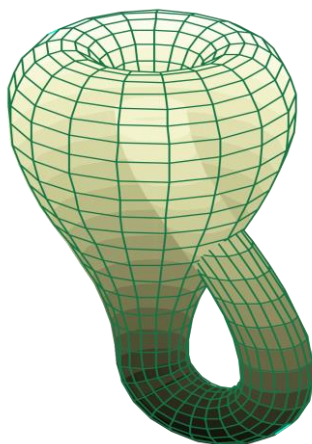
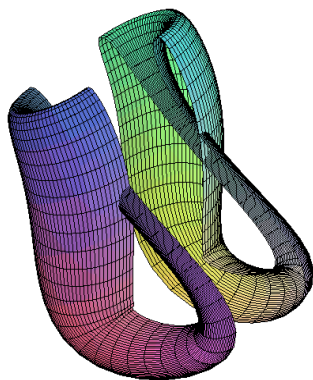
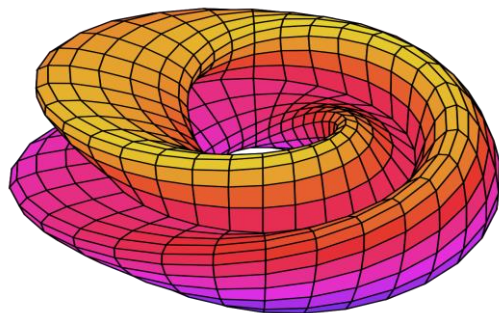


В.М. Дільний, І.Б. Шепарович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Інтеграли по многовидах



Дрогобич - 2021

В.М. Дільний, І.Б. Шепарович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Інтеграли по многовидах

**Присвячується Світлій пам'яті професора
Винницького Богдана Васильовича,
який вклав значний внесок у написання цього посібника**

Дрогобич - 2021

Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Інтеграли по многовидах. – Дрогобич: ДДПУ, 2021. – 162 с.

Навчально-методичний посібник з математичного аналізу (функції багатьох змінних) для студентів, що отримують галузь знань 01 Освіта за спеціальностями: 111 Математика, 014. Середня освіта. Математика. Посібник включає лекційний матеріал, завдання для самостійного ознайомлення, запитання для самоконтролю, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання. Він розбитий на розділи «Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$ », «Поверхневі інтеграли», «Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$ та елементи теорії поля». Посібник містить додатки, в яких подані основні математичні формули та зображення многовидів.

Рекомендовано Вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, протокол № 7 від 23.06. 2022 року.

Рецензенти:

- *Філевич Петро Васильович* – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка».
- *Галь Юрій Михайлович* – кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Автори:

- *Дільний Володимир Миколайович* – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики Навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.
- *Шепарович Ірина Богданівна* – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики Навчально-наукового інституту фізики, математики, економіки та інноваційних технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Формули, цитати, тексти перекладів, ілюстрації, цифровий та інший фактичний матеріал і бібліографічні відомості перевірено, зауваження рецензентів враховано.

Зміст

Основні позначення.....	5
Вступ.....	7
Розділ 6. Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$	
1. Початкові відомості про криві в $\mathbb{R}^2$ та їхню орієнтацію.....	9
2. Шлях і крива в просторі $\mathbb{R}^2$	12
3. Означення і найпростіші властивості криволінійного інтеграла першого роду.....	17
4. Означення і обчислення криволінійного інтегралу другого роду.....	22
5. Формула Гріна.....	33
6. Знаходження площі плоскої області за допомогою криволінійного інтегралу.....	36
7. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.....	37
8. Знаходження роботи за допомогою криволінійного інтегралу.....	48
9. Запитання для самоконтролю.....	50
10. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	50
11. Вправи і задачі розрахункового характеру	52
Розділ 7. Поверхневі інтеграли	
1. Початкові відомості про поверхні в $\mathbb{R}^3$ та їхню орієнтацію	62
2. Поверхня та двовимірний шлях в просторі $\mathbb{R}^3$	65
3*. Поверхня як двовимірний багатовид.....	68
4. Поверхневий інтеграл першого роду і його обчислення.....	71
5. Знаходження площі поверхні за допомогою поверхневого інтегралу першого роду	77
6. Поверхневий інтеграл другого роду.....	78
7. Знаходження поверхневого інтегралу другого роду по поверхні, заданій параметрично.....	84
8. Формула Остроградського-Гаусса.....	86
9. Запитання для самоконтролю.....	91

10. Вправи і задачі теоретичного характеру	91
11. Вправи і задачі розрахункового характеру	93

Розділ 8. Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$. Елементи теорії поля

1. Крива і шлях в $\mathbb{R}^3$	97
2. Криволінійні інтеграл першого роду по кривій в $\mathbb{R}^3$	100
3. Криволінійні інтеграл другого роду по кривій в $\mathbb{R}^3$	101
4. Формула Стокса.....	105
5. Скалярне поле. Похідна за вектором. Градієнт.....	108
6. Векторне поле. Векторна форма теорем Остроградського-Гаусса та Стокса.....	109
7. Запитання для самоконтролю.....	117
8. Вправи і задачі теоретичного характеру	118
9. Вправи і задачі розрахункового характеру	119
Додатки 1. Основні формули	129
Додатки 2 Деякі зображення многовидів	142
Література	157
Показчик	160

Основні позначення

1. $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел.
2. $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел.
3. $\mathbb{N}_0$ або $\mathbb{Z}_+$ – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4. $n; m$ – множина всіх цілих чисел x , які задовольняють нерівність $n \leq x \leq m$.
5. $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел.
6. $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел.
7. $\overline{\mathbb{R}}$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8. $\overline{\mathbb{R}}_0$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ ∞ ”.
9. $(a; b)$ або $]a; b[$ – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x < b$.
10. $[a; b]$ – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x \leq b$.
11. $(a; b]$ або $]a; b]$ – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x \leq b$.
12. $[a; b)$ або $[a; b[$ – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x < b$.
13. $f : H_1 \rightarrow H_2$ – функція або відповідність, область визначення якої належить множині H_1 , а множина значень – множині H_2 .
14. $D(f)$ – область (множина) визначення функції $f : H_1 \rightarrow H_2$.
15. $E(f)$ – множина значень функції $f : H_1 \rightarrow H_2$.
16. $(H_1)^{(H_2)}$ – множина всіх функцій $f : H_1 \rightarrow H_2$.
17. $\mathbb{R}^n$ – множина (метричний простір, векторний простір, нормований простір, евклідів простір) всіх упорядкованих наборів з n дійсних чисел.

$$18. \ x = (x_1; \dots; x_n), \ \mathbf{x} = (x_1; \dots; x_n), \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{позначення для}$$

елемента x простору $\mathbb{R}^n$.

19. $\mathbb{C}^n$ – множина (метричний простір, векторний простір, нормований простір, евклідов простір) всіх упорядкованих наборів з n комплексних чисел.

$$20. \ z = (z_1; \dots; z_n), \ \mathbf{z} = (z_1; \dots; z_n), \ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} - \text{позначення для}$$

елемента z простору $\mathbb{C}^n$.

21. $\langle x; y \rangle$ – скалярний добуток елементів x та y евклідового простору.

22. $\|x\|$ – норма елемента x нормованого простору.

23. $d(x; y)$ – відстань між елементами x та y метричного простору.

24. $U(a; \varepsilon)$ або $U_H(a; \varepsilon)$ – ε -окіл точки a метричного простору H , тобто $U(a; \varepsilon) = \{x \in H : d(x; a) < \varepsilon\}$.

25. $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon)$ або $\overset{\circ}{U}_H(a; \varepsilon)$ – проколений ε -окіл точки a метричного простору H , тобто $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}$.

26. ∂E – межа множини E метричного простору.

27. $\bar{E}$ – замикання множини E метричного простору.

28. $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матриця з елементами a_{ij} , матриця лінійного оператора $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ в деяких базисах просторів $\mathbb{C}^n$ та $\mathbb{C}^m$.

29. $\mathbf{f}' = (a_{ij})$ – матриця Якобі–Остроградського функції $f = (f_1; \dots; f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

30. $\det \mathbf{f}'$ або $\frac{(\partial f_1; \dots; \partial f_m)}{(\partial x_1; \dots; \partial x_n)}$ – яacobіан функції $f = (f_1; \dots; f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

31. $\blacktriangleright$ – кінець доведення.

32. $:=$ – рівне за означенням.

Вступ

Цей посібник є, фактично, заключною частиною ряду посібників Математичний аналіз. Функції багатьох змінних [3,4].

Викладений матеріал стосується криволінійних і поверхневих інтегралів та застосування їх до теорії поля. Хоч стосовно визначення поняття кривої (як і поверхні) є деякі нюанси.

Так у понятті *орієнтовної параметрично заданої кривої* міститься багато кривих, по яких потрібно знаходити інтеграли, але не всі, що зустрічаються на практиці, є носієм одного неперервного шляху. Наприклад, межу кільця не можна інтерпретувати таким чином, оскільки вона складається з двох кіл, є незв'язною множиною і тому не може бути носієм шляху (неперервного). Інтегралу по орієнтовній межі кільця можна надати зміст в рамках інтегралу по *одновимірному орієнтовному многовиду* (це ж стосується і інтеграла по межі довільної багатозв'язної області). Такий інтеграл слід розуміти як суму інтегралів по кожній зв'язній і належно орієнтовній компоненті межі. Це ж можна сказати і про поверхні та поверхневі інтеграли як інтеграли по *двовимірних орієнтовних многовидах*. Тому вважаємо, що термін «інтеграл по многовиду» є більш загальним та охоплює ширший спектр об'єктів інтегрування.

У посібнику виділено 3 розділи. У перший ввійшов матеріал про криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$, у другий - поверхневі інтеграли, у третій - криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$ та елементи теорії поля.

Посібник, крім теоретичного матеріалу, містить також запитання для самоконтролю та підбір задач теоретичного, але, в основному, практичного змісту. Ця кількість задач різної складності дозволяє виробити необхідні вміння та навички застосування теоретичної частини книжки. Їх достатньо для виконання як на практичних заняттях так і вдома. Ряд номерів містить досить велику кількість рівносильних завдань, що передбачено для індивідуальної виконання протягом семестру та захисту перед завершенням.

Посібник укладено так, що є можливим застосування різних підходів до вивчення багатовимірного аналізу, зокрема і самостійно теж.

За допомогою сучасних комп'ютерних математичних пакетів можна розв'язувати різноманітні рівняння, знаходити границі, інтеграли,

суми рядів, будувати графіки функцій та багато іншого. Це передбачено в посібнику. Так у Додатках 2 містяться зображення многовидів разом із алгоритмами побудови їх в рамках програми Maple.¹

¹ На першій сторінці зображено: 1. Реалізація пляшки Кляйна у вигляді вісімки. 2. Пляшка Кляйна, розрізана на дві стрічки Мебіуса. 3. Ілюстрація пляшки Кляйна у тривимірному просторі.

Розділ 6. Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

У цьому розділі будемо розглядати інтеграли вздовж кривих в $\mathbb{R}^2$, тобто криволінійні інтеграли першого та другого родів. Поняття криволінійного інтеграла тісно пов'язане з поняттям кривої. У терміни **крива**, **лінія**, **шлях**, **одновимірний многовид (багатовид)** у різних розділах математики і, навіть, у різних розділах математичного аналізу вкладають різний зміст. У залежності від трактовки цього поняття залежить і підхід до поняття криволінійного інтеграла, але належне осмислення цих взаємозв'язків та наявних труднощів можливе лише після вивчення основ теорії.

Інтеграли вздовж орієнтовної межі кільця можна надати зміст в рамках інтегралу вздовж **одновимірного орієнтовного многовиду (багатовиду)**. Такий інтеграл слід розуміти як суму інтегралів вздовж кожної зв'язної і належно орієнтованої компоненти межі. Це стосується і інтегралу вздовж межі довільної багатозв'язної області.

1. Початкові відомості про криві в $\mathbb{R}^2$ та їх орієнтацію.
Одновимірний багатовид. До поняття кривої в $\mathbb{R}^2$ можна прийти, беручи за основу різні інтуїтивні уявлення про неї.

Приклад 1. Пряма лінія, тобто множина точок $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, які є розв'язками рівняння $Ax + By + C = 0$ є кривою, де A , B та C – такі числа, що $|A| + |B| \neq 0$.

Приклад 2. Відрізок, який з'єднує дві точки, є кривою.

Приклад 3. Коло є кривою.

Приклад 4. Множина точок $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, які є розв'язками рівняння $F(x; y) = 0$ (парабола, гіпербола, ...) є кривою, якщо функція F задовольняє певні умови.

Приклад 5. Дві паралельні прямі – є кривою (дві прямі, які перетинаються часто не відносять до кривих).

Приклад 6. Межа кільця (вона є об'єднанням двох кіл) є кривою.

Приклад 7. Межа множини, яку одержують з круга викиданням трьох кругів є кривою.

Приклад 8. Межа довільної області $D \subset \mathbb{R}^2$ є кривою.

Найпростіші криві можна уявити як такі Γ , що у належно вибраній системі координат можна задати рівнянням $y = \gamma_1(x)$, $x \in [a; b]$. При цьому відрізок $[a; b]$ є проекцією кривої Γ на вісь абсцис і функція γ_1 є взаємно-однозначною відповідністю між $[a; b]$ і Γ . До таких кривих належить півколо, а коло не належить.

Нову криву можна отримати шляхом склеювання декількох кривих. Крива може мати точки самоперетину і деякі частини кривої можуть належати їй декілька разів або навіть нескінченну кількість разів.

Приклад 9. Зігнувши відрізок, ми знову отримуємо відрізок, частина якого містить ніби дві частини.

Приклад 10. Намотавши нитку на коло, можемо уявляти намотано нитку як коло, яке складається з багатьох кіл.

Криві можна поділити на різні класи (неперервні, компактні, замкнені, зв'язні, обмежені, прості, орієнтовні, гладкі, ...).

Приклад 11. Коло є обмеженою кривою, а пряма – ні.

Приклад 12. Коло є зв'язною кривою, а межа кільця – ні.

Крива називається **гладкою** або **регулярною**, якщо в кожній точці вона має дотичну. Крива називається **кусково-гладкою**, якщо її можна розділити на скінченну кількість гладких кривих.

Приклад 13. Коло є гладкою кривою, а ламана. – ні. Ламана є кусково-гладкою кривою.

Часто криву потрібно розглядати як орієнтовану. Орієнтовану криву можна уявляти як траєкторію руху матеріальної точки. Для орієнтовної кривої важливим є не тільки множина, але порядок точок на ній (з якої точки почалася рух матеріальної точки, яка точка є кінцевою і як ця точка рухалась по кривій). Орієнтовані криві особливо є важливими при вивченні криволінійних інтегралів другого роду. Перетворити криву в орієнтовану криву можна багатьма способами.

Приклад 14. Відрізок стає орієнтованою кривою, якщо вказати точку, яка є його початком і точку, яка є його кінцем.

Приклад 15. Коло стає орієнтованою кривою, якщо на ньому виділити три точки.

Приклад 16. Криву можна перетворити в орієнтовану шляхом вибору в кожній її точці одиничного вектора дотичної.

Приклад 17. Криву можна перетворити в орієнтовану шляхом вибору в кожній її точці одиничного вектора нормалі.

Приклад 18. Криву можна перетворити в орієнтовану шляхом її параметризації, тобто шляхом задавання її системою

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

На проміжку $[\alpha; \beta]$ є природний порядок точок, який індукують на кривій певний порядок точок, тобто перетворює криву в орієнтовну криву.

Приклад 19. Якщо мурашка хаотично рухається по колу, то набігана нею множина є колом, але траєкторія, описана мурашкою, складається з багатьох частин кола, які мають різну орієнтацію.

На характер орієнтації кривої впливає і орієнтація простору $\mathbb{R}^2$, в якому крива лежить. Далі, якщо не вказано на інше, вважаємо, що простір $\mathbb{R}^2$ має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$, тобто в ньому вибрано праву систему координат (вибрано стандартний базис $(e_1; e_2)$, $e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (0; 1)$). Якщо крива задана останньою написаною системою, то на характер її орієнтації впливає і орієнтація простору $\mathbb{R}$, в якому лежить проміжок $[\alpha; \beta]$. Надалі вважаємо, якщо не вказано на інше, що простір $\mathbb{R}$ має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$, тобто в ньому вибрано базис $e = 1$.

Ми розглядаємо криву в основному як шлях і робимо зауваження, якщо у відповідному місці доцільнішими є інші уявлення про неї. Всі згадані вище та інші уявлення про криву реально зустрічаються, але їх важко охопити одним означенням, яке б не спотворювало інтуїтивне уявлення про криву (крива не зводилась до точки, весь простір $\mathbb{R}^2$ не був кривою). У кожній конкретній ситуації слід добре осмислити, який насправді зміст вкладається в термін “крива”. Зображення різних типів кривих міститься в Додатку 2.

Одновимірним многовидом (одномірним багатовидом) називається така множина $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, що для кожної її точки $(x_0; y_0)$ знайдуться такі δ -окіл $U((x_0; y_0); \delta)$ і функція $\psi: \Gamma \cap U((x_0; y_0); \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, яка є взаємно однозначним відображенням $\Gamma \cap U((x_0; y_0); \delta)$ на $(-\infty; +\infty)$ або на $(-\infty; 0]$. Ті точки $(x_0; y_0) \in \Gamma$, для яких вказане відображення є взаємно однозначним на $(-\infty; 0]$ називаються *крайовими*. Сукупність всіх крайових точок багатовиду називається його *краєм*. Одномірний багатовид не має точок самоперетину і є простою кривою. Пряма, коло, еліпс, гіпербола, парабола є прикладами одномірних багатовидів. Ці лінії не мають кінцевих точок чи точок самоперетину.

Приклад 20. Дві паралельні прямі є одновимірним багатовидом без краю.

Приклад 21. Коло є одновимірним багатовидом без краю.

Приклад 22. Півколо $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1; 1]$, є одновимірним багатовидом з краєм. Його край складається з двох точок $(-1; 0)$ і $(1; 0)$.

Приклад 23. Множина $\{(x; y): x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x; y): x^2 + y^2 = 2\}$, тобто межа кільця $\{(x; y): 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ є одновимірним багатовидом.

Двовимірний многовид — це поверхня, наприклад, сфера, циліндр, параболоїд, тор, тощо.

2. Шлях і крива в просторі $\mathbb{R}^2$. *Шляхом* в $\mathbb{R}^2$ називається функція $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Таким чином, шлях γ в $\mathbb{R}^2$ задається параметрично системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), t \in [\alpha; \beta], \end{cases} \quad (1)$$

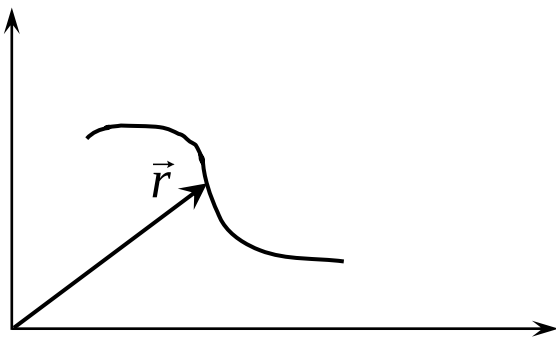


Рис.1

або у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{r}(t) = \gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j}$. Точка $a = (\gamma_1(\alpha); \gamma_2(\alpha))$ називається *початком шляху*, а точка $b = (\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta))$ — його *кінцем*. Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається **замкненим**, якщо $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається **неперервним**, якщо функція γ є неперервною на $[\alpha; \beta]$. Шлях γ називається **жордановим**, якщо він є неперервним і образами різних точок t_1 і t_2 з $[\alpha; \beta]$ є різні точки з $\mathbb{R}^2$. Шлях γ називає **замкненим жордановим**, якщо він є неперервним замкненим і образами різних точок t_1 і t_2 з $(\alpha; \beta)$ є різні точки з $\mathbb{R}^2$. Замкнений жордановий шлях не є жордановим. Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається шляхом класу $C^{(k)}[\alpha; \beta]$, якщо функції $\gamma_1^{(k)}$ і $\gamma_2^{(k)}$ є неперервними на $[\alpha; \beta]$. Шлях

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$\gamma = (\gamma_1; \gamma_2)$ називається *гладким* або *регулярним*, якщо функції γ'_1 і γ'_2 є неперервними на $[\alpha; \beta]$ і $\|\dot{\gamma}'(t)\| := \sqrt{\gamma'^2_1(t) + \gamma'^2_2(t)} \neq 0$ для всіх $t \in [\alpha; \beta]$.

Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається *кусково-гладким*, якщо він є неперервним і існують точки α_k , $k \in \overline{0; \nu}$, такі, що $\alpha = \alpha_0 < \dots < \alpha_k < \dots < \alpha_\nu = \beta$ і звуженням γ на кожний проміжок $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ є гладким шляхом. Регулярний шлях в кожній точці $(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ має *дотичну*, рівняння якої

$$\gamma'_2(t)(x - \gamma_1(t)) - \gamma'_1(t)(y - \gamma_2(t)) = 0. \quad (2)$$

Дотична є паралельною кожному з векторів

$$l_v = \left(\frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}}; \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}} \right), \quad l_v = \left(\frac{\gamma'_1}{-\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}}; \frac{\gamma'_2}{-\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}} \right).$$

Пряма, яка є перпендикулярною до дотичної і проходить через точку $(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ називається *нормаллю* до шляху в цій точці. З умов перпендикулярності двох прямих випливає, що ця нормаль задається рівнянням

$$\gamma'_1(t)(x - \gamma_1(t)) + \gamma'_2(t)(y - \gamma_2(t)) = 0 \quad (3)$$

Нормаль, є паралельною кожному з векторів

$$l_n = \left(\frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}}; \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}} \right), \quad l_n = \left(\frac{\gamma'_2}{-\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}}; \frac{-\gamma'_1}{-\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}} \right).$$

Множина $[\gamma] = \gamma([\alpha; \beta]) \subset \mathbb{R}^2$ називається *носієм* шляху γ . **Кривою** в $\mathbb{R}^2$ називається така множина, яка є носієм деякого шляху γ . При цьому система (1), тобто шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, називається *параметризацією кривої* (рівнянням кривої), або її *орієнтацією*, а проміжок $[\alpha; \beta]$ – множиною параметрів. Крива називається неперервною, жордановою і т.д., якщо вона є носієм відповідного шляху. Наприклад, ламана є кусково-гладкою, але не є гладкою кривою. Шлях $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$, $t \in [-\beta; -\alpha]$, називається *протилежним* до шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Обидва ці шляхи задають одну й ту ж криву, бо $[\gamma^-] = [\gamma]$, проте можемо сказати, що проходженням точок шляху γ^- є протилежним до проходженням шляху γ : початок γ збігається з кінцем γ^- і навпаки, тобто γ і γ^- задають

протилежні орієнтації кривої $[\gamma]$. Кожна замкнена жорданова крива в $\mathbb{R}^2$ розбиває $\mathbb{R}^2$ на дві області (внутрішню $\text{int } \gamma$ і зовнішню $\text{ext } \gamma$), спільною межею яких вона є. Крива розглядувана як носій шляху може мати точки самоперетину. Жорданова крива не має точок самоперетину. Область, обмежену жордановою кривою називатимемо **жордановою областю**.

Приклад 1. Розглянемо шляхи.

$$\begin{aligned} \gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi] \end{cases} & \quad \gamma^\bullet: \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = \sin \frac{t}{2}, t \in [0; 4\pi] \end{cases} \\ \tilde{\gamma}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = -\sin t, t \in [0; 2\pi] \end{cases} & \quad \hat{\gamma}: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0; 4\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Носієм кожного з цих шляхів є коло з початку координат і радіусом 1. Проте тільки шляхи γ і $\gamma^\bullet$ задають однакову орієнтацію кривої.

Зауваження 1. Шлях часто зручно задавати у векторному записі рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$ і $\vec{r}(t) = \gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j}$. Тоді вектор-функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ зручно трактувати як закон руху матеріальної точки. Якщо на площині вектори $\vec{r} = \vec{r}(t)$ зобразити у вигляді напрямлених відрізків, то їхні кінці будуть лежати на криві, яка називається **годографом** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$. На годограф слід дивитись як на траєкторію руху матеріальної точки, яка рухається за законом $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Ця траєкторія є кривою, яка задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), t \in [\alpha; \beta], \end{cases} \quad (1)$$

Вектор $\vec{r}'(t)$ лежить на дотичній до годографа і напрямлений в сторону руху матеріальної точки. Вектор

$$l_v = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \left(\frac{\gamma_1'(t)}{\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}}; \frac{\gamma_2'(t)}{\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}} \right)$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

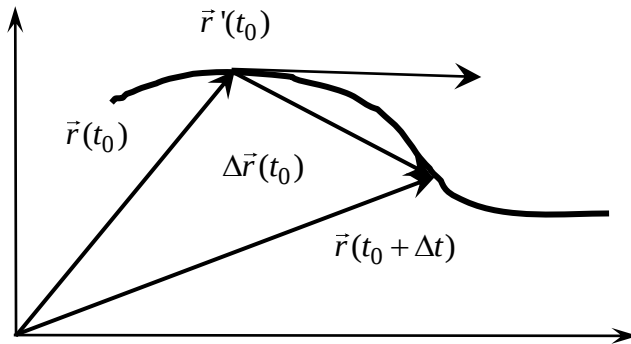


Рис.2

є одиничним вектором дотичної, що напрямлений в сторону руху точки., а вектор $\vec{r}''(t)$ є вектором прискорення руху матеріальної точки. В термінах цих позначень другий закон Ньютона для руху під дією сили $\vec{F}(t)$ матеріальної точки з масою m вздовж кривої $\vec{r} = \vec{r}(t)$ можна записати у вигляді $m\vec{r}''(t) = \vec{F}(t)$.

Зауваження 2. Вибір одиничних векторів дотичної та нормалі може бути довільним. Їх певний вибір пов'язаний зі зручністю використання в просторі $\mathbb{R}^2$ заданої орієнтації. Простір $\mathbb{R}^2$ називається орієнтовним, якщо в ньому задано базис $(e_1; e_2)$. Таким чином, **орієнтований простір** $\mathbb{R}^2$ – це упорядкована пара $(\mathbb{R}^2; (e_1; e_2))$ векторного простору $\mathbb{R}^2$ і деякого його базису $(e_1; e_2)$, який називається його орієнтацією, де $e_1 = (\alpha_{11}; \alpha_{12})$ і $e_2 = (\alpha_{21}; \alpha_{22})$. Простори $(\mathbb{R}^2; (e_1; e_2))$ і $(\mathbb{R}^2; (\tilde{e}_1; \tilde{e}_2))$ називаються однаково орієнтовними, якщо матриця

$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ переходу від базису $(e_1; e_2)$ до базису $(\tilde{e}_1; \tilde{e}_2)$ має додатний

визначник. Ця матриця $\mathbf{T}$ визначається системою

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = t_{11}e_1 + t_{12}e_2, \\ \tilde{e}_2 = t_{21}e_1 + t_{22}e_2, \end{cases}$$

тобто рівності $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}$. Останню рівність можна також записати у вигляді $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}^{-1}$, де $\mathbf{E}^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $\mathbf{E}$,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \tilde{\alpha}_{12} \\ \tilde{\alpha}_{21} & \tilde{\alpha}_{22} \end{pmatrix},$$

$\tilde{e}_1 = (\tilde{\alpha}_{11}; \tilde{\alpha}_{12})$ і $\tilde{e}_2 = (\alpha_{21}; \alpha_{22})$. З цих рівностей знаходимо, що

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{11} & \alpha_{21} \\ \tilde{\alpha}_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{11} \\ \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{12} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_{21} & \alpha_{21} \\ \tilde{\alpha}_{22} & \alpha_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \tilde{\alpha}_{21} \\ \alpha_{12} & \tilde{\alpha}_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Простір $(\mathbb{R}^2; (e_1; e_2))$ називається **додатно-орієнтованим** (має орієнтацію

$\mathbf{j} = +1$), якщо визначник $\Delta(e_1; e_2) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ є додатним. Простір

$(\mathbb{R}^2; (e_1; e_2))$ називається **від'ємно-орієнтованим** (має орієнтацію $\mathbf{j} = -1$), якщо цей визначник є від'ємним. Одиничних векторів $l_v = (v_1; v_2)$ дотичної до шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ і одиничних векторів нормалі $l_n = (n_1; n_2)$ також є два в кожній його точці. Часто виникає потреба у конкретному їх виборі.

Нехай простір $\mathbb{R}^2$ має орієнтацію $\mathbf{j} \in \{-1; +1\}$ і $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – шлях в просторі $\mathbb{R}^2$. Виберемо одиничний вектор нормалі $l_n = (n_1; n_2)$ і одиничний вектор дотичної $l_v = (v_1; v_2)$ так, щоб базис $(l_n; l_v)$ мав орієнтацію $\mathbf{j}$. Отже, $\Delta(l_n; l_v) = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \mathbf{j}$ і

$n_1 v_1 + n_2 v_2 = 0$. Тоді отримуємо систему $\begin{cases} n_1 v_2 - n_2 v_1 = \mathbf{j}, \\ n_2 v_2 + n_1 v_1 = 0. \end{cases}$ Оскільки

$n_1^2 + n_2^2 = 1$, то з цієї системи, що $v_1 = -n_2 \mathbf{j}$ і $v_2 = n_1 \mathbf{j}$. Таким чином, якщо $n_1 = \cos \alpha_1$, $n_2 = \cos \alpha_2$, $v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1$ і $v_2 = \cos \tilde{\alpha}_2$, то $\cos \tilde{\alpha}_1 = -\mathbf{j} \cos \alpha_2$ і $\cos \tilde{\alpha}_2 = \mathbf{j} \cos \alpha_1$. Зокрема, якщо, як звичайно, простір $\mathbb{R}^2$ має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$, то $\cos \tilde{\alpha}_1 = -\cos \alpha_2$ і $\cos \tilde{\alpha}_2 = \cos \alpha_1$, $n_1 = \cos \alpha_1 = \frac{\gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}$,

$n_2 = \cos \alpha_2 = \frac{-\gamma_1'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}$. За такого вибору базис $(l_n; l_v)$ має ту ж

орієнтацію, що і простір $\mathbb{R}^2$.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Приклад 2. Простір $\mathbb{R}^2$, в якому вибрано базис $(e_1; e_2)$, де $e_1 = (1; 0)$ і $e_2 = (0; 1)$ є додатно-орієнтовним, тобто має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$, бо $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{22} = 1$ і $\Delta(e_1; e_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Приклад 3. Простір $\mathbb{R}^2$, в якому вибрано базис $e = (e_1; e_2)$, де $e_1 = (0; 1)$ і $e_2 = (1; 0)$ є від'ємно-орієнтовним, тобто має орієнтацію $\mathbf{j} = -1$, бо $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{21} = 1$, $\alpha_{22} = 0$ і $\Delta(e_1; e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$.

Приклад 4. Простір $\mathbb{R}^2$, в якому вибрано базис $e = (e_1; e_2)$, де $e_1 = (-1; 0)$ і $e_2 = (0; -1)$ є додатно-орієнтовним, тобто має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$, бо $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} = 0$, $\alpha_{22} = -1$ і $\Delta(e_1; e_2) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

Зауваження 3. У диференціальній геометрії вектори дотичної $l_v = (v_1; v_2)$ та нормалі $l_n = (n_1; n_2)$ вибирають, як правило, так, щоб базис $(l_n; l_v)$ був базисом Френе, тобто мав ту ж орієнтацію, що і базис $(\vec{i}; \vec{j})$, а це не узгоджується зі зробленими нами домовленостями.

3. Означення і найпростіші властивості криволінійного інтеграла першого роду. Нехай спрямована крива Γ задана системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]. \quad (1)$$

Часто криву Γ , задану системою (1) ми будемо позначати тим же символом, що шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, який заданий цією системою: $\Gamma = \gamma$. На кривій Γ задамо функцію f . Розглянемо розбиття $\{t_k : k \in \overline{0; \nu}\}$ проміжку $[\alpha; \beta]$ таке, що $\alpha = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_\nu = \beta$. Точкам t_k на кривій відповідають точки $A_k(\gamma_1(t_k); \gamma_2(t_k))$. На кожному проміжку $[t_k; t_{k+1}]$ візьмемо довільну точку τ_k (їй відповідатиме точка $B_k(\xi_k; \eta_k)$) і розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta l_k, \quad (2)$$

де $\xi_k = \gamma_1(\tau_k)$, $\eta_k = \gamma_2(\tau_k)$ і Δl_k - довжина дуги $A_k A_{k+1}$ тобто довжина звуження γ на $[t_k; t_{k+1}]$. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda := \max\{\Delta t_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$. **Криволінійним інтегралом першого роду** функції f вздовж шляху γ називається границя $\int_{\gamma} f(x; y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$.

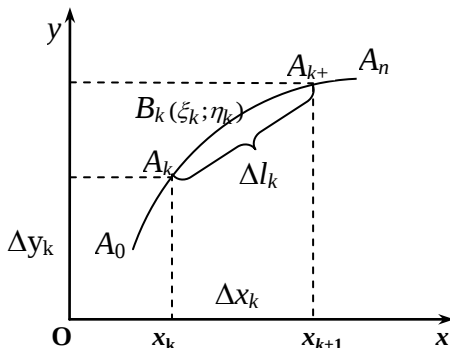


Рис.3

Криволінійний інтеграл першого роду має звичайні для інтегралів властивості, серед яких виділимо дві.

Теорема 1. Для кожної спрямованої кривої γ , заданої системою (1),

$$\int_{\gamma^-} f(x; y) dl = \int_{\gamma} f(x; y) dl \quad (3)$$

якщо останній інтеграл існує, де γ^- - крива, протилежна до γ , тобто крива, задана системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(-t), \\ y = \gamma_2(-t), \quad t \in [-\beta; -\alpha]. \end{cases}$$

Доведення. Рівність (3) випливає безпосередньо з означення криволінійного інтеграла. ►

Теорема 2. Якщо функції $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно-диференційованими на проміжку $[\alpha; \beta]$, а функція f є неперервною на шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, то

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Доведення. За теоремою про середнє для визначених інтегралів

$$\Delta l_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt = \sqrt{\gamma_1'^2(\tilde{t}_k) + \gamma_2'^2(\tilde{t}_k)} \Delta t_k, \quad t_k < \tilde{t}_k < t_{k+1}.$$

Тому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k)) \sqrt{\gamma_1'^2(\tilde{t}_k) + \gamma_2'^2(\tilde{t}_k)} \Delta t_k.$$

Нехай

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=0}^{v-1} f(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k)) \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tau_k)} \Delta t_k$$

- інтегральна сума для інтегралу, який стоїть в правій частині рівності (4). Тоді

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma - \hat{\sigma}) = 0, \text{ бо}$$

$$\begin{aligned} |\sigma - \hat{\sigma}| &\leq \sum_{k=0}^{v-1} |f(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k))| \left| \sqrt{\gamma_1'^2(\tilde{t}_k) + \gamma_2'^2(\tilde{t}_k)} - \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tau_k)} \right| \Delta t_k \\ &\leq \sum_{k=0}^{v-1} |f(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k))| (|\gamma_1'(\tilde{t}_k) - \gamma_1'(\tau_k)| + |\gamma_2'(\tilde{t}_k) - \gamma_2'(\tau_k)|) \Delta t_k < (\beta - \alpha) M \varepsilon, \end{aligned}$$

для кожного $\varepsilon > 0$, якщо $\lambda < \varepsilon$, де

$$M = \max \{ |f(\gamma_1(t); \gamma_2(t))| : t \in [\alpha; \beta] \}.$$

Але

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\sigma} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{\gamma} f(x; y) dl$$

Тому приходимо до потрібного висновку. ►

Наслідок 1. Якщо крива γ задана рівнянням $y = \gamma_2(x)$, $x \in [a; b]$, і функція γ_2 є неперервно-диференційованою на $[a; b]$, а функція f є неперервною на γ , то

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_a^b f(x; \gamma_2(x)) \sqrt{1 + \gamma_2'^2(x)} dx.$$

Доведення. Справді, таку криву можна розглядати як задану параметрично системою

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \gamma_2(x), \quad x \in [a; b]. \end{cases} \blacktriangleright$$

Наслідок 2. Якщо крива γ задана рівнянням $x = \gamma_1(y)$, $y \in [c; d]$ і функція γ_1 є неперервно-диференційованою на $[c; d]$, а функція f є неперервною на γ , то

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_c^d f(\gamma_1(y); y) \sqrt{\gamma_1'^2(y) + 1} dy.$$

Доведення. Справді, таку криву можна розглядати як задану параметрично системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(y), \\ y = y, \quad y \in [c; d]. \end{cases} \blacktriangleright$$

Наслідок 3. Якщо крива γ задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, і функція ρ є неперервно-диференційованою на $[\alpha; \beta]$, а функція f є неперервною на γ , то

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi) \cos \varphi; \rho(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Доведення. Справді, таку криву можна розглядати як задану параметрично системою

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

і при цьому $\gamma_1'^2(\varphi) + \gamma_2'^2(\varphi) = \rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)$. $\blacktriangleright$

Приклад 1. Нехай γ – це відрізок $y = \frac{1}{2}x - 2$, $x \in [0; 4]$. Тоді

$$\int_{\gamma} \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x+2} \sqrt{1+(1/2)^2} dx = \sqrt{5} \ln 2.$$

Приклад 2. Нехай γ – це частина кола

$$\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 2 \cos t, \quad t \in [0; \pi/2], \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{\gamma} xy^3 dl = \int_0^{\pi/2} (2 \sin t)(2 \cos t)^3 \sqrt{(2 \cos t)^2 + (2 \sin t)^2} dt = 8.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Зауваження 1. Якщо крива γ є об'єднанням двох кривих $\tilde{\gamma}$ і $\hat{\gamma}$, то за означенням $\int_{\gamma} f(x; y)dl = \int_{\tilde{\gamma}} f(x; y)dl + \int_{\hat{\gamma}} f(x; y)dl$. Сказане стосується і того випадку, коли $\hat{\gamma} \subset \tilde{\gamma}$ і функція f у спільних точках $\tilde{\gamma}$ і $\hat{\gamma}$ приймає різні значення.

Приклад 3. Нехай γ – це ламана, яка послідовно з'єднує точки $(1;0)$, $(0;1)$, $(2;1)$ та $(2;4)$. Крива γ є об'єднанням трьох відрізків $y=x$, $x \in [0;1]$, $y=1$, $x \in [1;2]$, та $x=2$, $y \in [1;4]$. Тому

$$\int_{\gamma} xdl = \int_0^1 x\sqrt{2}dx + \int_0^2 xdx + \int_1^4 2dy = \frac{16 + \sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 4. Нехай γ – це межа кільця $1 < x^2 + y^2 < 4$. У даному випадку γ є об'єднанням двох кіл: кола $\tilde{\gamma}$

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

і кола $\hat{\gamma}$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

Тому

$$\int_{\gamma} xdl = \int_{\tilde{\gamma}} xdl + \int_{\hat{\gamma}} xdl = \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} 4 \cos t dt = 0.$$

Приклад 5. Нехай γ є об'єднанням двох відрізків $\tilde{\gamma}$ і $\hat{\gamma}$, а $f(x; y) = \begin{cases} x, (x; y) \in \tilde{\gamma}, \\ y, (x; y) \in \hat{\gamma}, \end{cases}$ де $\tilde{\gamma}$ – це відрізок, який з'єднує точки $(0;0)$ і $(4;4)$, а $\hat{\gamma}$ – це відрізок, який з'єднує точки $(4;4)$ і $(2;2)$. Тоді $\tilde{\gamma}$ задається рівнянням $y=x$, $x \in [0;4]$, а $\hat{\gamma}$ – рівнянням $y=x$, $x \in [2;4]$. Тому

$$\int_{\gamma} f(x; y)dl = \int_{\tilde{\gamma}} xdl + \int_{\hat{\gamma}} ydl = \int_0^4 x\sqrt{2}dx + \int_2^4 x\sqrt{2}dx = 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 14\sqrt{2}.$$

Зауваження 2. Якщо в означенні криволінійного інтегралу першого роду взяти $f \equiv 1$, то отримаємо формулу

$$L = \int_{\gamma} dl \quad (7)$$

для знаходження довжини спрямованої кривої за допомогою цього інтегралу.

За допомогою криволінійного інтегралу першого роду знаходять багато фізичних та інших характеристик різноманітних явищ (масу кривої, статичні моменти, координати центра мас і т. д.). Наприклад, маса кривої, яка має густину $\rho = \rho(x; y)$ знаходиться за формулою

$$m = \int_{\gamma} \rho(x; y) dl.$$

Приклад 6. Нехай γ – це одна арка циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Тоді

$$L = \int_{\gamma} dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 8.$$

Приклад 7. Знайдемо масу m кривої $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \in [0; 1]$, якщо її лінійна щільність $\rho(x; y) = y\sqrt{1+x}$. Згідно написаної вище формули

$$m = \int_0^1 \frac{2}{3} x^{3/2} \sqrt{1+x} \sqrt{1+x} dx = \frac{16}{35}.$$

Зауваження 3. Зустрічаються і невідомі криволінійні інтеграли з особливою точкою $(x_0; y_0) \in \Gamma$. Вони визначаються рівністю

$$\int_{\Gamma} f(x; y) dl = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Gamma \setminus U((x_0; y_0); \varepsilon)} f(x; y) dl.$$

Приклад 8.

$$\int_{\partial U((0;0);1)} \frac{(x-1)dl}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\partial U((0;0);1) \setminus U((1;0); \varepsilon)} \frac{(x-1)dl}{(x-1)^2 + y^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+2\pi} \frac{(\cos \varphi - 1)d\varphi}{2(1 - \cos \varphi)} = -\pi.$$

4. Означення і обчислення криволінійного інтегралу другого роду.

Нехай спрямована крива Γ задана системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases} \quad (1)$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Часто криву Γ , задану системою (1) ми будемо позначати тим же символом, що й шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, який заданий цією системою: $\Gamma = \gamma$. Нехай на кривій Γ задано функції P і Q . Розглянемо розбиття $\{t_k : k \in \overline{0; \nu}\}$ проміжку $[\alpha; \beta]$ таке, що $\alpha = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_m = \beta$. Точкам t_k на кривій відповідають точки $A_k(x_k; y_k)$, де $x_k = \gamma_1(t_k)$ і $y_k = \gamma_2(t_k)$. На кожному проміжку $[t_k; t_{k+1}]$ візьмемо довільну точку τ_k (їй відповідатиме точка $B_k(\xi_k; \eta_k)$) і розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\nu-1} P(\xi_k; \eta_k) \Delta x_k, \quad (2)$$

де $\xi_k = \gamma_1(\tau_k)$, $\eta_k = \gamma_2(\tau_k)$ і $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda := \max\{\Delta t_k : k \in \overline{0; m-1}\}$. *Криволінійним інтегралом другого роду* або *інтегралом функції P по шляху γ* називається границя

$$\int_{\gamma} P(x; y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Аналогічно визначається інтеграл

$$\int_{\Gamma} Q(x; y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\nu-1} Q(\xi_k; \eta_k) \Delta y_k, \quad (3)$$

де $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$. Крім цього, за означенням

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} P dx + \int_{\gamma} Q dy.$$

Криволінійний інтеграл другого роду має звичайні для інтегралів властивості. Виділимо дві.

