина всіх упорядкованих пар $x=(p;q)$, де $p\in\mathbb{Z}$ і $q\in\mathbb{N}$.. Дві упорядковані пари $(p;q)$ і $(\tilde{p};\tilde{q})$ називаються рівними, якщо $p\tilde{q}=\tilde{p}q$. Сумою двох упорядкованих пар $x=(p;q)$ і $(\tilde{p};\tilde{q})$ називається упорядкована пара $(p\tilde{q}+\tilde{p}q;pq)$. Добутком двох упорядкованих пар $(p;q)$ і $(\tilde{p};\tilde{q})$ називається упорядкована пара $(\tilde{p}\tilde{q};pq)$. Пару $(p;1)$ будемо позначати через p, а пару $(1;q)$ – через $\frac{1}{q}$: $p=(p;1)$, $\frac{1}{q}=(1;q)$. Тоді кожне раціональне число $x=(p;q)$ можна записати у вигляді $x=(p;1)(1;q)=p\frac{1}{q}=:\frac{p}{q}$, тобто у вигляді звичайного дробу $x=\frac{p}{q}$. Переконуємось, що введені вище операції додавання і множення узгоджуються з відомими операціями над звичайними дробами.

3.2. Зауваження про побудову множини дійсних чисел як прорізів в множині раціональних чисел

Приклад 3.1. *Число* $\sqrt{2}$ *ділить множину раціональних чисел на два класи* $(-\infty;\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$ *і* $[\sqrt{2};+\infty)\cap\mathbb{Q}$ *. При цьому, в першому класі нема найбільшого раціонального числа, а в другому − нема найменшого раціонального числа.*

Приклад 3.2. *Число* 2 *ділить множину раціональних чисел на два класи* $(-\infty;2)\cap\mathbb{Q}$ *і* $[2;+\infty)\cap\mathbb{Q}$.. *При цьому, в першому класі нема найбільшого раціонального числа, а в другому є найменше раціональне число.*

Приклад 3.3. *Число* 3 *ділить множину раціональних чисел на два класи* $(-\infty;3]\cap\mathbb{Q}$ *і* $(3;+\infty)\cap\mathbb{Q}$.. *При цьому, в першому класі є найбільше раціональне число, а в другому − нема найменшого раціонального числа.*

На цих спостереженнях базується один із способів (спосіб Р. Дедекінда) уведення множини дійсних чисел, про який будемо говорити нижче. З точки зору розглядуваного питання два останні приклади нічим не відрізняються. Тому можна обмежитись розглядом одного з них. При цьому слід уявити, що термін “дійсне число” нам не знайомий. Припустимо, що раціональні числа певним чином уведені і основні їхні властивості встановлені.

Прорізом в множині раціональних чисел будемо називати упорядковану пару $(X_-|X_+)$ множин X_- і X_+ раціональних чисел, якщо виконуються три умови: 1) кожне раціональне число міститься в одній і тільки в одній з множин

ISSN 2786-4952 Online

X_- або X_+; 2) кожне число множини X_- є меншим за кожне число множини X_+; 3) або а) в класі X_- є найбільше раціональне число, а в класі X_+ нема найменшого раціонального числа, або б) в класі X_- нема найбільшого раціонального числа і в класі X_+ нема найменшого раціонального числа X_+. При цьому, множину X_- називають нижньою множиною прорізу, а множину X_+ верхньою множиною прорізу. Два прорізи $(X_- \mid X_+)$ **і** $(Y_- \mid Y_+)$ називаються рівними, якщо $X_- = Y_-$ і $X_+ = Y_+$.

Дійсним числом називається будь-який проріз $x = (X_- \mid X_+)$ в множині раціональних чисел. Між множиною всіх раціональних чисел і множиною всіх прорізів, які задовольняють умову 3)а), існує взаємно однозначна відповідність. Тому дійсні числа, які задовольняють умову 3)а) називаються раціональними. Дійсні числа, які задовольняють умову 3)б) називаються ірраціональними. Виходячи з цього означення можна отримати основні властивості множини дійсних чисел. Деякі відповідні означення і теореми наведені нижче в прикладах.