Теорема 1. Для кожної спрямованої кривої γ

$$\int_{\gamma^-} P(x; y) dx = - \int_{\gamma} P(x; y) dx, \quad \int_{\gamma^-} Q(x; y) dy = - \int_{\gamma} Q(x; y) dy,$$

якщо інтеграли в прaviх частинах існують.

Доведення. Це твердження випливає безпосередньо з означень відповідних інтегралів. ►

Теорема 2. Якщо функції P і Q є неперервними на кривій $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ і функції γ_1 і γ_2 є неперервно-диференційованими

на проміжку $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_{\gamma} P(x; y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt, \quad (4)$$

$$\int_{\gamma} Q(x; y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma_2'(t) dt. \quad (5)$$

Доведення. За теоремою Лагранжа

$$\Delta x_k = \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) = \gamma_1'(\tilde{\tau}_k) \Delta t_k, \quad t_k < \tilde{\tau}_k < t_{k+1}.$$

Тому

$$\sigma = \sum_{k=0}^{v-1} P(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k)) \gamma_1'(\tilde{\tau}_k) \Delta t_k.$$

Нехай

$$\hat{\sigma} = \sum_{k=0}^{v-1} P(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k)) \gamma_1'(\tau_k) \Delta t_k$$

– інтегральна сума для інтегралу, який стоїть в правій частині рівності (4).
Тоді

$$|\sigma - \hat{\sigma}| \leq \sum_{k=0}^{v-1} |P(\gamma_1(\tau_k); \gamma_2(\tau_k))| |\gamma_1'(\tilde{\tau}_k) - \gamma_1'(\tau_k)| \Delta t_k.$$

Функція P є неперервною, а тому і обмеженою на Γ . Отже, $(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\forall t \in [\alpha; \beta]): |P(\gamma_1(t); \gamma_2(t))| \leq c_1$. Далі, функція γ_1' є неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$, а тому і рівномірно неперервною на $[\alpha; \beta]$. Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \lambda < \delta): |\gamma_1'(\tilde{\tau}_k) - \gamma_1'(\tau_k)| \leq \varepsilon.$$

Тому, якщо $\lambda < \delta$, то

$$|\sigma - \hat{\sigma}| \leq \sum_{k=0}^{v-1} c_1 \varepsilon \Delta t_k = c_1 \varepsilon (\beta - \alpha).$$

Отож, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\sigma - \hat{\sigma}) = 0$. Але

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{\sigma} = \int_{\alpha}^{\beta} P(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt.$$

Тому

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} P(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) dt.$$

Звідси випливає (4), а (5) доводиться аналогічно. ►

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Наслідок 1. Якщо крива γ задана рівнянням $y = \gamma_2(x)$, $x \in [a; b]$, і функція γ_2 є неперервно-диференційованою на $[a; b]$, а функції P і Q є неперервними на γ , то

$$\int_{\gamma} P(x; y) dx = \int_a^b P(x; \gamma_2(x)) dx, \quad \int_{\gamma} Q(x; y) dy = \int_a^b Q(x; \gamma_2(x)) \gamma_2'(x) dx.$$

Наслідок 2. Якщо крива γ задана рівнянням $x = \gamma_1(y)$, $y \in [c; d]$, і функція γ_1 є неперервно-диференційованою на $[c; d]$, а функції P і Q є неперервними на γ , то

$$\int_{\gamma} P(x; y) dx = \int_c^d P(\gamma_1(y); y) \gamma_1'(y) dy, \quad \int_{\gamma} Q(x; y) dy = \int_c^d Q(\gamma_1(y); y) dy.$$

Приклад 1. Нехай γ – частина параболи $y = x^2$, $x \in [0; 1]$. Тоді

$$\int_{\gamma} xy dx + x^2 y dy = \int_0^1 (x^3 dx + 2x^5 dx) = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{12}.$$

Приклад 2. Нехай γ – частина прямої, яка проходить через точки $(0; 1)$ і $(2; 4)$ з початком $(2; 4)$ і кінцем у точці $(0; 1)$. Для знаходження інтеграла $\int_{\gamma} (x - y) dx + (x + y) dy$ напишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 1}{4 - 1}, \quad y = \frac{3}{2}x + 1.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x - y) dx + (x + y) dy &= \int_{\gamma} (x - y) dx + (x + y) dy \\ &= \int_2^0 \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) dx + \left(\frac{5}{2}x + 1 \right) \frac{3}{2} dx = \int_2^0 \left(\frac{13}{4}x + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{13}{2} - 1 = -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

З формального боку такі міркування не є повністю правильними, бо ми отримане рівняння кривої (шлях) $y = \frac{3}{2}x + 1$, $x \in [0; 2]$, є таким, що точка $\alpha = 0$ відповідає кінцеві кривої, а точка $\beta = 2$ відповідає початку кривої. Формальності можна зберегти записами

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x-y)dx + (x+y)dy &= - \int_{\gamma^-} (x-y)dx + (x+y)dy \\ &= - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x - 1 \right) dx + \left(\frac{5}{2}x + 1 \right) \frac{3}{2} dx = - \int_0^2 \left(-\frac{13}{4}x + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{15}{2} \end{aligned}$$

або вибором іншої параметризації кривої:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{4-1} = -t, \quad x = -2t, \quad y = -3t + 1, \quad \begin{cases} x = -2t, \\ y = -3t + 1, \quad t \in [-1; 0]. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^1 (t-1)(-2)dt + (-2t-3t+1)(-3)dt \\ &= \int_{-1}^0 (13t-1)dt = -\frac{13}{2} - 1 = -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Нехай γ – частина параболи $x = y^2$ від точки $(1; -1)$ до точки $(1; 1)$. Для знаходження інтегралу $\int_{\gamma} xy dx$ доцільно криву γ розбити

на дві ($\gamma = \tilde{\gamma} \cup \hat{\gamma}$), перша з яких задається рівнянням $y = -\sqrt{x}$, а друга – рівнянням $y = \sqrt{x}$. Тоді

$$\int_{\gamma} xy dx = \int_{\tilde{\gamma}} xy dx + \int_{\hat{\gamma}} xy dx = - \int_1^0 x^{3/2} dx + \int_0^1 x^{3/2} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{4}{5}.$$

Приклад 4. Нехай γ – крива з початком у точці $(4; 3)$, яка складається з частини $\tilde{\gamma}$ косинусоїди $y = \cos x$, $x \in [0; \pi/2]$, та відрізка $\hat{\gamma}$, який з'єднує точки $(0; 1)$ і $(4; 3)$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} x dy = - \int_0^{\pi/2} x \sin x dx = -(-x \cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = -1.$$

Для знаходження інтеграла $\int_{\tilde{\gamma}} x dy$ напишемо рівняння прямої, що проходить через точки $(0; 1)$ і $(4; 3)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-0}{4-0} = \frac{y-1}{3-1}, \quad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Тоді

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\tilde{\gamma}} x dy = \int_0^4 \frac{1}{2} x dx = 4.$$

Отже,

$$\int_{\gamma} x dy = - \int_{\tilde{\gamma}} x dy - \int_{\tilde{\gamma}} x dy = -4 + 1 = -3.$$

Зауваження 1. Криволінійні інтеграли першого та другого родів по замкненій кривій γ іноді позначають символами, відповідно $\oint_{\gamma} f dl$, $\oint_{\gamma} f dx$.

При цьому, важливо знайти такий шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, який би задавав множину точок проходження (криву γ) і задавав відповідну її орієнтацію (порядок проходження точок). Якщо крива є замкнутою і є межею деякої області D , то можливими є два випадки. Перший: для знайденого шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ при зміні t від α до β , точка $(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$ рухається по межі області так, що спостерігачеві, який рухається разом з нею, здається що область D знаходиться зліва від нього. Таку **орієнтацію** кривої γ , що є межею області D називають **додатною** (орієнтованою проти ходу годинникової стрілки) і позначають символом γ^+ або $\partial^+ D$. В іншому випадку (коли область D знаходиться справа від спостерігача) **орієнтацію** називають **від'ємною** і позначають символом γ^- або $\partial^- D$.

Зауваження 2. Існує багато шляхів, які мають однакові носії, тобто задають однакову криву. Зокрема, такими є шляхи γ і γ^- . Два гладкі шляхи $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ і $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1; \tilde{\gamma}_2) : [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ називаються **еквівалентними**, якщо існує така зростаюча і неперервно-диференційована на $[\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}]$ функція $\tau : [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}] \rightarrow [\alpha; \beta]$, що $\tau([\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}]) = [\alpha; \beta]$ і $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\tau(t))$ для всіх $t \in [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}]$. Тоді

$$\int_{\gamma} P(x; y) dx = \int_{\tilde{\gamma}} P(x; y) dx, \quad \int_{\gamma} Q(x; y) dy = \int_{\tilde{\gamma}} Q(x; y) dy,$$

тобто криволінійні інтеграли по еквівалентних шляхах є рівними. Поділимо всі шляхи на попарно неперетинні класи еквівалентності, віднісши до одного класу еквівалентні шляхи. Кожний такий клас еквівалентності називається **орієнтовною параметрично заданою кривою**. У понятті «орієнтовної параметрично заданої кривої» зосереджено все те спільне, що мають всі шляхи з однаковими носіями і однаковим порядком точок (одного

орієнтацією). У світлі сказаного можна говорити про криволінійний інтеграл другого роду по орієнтовній параметрично заданій кривій (параметричному орієнтовному одновимірному багатовиду). Якщо в наведеному вище означенні еквівалентності слово “зростаюча” замінити словами “строго монотонна”, то прийдемо до поняття параметрично заданої кривої, а накладаючи на τ інші обмеження прийдемо до означення різних типів параметрично заданих кривих. У світлі сказаного можна говорити про криволінійний інтеграл другого роду по орієнтовній параметрично заданій кривій та про криволінійний інтеграл першого роду по параметрично заданій кривій. Разом з цим, не можна говорити про криволінійний інтеграл другого роду по множині. Наприклад, висловлення про те, інтеграл $\int_{\gamma} P(x; y)dx$ по відрізку γ , який з'єднує точки $(0;0)$ і $(4;4)$

не має змісту. Це висловлення стає змістовним, якщо вказати яким чином цей відрізок є орієнтовним (точка $(0;0)$ є початком, а точка $(4;4)$ є кінцем, або точка $(0;0)$ є початком, а точка $(3;3)$ - кінцем, а відрізок, що з'єднує точки $(3;3)$ і $(4;4)$ біжуча точка проходить двічі в протилежних напрямках).

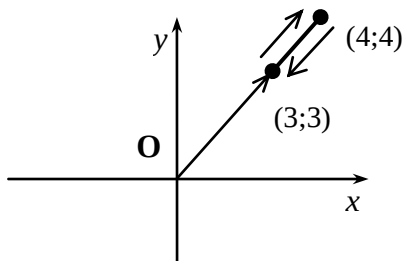


Рис.1

Зауваження 3. Інтегралу по орієнтовній межі кільця можна надати зміст в рамках інтегралу по одновимірному орієнтовному багатовиду. Такий інтеграл слід розуміти як суму інтегралів по кожній зв'язній і належно орієнтовній компоненті межі. Це стосується і інтеграла по межі довільної багатозв'язної області.

Приклад 5. Нехай γ – межа кільця $\{(x; y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Тоді

$$\int_{\gamma} ydx + dy = \int_{\tilde{\gamma}} ydx + dy + \int_{\hat{\gamma}} ydx + dy,$$

де $\tilde{\gamma} = \{(x; y): x^2 + y^2 = 1\}$ і $\hat{\gamma} = \{(x; y): x^2 + y^2 = 4\}$ – кола. Для кола $\hat{\gamma} = \{(x; y): x^2 + y^2 = 4\}$ вибираємо таку параметризацію

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

а для кола $\tilde{\gamma} = \{(x; y) : x^2 + y^2 = 1\}$:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = -\sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{\gamma} y dx + dy = \int_0^{2\pi} (2 \cos t - 4 \sin^2 t) dt + \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \cos t) dt = -1.5\pi.$$

Зауваження 4. Якщо $G \subset \mathbb{R}^2$ – деяка однозв'язна область, то часто є потреба вибрати нормальний вектор $l_n = (n_1; n_2)$ в кожній точці $(x_0; y_0) \in \partial G$ так, щоб він був напрямлений на зовнішність G , тобто щоб для кожної точки $(x_0; y_0) \in \partial G$ точки $(x; y)$, де $x = x_0 + n_1 t$ і $y = y_0 + n_2 t$ не належали G , якщо $t \rightarrow 0+$, а точки $(x_0 - n_1 t; y_0 - n_2 t)$ - належали G , якщо $t \rightarrow 0+$.

Зауваження 5. Нехай $G \subset \mathbb{R}^2$ – деяка однозв'язна область, межа якої задається шляхом $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, де вектор $l_v = (v_1; v_2)$,

$$v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1 = \frac{\gamma_1'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}, \quad v_2 = \cos \tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}},$$

є одичним вектором дотичної, що відповідає додатно-орієнтованій межі області, а вектор $l_n = (n_1; n_2)$, де

$$n_1 = \cos \alpha_1 = \frac{\gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}, \quad n_2 = \cos \alpha_2 = \frac{-\gamma_1'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}},$$

є одичним вектором нормалі (зовнішньої нормалі), що відповідає додатно-орієнтованій межі області. При цьому,

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 = \frac{\gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \cdot \frac{\gamma_1'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} + \frac{-\gamma_1'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \cdot \frac{\gamma_2'}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = 0$$

i

$$\Delta(l_n; l_v) = \begin{vmatrix} \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} & \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \\ \frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} & \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \end{vmatrix} = 1.$$

Вектори $\tilde{e}_1 = l_n = (n_1; n_2)$ і $\tilde{e}_2 = l_v = (v_1; v_2)$ є ортогональними і базис $(l_n; l_v)$ має ту ж орієнтацію, що і стандартний базис $(e_1; e_2)$ простору $\mathbb{R}^2$. Вектор l_v напрямлений в сторону руху точки (є вектором швидкості) по межі, а вектор l_n напрямлений на зовнішність області G (є зовнішньою нормаллю), що зрозуміло з геометричних міркувань. До того ж,

$$v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1 = \frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = \frac{d\gamma_1}{dl}, \quad v_2 = \cos \tilde{\alpha}_1 = \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = \frac{d\gamma_2}{dl},$$

$$n_1 = \cos \alpha_1 = \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = \frac{d\gamma_2}{dl}, \quad n_2 = \cos \alpha_2 = \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} = -\frac{d\gamma_1}{dl},$$

де dl – диференціал дуги кривої і довжина знаходиться від точки $t = \alpha$ до точки $t = \beta$.

Приклад 6. Нехай γ – коло $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, t \in [0; 2\pi] \end{cases}$. Тоді вектор

$$l_n = \left(\frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}; \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \right) = (\cos t; \sin t) \quad \epsilon \quad \text{одиничним вектором}$$

зовнішньої нормалі в кожній точці $(x; y) \in \gamma$, а вектор

$$l_v = \left(\frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}; \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \right) = (-\sin t; \cos t) \quad \epsilon \quad \text{одиничним вектором}$$

дотичної.

Приклад 7. Нехай γ – еліпс $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, t \in [0; 2\pi] \end{cases}$. Тоді вектор

$$l_n = \left(\frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}; \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}} \right) = \left(\frac{b \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}; \frac{a \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}} \right)$$

є одиничним вектором зовнішньої нормалі в кожній точці $(x; y) \in \gamma$, а

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

вектор

$$l_v = \left(\frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}}; \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2}} \right) = \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}}; \frac{b \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}} \right) \epsilon$$

одичинним вектором дотичної.

Зауваження 6. Якщо деяка множина $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана рівнянням $F(x; y) = 0$ і $(x_0; y_0) \in \Gamma$ така точка, що $F(x_0; y_0) = 0$, функція $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в деякому δ -околі точки $(x_0; y_0)$, має в цьому околі неперервні частинні похідні F'_x та F'_y і принаймні одна з цих частинних похідних є відмінною від нуля в точці $(x_0; y_0)$, то, згідно з теоремою про неявну функцію, частину кривої Γ , яка міститься в деякому δ -околі точки $(x_0; y_0)$, можна задати одним з рівнянь $y = f(x)$ або $x = \psi(y)$. Якщо вказані вище умови виконуються в кожній точці кривої Γ , то в кожній точці $(x_0; y_0) \in \Gamma$ ця крива має дотичну і нормаль, які задаються відповідно рівняннями

$$F'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)}.$$

При цьому вектори $l_v = (v_1; v_2)$ і $l_n = (n_1; n_2)$, де

$$v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1 = \frac{-F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \quad v_2 = \cos \tilde{\alpha}_2 = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \quad (3)$$

$$n_1 = \cos \alpha_1 = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \quad n_2 = \cos \alpha_2 = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}, \quad (4)$$

є одичинними векторами дотичної і нормалі, відповідно. Вибір вказаних знаків перед коренем доцільно узгоджувати згідно з додатковими вказівками. Якщо, наприклад, задана рівнянням $F(x; y) = 0$ крива Γ є межею області $G \subset \mathbb{R}^2$, заданої умовою $F(x; y) < 0$ і у формулі (4) взято знак $+$, то вектор l_n є зовнішньою нормаллю в точці $(x_0; y_0) \in \partial G$, бо точки $(x; y)$, де $x = x_0 + tn_1$, $y = y_0 + tn_2$, $t \in [0; 1]$, не належать G , якщо $t \rightarrow 0+$, оскільки $F(x_0; y_0) = 0$, і згідно з формулою Тейлора

$$\begin{aligned}
 F(x; y) &= F(x_0; y_0) + \frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}(x - x_0) + \frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}(y - y_0) + o(t) \\
 &= \frac{(F'_x)^2}{F'^2_x + F'^2_y} t n_1 + \frac{(F'_y)^2}{F'^2_x + F'^2_y} t n_2 + o(t), \quad t \rightarrow 0+.
 \end{aligned}$$

Якщо функції F'_x і F'_y є неперервними, то таку узгодженість вибору знаків досить перевірити в одній точці.

Приклад 8. Нехай γ – коло $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Тоді вектор $l_n = (x/R; y/R)$ є одиничним вектором зовнішньої нормалі в кожній точці $(x; y) \in \gamma$.

Приклад 9. Нехай γ – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Тоді вектор $l_n = \left(\frac{x/a^2}{\sqrt{(x/a^2)^2 + (y/b^2)^2}}; \frac{y/b^2}{\sqrt{(x/a^2)^2 + (y/b^2)^2}} \right)$ є одиничним вектором зовнішньої нормалі в кожній точці $(x; y) \in \gamma$.

Приклад 9. Нехай γ – додатньо-орієнтоване коло $(x+1)^2 + y^2 = 1$ і l_n – зовнішня нормаль до нього. Тоді

$$\int_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial l_n} dx = \int_{\gamma} \cos \alpha_2 dx = \int_{\gamma} \frac{2y}{\sqrt{4(x+1)^2 + 4y^2}} dx = \int_{\gamma} y dx.$$

Оскільки рівняння кола $(x+1)^2 + y^2 = 1$ можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = -1 + \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

то

$$\int_{\gamma} y dx = - \int_0^{2\pi} \sin t \sin t dt = -\pi, \quad \int_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial l_n} dx = -\pi.$$

Приклад 10. Нехай γ – коло $x^2 + y^2 = 1$ і l_n – зовнішня нормаль до нього. Тоді

$$\int_{\gamma} \frac{\partial x}{\partial l_n} dl = \int_{\gamma} \cos \alpha_1 dl = \int_{\gamma} \frac{2x}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2}} dl = \int_{\gamma} x dl = \int_0^{2\pi} \cos t dt = 0.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Зауваження 7.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} Pdx + Qdy &= \int_{\gamma} (P \cos \tilde{\alpha}_1 + Q \cos \tilde{\alpha}_2) dl = \int_{\gamma} (Pv_1 + Qv_2) dl \\ &= \int_{\gamma} (-P \cos \alpha_2 + Q \cos \alpha_1) dl = \int_{\gamma} (-Pn_2 + Qn_1) dl, \end{aligned}$$

де $l_n = (n_1; n_2) = (\cos \alpha_1; \cos \alpha_2) = (\cos \tilde{\alpha}_2; -\cos \tilde{\alpha}_1)$ і $l_v = (v_1; v_2) = (\cos \tilde{\alpha}_1; \cos \tilde{\alpha}_2)$ – відповідно одиничні вектори нормалі та дотичної:

$$\begin{aligned} n_1 = \cos \alpha_1 &= \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}, \quad n_2 = \cos \alpha_2 = \frac{-\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}, \\ v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\gamma'_1}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}, \quad v_2 = \cos \tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma'_2}{\sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}}. \end{aligned}$$

Тому знаходження криволінійного інтегралу другого роду можна звести до знаходження криволінійного інтегралу першого роду і навпаки.

5. Формула Гріна.

Теорема 1. Нехай межа $\partial^+ D$ квадровної області $D \subset \mathbb{R}^2$ складається зі скінченного числа замкнених жорданових кусково-гладких кривих, а функції $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в $\bar{D}$ разом із частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тоді

$$\int_{\partial^+ D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (1)$$

де $\partial^+ D$ – означає, що інтеграл береться по додатно-орієнтованій межі (обхід здійснювати проти ходу годинникової стрілки, тобто при обчисленні інтегралу, який стоїть в лівій частині (1), для кожної компоненти межі ∂D береться така її параметризація $\gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, що при зростанні t від α до β точка $\gamma(t)$ рухається по ∂D так, що спостерігачеві, який рухається разом з $\gamma(t)$ здається, що D лежить зліва від нього).

Доведення теореми проведемо для спеціальних областей, зображених на рисунку 1.

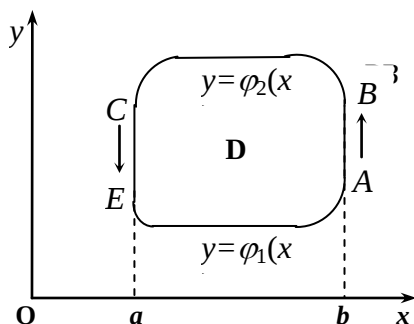


Рис. 1

Нехай $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a; b]$ – рівняння кривої EA , а $y = \varphi_2(x)$, $x \in [a; b]$ – рівняння кривої CB . Тоді

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx P(x; y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \\ &= \int_a^b P(x; \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x; \varphi_1(x)) dx \\ &= - \int_{AB} P dx - \int_{BC} P dx - \int_{CE} P dx - \int_{EA} P dx = - \int_{\partial D^+} P dx. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\int_{\partial^+ D} Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Звідси і з попередньої рівності випливає (1). ►

Зауваження 1. За допомогою формули Гріна можна знаходити інтеграли по замкненій кривій.

Приклад 1. Знайдемо інтеграл $\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx$, де γ – коло

$x^2 + y^2 = 1$, орієнтоване додатним чином. У даному випадку $P = -x^2 y$,

$Q = xy^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$ і $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$. Тому, згідно з формулою Гріна,

$$\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_{U((0;0);1)} (y^2 + x^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Цей же інтеграл можна знайти і безпосередньо, шляхом параметризації

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx = \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{2}.$$

Зауваження 2. Формулу Гріна можна записати у вигляді

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P \cos \tilde{\alpha}_1 + Q \cos \tilde{\alpha}_2) dl,$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P \cos \nu_1 + Q \cos \nu_2) dl,$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (-P n_2 + Q n_1) dl,$$

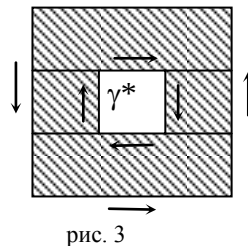
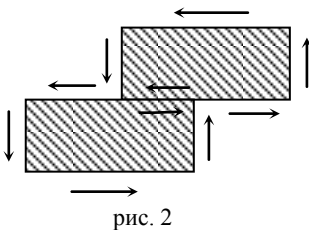
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (-P \cos \alpha_2 + Q \cos \alpha_1) dl.$$

Зауваження 3. Ми довели теорему для області D , зображеної на рисунку 1. Проте, вона залишається справедливою і для областей, які можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості областей, зображених на рисунках 2 - 5, якщо вони не мають спільних внутрішніх точок, бо інтеграли по спільних частинах цих областей взаємно знищуються.

Зауважимо, що межа області, зображеної на рисунку 3, складається з двох кривих. При цьому за означенням

$$\int_{\partial D^+} P dx = \int_{\gamma} P dx + \int_{\gamma^*} P dx,$$

де орієнтація γ і γ^* є такою, як вказано в теоремі 1. Сукупність таких кривих γ і γ^* називається ланцюгом і позначається $\gamma + \gamma^*$. Отже, $\partial D = \gamma + \gamma^*$ для області, зображеної на рисунку 3.



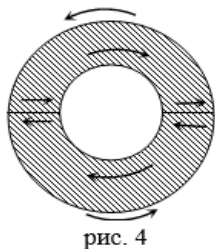


рис. 4

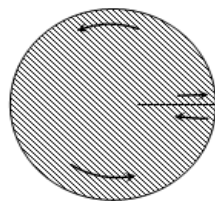


рис. 5

6. Знаходження площі плоскої області за допомогою криволінійного інтегралу.

Теорема 1. Нехай межа квадратної області D складається зі скінченної кількості замкнених жорданових кусково-гладких кривих. Тоді площа P_D області D знаходиться за кожною з наступних формул

$$P_D = \int_{\partial^+ D} x dy, \quad (1)$$

$$P_D = - \int_{\partial^+ D} y dx, \quad (2)$$

$$P_D = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} (x dy - y dx). \quad (3)$$

Доведення. У формулі Гріна візьмемо $P \equiv 0$ і $Q = x$. Отримаємо

$$\int_{\partial^+ D} x dy = \iint_D dx dy,$$

звідки випливає (1). Аналогічно, взявши у формулі Гріна $P = -y$ і $Q \equiv 0$, отримаємо (2). Формула (3) є наслідком формул (1) і (2). ►

Приклад 1. Знайдемо площу області $D = \left\{ (x; y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Для

цього знайдемо параметричне рівняння межі (тобто еліпса). Нехай $x = a \cos \varphi$. Тоді з рівняння еліпса знаходимо, що $y = b \sin \varphi$. Отже,

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

– шукана параметризація. Тому

$$P_D = \int_{\partial^+ D} x dy = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \pi ab.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Приклад 2. Знайдемо площу фігури, яка обмежена петлею декартового листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. Цю петлю можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in [0; +\infty), \end{cases}$$

Тому

$$P_D = \frac{1}{2} \int_{\partial D^+} (x dy - y dx) = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3a^2}{2}.$$

7. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Кажуть, що криволінійний інтеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy \tag{1}$$

не залежить від шляху інтегрування в області D , якщо для будь-яких двох точок $(x_0; y_0) \in D$ і $(x_1; y_1) \in D$ та будь-яких двох гладких шляхів $\gamma: [\alpha; \beta] \rightarrow D$ і $\tilde{\gamma}: [\tilde{\alpha}; \tilde{\beta}] \rightarrow D$ з початком в точці $(x_0; y_0)$ і кінцями в точці $(x_1; y_1)$ виконується

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\tilde{\gamma}} P dx + Q dy.$$

У цьому випадку інтеграл (1) позначають так $\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P dx + Q dy$

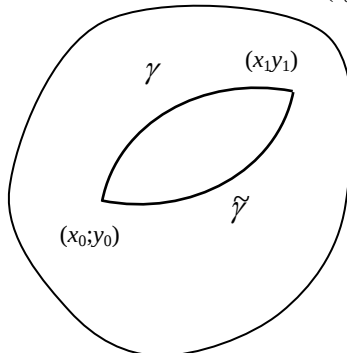


рис. 1

Зауваження 1. Криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування в області D тоді і тільки тоді, коли $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$ для будь-якої замкненої жорданової гладкої кривої $\gamma \subset D$.

Функція $Pdx + Qdy$ називається **повним диференціалом** в області D , якщо існує така диференційована в D функція u , що $du = Pdx + Qdy$ в D .

Теорема 1. Нехай функції $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Для того щоб інтеграл (1) не залежав від шляху інтегрування в області D , необхідно і достатньо, щоб символ $Pdx + Qdy$ був повним диференціалом в області D . Якщо остання умова виконана, то

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} Pdx + Qdy = u(x_1; y_1) - u(x_0; y_0) \quad (2)$$

для будь-яких $(x_0; y_0) \in D$ і $(x_1; y_1) \in D$.

Доведення. Нехай $Pdx + Qdy$ є диференціалом функції u . Тоді для гладкого шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow D$ з початком в точці $(x_0; y_0)$ і кінцями в точці $(x_1; y_1)$ маємо

$$(u(\gamma_1(t); \gamma_2(t)))' = u'_x \gamma'_1(t) + u'_y \gamma'_2(t) = P(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma'_1(t) + Q(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \gamma'_2(t).$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} Pdx + Qdy &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(\gamma_1(t); \gamma_2(t)))' dt \\ &= u(\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta)) - u(\gamma_1(\alpha); \gamma_2(\alpha)) = u(x_1; y_1) - u(x_0; y_0). \end{aligned}$$

Звідси випливає (2) і тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

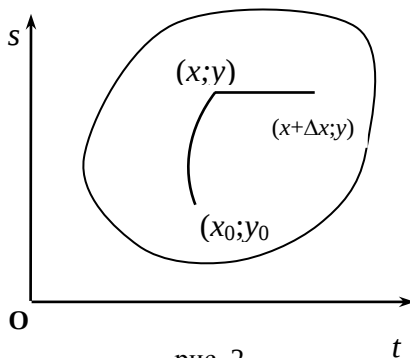


рис. 2

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Нехай тепер криволінійний інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування, а

$$u(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(t; s) dt + Q(t; s) ds$$

Тоді, враховуючи незалежність інтеграла від шляху інтегрування, отримуємо

$$u(x + \Delta x; y) - u(x; y) = \int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(t; s) dt + Q(t; s) ds = \int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(t; s) dt,$$

де останні два інтеграли беруться по відрітку паралельному осі OX і тому

$$\int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} Q(t; s) ds = 0.$$

За теоремою про середнє для визначених інтегралів

$$\int_{(x; y)}^{(x + \Delta x; y)} P(t; s) dt = P(x + \theta \Delta x; y) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

Тому

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x; y) = P(x; y).$$

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x; y) = Q(x; y)$$

і тому теорема 1 доведена. ►

Наслідок 1. Нехай функції $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в області $D \subset \mathbb{R}^2$, інтеграл (1) не залежить від шляху інтегрування в D і

$$u(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(t; s) dt + Q(t; s) ds. \quad \text{Тоді} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x; y) = P(x; y) \quad \text{і}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x; y) = Q(x; y).$$

Зауваження 2. Якщо функція $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і обидві частинні похідні функції рівні нулеві в області D , то ця функція є сталою. Тому, якщо диференційовані

області $D \subset \mathbb{R}^2$ функції мають в цій області однакові диференціали, то різниця цих функцій є сталою функцією.

Теорема 2. Нехай функції $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в області $D \subset \mathbb{R}^2$ разом зі своїми частинними похідними $\partial Q / \partial x$ та $\partial P / \partial y$ і

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = 0 \quad (3)$$

для будь-якого замкненої жорданової гладкої кривої $\gamma \subset D$, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x; y) \in D. \quad (4)$$

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді в деякій точці $(x_0; y_0) \in D$ (4) не виконується. Нехай, наприклад,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) \geq \alpha > 0 \quad (5)$$

в точці $(x_0; y_0)$. Завдяки неперервності лівої частини (5) остання нерівність буде виконуватися в деякому крузі U з центром в точці $(x_0; y_0)$. Застосувавши до цього круга формулу Гріна, отримаємо

$$\int_{\partial U^+} P dx + Q dy = \iint_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \geq \alpha \cdot P_U > 0.$$

А це суперечить умові, бо ∂U^+ є замкненим шляхом із D . ►

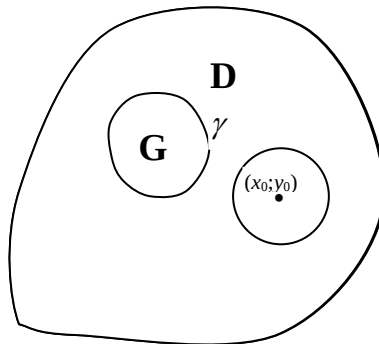


рис. 3

З попередніх теорем випливає наступне твердження.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

Теорема 3. Нехай функції P і Q є неперервними в однозв'язній області D разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тоді еквівалентними є наступні умови:

- 1) для будь-якої кусково-гладкої замкненої жорданової кривої γ з D виконується
$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0;$$
- 2) інтеграл $\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} Pdx + Qdy$ не залежить в D від шляху інтегрування;
- 3) $Pdx + Qdy$ є в D диференціалом деякої диференційованої функції $u: D \rightarrow \mathbb{R}$;
- 4) для всіх точок $(x; y) \in D$ виконується

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y).$$

Якщо остання умова виконана, то

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} Pdx + Qdy = u(x_1; y_1) - u(x_0; y_0), \quad (x_0; y_0) \in D, \quad (x_1; y_1) \in D,$$

де u така функція, що $du = Pdx + Qdy$ (за u можна взяти функцію, визначену однією з формулою

$$u(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(t; s)dt + Q(t; s)ds,$$

$$u(x; y) = \int_{x_0}^x P(t; y)dt + \int_{y_0}^y Q(x_0; s)ds,$$

$$u(x; y) = \int_{x_0}^x P(t; y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x; s)ds.$$

Доведення. Згідно з теоремами 1 та 2 досить довести, що за виконання умови 4) виконується і умова 1), а це так, бо Γ є межею деякої області G і згідно з формулою Гріна

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \pm \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Приклад 1. Вираз $(3x^2y - y^3/3)dx + (x^3 - xy^2)dy$ є повним диференціалом. Справді, в даному випадку $P = 3x^2y - y^3/3$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - y^2$,

$$Q = x^3 - xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - y^2 \quad \text{і} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) \neq \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) \quad \text{для всіх} \quad (x; y) \in \mathbb{R}^2.$$

Візьмемо $(x_0; y_0) = (0; 0)$. Тоді функція

$$u(x; y) = \int_{(0;0)}^{(x;y)} (3t^2s - s^2)dt + (t^3 - ts^2)ds$$

Останній інтеграл можемо подати у вигляді суми двох по відрізках $\Delta_1 = \{(t; 0) : t \in [0; x]\}$ і $\Delta_2 = \{(x; s) : s \in [0; y]\}$, відповідно. Тоді для функції

$$u(x; y) = \int_0^x 0dt + \int_0^y (x^3 - xs^2)ds = x^3y - xy^3/3$$

маємо $du = (3x^2y - y^3/3)dx + (x^3 - xy^2)dy$. Для знаходження функції u ми скористались першою з написаних формул. Якщо ж скористатись другою, то отримуємо

$$u(x; y) = \int_0^x P(t; y)dt + \int_0^y Q(0; s)ds = \int_0^x (3t^2y - y^3/3)dt = x^3y - xy^3/3.$$

Ми могли б знайти функцію u і за допомогою наступних міркувань.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = (3x^2y - y^3/3)$, то

$$u(x; y) = \int_0^x (3x^2y - y^3/3)dx + \psi(y) = x^3y - xy^3/3 + \psi(y),$$

$\psi = \psi(y)$ – деяка функція. Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - xy^2,$$

а з іншого боку,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left((x^3y - xy^3/3) + \psi(y) \right)'_y = x^3 - xy^2 + \psi'(y),$$

То, прирівнюючи праві частини двох попередніх формул, отримуємо

$$x^3 - xy^2 = x^3 - xy^2 + \psi'(y),$$

звідки $\psi'(y) = 0$. Отже, функція ψ є сталою ($\psi(y) \equiv C$). Тому

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$u(x; y) = \int_0^x (3x^2 y - y^3 / 3) dx + \psi(y) = x^3 y - xy^3 / 3 + C,$$

де C – довільна стала.

Зауваження 3. Дуже важливе питання про те, за яких умов в багатозв'язній області символ $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом, тобто, за яких умов криволінійний інтеграл $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху

інтегрування в багатозв'язній області, є досить складним і ми його обговорювати не будемо. Проте, зауважимо, що якщо $Pdx + Qdy$ є повним диференціалом і функції P і Q є неперервними в області D разом зі своїми

частинними похідними $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$, то виконується (4). Але остання умова

не є достатньою. Якщо область D одержують з однозв'язної області G шляхом викидання однієї точки $(x_1; y_1)$ і в D виконується умова 4), то криволінійний $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ є повним диференціалом в D , тоді і тільки тоді,

коли $q_1 := \int_{\partial^+ U((x_1; y_1); \varepsilon)} Pdx + Qdy = 0$ для деякого $\varepsilon > 0$ такого, що

$\overline{U((x_1; y_1); \varepsilon)} \subset D$. Якщо область D одержують з однозв'язної області G шляхом викидання m точок $(x_i; y_i)$ і в D виконується умова 4), то криволінійний $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ є повним диференціалом в D , тоді і тільки тоді,

коли $q_i := \int_{\partial^+ U((x_i; y_i); \varepsilon)} Pdx + Qdy = 0$ для деякого $\varepsilon > 0$ такого, що

$\overline{U((x_i; y_i); \varepsilon)} \subset D$ і $\overline{U((x_i; y_i); \varepsilon)}$ не містить інших точок $(x_j; y_j)$, $i \neq j$.

Приклад 2. Розглянемо інтеграл

$$I = \int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

у двозв'язній області $D = \{(x; y) : 0 < x^2 + y^2 < 8\}$. У даному випадку

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

для всіх $(x; y) \in D$. Якщо γ – це коло:
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi], \end{cases} \quad \text{то}$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Разом з цим, якщо замкнені гладкі жорданові шляхи γ і $\tilde{\gamma}$ можна неперервно деформувати один в одного в області D , тобто, якщо кожна обмежена цими кривими область належить D (такі шляхи називаються гомотопними в D), то

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\tilde{\gamma}} Pdx + Qdy.$$

Це видно з рисунку 4.

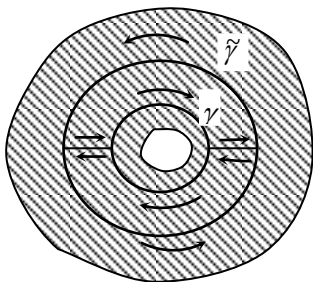


Рис.4

Приклад 3. Знайдемо інтеграл

$$I = \int_{(-1;1)}^{(2;7)} (y^2 - x^2)xdx - (y^2 - x^2)ydy$$

Тут $P = xy^2 - x^3$ і $Q = -y^3 + x^2y$. Тому $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$ і $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$. Отже,

інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Напишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $(-1;1)$ і $(2;7)$:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-1}{7-1}.$$

Таким чином, можемо обчислювати інтеграл по відрітку $y = 2x + 3$, $x \in [-1;2]$. Тому

$$I = \int_{-1}^2 ((2x+3)^2 - x^2)xdx - ((2x+3)^2 - x^2)(2x+3)2dx = -\frac{2025}{4}.$$

Приклад 4. Знайдемо інтеграл

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$I = \int_{(1;0)}^{(0;-1)} \left(x - \frac{y^2}{(x-y)^2} \right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - y \right) dy.$$

Тоді

$$P = x - \frac{y^2}{(x-y)^2}, \quad Q = \frac{x^2}{(x-y)^2} - y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}.$$

Умова

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

виконується в кожній з півплощин $y > x$ і $y < x$. Точки $(1;0)$ і $(0;-1)$ належить другій з них. Напишемо рівняння прямої, яка проходить через ці точки:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-1-0}.$$

Тому інтеграл можемо брати по відрітку $y = x-1$, $x \in [0;1]$. Але початок інтегрування в точці $(1;0)$. Тому (за шлях інтегрування потрібно взяти

протилежний шлях $\begin{cases} x = -t, \\ y = -t-1, \end{cases} t \in [-1;0]$, або змінити межі інтегрування)

$$I = \int_1^0 \left(\left(x - \frac{(x-1)^2}{1} \right) dx + \left(\frac{x^2}{1} - (x-1) \right) dx \right) = -1.$$

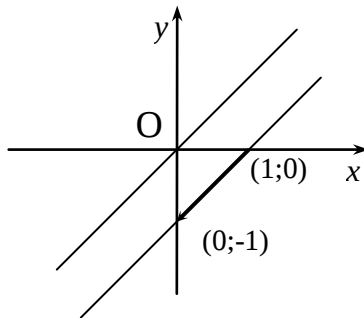


Рис. 5

Цей інтеграл простіше можна було б порахувати, скориставшись останньою частиною теореми 3. Справді,

$$u(x; y) = \int_1^x \left(x - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right) dx + \int_0^y \left(\frac{1}{(1-y)^2} - y \right) dy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{x-y} + y - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Тому $I = u(0; -1) - u(1; 0) = -1$.

Приклад 5. Нехай D – однозв’язна область з гладкою жордановою межею $\gamma = \partial D$, $(\xi; \eta) \in \gamma$ – фіксована точка, $\vec{l}_n = (n_1; n_2) = (\cos \alpha_1; \cos \alpha_2)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі, θ – кут між векторами $\vec{l}_n = \vec{i} \cos \alpha_1 + \vec{j} \cos \alpha_2$ і $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j}$, де $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ – деяка точка.

Знайдемо $I = \int_{\gamma} \frac{\cos \theta}{r^2} dl$, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$, (цей інтеграл відіграє

важливу роль при дослідженні диференціальних рівнянь в частинних похідних.)