Приклад 3.4. *Дійсні числа* $x = (X_- \mid X_+)$ ***і*** $y = (Y_- \mid Y_+)$ *називаються рівними, якщо* $X_- = Y_-$ *і* $X_+ = Y_+$.

Приклад 3.5. *Якщо* $x = y$ ***і*** $y = z$**,** *то* $x = z$**.**

Приклад 3.6. *Кажуть, що* $x < y$**,** *якщо* $X_- \subset Y_-$.

Приклад 3.7. *Якщо* $x < y$ ***і*** $y < z$**,** *то* $x < z$**.**

Приклад 3.8. *Якщо* $x < y$**,** *то існує раціональне число* z**,** *для якого* $x < z < y$.

Отже, конструктивний підхід надає чітку побудову числових множин чисел та їхніх властивостей.

4. Аксіоматичне означення числових множин

4.1. Аксіоматичне означення множини натуральних чисел

Множиною натуральних чисел називається така непорожня множина ℕ, на якій задано поняття слідування “x'” так, що істинними є наступні твердження.

1. Існує елемент множини ℕ, який не слідує за жодним елементом множини ℕ (цей елемент позначається через 1 і називається одиницею).

2. За кожним елементом $x \in$ℕ слідує єдиний елемент множини ℕ (цей елемент позначається через $x+1$, тобто $x' = x+1$, елемент, який слідує за 1 позначається через 2, елемент, який слідує за 2 позначається через 3 і т.д).

3. Якщо $x' = y'$, то $x = y$.

4. Якщо A підмножина множини ℕ така, що $1 \in A$ і з включення $m \in A$ випливає, що $m+1 \in A$, то A=ℕ.

Кожний елемент множини ℕ називається натуральним числом.

Твердження 1-4 називаються аксіомами Пеано. Аксіома 4 називається аксіомою математичної індукції. На основі цих аксіом можна отримати всі

Журнал «Перспективи та інновації науки»
№ 2(60) 2026
ISSN 2786-4952 Online

відомі властивості натуральних чисел. Деякі елементи відповідних означень та теорем містяться в наступних прикладах.

Приклад 4.1. *Якщо* $x \neq y$*, то* $x' \neq y'$*. Справді, якщо* $x' = y'$*, то за аксіомою 3* $x = y$*.*

Приклад 4.2. *Якщо* $x' \neq x$*. Справді, нехай* A *– множина тих* x*, для яких* $x' \neq x$*. За першою аксіомою* $1 \in A$*. Згідно з попереднім прикладом* $(x')' \neq x'$*, якщо* $x \in A$*, тобто* $x+1 \in A$*. За аксіомою 4* $A=\mathbb{N}$*, тобто* $x' \neq x$ *для кожного* $x\in\mathbb{N}$*.*

Приклад 4.3. *Для будь-яких* $x\in\mathbb{N}$ *і* $y\in\mathbb{N}$ *існує елемент* $x+y\in\mathbb{N}$*, для якого* $x+y' = (x+y)'$ *(елемент* $x+y$ *називається сумою елементів* x *та* y*). Справді, нехай* A *– множина тих* x*, для яких* $x+y' = (x+y)'$ *для всіх* $y\in\mathbb{N}$*. Тоді* $1 \in A$*, бо елемент* $x+y = y'$ *потрібною властивістю володіє. Нехай* $x \in A$*. Тоді* $x+y' = (x+y)'$ *для всіх* $y\in\mathbb{N}$*. Тому* $x'+y' = (x+y')' = ((x+y)')' = (x'+y)'$*, тобто* $x+1 \in A$*. Тому* $A=\mathbb{N}$ *згідно з аксіомою 4.*

4.2. Аксіоматичне означення множини дійсних чисел

Множиною дійсних чисел називається така непорожня множина $\mathbb{R}$, на якій задано операцію додавання двох елементів, тобто функцію $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, операцією множення двох елементів, тобто функцію $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, а також поняття відношення порядку $\leq$, тобто відповідність $\leq:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ так, що мають місце такі твердження.

1 (аксіоми додавання). *1а. Для будь-яких елементів* $a\in\mathbb{R}$ *і* $b\in\mathbb{R}$ *виконується* $a+b = b+a$ *(комутативність додавання). 1б. Для будь-яких* $a\in\mathbb{R}$*,* $b\in\mathbb{R}$ *і* $c\in\mathbb{R}$ *виконується* $a+(b+c) = (a+b)+c$ *(асоціативність додавання). 1в. Існує елемент* $0\in\mathbb{R}$*, який називається нулем, такий, що для кожного елемента* $a\in\mathbb{R}$ *виконується* $a+0 = a$*. 1г. Для кожного* $a\in\mathbb{R}$ *існує елемент* $-a\in\mathbb{R}$*, який називається протилежним до* a*, такий, що* $a+(-a) = 0$*.*

2 (аксіоми множення). *2а. Для будь-яких елементів* $a\in\mathbb{R}$ *і* $b\in\mathbb{R}$ *виконується* $a \cdot b = b \cdot a$ *(комутативність множення). 2б. Для будь-яких елементів* $a\in\mathbb{R}$*,* $b\in\mathbb{R}$ *і* $c\in\mathbb{R}$ *виконується* $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ *(асоціативність множення). 2в. Для будь-яких* $a\in\mathbb{R}$*,* $b\in\mathbb{R}$ *і* $c\in\mathbb{R}$ *виконується* $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ *(дистрибутивність множення відносно додавання). 2г. Існує елемент* $1\in\mathbb{R}$*, який називається одиницею, такий, що* $1 \neq 0$ *і для будь-якого елемента* $a\in\mathbb{R}$ *виконується* $a\cdot 1 = a$*. 2д. Для кожного* $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *існує елемент* $1/a\in\mathbb{R}$*, який називається оберненим до* a*, такий, що* $a\cdot\frac{1}{a} = 1$*.*

3 (аксіоми порядку). *3а. Для кожного* $a\in\mathbb{R}$ *виконується* $a \leq a$*. 3б. Якщо* $a \leq b$ *і* $b \leq a$*, то* $a = b$*. 3в. Якщо* $a \leq b$ *і* $b \leq c$*, то* $a \leq c$*. 3г. Якщо* $a\in\mathbb{R}$*,* $b\in\mathbb{R}$*,* $c\in\mathbb{R}$ *і* $a \leq b$*, то* $a+c \leq b+c$*. 3д. Якщо* $0 \leq a$ *і* $0 \leq b$*, то* $0 \leq a\cdot b$*.*

4 (аксіома неперервності Кантора). *Для будь-якої нескінченної системи замкнених вкладених проміжків існує принаймні одне дійсне число, яке належить всім проміжкам цієї системи.*

Журнал «Перспективи та інновації науки»
№ 2(60) 2026
ISSN 2786-4952 Online

Елементи множини $\mathbb{R}$ називаються дійсними числами. Число $1+1$ позначають через 2, число $2+1$ позначають через 3 і т.д. Числа 1, 2, 3, ... називаються натуральними. Числа 0, 1, -1, 2, -2 і т.д. називаються цілими. Числа $p\cdot\frac{1}{q}$, де $p\in\mathbb{Z}$ і $q\in\mathbb{N}$, називаються раціональними і їх позначають $\frac{p}{q}$. На основі цих аксіом можна отримати всі відомі властивості дійсних чисел. Деякі елементи відповідних означень та теорем містяться в наступних прикладах, а деякі будуть наведені пізніше.