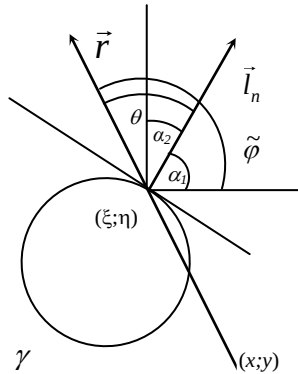


Рис. 6

Оскільки

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle \vec{l}_n; \vec{r} \rangle}{\|\vec{l}_n\| \|\vec{r}\|} = \frac{(\xi - x) \cos \alpha_1 + (\eta - y) \cos \alpha_2}{r} \\ &= \frac{(\xi - x) \cos \alpha_1}{r} + \frac{(\eta - y) \cos \alpha_2}{r} = \frac{(\xi - x) \cos \alpha_1}{r} + \frac{(\eta - y) \cos \alpha_2}{r}. \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \int_{\gamma} \left(\frac{(\xi - x) \cos \alpha_1}{r^2} + \frac{(\eta - y) \cos \alpha_2}{r^2} \right) dl \\ &= \int_{\gamma} \left(-\frac{(\eta - y) \cos \tilde{\alpha}_1}{r^2} + \frac{(\xi - x) \cos \tilde{\alpha}_2}{r^2} \right) dl = \int_{\gamma} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

де

$$P = \frac{y - \eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad Q = \frac{\xi - x}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

При цьому,

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

тобто $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$, для всіх $(\xi; \eta) \neq (x; y)$. Тому

$$\int_{\gamma} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = 0,$$

якщо $(x; y) \notin \bar{D}$. Якщо ж $(x; y) \in D$, то

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cos \theta}{r^2} dl &= \int_{\partial U((x; y); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \int_{\partial U((x; y); \varepsilon)} \left(\frac{(\xi - x) \cos \alpha_1}{r^2} + \frac{(\eta - y) \cos \alpha_2}{r^2} \right) dl \\ &= \int_{\partial U((x; y); \varepsilon)} \frac{1}{r} dl = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial U((x; y); \varepsilon)} dl = 2\pi. \end{aligned}$$

Якщо $(x; y) \in \partial D$ і крива γ є досить гладкою, то

$$\int_{\partial^+ D} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \pi$$

Справді, потрібно довести, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial^+ D \setminus U((x; y); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \pi.$$

Нехай $\partial U_{+, D}((x; y); \varepsilon)$ – зовнішня частина кола $\partial U((x; y); \varepsilon)$, яка лежить поза D , $\partial U_{-, D}((x; y); \varepsilon)$ – внутрішня частина кола $\partial U((x; y); \varepsilon)$, яка лежить в D . Тоді згідно з вище встановленим

$$\int_{(\partial^+ D \setminus U((x; y); \varepsilon)) \cup \partial U_{-, D}((x; y); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = 0, \quad \int_{((\partial^+ D \setminus U((x; y); \varepsilon)) \cup \partial U_{+, D}((x; y); \varepsilon))} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = 2\pi.$$

Окрім цього,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial^+ D \setminus U((x; y); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{(\partial^+ D \setminus U((x; y; z); \varepsilon)) \cup \partial U_{-, D}((x; y; z); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl + \int_{(\partial^+ D \setminus U((x; y; z); \varepsilon)) \cup \partial U_{+, D}((x; y; z); \varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \left(- \int_{\partial U_{+,D}((x;y);\varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl + \int_{\partial U_{-,D}((x;y);\varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl \right).$$

Тому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\partial^+ D \setminus U((x;y);\varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \pi,$$

якщо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(- \int_{\partial U_{+,D}((x;y);\varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl + \int_{\partial U_{-,D}((x;y);\varepsilon)} \frac{\cos \theta}{r^2} dl \right) = 0.$$

Отже, за згаданих умов

$$\int_{\partial^+ D} \frac{\cos \theta}{r^2} dl = \begin{cases} 0, (x; y) \in D \setminus \partial D, \\ \pi, (x; y) \in \partial D, \\ 2\pi, (x; y) \notin \bar{D}. \end{cases}$$

8. Знаходження роботи за допомогою криволінійного інтегралу.

За допомогою криволінійного інтегралу другого роду знаходиться багато фізичних величин. Наприклад, робота A , виконана силою $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої γ знаходиться за формулою

$$A = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma} P dx + Q dy, \quad (1)$$

де $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$. До формули (1) у фізиці проходять в результаті наступних міркувань. Якщо під дією сталої сили $\Delta\vec{F}$ матеріальна точка перемістилась, рухаючись прямолінійно і рівномірно, на вектор $\Delta\vec{r}$, то виконана цією силою робота дорівнює $\Delta\vec{F}\Delta\vec{r} = \langle \Delta\vec{F}; \Delta\vec{r} \rangle$. Якщо ж під дією

деякої змінної сил $\vec{F}$ матеріальна точка переміститься вздовж кривої Γ , то для знаходження роботи, виконаної цією силою природно поступити так. Розіб'ємо криву Γ на маленькі частинки $B_k B_{k+1}$. Кожну частинку $B_k B_{k+1}$ можна приблизно вважати відрізком, а силу $\vec{F}$ на кожній дузі $B_k B_{k+1}$ сталою і рівною $\vec{F}(x_k; y_k)$, де $B_k(x_k; y_k)$.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

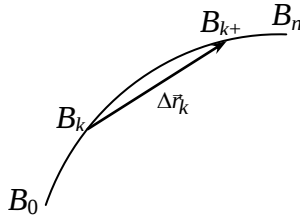


рис. 1

Робота виконана цією силою на дузі $B_k B_{k+1}$ приблизно рівна $\vec{F}(x_k; y_k) \Delta \vec{r}_k$, де $\Delta \vec{r}_k = \overrightarrow{B_0 B_{k+1}} - \overrightarrow{B_0 B_k}$, а вся робота приблизно дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(x_k; y_k) \Delta \vec{r}_k,$$

а це є інтегральною сумою для інтегралу (1). Природно за роботу прийняти границю останньої суми, тобто інтеграл (1).

Приклад 1. Знайдемо роботу A виконану силою $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої

$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2 \sin t, t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

Згідно з наведеною вище формулою

$$A = \int_{\gamma} y dx + x dy = 6 \int_0^{\pi/2} (-\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 6 \int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = 0.$$

9. Запитання для самоконтролю.

1. Що таке шлях (одновимірний)? У чому різниця між шляхом і кривою? Наведіть приклади.
2. Який шлях називаємо жордановим, замкненим жордановим?
3. Який шлях називаємо гладким, кусково-гладким?
4. Сформулюйте означення криволінійного інтегралу першого роду. Які його властивості?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про обчислення криволінійного інтегралу першого роду.
6. Сформулюйте означення криволінійного інтегралу другого роду. Які його властивості?
7. Сформулюйте і доведіть теорему про обчислення криволінійного інтегралу другого роду.

8. Які шляхи називають гомотопними? Які властивості гомотопних шляхів (стосовно інтегралів по них)?
9. Нехай Γ – відрізок, який з'єднує точки $(1;1)$ та $(2;4)$. Скільки різних значень може мати інтеграл $\int_{\Gamma} x^2 y dx$, якщо Γ надавати всі можливі орієнтації?
10. Нехай Γ – межа коло. Скільки різних значень може мати інтеграл $\int_{\Gamma} x^2 y dx$, якщо Γ надавати всі можливі орієнтації?
11. Нехай Γ – межа кільця $1 < x^2 + y^2 < 4$. Скільки різних значень може мати інтеграл $\int_{\Gamma} x^2 y dx$, якщо компоненти Γ надавати всі можливі орієнтації?
12. Запишіть формулу Гріна.
13. Сформулюйте теорему про незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
14. Запишіть формули для знаходження площі області за допомогою криволінійного інтегралу.
15. Опишіть способи знаходження функції за її повним диференціалом.

10. Вправи і задачі теоретичного характеру.

1. Доведіть твердження

1. Якщо функції $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в області $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ разом зі своїми частинними похідними $\partial Q/\partial x$ і $\partial P/\partial y$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y)$ для всіх $(x; y) \in D$, то інтеграл $\int_{\gamma_R} P dx + Q dy$ від

$$R > 0 \text{ не залежить, де } \gamma_R \text{ – коло: } \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

2. Якщо функції $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в області $D = \mathbb{R}^2 \setminus (U((0;0);1) \cup U((3;3);1))$ разом зі своїми частинними похідними $\partial Q/\partial x$ і $\partial P/\partial y$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x; y)$ для всіх $(x; y) \in D$, то

$$\int_{\partial U((0;0);6)} P dx + Q dy = \int_{\partial U((0;0);1)} P dx + Q dy + \int_{\partial U((3;3);1)} P dx + Q dy.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

3. $\int_{\gamma} \cos \alpha_1 dx = 0$, де γ – замкнена гладка крива і $l_n = (\cos \alpha_1; \cos \alpha_2)$ – одиничний вектор її зовнішньої нормалі.
4. $\int_{\gamma} x \cos \alpha_1 dx + y \cos \alpha_2 dy = 2P_{\text{int } \gamma}$, де γ – замкнена гладка крива і $l_n = (\cos \alpha_1; \cos \alpha_2)$ – одиничний вектор її зовнішньої нормалі.
5. $\int_{\gamma} f(x; y)(x dx + y dy) = 0$ для кожної замкненої гладкої кривої і неперервної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
6. $\int_{\gamma} \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} dl = 2\pi R \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, якщо $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ і γ – коло $x^2 + y^2 = R^2$.
7. $\int_{\gamma} \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} dl = 2\pi R \ln \frac{1}{R}$, якщо $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ і γ – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Зобразіть криві (зразки побудов для програмного забезпечення Maple 18 містяться в Додатку 2)

1. Астероїда (бубна): $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
2. Декартів лист: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $\begin{cases} x = 3at / (t^3 + 1), \\ y = 3at^2 / (t^3 + 1), t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \end{cases}$
3. Циклоїда (коло радіуса a котиться по осі OX і одна з його точок описує цю криву): $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$
4. Епіциклоїда (коло радіусу $m \cdot a$ котиться по колу радіусу a зовні і одна з його точок описує цю криву): $\begin{cases} x = a((1 + m) \cos mt - m \cos(1 + m)t), \\ y = a((1 + m) \sin mt - m \sin(1 + m)t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$
5. Гіпоциклоїда (коло радіусу $m \cdot a$ котиться по колу радіусу a всередині і одна з його точок описує цю криву):

$$\begin{cases} x = a((1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t), \\ y = a(-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. *Евольвента кола* (на коло намотана нитка за годинниковою стрілкою, її розмотують проти ходу годинникової стрілки так, щоб нитка була натягнутою; кінець нитки описує цю криву):
- $$\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - t \cos t), t \in [0; +\infty). \end{cases}$$
7. *Спіраль Архімеда*: $\rho = \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
8. *Гіперболічна спіраль*: $\rho = 1/\varphi$.
9. *Логарифмічна спіраль*: $\rho = e^\varphi$.
10. *Лемніската Бернуллі*: а) $(x^2 + y^2)^2 = 2a(x^2 - y^2)$, б) $\rho = \sqrt{2a \cos 2\varphi}$.
11. *Кардіоида* (серце): $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

11. Вправи і задачі розрахункового характеру.

1. Знайдіть криволінійні інтеграли по вказаній кривій

- $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, де $\gamma : \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
- $\int_{\gamma} (x - y) dl$, де γ – відрізок прямої $y = x + 3$ від точки $(0; 3)$ до $(2; 5)$.
- $\int_{\gamma} y dl$, де γ – ламана з початком у точці $(-2; -3)$, яка з'єднує послідовно точки $(-2; -3)$, $(-2; 2)$, $(2; -2)$ і $(2; 3)$.
- $\int_{\gamma} y dl$, де γ – ламана з початком у точці $(-2; 0)$, яка з'єднує послідовно точки $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$, $(2; -2)$.
- $\int_{\gamma} y dl$, де γ – ламана з початком у точці $(-2; 0)$, яка з'єднує послідовно точки $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(1; 2)$, $(2; -2)$.
- $\int_{\gamma} xy dl$, де γ – еліпс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- $\int_{\gamma} \sqrt{2y} dl$, де $\gamma : \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

8. $\int_{\gamma} (x-y)dl$, де γ – межа трикутника з вершинами $(0;1)$, $(1;0)$, $(0;0)$.
 9. $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2} dl$, де γ – коло, задане в полярній системі координат рівнянням $\rho = \sin \varphi$.
 10. $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2} dl$, де γ – коло, задане в полярній системі координат рівнянням $\rho = \cos \varphi$.
 11. $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2} dl$, де γ – частина кола $x^2+y^2=1$, яка лежить в крузі $(x-1)^2+y^2 < \varepsilon^2$, $\varepsilon < 1$.
 12. $\int_{\gamma} xdl$, де γ – частина логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$, яка лежить в крузі з центром у точці $(0;0)$ і радіусом 1.
 13. $\int_{\gamma} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, де γ – межа кругового сектора $\{(x;y) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \geq 0\}$.
2. Знайдіть криволінійні інтеграли другого роду по вказаній кривій
1. $\int_{\gamma} 2xydx - x^2dy$, де γ – відрізок, який з'єднує точки $(0;0)$ і $(1;2)$.
Початок кривої в точці $(0;0)$.
 2. $\int_{\gamma} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де γ – частина параболи $y = x^2$ з початком у точці $(-1;1)$ і кінцем у точці $(1;1)$.
 3. $\int_{\gamma} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де γ – шлях $y = 1 - |1 - x|$, $x \in [0;2]$.
 4. $\int_{\gamma} y^2dx + xdy$, де γ – ламана з початком у точці $(3;-2)$, яка з'єднує послідовно точки $(-1;1)$, $(1;3)$ і $(3;-2)$.
 5. $\int_{\gamma} ydx - x^2dy$, де γ – ламана з початком у точці $(-1;-2)$, яка з'єднує послідовно точки $(-1;-2)$, $(0;0)$ і $(0;2)$.

6. $\int_{\gamma} xdx + ydy$, де γ – шлях $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = -\sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
7. $\int_{\gamma} xdx + ydy$, де γ – шлях $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
8. $\int_{\gamma} x^2 dy - y^2 dx$ де γ – шлях $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$
9. $\int_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx + x^2 dy$, де інтеграл береться по параболі $y = x^2$.
10. $\int_{\gamma} xydx - x^3 y^3 dy$, де γ – межа квадрата $|x - y| + |x + y| \leq 1$, обхід якої здійснюється проти ходу годинникової стрілки.
11. $\int_{\gamma} (x^2 + y^2)dx + xdy$, де γ – коло $x^2 + y^2 = 1$, обхід якого здійснюється проти ходу годинникової стрілки.
12. $\int_{\gamma} xydx - xdy$, де γ – межа трикутника з вершинами $(0, 0)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$, обхід якої здійснюється за ходом годинникової стрілки.
13. $\int_{\gamma} xdx - ydy$, де γ – межа області, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$, обхід якої здійснюється за ходом годинникової стрілки.
14. $\int_{\gamma} x^2 dx - ydy$, де γ – межа області, обмеженої лініями $y = x^3$, $x = -1$ і $y = 1$, обхід якої здійснюється за ходом годинникової стрілки.
15. $\int_{\gamma} ydy$, де γ – відрізок, який з'єднує точки $(4; -4)$ і $(-4; 4)$, початок у точці $(-4; 4)$.
16. $\int_{\gamma} x^2 dx$, де γ – відрізок, який з'єднує точки $(0; 0)$ і $(4; 4)$, початок у точці $(4; 4)$.
3. Переконайтесь, що криволінійний інтеграл не залежить від шляху інтегрування в області D і знайдіть його

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

1. $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy, D = \mathbb{R}^2.$
 2. $\int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx + x^2dy, D = \mathbb{R}^2.$
 3. $\int_{(1;2)}^{(2;1)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$
 4. $\int_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy, D = \mathbb{R}^2.$
4. Знаходячи первісну u функції $a = (P; Q)$, обчисліть
1. $\int_{(1;2)}^{(2;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$
 2. $\int_{(-1;-1)}^{(0;1)} xydx + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2-y} \right) dy.$
5. З'ясуйте, чи права частина формули є диференціалом деякої функції функції $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і знайдіть її
1. $du = x^2dx + y^2dy.$
 2. $du = 4(x^2 - y^2)(xdx - ydy).$
 3. $du = (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy.$
 4. $du = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$
 5. $du = 2x(1 + e^y)dx + e^y(x^2 + 1)dy.$
6. За допомогою формули Гріна та безпосередньо знайдіть криволінійні інтеграли
1. $\int_{\gamma} (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2)dy$, де γ – додатно-орієнтована межа трикутника з вершинами $(1;1)$, $(3;2)$ та $(2;5)$.

2. $\int_{\gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy$, де γ – додатно-орієнтована межа круга $x^2 + y^2 \leq 1$.
3. $\int_{\gamma} (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$, де γ – додатно-орієнтована межа області $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 < x, x > 0\}$.
4. $\int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial l_n} (x^2 + 3xy - 4y^2) dl$, де γ – коло $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi], \end{cases}$ і l_n – зовнішня нормаль до нього.
5. $\int_{\gamma} \frac{\partial x}{\partial l_n} dl$, де γ – межа трикутника з вершинами $(0;0)$, $(0;1)$ та $(1;0)$ і l_n – зовнішня нормаль до неї.
6. $\int_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial l_n} dl$, де γ – коло $x^2 + y^2 = 1$ і l_n – зовнішня нормаль до нього.
7. $\int_{\gamma} \frac{\partial x}{\partial l_n} dl$, де γ – коло $(x-1)^2 + y^2 = 1$ і l_n – зовнішня нормаль до нього.
8. $\int_{\gamma} \frac{\partial y}{\partial l_n} dl$, де γ – межа трикутника з вершинами $(0;0)$, $(0;-1)$ і $(-1;0)$ і l_n – зовнішня нормаль до неї.
9. $\int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial l_n} (x^2 + 4y^2 - xy) dl$, де γ – еліпс $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 16$ і l_n – зовнішня нормаль до нього.
7. За допомогою криволінійного інтегралу знайдіть площу фігури обмеженої заданими кривими
 1. $y = -x^2 - x + 2$, $y = x + 2$.
 2. $y = 1 - x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $y = 0$.
 3. $y = -x^2 + 4x$, $y = -x + 4$.
 4. $y = 2 - x$, $y = x^2$.
 5. $y = x^2$, $y = 0$, $y = -3x + 4$.
 6. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
 7. $y = x^2$, $x = 0$, $y = -3x + 4$.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

8. $y = x^2$, $y = 2x - 1$, $x = 0$.
9. $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = 4$.
10. $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.
11. $y^2 + x^2 = 1$, $y + x = 1$.
12. $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$.
13. $y = -x^2$, $y = -(x - 2)^2$, $y = -3$.
14. $y = -x^2$, $y = -2x - 1$, $x = 0$.
15. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.
16. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.
17. $y = (x - 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.
18. $x = 4 - y^2$, $x = y^2 - 2y$.
19. $x = 4 - (y - 1)^2$, $x = y^2 - 4y + 3$.
20. $y = x^2$, $y + x = 2$.
21. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 2$.
22. $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.
23. $y^2 = x^3$, $y = 4$, $x = 0$.
24. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
25. $y = x^2 - 4x + 7$, $y = x + 3$.
26. $y = -x^2$, $x = 0$, $y = -3x - 4$.
27. $y = -x^2 + 4$, $y = x + 2$.
28. $y = -3x^2 + x + 2$, $y = -x + 1$.
29. $y^2 = 4x$, $4y = x^2$.
30. $xy = 6$, $y = -x + 7$.
31. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.
32. $y = x^2 - 4x + 4$, $y = x$.
33. $y = -x^2 + x + 2$, $y = -x + 2$.
34. $y = -x^2 - 4x$, $y = x + 4$.

$$35. y = -x^2 + 4, y = -x + 2.$$

$$36. y = -3x^2 - x + 2, y = x + 1.$$

$$37. y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1.$$

$$38. y^2 = -x + 1, y^2 = x - 1.$$

$$39. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$$

$$40. \sqrt{y} = x, y = 2x.$$

8. За допомогою криволінійного інтегралу знайдіть площу фігури обмеженої заданими кривими або заданої вказаними умовами

$$1. \rho = 1, \rho(\cos \varphi - \sin \varphi) = 1.$$

$$2. \rho = \sin \varphi.$$

$$3. \rho = \sin 2\varphi.$$

$$4. \rho = \frac{1}{2}, \rho = \cos 2\varphi.$$

$$5. \rho = 3 + \cos 4\varphi.$$

$$6. \rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

$$7. \rho = 3/2, \rho = 2 + \cos \varphi.$$

$$8. \rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi.$$

$$9. \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$$

$$10. \rho = 3 + \cos 2\varphi.$$

$$11. \rho = 2, \rho = 3 - 2 \cos \varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi/4.$$

$$12. \rho = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \varphi}.$$

$$13. \rho = 4, \rho = 1 + \cos \varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi/4.$$

$$14. \rho = \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi.$$

$$15. \rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$$

$$16. \rho = 3 + 2 \cos \varphi.$$

$$17. \rho^2 + \varphi^2 = 1.$$

$$18. \rho = \varphi, \varphi = 0.$$

$$19. \rho = 2 \sin 2\varphi.$$

$$20. \rho = \cos 5\varphi.$$

$$21. \rho = 2 + \cos 2\varphi, \rho = 2 + \sin \varphi.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

22. $\rho = 2 - \cos 4\varphi$, $\rho = 3 + \cos 4\varphi$.
23. $\rho = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \pi/4$.
24. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
25. $\rho = \cos 4\varphi$.
26. $\rho = 1 + \sin 4\varphi$.
27. $x^4 + y^4 = xy$.
28. $x^4 + y^4 = x^2$.
29. $\rho = 1 + \cos 4\varphi$.
30. $\{(\rho; \varphi) : \rho \in [1; 4], \varphi \in [0; \pi]\}$.
31. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi/2]\}$.
32. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \sqrt{\cos 2\varphi}, \rho \geq \sqrt{2}/2\}$.
33. $\rho = 2\sin \varphi$.
34. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \cos \varphi, \rho \geq \cos 2\varphi\}$.
35. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \sqrt{3} + 3\sin \varphi, \rho \geq \sin \varphi\}$.
36. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y \geq x$, $y \leq -\sqrt{3}x$.
37. $(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy$.
38. $\varphi = 4\rho - \rho^2$, $\varphi = 0$.
39. $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $\varphi = 0$.
40. $\rho = \varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ (фігура, що лежить між першим і другим витками спіралі Архімеда).

9. За допомогою криволінійного інтегралу знайти площу фігури обмеженої заданими кривими або заданої вказаними умовами

1. $x \geq 0$, $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$
3. $\begin{cases} x = 2(t \sin t + \cos t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; +\infty).$ $x = 2$.
4. $y \geq 0$, $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$
5. $y \geq 0$, $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t. \end{cases}$

6. $y \geq 0$, $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
7. $x \geq 0$, $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$
8. $x = 0$, $y = 0$, $y = 8$, $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \sin t). \end{cases}$
9. $x \geq 0$, $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$
10. $x = 0$, $x = 1/2$, $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$
11. $x = 0$, $\begin{cases} x = 4t^2 - 6t, \\ y = 2t. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = 3t/(1+t^3), \\ y = 3t^2/(1+t^3). \end{cases}$
13. $y = 0$, $y = 3$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$
14. $x = 0$, $\begin{cases} x = 4\cos^4 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$
15. $y \leq 0$, $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$
16. $y \geq x$, $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$
17. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$
18. $(y-x)^2 = x^5$.
19. $y^2 = (1-x^2)^3$.
20. (епіциклоїда) $\begin{cases} x = (R+r)\cos t - r \cos \frac{R+r}{r}t, \\ y = (R+r)\sin t - r \sin \frac{R+r}{r}t, \end{cases} \quad R > r > 0.$
21. (гіпоциклоїда) $\begin{cases} x = (R-r)\cos t - r \cos \frac{R-r}{r}t, \\ y = (R-r)\sin t - r \sin \frac{R-r}{r}t, \end{cases} \quad R > r > 0, \frac{R}{r} \in \mathbb{N}.$
22. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.
23. $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
24. $y = 0$, $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 4t^2 - 6t. \end{cases}$
25. $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t). \end{cases}$
26. $y = 0$, $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^4 t. \end{cases}$
27. $y \geq 0$, $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^2$

$$28. \begin{cases} x = t^2 / (1 + t^2), \\ y = (t - t^3) / (1 + t^3). \end{cases}$$

$$29. y^2 = x(x-1)^2.$$

$$30. \begin{cases} x = 2 \sin 2t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$31. x \geq 0, \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$32. x^3 + y^3 = 3axy$$

$$(\text{вказівка: } x = 3at / (1 + t^3), y = 3at^2 / (1 + t^3)).$$

$$33. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$34. (\text{трактриса}) x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, y \in (0; a)$$

$$(\text{вказівка: } y = \sin t).$$

10. Знайдіть роботу, виконану силою $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж кривої γ

$$1. \quad \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}, \text{ де } \gamma - \text{шлях } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$2. \quad \vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j}, \text{ де } \gamma - \text{частина кола } x^2 + y^2 = 1 \text{ від точки } (1; 0) \text{ до точки } (0; -1) \text{ і переміщення відбувається через точку } (0; 1).$$

$$3. \quad \vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}, \text{ де } \gamma - \text{відрізок з початком у точці } (-4; 0) \text{ і кінцем у точці } (0; 2).$$

$$4. \quad \vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}, \text{ де } \gamma - \text{відрізок з початком у точці } (0; -2) \text{ і кінцем у точці } (4; 0).$$

Розділ 2. Поверхневі інтеграли

Далі будемо розглядати інтеграли вздовж *двовимірних багатовидів (поверхонь)*, тобто поверхневі інтеграли. Поняття *поверхні* і *поверхневого інтегралу* є взаємопов'язаними. Підхід до вивчення другого з цих понять залежить від трактовки першого. При цьому наявні ті ж труднощі, що і при вивченні криволінійних інтегралів, а також появляються нові, пов'язані з орієнтацією поверхні та орієнтацією її краю.

1. Початкові відомості про поверхні в $\mathbb{R}^3$ та їх орієнтацію. До поняття поверхні в $\mathbb{R}^3$ можна прийти беручи за основу різні інтуїтивні уявлення про неї.

Приклад 1. Площина, тобто множина точок $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, які є розв'язками рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ є поверхнею, де A , B та C – такі числа, що $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

Приклад 2. Межа кулі (сфера) є поверхнею (двовимірним багатовидом).

Приклад 3. Множина точок $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$, які є розв'язками рівняння $F(x; y; z) = 0$ (параболоїд, гіперболоїд, еліпсоїд, ...) є (двовимірним багатовидом) поверхнею, якщо функція F задовольняє певні умови.

Приклад 4. Дві паралельні площини – є поверхнею (дві площини, які перетинаються часто не відносять до поверхонь).

Приклад 5. Межа множини, яка утворюється з кулі, викиданням іншої кулі є поверхнею.

Приклад 6. Об'єднання скінченної кількості сфер є поверхнею.

Приклад 7. Межа довільної області $T \subset \mathbb{R}^3$ є поверхнею.

Найпростіші поверхні Ω можна уявляти як такі, що у належно вибраній системі координат їх можна задати рівнянням $z = \eta_3(x; y)$, $(x; y) \in D_{xy}$. При цьому D_{xy} є проекцією поверхні Ω на площину XOY і

Поверхневі інтеграли

функція η_3 є взаємно-однозначною відповідністю між D_{xy} і Ω . До таких поверхонь належить півсфера, параболоїд, а сфера та циліндр – ні.

Нову поверхню можна отримати шляхом склеювання декількох поверхонь. Фактично, послідовним склеюванням найпростіших поверхонь можна отримати будь-яку поверхню, яка реально зустрічається на практиці. Поверхня може мати лінії самоперетину і деякі частини поверхні можуть належати їй декілька разів або навіть нескінченну кількість разів. Поверхні можуть мати край і є поверхні, які не мають краю. До по поверхонь без краю відносяться, зокрема, ті, які є межею деякої області $T \subset \mathbb{R}^3$.

Приклад 9. Краєм півсфери є коло, по якому розрізана відповідна куля.

Приклад 10. Сфера, площина, параболоїд, межа куба є поверхнями без краю.

Поверхні можна поділити на певні класи (елементарні, прості, загальні, параметрично задані, многовиди, параметричні многовиди, компактні, замкнені, зв'язні, обмежені, орієнтовні, триангульовані, гладкі,...). Поверхня називається **обмеженою**, якщо вона міститься в деякій кулі. Поверхня зветься **замкнутою**, якщо вона є межею деякої області $T \subset \mathbb{R}^3$. Поверхня зветься **компактною**, якщо всі граничні точки кожної послідовності її точок належать поверхні (використовується і інша термінологія).

Приклад 11. Сфера – обмежена поверхня, а площина та параболоїд – ні.

Приклад 12. Сфера – компактна поверхня, а площина та поверхня

$$\{(x; y; z): z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \setminus \{(x; y; z): x^2 + y^2 = 1, x > 0, y \geq 0, z = 0\}$$

– ні.

Поверхня називається **гладкою** або **регулярною**, якщо в кожній своїй точці вона має дотичну площину. Поверхня зветься **кусково-гладкою**, якщо її можна розділити на скінченну кількість частин, кожна з яких є гладкою поверхнею.

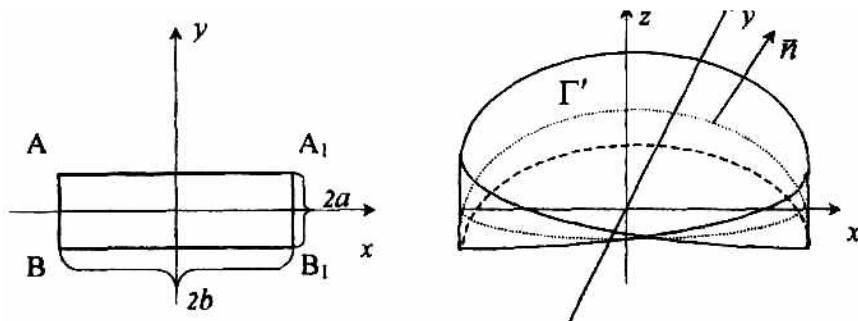
Приклад 13. Сфера та параболоїд – гладкі поверхні.

Приклад 14. Межа куба та межа тетраедра не є гладкими поверхнями, але є кусково-гладкими.

Часто поверхню потрібно розглядати як орієнтовану. Перетворити поверхню в орієнтовану можна багатьма способами.

По-перше, поверхню можна перетворити у орієнтовану за допомогою вибору в кожній точці одиничного вектору нормалі так, щоб він був неперервною функцією точки поверхні. Якщо такий вибір можливий, то можливий і інший, який зветься протилежним. Кожний такий вибір нормалі

(напрямних косинусів нормалі) називається орієнтацією поверхні або вибором її сторони. Орієнтовані в такому розумінні поверхні звуться також двосторонніми. Існують і неорієнтовні поверхні, які називають також односторонніми. До них належить, зокрема, лист Мебіуса. Для отримання його моделі потрібно вирізати прямокутник з листочка паперу, перекрутити його, а потім склеїти вільні сторони. На листі Мебіуса знайдеться така замкнена крива, що нормаль при неперервному русі по цій кривій змінює свій напрям на протилежний.



По-друге, вважаючи, що область D лежить в орієнтованому просторі $\mathbb{R}^2$, уявляти, що система (подібно до шляху в $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), (u; v) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

визначає певний порядок точок на поверхні, заданій цією системою (див. далі).

По-третє, поверхню можна перетворити в орієнтовану шляхом триангуляції, тобто розбиття її на криволінійні трикутники і вибором орієнтації межі кожного з них.

По-четверте, поверхню можна перетворити в орієнтовану шляхом впровадження орієнтуючого атласу, тобто сукупності таких відображень (локальних карт) $g_i : D_i \rightarrow \Omega$, що $\cup g_i(D_i) = \Omega$, кожне $g_i : D_i \rightarrow \Omega$ з яких є найпростішою поверхнею з певними додатковими властивостями.

Орієнтовані поверхні є особливо важливими для вивчення поверхневих інтегралів другого роду. На характер орієнтації поверхні Ω впливає і характер орієнтації простору $\mathbb{R}^3$, в якому вона лежить. Надалі вважаємо, якщо не вказано на інше, що простір $\mathbb{R}^3$ є додатно-орієнтовним (має орієнтацію $\mathbf{j} = +1$), тобто в ньому вибрано стандартний базис $e = (e_1; e_2; e_3)$, де $e_1 = (1; 0; 0)$ і $e_2 = (0; 1; 0)$ і $e_3 = (0; 0; 1)$.

Поверхневі інтеграли

Всі згадані вище та інші уявлення про поверхню та їхню орієнтацію реально зустрічаються, але їх важко охопити одним означенням, яке б не спотворювало інтуїтивне уявлення про поверхню (поверхня не зводилась до точки, весь простір $\mathbb{R}^3$ не був поверхню). В кожній конкретній ситуації слід добре осмислити, який насправді зміст вкладається в терміни “поверхня” та “орієнтовна поверхня”. Ми будемо розглядати, в основному, гладкі поверхні, що є межею деякої області або є частинами таких поверхонь, які в належно вибраній системі координат можна задати рівнянням $z = \eta_3(x; y)$, $(x; y) \in D_{xy}$.
 . Докладніше про різні типи поверхонь скажемо згодом.

2. Поверхня та двовимірний шлях в просторі $\mathbb{R}^3$. Двовимірним *шляхом* в просторі $\mathbb{R}^3$ будемо називати функцію $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$, неперервну в замкненій квадрантній області $D \subset \mathbb{R}^2$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку. У цьому випадку шлях задається системою (1). Шлях $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається *шляхом класу* $C^{(k)}(D)$, якщо функції η_i мають в D неперервні частинні похідні за обома змінними. Шлях $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається *регулярним або гладким*, якщо він є шляхом класу $C^{(1)}(D)$ і в кожній точці принаймні один з визначників

$$A = \frac{\partial(\eta_2; \eta_3)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \frac{\partial(\eta_3; \eta_1)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$C = \frac{\partial(\eta_2; \eta_3)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

є відмінним від нуля. Таким чином, двовимірний шлях η називається регулярним, якщо він є шляхом класу $C^{(1)}(G)$ і ранг матриці Якобі-Остроградського

$$\eta' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

в кожній точці $(u; v) \in D$ дорівнює двом. Якщо скористатись векторними позначеннями $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$, $(u; v) \in D$, то можна сказати, що шлях $\vec{r} = \vec{r}(u; v): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається регулярним, якщо в кожній точці $(u; v) \in D$ має неперервні частинні похідні $\vec{r}'_u$ та $\vec{r}'_v$ і $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}$, бо

$$\vec{r}'_u = \frac{\partial \eta_1}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial \eta_2}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial \eta_3}{\partial u} \vec{k}, \quad \vec{r}'_v = \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \vec{k} \quad \text{і}$$

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Отже, шлях $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): G \rightarrow \mathbb{R}^3$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли функція $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$ має в точці $(u; v) \in G$ неперервні частинні похідні $\vec{r}'_u$ та $\vec{r}'_v$ і вектори $\vec{r}'_u$ та $\vec{r}'_v$ є лінійно незалежними. При цьому,

$$\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

де

$$F = \langle \vec{r}'_u; \vec{r}'_v \rangle = \frac{\partial \eta_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial u} \frac{\partial \eta_2}{\partial v} + \frac{\partial \eta_3}{\partial u} \frac{\partial \eta_3}{\partial v},$$

$$E = \|\vec{r}'_u\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial u}\right)^2},$$

$$G = \|\vec{r}'_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v}\right)^2}.$$

Площину

$$A(x - \eta_1(u; v)) + B(y - \eta_2(u; v)) + C(z - \eta_3(u; v)) = 0,$$

де A , B , C визначені вище, називають *дотичною площиною* до шляху η в точці $(\eta_1(u; v); \eta_2(u; v); \eta_3(u; v))$ або дотичним простором. Рівняння *дотичної площини* можна записати у параметричній формі

Поверхневі інтеграли

$$\begin{cases} x - \eta_1(u; v) = \frac{\partial \eta_1}{\partial u}(u; v)\tau_1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial v}(u; v)\tau_2, \\ y - \eta_2(u; v) = \frac{\partial \eta_2}{\partial u}(u; v)\tau_1 + \frac{\partial \eta_2}{\partial v}(u; v)\tau_2, \\ z - \eta_3(u; v) = \frac{\partial \eta_3}{\partial u}(u; v)\tau_1 + \frac{\partial \eta_3}{\partial v}(u; v)\tau_2, (\tau_1; \tau_2) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Пряма

$$\begin{cases} x - \eta_1(u; v) = A\tau, \\ y - \eta_2(u; v) = B\tau, \\ z - \eta_3(u; v) = C\tau, \tau \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

називається **нормаллю** до η в цій точці $(u; v)$. Регулярні і тільки регулярні шляхи мають в кожній точці дотичну площину та нормаль. Нормаль до поверхні є паралельною до кожного з векторів

$$l_N = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{\pm \|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|}$$

які називаються *одичинними векторами нормалі до поверхні*. Множина $\eta(\partial D \cap D)$ називається **краєм шляху** η , а множина $[\eta] = \eta(D)$ – його носієм. Шлях η називається **простим**, якщо η є взаємно однозначним відображенням D на $[\eta]$. Шлях $\eta: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається **кусково-гладким**, якщо він є неперервним і D можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості замкнених квадровних областей D_k , які не мають спільних внутрішніх точок і звуження η на кожен з областей D_k є гладким шляхом. Є багато двовимірних шляхів, які мають однакові носії. Два шляхи $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ та $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1; \tilde{\eta}_2; \tilde{\eta}_3): \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ назвемо **еквівалентними**, якщо існує така функція $\Phi = (\Phi_1; \Phi_2): \tilde{D} \rightarrow D$ з додагним якобіаном, неперервна в $\tilde{D}$ разом із відповідними частинними похідними першого порядку, що $\tilde{\eta}(\tilde{u}; \tilde{v}) = \eta(\Phi_1(\tilde{u}; \tilde{v}); \Phi_2(\tilde{u}; \tilde{v}))$ для всіх $(\tilde{u}; \tilde{v}) \in \tilde{D}$. Це відношення і справді є відношенням еквівалентності. Тому ділить всі двовимірні шляхи в $\mathbb{R}^3$ на попарно неперетинні класи. Кожний такий клас еквівалентності називається орієнтовною параметрично заданою поверхнею в $\mathbb{R}^3$. Кожна така поверхня Ω однозначно визначається одним зі своїх представників – шляхом $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ і цей факт записують у вигляді $\Omega = \eta$. Цей шлях η

називається також *орієнтацією* або *параметризацією поверхні* Ω . Образно можна сказати, що в понятті орієнтовної параметрично заданої поверхні зосереджено все те спільне, що мають всі двовимірні шляхи з однаковими носіями і однаковим порядком точок.

3*. Поверхня як двовимірний багатовид. У термін "поверхня" в різних розділах математики вкладається різний зміст. У понятті орієнтованої параметрично заданої поверхні міститься багато поверхонь, по яких потрібно знаходити інтеграли, але не всі вони зустрічаються на практиці. Наприклад, межу області $\{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ не можна назвати поверхнею (як вище означено), оскільки вона складається з двох сфер, є незв'язною множиною і тому не може бути носієм двовимірного шляху (неперервного). Це ж стосується і межі довільної багатозв'язної області. Але орієнтовну межу такої області можна інтерпретувати як двовимірний орієнтовний багатовид.

Уведемо кілька термінів. *Елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^3$* називається така множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, яка є топологічно еквівалентною відкритому кругу U . *Простою поверхнею* називається така множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, яка є зв'язною і кожна її точки знайдеться таке $\delta > 0$, що множина $U_\delta(x_0; y_0; z_0) := U((x_0; y_0; z_0); \delta) \cap \Omega$ є елементарною поверхнею. Кожна така множина $U_\delta(x_0; y_0; z_0) := U((x_0; y_0; z_0); \delta) \cap \Omega$ називається δ -околом *простої поверхні*. Якщо в означенні простої поверхні не вимагати зв'язності, то прийдемо до означення багатовиду (багатовиду) без краю. Таким чином, проста поверхня – це така множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, кожна точка якої має δ -окіл, топологічно еквівалентний, тобто гомеоморфний, відкритому кругу. *Двовимірним багатовидом (багатовидом)* називається така множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, що для кожної її точки $(x_0; y_0; z_0)$ знайдуться такі δ -окіл $U((x_0; y_0; z_0); \delta)$ і функція $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Omega \cap U((x_0; y_0; z_0); \delta)$, яка є топологічним відображенням $\Omega \cap U((x_0; y_0; z_0); \delta)$ на $\mathbb{R}^2$ або на $\mathbb{R}_-^2 := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x < 0, y < 0\}$. Ті точки $(x_0; y_0; z_0) \in \Omega$, які для яких вказане відображення є взаємно однозначним на $\mathbb{R}_-^2 := \{(x; y) \in \mathbb{R}^2: x < 0, y < 0\}$ називаються *крайовими*. Сукупність всіх крайових точок багатовиду називається його *краси*. Двовимірний багатовид, край якого є непорожнім називається *багатовидом з краси*, а багатовид, край якого є порожнім, називається *багатовидом без краю*.

Приклад 1. Графік функції $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, тобто множина $\Omega = \{(x; y; f(x; y)): (x; y) \in G\}$, множина визначення якої є деяка однозв'язна $G \subset \mathbb{R}^2$ є елементарною поверхнею.

Приклад 2. Півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x; y) \in U((0; 0); 1)$, є

Поверхневі інтеграли

двовимірним багатовидом з краєм. Його краєм є коло $\{(x; y; z): x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$.

Приклад 3. Одинична куля, тобто множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, визначена формулою $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, є простою поверхнею, є багатовидом без краю, але не є елементарною поверхнею. Ця куля утворюється склеюванням двох елементарних поверхонь $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ і $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Приклад 4. Множина

$$\{(x; y; z): (x+2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x; y; z): x^2 + y^2 = 1\} \\ \cup \{(x; y; z): (x-2)^2 + y^2 = 1\}$$

є загальною поверхнею, але не є простою поверхнею і не є многовидом. Цю множину утворюється склеюванням трьох простих поверхонь $\{(x; y; z): (x+2)^2 + y^2 = 1\}$, $\{(x; y; z): x^2 + y^2 = 1\}$ та $\{(x; y; z): (x-2)^2 + y^2 = 1\}$.

Приклад 5. Якщо функція $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ належать до класу $C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ і

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0 \quad \text{в кожній точці } (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \text{ розв'язку рівняння}$$

$F(x; y; z) = 0$, то згідно з теоремою про неявну функцію – це рівняння або зовсім не має розв'язків або задає просту поверхню.

Приклад 6. Кожну елементарну поверхню $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), \end{cases} (u; v) \in G, \quad (1)$$

де G – область і функція $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): G \rightarrow \Omega$ є оборотною і неперервною. Систему (1) часто заміняють векторним записом

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v), \quad (u; v) \in G,$$

де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ і $\vec{r}(u; v) = \eta_1(u; v)\vec{i} + \eta_2(u; v)\vec{j} + \eta_3(u; v)\vec{k}$. Фактично, елементарна поверхонь – це така множина $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, яку можна задати одним з рівнянь $z = \psi_1(x; y)$, $x = \psi_2(y; z)$ або $y = \psi_3(x; z)$. Ортогональна проекція таких поверхонь на одну з координатних площин є бієкцією.

Приклад 7. Згідно з теоремою про неявну функцію, якщо: 1) функції η_1 ,

η_2 і η_3 є неперервними в деякому околі точки $(u_0; v_0) \in \mathbb{R}^2$; 2) $x_0 - \eta_1(u_0; v_0) = 0$, $y_0 - \eta_2(u_0; v_0) = 0$, $z_0 - \eta_3(u_0; v_0) = 0$; 3) частинні похідні $(\eta_1)'_u$, $(\eta_1)'_v$, $(\eta_2)'_u$ і $(\eta_2)'_v$ є неперервними функціями в точці $(u_0; v_0)$; 4) $\begin{vmatrix} (\eta_1)'_u(u_0; v_0) & (\eta_1)'_v(u_0; v_0) \\ (\eta_2)'_u(u_0; v_0) & (\eta_2)'_v(u_0; v_0) \end{vmatrix} \neq 0$: то перші два рівняння розглядуваної системи

задають дві неявні функції $u = f_1(x; y)$ і $v = f_2(x; y)$, тобто неявну функцію $(f_1; f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, і тому локально, тобто в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$, цю поверхню можна задати явним рівнянням $z = \eta_3(f_1(x; y), f_2(x; y))$, тобто

системою $\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = \psi_3(x; y). \end{cases}$ Далі, згідно з теоремою неявну функцію, якщо функції

η_1 , η_2 і η_3 задовольняють умови: 1) є неперервними в деякому околі точки $(u_0; v_0) \in \mathbb{R}^2$; 2) $x_0 - \eta_1(u_0; v_0) = 0$, $y_0 - \eta_2(u_0; v_0) = 0$, $z_0 - \eta_3(u_0; v_0) = 0$; 3) частинні похідні $(\eta_1)'_u$, $(\eta_1)'_v$, $(\eta_2)'_u$ і $(\eta_2)'_v$ є неперервними функціями в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$; 5) в точці $(u_0; v_0)$ ранг матриці Якобі-Остроградського

$$\eta' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

дорівнює двом, то в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$ поверхню можна задати одним з рівнянь $z = \psi_1(x; y)$, $y = \psi_2(x; z)$ і $x = \psi_3(z; y)$. При цьому функції ψ_1 , ψ_2 і ψ_3 мають неперервні частинні похідні за обома змінними в деяких околах точок $(x_0; y_0)$, $(x_0; z_0)$ та $(z_0; y_0)$, відповідно. Таким чином, якщо вказані умови виконуються в кожній точці, то поверхня, задана розглядуваною системою є двовимірним багатовидом.