Приклад 4.4. *Різницею $a-b$ дійсних чисел a і b називається таке число c, що $b+c=a$.*

Приклад 4.5. *Для будь-яких двох дійсних чисел a і b різниця $a-b$ існує і $a-b=a+(-b)$. Справді, згідно з аксіомами додавання*

$$b+(a+(-b))=b+a+(-b)=b+(-b)+a=0+a=a.$$

Приклад 4.6. *В множині дійсних чисел існує єдиний нуль. Справді, припустимо, що в множині дійсних чисел існує два таких нулі 0 і $\tilde{0}$. Тоді $\tilde{0}+0=\tilde{0}$ і $0+\tilde{0}=0$. Тому $0=\tilde{0}$. Суперечність.*

Приклад 4.7. *Для кожного дійсного числа a існує єдине протилежне число. Справді, припустимо, що для деякого дійсно числа a існує два протилежні числа $-a$ і $-\tilde{a}$. Тоді $a+(-a)+(-\tilde{a})=0+(-\tilde{a})$ і $-\tilde{a}=-a$. Суперечність.*

Приклад 4.8. *$-(-a)=a$ для кожного $a\in\mathbb{R}$. Справді,*

$$a=a+0=a+(-a-(-a))=-(-a).$$

Приклад 4.9. *$a-a=0$ для кожного $a\in\mathbb{R}$. Справді, $a-a=a+(-a)=0$.*

Приклад 4.10. *Часткою $a:b$ двох дійсних чисел a і b називається таке число c, що $b\cdot c=a$.*

Приклад 4.11. *Для будь-яких двох дійсних чисел a і b частка $a:b$ існує і $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$.*

Приклад 4.12. *Для кожного дійсного числа a існує єдине обернене число.*

Приклад 4.13. *Кажуть, що $a<b$, якщо $a\le b$ і $a\ne b$.*

Зауваження 4.1. *З аксіом 1-3 послідовно отримуємо основні властивості арифметичних операцій. Далі вводимо поняття степеня з натуральним показником і на основі цих же аксіом обґрунтовуємо його відомі зі шкільного курсу математики властивості. Доводимо теорему про існування точної верхньої і точної нижньої меж. Потім вводимо поняття границі послідовності, суми ряду та показуємо, що кожне дійсне число є границею послідовності раціональних чисел і між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх нескінченних десяткових дробів існує взаємно однозначна відповідність, якщо не розглядати періодичних десяткових дробів з періодом 9. Далі вводимо поняття границі функції і поняття неперервної функції і встановлюємо їхні властивості; вводимо поняття степеня з раціональним показником і*

Журнал «Перспективи та інновації науки»
№ 2(60) 2026
ISSN 2786-4952 Online

обґрунтовуємо його властивості; вводимо поняття степеня з довільним дійсним показником і обґрунтовуємо його властивості; вводимо поняття логарифма і обґрунтовуємо його властивості; вводимо поняття синуса і косинуса як суми рядів

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

і обґрунтовуємо їхні властивості [5]. Після цього, ми можемо розглядати відповідні приклади на дослідження функцій та їхніх границь. Така приблизно повинна бути послідовність вивчення математичного аналізу і його можна читати в такій послідовності. Проте реально здійснити це при першому етапі вивчення предмету важко.

Зауваження 4.2. *В курсі математичного аналізу доводиться, що з принципу вкладених проміжків випливає, що кожна непорожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу. Можна довести і обернене твердження: якщо кожна непорожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу, то для кожної нескінченної системи замкнених вкладених проміжків існує точка, яка належить всім проміжкам цієї системи. Тому в наведеній вище системі аксіом множини дійсних чисел аксіому неперервності Кантора можна замінити наступною аксіомою*

4′ (аксіома існування точної верхньої межі). *Кожна непорожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу.*

Отже, теорію множини дійсних чисел можна побудувати: 1) доповнюючи множину раціональних чисел ще певними елементами, наприклад, нескінченними неперіодичними десятковими дробами; 2) за Дедекіндом як прорізи в множині раціональних чисел; 3) за Кантором як класи фундаментальних послідовностей раціональних чисел; 4) аксіоматично.