Приклад 8. Дві паралельні площини є двовимірним багатовидом без краю.

Приклад 9. Множина, яка складається з двох площин, що перетинаються, не є двовимірним багатом видом. Якщо ж з цієї множини викинути пряму, яка є перетином цих площин, то отримаємо двовимірний

Поверхневі інтеграли

багатовид без краю.

Приклад 10. Множина

$\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$, тобто межа множини $\{(x; y; z): 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\}$ є двовимірним багатовидом без краю.

Приклад 11. Одиничну півсферу, можна задати рівнянням

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, якщо за множину параметрів взяти круг $x^2 + y^2 < 1$. Цю ж множину можна задати системою

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \sqrt{1 - \rho^2}, (\rho; \varphi) \in I_3. \end{cases}$$

якщо за область параметрів взяти прямокутник

$I_2 = \{(\rho; \varphi): \varphi \in (0; 2\pi); \rho \in (0; 1)\}$. Цю ж поверхню можна задати

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \cos \theta, (\theta; \varphi) \in I_3, \end{cases}$$

якщо за область параметрів взяти прямокутник

$$I_3 = \{(\theta; \varphi): \varphi \in (0; 2\pi); \theta \in (0; \pi/2)\}.$$

Таким чином, всю півсферу можна задати за допомогою однієї карти. Всю сферу за допомогою однієї карти задати не можна.

4. Поверхневий інтеграл першого роду і його обчислення. Нехай

$D \subset \mathbb{R}^2$ – замкнена обмежена квадратна область, Ω – деяка гладка поверхня, задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), (u; v) \in D, \end{cases} \quad (1)$$

де функція $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ має частинні похідні 1-го порядку, а f – функція, визначена на поверхні Ω . **Поверхневим інтегралом першого роду** функції f по поверхні Ω називається число

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z) ds = \iint_D f(\eta_1(u; v); \eta_2(u; v); \eta_3(u; v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2)$$

де

$$E = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial u} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial \eta_1}{\partial u} \frac{\partial \eta_1}{\partial v} + \frac{\partial \eta_2}{\partial u} \frac{\partial \eta_2}{\partial v} + \frac{\partial \eta_3}{\partial u} \frac{\partial \eta_3}{\partial v}.$$

У (2) справа стоїть подвійний інтеграл. Якщо цей подвійний інтеграл існує, то поверхневий інтеграл

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z) ds$$

називається *збіжним*. Згадавши, що $\sqrt{EG - F^2} dudv$ – це елемент поверхні в криволінійній системі координат, можемо трактувати поверхневий інтеграл як границю інтегральної суми

$$\sum_{k=1}^{v-1} f(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i) \Delta s_i.$$

Ця сума будується шляхом розгляду розбиття $\tau = \{D_k : k \in \overline{0; v-1}\}$ області D на v кадрованих областей D_k , кожній з яких відповідає частина Ω_i поверхні з площею Δs_i . При цьому $(\xi_i; \eta_i; \varsigma_i) = \eta(u_i; v_i)$ і $(u_i; v_i) \in D_i$ – довільна точка.

Формула (2), будучи означенням поверхневого першого інтегралу, є і *формулою для його обчислення*. Якщо поверхня задана рівнянням $z = z(x; y)$, $(x; y) \in G_{xy}$, тобто, якщо параметризація поверхні Ω має вигляд

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x; y), (x; y) \in D_{xy}, \end{cases}$$

то

$$E = 1 + z_x'^2, \quad G = 1 + z_y'^2, \quad F = z_x' z_y',$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1 + z_x'^2)(1 + z_y'^2) - (z_x' z_y')^2} = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2},$$

$$ds = \sqrt{EG - F^2} dudv = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy.$$

Тому формула (2) в цьому випадку набуває вигляду

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z) ds = \iint_{D_{xy}} f(x; y; z(x; y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (3)$$

Подібно знаходиться поверхневий інтеграл першого роду, якщо поверхня задана рівнянням $y = y(x; z)$, $(z; x) \in D_{zx}$ або рівнянням $x = x(y; z)$, $(y; z) \in D_{yz}$. Якщо поверхня Ω є об'єднанням двох розглядуваних

Поверхневі інтеграли

поверхонь $\tilde{\Omega}$ і $\hat{\Omega}$, то за означенням

$$\iint_{\tilde{\Omega}} f(x; y; z) ds = \iint_{\Omega} f(x; y; z) ds + \iint_{\hat{\Omega}} f(x; y; z) ds.$$

Поверхневий інтеграл першого роду має звичайні для інтегралів властивості. Зокрема, справедливими є наступні твердження.

Теорема 1. Якщо функція f є неперервною на поверхні Ω , заданій системою (1), і всі функції η_i є неперервно-диференційованими в замкненій квадрантній області D , то функція f є інтегрованою на Ω .

Теорема 2. Якщо функція f є неперервною на поверхні Ω , заданій системою (1), і всі функції η_i є неперервними в замкненій квадрантній області D , то існує така точка $(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) \in \Omega$, що

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z) ds = f(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}) S(\Omega),$$

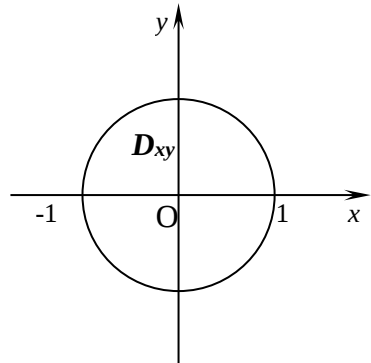
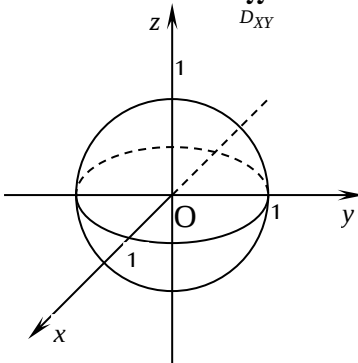
де $S(\Omega)$ – площа поверхні.

Приклад 1. Нехай Ω – це півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Тоді

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} z ds &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\phi = \pi \end{aligned}$$



Ми можемо прийти до цього ж результату записавши параметричне рівняння півсфери

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \sqrt{1 - \rho^2}, \rho \in [0; 1], \varphi \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Тоді $x'_\varphi = -\rho \sin \varphi$, $x'_\rho = \cos \varphi$, $y'_\varphi = \rho \cos \varphi$, $y'_\rho = \sin \varphi$, $z'_\varphi = 0$,
 $z'_\rho = -\frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}$, $E = (\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2 + 0^2 = \rho^2$,

$$G = (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 + \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \frac{1}{1 - \rho^2},$$

$$F = -\rho \sin \varphi \cos \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi + 0 = 0, \sqrt{EG - F^2} = \rho / \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Отже,

$$\iint_{\Omega} z ds = \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \rho^2} ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \pi.$$

Приклад 2. Нехай Ω – це частина поверхні $x^2 + y^2 = 1$, яка розміщена між площинами $z = -1$ і $z = 0$. Знайдемо інтеграл, $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) ds$

. Поверхню Ω подамо у вигляді $\Omega = \tilde{\Omega} \cup \hat{\Omega}$, $\tilde{\Omega}$ – та частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$, що дивиться до нас, $x = \sqrt{1 - y^2}$, а $\hat{\Omega}$ – від нас, тобто, у цьому випадку $x = -\sqrt{1 - y^2}$. Тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) ds &= \iint_{\tilde{\Omega}} (x^2 + y^2) ds + \iint_{\hat{\Omega}} (x^2 + y^2) ds, \\ \iint_{\tilde{\Omega}} (x^2 + y^2) ds &= \iint_{D_{YZ}} ((x(y; z))^2 + y^2) \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} dy dz \\ &= \iint_{D_{YZ}} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy dz = \int_{-1}^0 dz \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \pi. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\iint_{\hat{\Omega}} (x^2 + y^2) ds = \int_0^1 dz \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \pi.$$

Поверхневі інтеграли

Тому

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) ds = 2\pi.$$

До цього ж результату приходимо записавши параметричне рівняння циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = \sin \varphi, \\ z = z, z \in [0;1], \varphi \in [0;2\pi]. \end{cases}$$

Тоді $x'_\varphi = -\sin \varphi$, $x'_z = 0$, $y'_\varphi = \cos \varphi$, $y'_z = 0$, $z'_\varphi = 0$, $z'_z = 1$,

$$E = (\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 + 0 = 1, \quad G = 0 + 0 + 1 = 1, \quad F = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = 1. \text{ Тому}$$

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) ds = \int_{-1}^0 dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Приклад 3. Знайдемо $\iint_{\Omega} ds$, де Ω – поверхня, задана параметрично

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = \varphi, \rho \in [0;1], \varphi \in [0;2\pi]. \end{cases}$$

Тоді $x'_\varphi = -\rho \sin \varphi$, $x'_\rho = \cos \varphi$, $y'_\varphi = \rho \cos \varphi$, $y'_\rho = \sin \varphi$, $z'_\varphi = 1$, $z'_\rho = 0$.

Тому $E = 1$, $G = \rho^2 + 1$, $F = 0$, $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\rho^2 + 1}$. Отже,

$$\iint_{\Omega} ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\rho^2 + 1} d\rho = \pi \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

Зауваження 1. Зустрічаються невласні поверхневі інтеграли з особливою точкою $(x_0; y_0; z_0) \in \Omega$. Так звуть границю

$$\iint_{\Omega} f(x; y; z) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\Omega \setminus U((x_0; y_0; z_0); \varepsilon)} f(x; y; z) ds.$$

Приклад 4.* Знайдемо $\iint_{\Omega} \frac{(1-x)ds}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$, де Ω – сфера

$\partial U((0;0;0);1)$. У даному випадку особлива точка $(x_0; y_0; z_0) = (1; 0; 0)$

підінтегральної функції лежить на Ω . Запишемо параметричне рівняння сфери $\partial U((0;0;0);1)$:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \cos \theta, \varphi \in [0; 2\pi], \theta \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} E &= (\sin \theta \sin \varphi)^2 + (\sin \theta \cos \varphi)^2 = \sin^2 \theta, \\ G &= (\cos \theta \cos \varphi)^2 + (\cos \theta \sin \varphi)^2 + (\sin \theta)^2 = (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1, \\ F &= -\sin \theta \sin \varphi \cdot \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cdot \cos \theta \cos \varphi + 0 = 0. \\ \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{\sin^2 \theta}, (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2 - 2\sin \theta \cos \varphi, \\ \iint_{\Omega \setminus U((1;0;0);\varepsilon)} \frac{(1-x)ds}{(x-1)^2 + y^2 + z^2} &= \iint_{G \setminus E_1} \frac{(1-\sin \theta \cos \varphi)\sqrt{\sin^2 \theta}}{2(1-\sin \theta \cos \varphi)} d\varphi d\theta \\ &= \frac{1}{2} \iint_{G \setminus E_1} \sin \theta d\varphi d\theta, E_1 = [-\varepsilon; \varepsilon] \times [-\varepsilon; \varepsilon] \\ \iint_{\Omega} \frac{(1-x)ds}{(x-1)^2 + y^2 + z^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\Omega \setminus U((1;0;0);\varepsilon)} \frac{(1-x)ds}{(x-1)^2 + y^2 + z^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{G \setminus [-\varepsilon; \varepsilon] \times [-\varepsilon; \varepsilon]} \sin \theta d\varphi d\theta = \pi. \end{aligned}$$

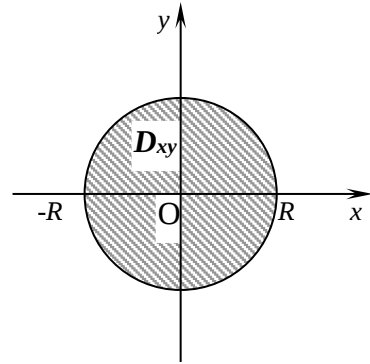
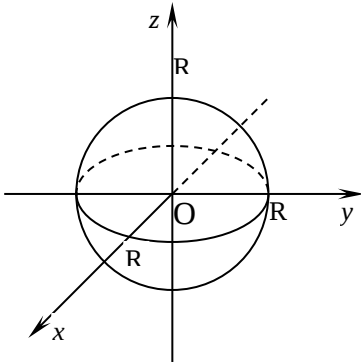
5. Знаходження площі поверхні за допомогою поверхневого інтегралу першого роду. Якщо в означенні поверхневого інтегралу взяти $f \equiv 1$, то отримуємо формулу

$$S = \iint_{\Omega} ds$$

для знаходження площі поверхні. За допомогою поверхневого інтегралу можна знаходити також об'єми та різні фізичні величини.

Приклад 1. Знайдемо площу сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Поверхневі інтеграли



Верхня півсфера задається рівнянням $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тоді

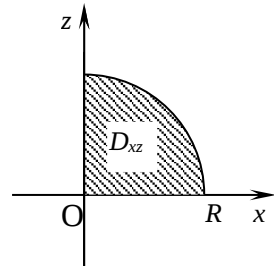
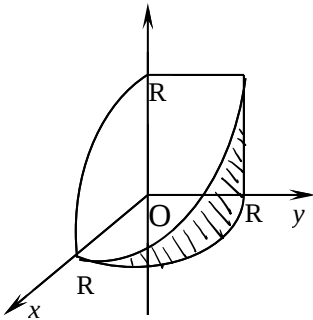
$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Тому

$$S = \iint_{\Omega} ds = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-1/2} \rho d\rho = 4\pi R^2.$$

Приклад 2. Знайдемо площу частини циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, яка вирізана циліндром $x^2 + z^2 = R^2$.



Восьма частина цієї поверхні заштрихована. Для цієї частини

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad y'_z = 0.$$

Тому

$$\begin{aligned} S &= 8 \iint_{D_{ZX}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z} \, dz dx = 8 \iint_{D_{ZX}} \frac{R dz dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\ &= 8R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = 8R^2. \end{aligned}$$

6. Поверхневий інтеграл другого роду. Нехай Ω – деяка поверхня, яка в кожній точці має дотичну площину та нормаль. Виберемо в кожній точці поверхні одиничний вектор нормалі $l_N = (N_1; N_2; N_3) = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Нехай на поверхні Ω задано функцію $(P; Q; R): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Поверхневим інтегралом або **поверхневим інтегралом другого роду** цієї функції по поверхні Ω називається інтеграл

$$\iint_{\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Omega} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds. \quad (1)$$

У правій частині (1) стоїть поверхневий інтеграл першого роду. Бачимо, що поверхневий інтеграл другого роду залежить від вибору одиничного вектора нормалі, тобто від орієнтації поверхні.

Якщо поверхня Ω є межею деякої області $T \subset \mathbb{R}^3$, то одиничний вектор нормалі $l_N = (N_1; N_2; N_3) = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ вибирають як правило так, щоб він в кожній точці $(x_0; y_0; z_0)$ поверхні був напрямлений на зовнішність T , тобто щоб точки $(x; y; z)$, де $x = x_0 + tN_1$, $y = y_0 + tN_2$, $z = z_0 + tN_3$, $t \in [0; 1]$, не належать T , якщо $t \rightarrow 0+$. Так орієнтовну поверхню Ω позначають через Ω^+ . При цьому кажуть, що поверхневий інтеграл береться по **зовнішній стороні** поверхні Ω . Якщо в кожній точці вибирається нормаль, напрямлена у T , то говорять, що поверхневий інтеграл береться по **внутрішній стороні** поверхні Ω . Так орієнтовну поверхню Ω позначають через Ω^- . Ця термінологія унаслідкується для частин поверхонь, які є межами деякої області $T \subset \mathbb{R}^3$. Зокрема, у цьому зв'язку можна говорити про зовнішню сторону півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Зі сказаного випливає, що

Поверхневі інтеграли

$$\iint_{\Omega^-} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = - \iint_{\Omega^+} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy ,$$

якщо останній інтеграл існує. Разом з цим, орієнтація поверхні не впливає на знак поверхневого інтегралу першого роду.

Приклад 1. Якщо деяка поверхня $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ є межею множини $T \subset \mathbb{R}^3$, заданої нерівністю $F(x; y; z) < 0$, функція $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в деякому δ -околі точки $(x_0; y_0; z_0) \in \partial T$, має в цьому околі неперервні частинні похідні F'_x , F'_y та F'_z і принаймні одна з цих частинних похідною від нуля в точці $(x_0; y_0; z_0) \in \Omega$, то частину поверхні Ω , яка міститься в деякому δ -околі точки $(x_0; y_0; z_0)$, можна задати одним з рівнянь $z = \psi_1(x; y)$, $y = \psi_2(x; z)$ і $x = \psi_3(z; y)$. При цьому,

$$N_1 = \cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}, \quad N_2 = \cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}},$$

$$N_3 = \cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}. \quad (2)$$

Якщо в написаних вище формулах взяти знак $+$, то така нормаль буде зовнішньою. Справді, точки $(x; y; z)$, де $x = x_0 + tN_1$, $y = y_0 + tN_2$, $z = z_0 + tN_3$, $t \in [0; 1]$, не належать T , якщо $t \rightarrow 0+$, оскільки $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ і згідно з формулою Тейлора

$$F(x; y; z) = F(x_0; y_0; z_0) + \frac{F'_x}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}(x - x_0)$$

$$+ \frac{F'_y}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}(y - y_0) + \frac{F'_z}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}}(z - z_0) + o(t)$$

$$= \frac{(F'_x)^2}{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}t + \frac{(F'_y)^2}{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}t + \frac{(F'_z)^2}{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}t + o(t), \quad t \rightarrow 0+,$$

Приклад 2. Якщо деяка поверхня $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ є межею множини $T \subset \mathbb{R}^3$, заданої нерівністю $F(x; y; z) < 0$, і для частини цієї поверхні рівняння $F(x; y; z) = 0$ рівносильне рівнянню $z = z(x; y)$, $(x; y) \in D_{xy}$, а нерівність $F(x; y; z) < 0$ рівносильна нерівності

$z < z(x; y)$, то напрямні косинуси зовнішньої нормалі відповідної частини поверхні знаходяться за формулами

$$\cos \alpha = \frac{-z'_x}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}, \quad \cos \beta = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}},$$

і при цьому,

$$\iint_{\Omega} P dydz = \iint_{\Omega} P \cos \alpha ds = - \iint_{D_{xy}} P(x; y; z(x; y)) z'_x dx dy, \quad (3)$$

$$\iint_{\Omega} Q dzdx = \iint_{\Omega} Q \cos \beta ds = - \iint_{D_{xy}} Q(x; y; z(x; y)) z'_y dx dy, \quad (4)$$

$$\iint_{\Omega} R dx dy = \iint_{\Omega} R \cos \gamma ds = \iint_{D_{xy}} R(x; y; z(x; y)) dx dy, \quad (5)$$

Приклад 3. Якщо деяка поверхня $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ є межею множини $T \subset \mathbb{R}^3$, заданої нерівністю $F(x; y; z) < 0$, і для частини цієї поверхні рівняння $F(x; y; z) = 0$ рівносильне рівнянню $y = y(z; x)$, $(z; x) \in D_{zx}$, а нерівність $F(x; y; z) < 0$ рівносильна нерівності $y < y(z; x)$, то напрямні косинуси зовнішньої нормалі відповідної частини поверхні знаходяться за формулами

$$\cos \alpha = \frac{-y'_x}{\sqrt{1 + y'^2_z + y'^2_x}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2_z + y'^2_x}}, \quad \cos \gamma = \frac{-y'_z}{\sqrt{1 + y'^2_z + y'^2_x}},$$

і при цьому,

$$\iint_{\Omega} P dydz = \iint_{\Omega} P \cos \alpha ds = - \iint_{D_{zx}} P(x; y(z; x); z) y'_x dz dx, \quad (6)$$

$$\iint_{\Omega} Q dzdx = \iint_{\Omega} Q \cos \beta ds = \iint_{D_{zx}} Q(x; y(z; x); z) dz dx, \quad (7)$$

$$\iint_{\Omega} R dx dy = \iint_{\Omega} R \cos \gamma ds = - \iint_{D_{zx}} R(x; y(z; x); z) y'_z dz dx, \quad (8)$$

Приклад 4. Якщо деяка поверхня $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$ є межею множини $T \subset \mathbb{R}^3$, заданої нерівністю $F(x; y; z) < 0$, і для частини цієї поверхні рівняння $F(x; y; z) = 0$ рівносильне рівнянню $x = x(y; z)$, $(z; y) \in D_{yz}$, а нерівність $F(x; y; z) < 0$ рівносильна нерівності

Поверхневі інтеграли

$x < x(y; z)$, то напрямні косинуси зовнішньої нормалі відповідної частини поверхні знаходяться за формулами

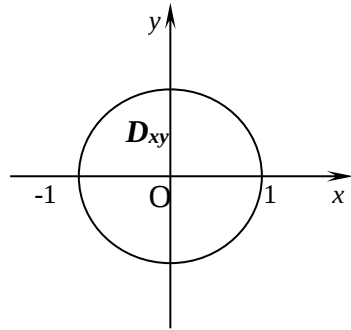
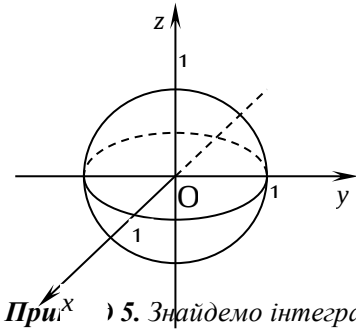
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \cos \beta = \frac{-x_y'}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{-x_z'}{\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}}$$

і при цьому,

$$\iint_{\Omega} P dydz = \iint_{\Omega} P \cos \alpha ds = \iint_{D_{yz}} P(x(y; z); y; z) dydz, \quad (9)$$

$$\iint_{\Omega} Q dzdx = \iint_{\Omega} Q \cos \beta ds = - \iint_{D_{yz}} Q(x(y; z); y; z) x_y' dydz, \quad (10)$$

$$\iint_{\Omega} R dx dy = \iint_{\Omega} R \cos \gamma ds = - \iint_{D_{yz}} R(x(y; z); y; z) x_z' dydz, \quad (11)$$



При x 5. Знайдемо інтеграл

$$I = \iint_{\Omega} z dx dy,$$

де Ω – зовнішня сторона сфери $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. У даному випадку

$$F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad F'_x = 2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z,$$

$$\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ і згідно з прикладом 1}$$

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Далі,

$$I = \iint_{\Omega} z dx dy + \iint_{\Omega^*} z dx dy,$$

де $\tilde{\Omega}$ – це верхня половина сфери: $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (на ній нормаль утворює гострий кут з віссю OZ), а Ω^* – нижня половина сфери: $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ (на ній нормаль утворює тупий кут з віссю OZ). Тоді

$$\iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} z \cos \gamma ds = \iint_{\Omega} (1-x^2-y^2) ds = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

і

$$\iint_{\Omega^*} z dx dy = \iint_{\Omega^*} z \cos \gamma ds = \iint_{\Omega^*} (1-x^2-y^2) ds = \iint_{D_{xy}} -\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

де D_{xy} – круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Тому

$$I = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-\rho^2)^{1/2} \rho d\rho = \frac{4\pi}{3}.$$

До цього ж результату скоріше прийдемо, якщо скористаємось прикладом 2.