В залежності від такого підходу наведені вище властивості дійсних чисел формулюються у вигляді аксіом або доводяться. Для математичного аналізу особливо важливими є ті властивості, які пов’язані з принципом вкладених проміжків.

5. Методологічне значення для математичного аналізу

Правильне формулювання числових множин та їхніх властивостей є фундаментом математичного аналізу.

Аксіоматичні та конструктивні підходи забезпечують:

- системність і логічну строгість;
- можливість доведення ключових теорем про границі, неперервність, точні межі числових множин, суми та ряди;
- пояснення принципу вкладених проміжків і основних властивостей множини дійсних чисел.

Метод Дедекінда [12], метод Кантора [11] та аксіоматична побудова дають еквівалентні результати, але з різним методологічним акцентом: перший − на конструктивності, другий − на строгій аксіоматиці.

ISSN 2786-4952 Online

6. Висновки

Отже, аксіоматичний підхід забезпечує системну побудову математичних теорій через первісні поняття та аксіоми, формуючи фундамент для доведення всіх властивостей чисел. Конструктивний підхід дозволяє безпосередньо формувати числові множини і операції над ними, зберігаючи відповідність інтуїтивним математичним уявленням. Для математичного аналізу критично важливими є аксіоми та властивості, пов'язані з принципом вкладених проміжків, точними межами числових множин та неперервністю. Таким чином, синтез аксіоматичного та конструктивного підходів сприяє формуванню логічно строгого і методологічно обґрунтованого курсу математичного аналізу.

Наукова новизна роботи полягає в систематизованому аналізі аксіоматичного та конструктивного підходів до побудови теорій числових множин з методологічної точки зору. Уточнено роль первісних понять і аксіом у формуванні логічної структури математичної теорії та показано, що вибір способу побудови істотно впливає на характер доведень і рівень абстракції теоретичних конструкцій. Обґрунтовано можливість і доцільність поєднання аксіоматичного та конструктивного підходів при формуванні теорій числових множин.

Практична значущість отриманих результатів полягає в можливості їх використання під час викладання курсу математичного аналізу у закладах вищої освіти, а також при підготовці навчально-методичних матеріалів з фундаментальних розділів математики. Запропоновані методологічні підходи можуть бути використані для вдосконалення логіки подання навчального матеріалу, формування цілісного уявлення про структуру математичних теорій та розвитку математичного мислення здобувачів освіти.

Література:

1. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2003. 254 с.
2. Бевз Г. П. Моя методика математики. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2021. 584 с.
3. Бородін О. І. Теорія чисел. Київ: Вища школа, 1970. 274 с.
4. Bourbaki N. Éléments d'histoire des mathématiques. Paris: Masson, 1960. 276 p.
5. Винницький Б. В., Шаповаловський О. В., Шаран В. Л., Хаць Р. В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: у 2-х ч. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2013. Ч. 1. 503 с.
6. Маслюченко В. К. Елементи теорії множин. Чернівці: Рута, 2002. 132 с.
7. Попов М. М., Фотій О. Г. Математична логіка та аксіоматична теорія множин: короткий курс. Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2025. 80 с.
8. Шинкарук В. І. та ін. Аксіоматична теорія множин // Філософський енциклопедичний словник. Київ: Абрис, 2002. 742 с.
9. Шкіль М. І. Математичний аналіз: у 2-х ч. Київ: Вища школа, 2005. Ч. 1. 447 с.
10. Bourbaki N. Elements of Mathematics: Theory of Sets. Paris: Hermann, 1968.
11. Cantor G. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1872.
12. Dedekind R. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg, 1872.

ISSN 2786-4952 Online

13. Enderton H. B. Elements of Set Theory. Academic Press, 1977.
14. Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, 1931, 173–198.
15. Jech Th. Set Theory. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 2006. 769 p.
16. Halmos P. R. Naive Set Theory. Springer, 1974.
17. Hilbert D. Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner, 1899.
18. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Introductory Real Analysis. Dover, 1975.
19. Kunen K. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam: North-Holland, 1995. 313 p.
20. Kuratowski K. Topology. Vol. 1. Academic Press, 1965.
21. Peano G. Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin, 1889.
22. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill, 1976.
23. Suppes P. Axiomatic Set Theory. Dover, 1972.

References:

1. Andriichuk, V. I., Komarnytskyi, M. Ya., & Ishchuk, Yu. B. (2003). Vstup do dyskretnoi matematyky [Introduction to discrete mathematics]. Lviv: Vydavnychyi tsentr LNU im. I. Franka. (in Ukrainian)
2. Bevz, H. P. (2021). Moia metodyka matematyky [My methodology of mathematics]. Ternopil: Navchalna knyha – Bohdan. (in Ukrainian)
3. Borodin, O. I. (1970). Teoriia chysel [Number theory]. Kyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian)
4. Bourbaki, N. (1960). Éléments d'histoire des mathématiques. Paris: Masson.
5. Vynnytskyi, B. V., Shapovalovskyi, O. V., Sharan, V. L., & Khats, R. V. (2013). Matematychnyi analiz funktsii odniiei zminnoi: U 2-kh ch. Ch. 1 [Mathematical analysis of functions of one variable: In 2 parts. Part 1]. Drohobych: DDPU im. I. Franka. (in Ukrainian)
6. Masliuchenko, V. K. (2002). Elementy teorii mnozhyn [Elements of set theory]. Chernivtsi: Ruta. (in Ukrainian)
7. Popov, M. M., & Fotii, O. H. (2025). Matematychna lohika ta aksiomatychna teoriia mnozhyn: korotkyi kurs [Mathematical logic and axiomatic set theory: A short course]. Chernivtsi: ChNU im. Yu. Fedkovycha. (in Ukrainian)
8. Shynkaruk, V. I., et al. (2002). Aksiomatychna teoriia mnozhyn [Axiomatic set theory]. In Filosofskyi entsyklopedychnyi slovnyk [Philosophical encyclopedic dictionary]. Kyiv: Abrys. (in Ukrainian)
9. Shkil, M. I. (2005). Matematychnyi analiz: U 2-kh ch. Ch. 1 [Mathematical analysis: In 2 parts. Part 1]. Kyiv: Vyshcha shkola. (in Ukrainian)
10. Bourbaki, N. (1968). Elements of Mathematics: Theory of Sets. Paris: Hermann.
11. Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Journal für die reine und angewandte Mathematik.
12. Dedekind, R. (1872). Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg.
13. Enderton, H. B. (1977). Elements of Set Theory. Academic Press.
14. Gödel, K. (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik, 38, 173–198.
15. Jech, Th. (2006). Set Theory. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag.
16. Halmos, P. R. (1974). Naive Set Theory. Springer.
17. Hilbert, D. (1899). Grundlagen der Geometrie. Leipzig: Teubner.
18. Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1975). Introductory Real Analysis. Dover.
19. Kunen, K. (1995). Set Theory: An Introduction to Independence Proofs. Amsterdam: North-Holland.

Журнал «Перспективи та інновації науки»
№ 2(60) 2026
ISSN 2786-4952 Online

20. Kuratowski, K. (1965). Topology (Vol. 1). Academic Press.
21. Peano, G. (1889). Arithmetices principia, nova methodo exposita. Turin.
22. Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill.
23. Suppes, P. (1972). Axiomatic Set Theory. Dover.

Дата першого надходження статті до видання: 22.01.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 07.02.2026