Приклад 6. Нехай Ω – це частина $z = -1$ зовнішньої сторони межі циліндра, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = -1$ і $z = 0$. Тоді

$$\iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{U((0;0);1)} dx dy = \pi, \quad \iint_{\Omega} z dz dx = \iint_{\Omega} z \cos \beta ds = 0,$$

$$\iint_{\Omega} z dy dz = \iint_{\Omega} z \cos \alpha ds = 0.$$

Приклад 7. Нехай Ω – частина $x^2 + y^2 = 1$ зовнішньої сторони межі циліндра $\{(x; y; z): x^2 + y^2 \leq 1, 2 \leq z \leq 4\}$. Тоді

$$\iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} z \cos \gamma ds = 0.$$

Для знаходження інтегралу

$$\iint_{\Omega} z dy dz$$

подамо Ω у вигляді $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 – частина Ω , для якої $x \geq 0$ (вона задається рівнянням $x = \sqrt{1-y^2}$), а Ω_2 – частина Ω , для якої $x \leq 0$ (вона задається рівнянням $x = -\sqrt{1-y^2}$). Тоді

Поверхневі інтеграли

$$\iint_{\Omega} z dy dz = \iint_{\Omega_1} z dy dz + \iint_{\Omega_2} z dy dz .$$

На основі прикладу 4

$$\iint_{\Omega_1} z dy dz = \iint_{D_{yz}} z dy dz = \int_2^4 z dz \int_{-1}^1 dy = 12, \quad \iint_{\Omega_2} z dy dz = - \iint_{D_{yz}} z dz dy = -12 .$$

Тому

$$\iint_{\Omega} z dy dz = 0 .$$

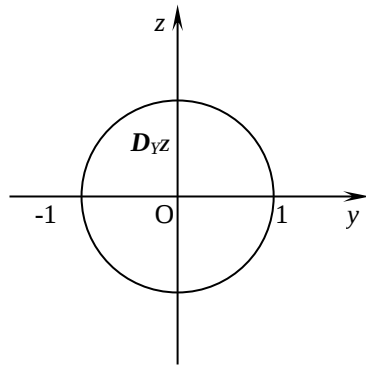
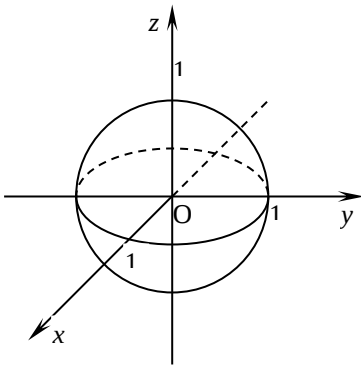
Приклад 8. Знайдемо інтеграл

$$I = \iint_{\Omega} dy dz ,$$

де Ω – зовнішня сторона півсфери $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$. У даному випадку згідно з прикладом 4

$$I = \iint_{\Omega} dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz = \pi ,$$

де D_{yz} – круг $y^2 + z^2 \leq 1$.



Приклад 9. Знайдемо інтеграл

$$I = \iint_{\Omega} y dy dz ,$$

де Ω – зовнішня сторона півсфери $\{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$. В даному випадку згідно з прикладом 4

$$I = \iint_{\Omega} y dy dz = \iint_{\Omega} P \cos \alpha ds = \iint_{D_{yz}} y dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi = 0,$$

$$\partial e D_{yz} - \text{кпуз } y^2 + z^2 \leq 1.$$

7. Знаходження поверхневого інтегралу другого роду по поверхні, заданій параметрично. Нехай орієнтовна поверхня Ω , задана параметрично системою (1), $l_N = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні в точці $(x; y; z) = (\eta_1(u; v); \eta_2(u; v); \eta_3(u; v))$. Тоді

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2, \\ A &= \frac{\partial(\eta_2; \eta_3)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \frac{\partial(\eta_3; \eta_1)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_3}{\partial u} & \frac{\partial \eta_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ C &= \frac{\partial(\eta_1; \eta_2)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial u} & \frac{\partial \eta_2}{\partial v} \end{vmatrix}. \\ l_N &= \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{\|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v\|} = \left(\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Звернувши увагу на написані вище формули, можемо формулу (1) переписати так :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \pm \iint_D \left(P(\eta(u; v)) \frac{\partial(\eta_2; \eta_3)}{\partial(u; v)} + Q(\eta(u; v)) \frac{\partial(\eta_3; \eta_1)}{\partial(u; v)} \right. \\ &\quad \left. + R(\eta(u; v)) \frac{\partial(\eta_1; \eta_2)}{\partial(u; v)} du dv \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Вибір одного зі знаків в останній формулі, як і вище, потрібно здійснювати у відповідності з додатковими вказівками. Але на формулу (13) можна дивитись як на одне з можливих означень поверхневого інтегралу другого роду (поверхневого інтегралу по двовимірному шляху $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$, параметричному двовимірному многовиду).

Поверхневі інтеграли

Власне, нехай область D лежить у орієнтовному просторі $\mathbb{R}^2$, а поверхня Ω , задана системою (1), лежить у орієнтовному просторі $\mathbb{R}^3$. Домовимось поверхневим інтегралом другого роду функції $(P; Q; R): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ називати число, визначене правою частиною формули (13), в якій взято знак «+», якщо орієнтація вказаних просторів $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ є однаковою. При цьому кажуть, що поверхня, задана системою (1) є додатно-орієнтовною і її позначають символом Ω^+ або η^+ . Якщо орієнтація просторів $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ є додатною, але у формулі (13) взято знак «-», то кажуть, що розглядається поверхневих інтеграл, по від'ємному боці поверхні Ω , тобто по поверхні Ω^- або η^- . Поверхню η^- можна розглядати як задану параметрично системою

$$\begin{cases} x = \eta_{1-}(u; v), \\ y = \eta_{2-}(u; v), \\ z = \eta_{3-}(u; v), (u; v) \in D_-, \end{cases} \quad (14)$$

де D_- – область симетрична до D відносно осі OV і $\eta_{i-}(u; v) = \eta_i(-u; v)$. Формула (13), будучи формулою для означення поверхневого інтегралу другого роду, є і формулою для його обчислення.

8. Формула Остроградського-Гауса.

Теорема 1. Нехай межа замкненої кубової області $T \subset \mathbb{R}^3$ об'єднанням скінченного числа гладких поверхонь, спільними точками яких є хіба-що їх крайові точки $l_N = (N_1; N_2; N_3) = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂T в точці $(x; y; z) \in \partial T$, а функції P , Q і R є неперервними в T разом із своїми частинними похідними $\partial P / \partial x$, $\partial Q / \partial y$ і $\partial R / \partial z$. Тоді справедлива формула Остроградського-Гауса

$$\iint_{\partial^+ T} P dydz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (1)$$

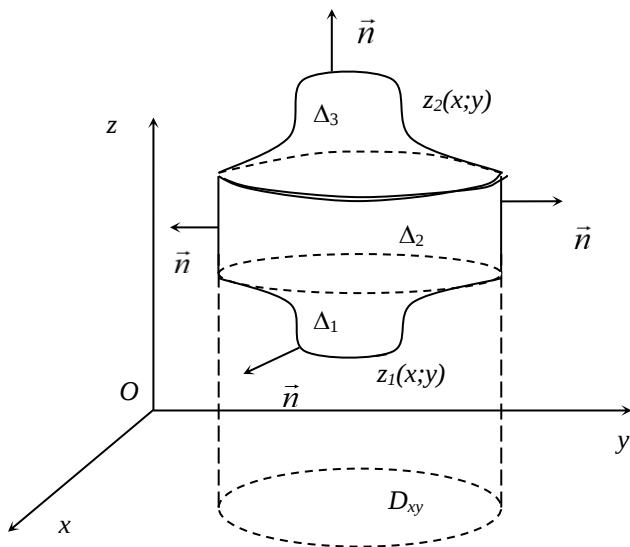
тобто

$$\iint_{\partial^+ T} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (2)$$

де $\partial^+ T$ означає, що кожна компонента ∂T орієнтована так, що відповідний одиничний вектор нормалі до ∂T напрямлений на зовнішність T .

Доведення. Обмежимося розглядом випадку, коли область T є елементарною відносно осей OX , OY та OZ . Область T називається елементарною відносно осі OZ , якщо вона обмежена з боків циліндричною

поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ , а знизу і зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x; y)$ і $z = z_2(x; y)$, де z_1 і z_2 неперервні в області D_{xy} функції, причому $z_1(x; y) \leq z_2(x; y)$ для всіх $(x; y) \in D_{xy}$. Аналогічно визначаються області, елементарні відносно інших координатних осей. Прикладом таких областей є куля, куб тощо.



У розглядуваному випадку маємо

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \left(\int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x; y; z_2(x; y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x; y; z_1(x; y)) dx dy \\ &= \iint_{\Delta_1} R dx dy + \iint_{\Delta_3} R dx dy + \iint_{\Delta_2} R dx dy = \iint_{\partial^+ T} R dx dy. \end{aligned}$$

Тут ми врахували, що

$$\iint_{\Delta_2} R dx dy = \iint_{\Delta_2} R \cos \gamma ds = 0,$$

бо Δ_2 – бічна поверхня циліндра, а для неї $\cos \gamma = 0$. Крім того, нормаль до поверхні Δ_1 утворює тупий кут з віссю OZ . Тому на ній $\cos \gamma < 0$. Отже,

Поверхневі інтеграли

параметризація Δ_1 повинна бути відповідною. Нормаль же до поверхні Δ_3 утворює гострий кут з віссю OZ . Тому ми взяли для неї відповідну параметризацію. Аналогічно,

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial^+ T} Q dx dz, \quad \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial^+ T} P dz dy.$$

Додавши отримані рівності, одержуємо формулу (1). ►

Приклад 1. Знайдемо інтеграл

$$\iint_{\partial^+ T} x dy dz + z dz dx + x dx dy,$$

де $\partial^+ T$ – зовнішня сторона межі куба T , обмеженого площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$ та $z=1$. Згідно з формулою Остроградського-Гауса

$$\iint_{\partial^+ T} x dy dz + z dz dx + x dx dy = \iiint_T (1+0+0) dx dy dz = \iiint_T dx dy dz = 1.$$

Наслідок 1. Якщо область $T \subset \mathbb{R}^3$ задовольняє умови теореми 1, то її об'єм можна знайти за допомогою кожної з наступних формул

$$V_T = \frac{1}{3} \iint_{\partial^+ T} x dx dz + y dz dx + z dx dy, \quad (2)$$

$$V_T = \iint_{\partial^+ T} x dy dz, \quad V_T = \iint_{\partial^+ T} y dz dx, \quad V_T = \iint_{\partial^+ T} z dx dy, \quad (3)$$

Доведення. Для отримання (2) потрібно у формулі Остроградського-Гауса взяти $P=x$, $Q=y$, $R=z$. Для отримання першої з формул (3) потрібно у формулі (1) взяти $P=x$, $Q=0$, $R=0$. Решту формул отримуємо аналогічним чином. ►

Зауваження 1. Ми довели теорему для області T , зображеної на рисунку 1, проте вона, як і формула Гріна, залишається справедливою, якщо T можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості таких областей, які не мають спільних внутрішніх точок. Наприклад, якщо T є куб, з якого викинений менший куб, або, якщо T є об'єднанням скінченної кількості кубів. При цьому $\partial^+ T$, як множина, може бути незв'язною, складатися з m орієнтованих поверхонь $\partial^+ T_m$. При цьому кажуть, що $\partial^+ T$ є ланцюгом

поверхонь і цей факт записують так: $\partial^+ T = \partial^+ T_1 + \dots + \partial^+ T_m$.

Приклад 2. Нехай межа замкненої кубової області $T \subset \mathbb{R}^3$ об'єднанням скінченного числа гладких поверхонь, спільними точками яких є хіба-що їх крайові точки $\vec{l}_N = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂T в точці $(\xi; \eta; \varsigma) \in \partial T$, $(\xi; \eta; \varsigma)$ – біжуча точка поверхні (змінні інтегрування), ϑ – кут між векторами $\vec{\rho} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\varsigma - z)\vec{k}$ та $\vec{l}_N$, $\rho = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2}$. Переконаємось, що для довільної точки $(x; y; z) \in T \setminus \partial T$

$$\iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} = 0.$$

Справді,

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \vec{\rho}; \vec{l}_N \rangle}{\|\vec{l}_N\| \|\vec{\rho}\|} = \frac{(\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\varsigma - z) \cos \gamma}{\rho}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} &= \iint_{\partial^+ T} \frac{(\xi - x) \cos \alpha + (\eta - y) \cos \beta + (\varsigma - z) \cos \gamma}{\rho^3} ds \\ &= \iint_{\partial^+ T} \left(\frac{(\xi - x)}{\rho^3} \cos \alpha + \frac{(\eta - y)}{\rho^3} \cos \beta + \frac{(\varsigma - z)}{\rho^3} \cos \gamma \right) ds \end{aligned}$$

Таким чином, в даному випадку

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\xi - x)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2 \right)^{3/2}}, \quad Q = \frac{(\eta - y)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2 \right)^{3/2}}, \\ R &= \frac{(\varsigma - z)}{\left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varsigma - z)^2 \right)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{\rho^5} + \frac{1}{\rho^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{\rho^5} + \frac{1}{\rho^3} - \frac{3(\varsigma - z)^2}{\rho^5} = 0.$$

і на основі формули Остроградського-Гауса приходимо до потрібного висновку. Якщо ж $(x; y; z) \notin \bar{T}$, то розглядуваний інтеграл (його називають інтегралом Гауса) не залежить від конкретної поверхні в середині якої лежить точка $(x; y; z)$. Можна взяти, зокрема, $\partial T = \partial U((x; y; z); \varepsilon)$. Тоді

Поверхневі інтеграли

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} &= \iint_{\partial^+ U((x;y;z);\varepsilon)} \left(\frac{(\xi - x)}{\rho^3} \cos \alpha + \frac{(\eta - y)}{\rho^3} \cos \beta + \frac{(\zeta - z)}{\rho^3} \cos \gamma \right) ds \\ &= \iint_{\partial^+ U((x;y;z);\varepsilon)} \frac{1}{\rho^2} ds = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\partial^+ U((x;y;z);\varepsilon)} ds = 4\pi. \end{aligned}$$

Якщо $(x; y; z) \in \partial T$ і поверхня ∂T є досить гладкою, то

$$\iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} = 2\pi$$

в розумінні головного значення для кожної точки $(x; y; z) \in \partial T$. Справді,

$$\iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2}.$$

Нехай $\partial U_{+,T}((x;y;z);\varepsilon)$ – зовнішня частина сфери $\partial U((x;y;z);\varepsilon)$, яка лежить поза T , $\partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)$ – внутрішня частина сфери $\partial U((x;y;z);\varepsilon)$, яка лежить в T . Тоді згідно з вище встановленим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{(\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)) \cup \partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} &= 0 \\ \iint_{(\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)) \cup \partial U_{+,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} &= 4\pi. \end{aligned}$$

Окрім цього,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} &= \iint_{(\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)) \cup \partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\iint_{(\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)) \cup \partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} + \iint_{(\partial^+ T \setminus U((x;y;z);\varepsilon)) \cup \partial U_{+,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(- \iint_{\partial U_{+,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} + \iint_{\partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, якщо

$$- \iint_{\partial U_{+,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} + \iint_{\partial U_{-,T}((x;y;z);\varepsilon)} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} \rightarrow 0,$$

то

$$\iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} = 2\pi.$$

Отож, за згаданих умов

$$\iint_{\partial^+ T} \frac{\cos \vartheta ds}{\rho^2} = \begin{cases} 0, (x; y; z) \in T \setminus \partial T, \\ 2\pi, (x; y; z) \in \partial T, \\ 4\pi, (x; y; z) \notin \bar{T}. \end{cases}$$

9. Запитання для самоконтролю

1. Що таке шлях (двовимірний)? У чому різниця між шляхом (двовимірним) і поверхнею? Наведіть приклади.
2. Що таке двовимірний многовид? Наведіть приклади.
3. Як ви розумієте орієнтований шлях? Чи всі шляхи орієнтовані? Наведіть приклади.
4. Яка поверня є додатно орієнтована? Протилежно орієнтована? Як це відобразити формально?
5. Який шлях називаємо гладким (регулярним), кусково-гладким?
6. Сформулюйте означення поверхневого інтегралу першого роду. Які його властивості?
7. Сформулюйте теорему про обчислення поверхневого інтегралу першого роду.
8. Сформулюйте означення поверхневого інтегралу другого роду. Які його властивості?
9. Запишіть і прокоментуйте формулу для обчислення поверхневого інтегралу другого роду по поверхні, заданій параметрично.
10. Сформулюйте і доведіть теорему Остроградського-Гауса.

10. Вправи і задачі теоретичного характеру.

1. Доведіть твердження

$$\begin{aligned} & \iiint_T \frac{\partial u}{\partial x} \Delta u dx dy dz = \\ & = \frac{1}{2} \iint_{\partial^+ T} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \, ds. \end{aligned}$$

Поверхневі інтеграли

якщо функція u має неперервні частинні похідні другого порядку в замкненій кубовній області $T \subset \mathbb{R}^3$.

2. Зобразіть множину $\eta(D)$ і задайте цю множину рівнянням $F(x; y; z) = 0$ (зразки побудов для програмного забезпечення Maple 18 містяться в Додатку 2)

$$1. \text{ (сфера) } \begin{cases} x = R \cos u \sin v, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = R \cos v, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; \pi]\}.$$

$$2. \text{ (конус) } \begin{cases} x = v \cos u, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = v, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; h]\}.$$

$$3. \text{ (циліндр) } \begin{cases} x = R \cos u, \\ y = R \sin u \sin v, \\ z = v, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; h]\}$$

$$4. \text{ (параболоїд) } \begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; h]\}.$$

$$5. \text{ (гелікоїд) } \begin{cases} x = Ru \cos v, \\ y = Ru \sin v, \\ z = v, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; 1]\}.$$

$$6. \text{ (параболоїд гіперболічний) } \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = uv, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; h_1], v \in [0; h_2]\}$$

$$7. \text{ (тор) } \begin{cases} x = (b + a \cos u) \cos v \\ y = (b + a \cos u) \sin v \\ z = a \sin u \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; 2\pi]\}.$$

8. (пляшка Кляйна) – приклад односторонньої поверхні

$$\begin{cases} x = (r + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v) \cos u \\ y = (r + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v) \sin u \\ z = \sin \frac{u}{2} \sin v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v \end{cases}$$

11. Вправи і задачі розрахункового характеру.

1. Знайдіть поверхневі інтеграли першого роду

1. $\iint_{\Omega} (3x + 2z/3) ds$, де Ω – частина площини $x + y/2 + z/3 = 1$, яка

лежить в першому октанті.

2. $\iint_{\Omega} (y - z/2) ds$, де Ω – частина площини $-x + 2y + 2z = 1$, яка лежить у

другому октанті.

3. $\iint_{\Omega} xyz ds$, де Ω – частина площини $x + y + z = 1$, яка розміщена в

першому октанті.

4. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) ds$, де Ω – частина циліндра $x^2 + y^2 = 4$, яка лежить між

площинами $z = -3$ і $z = 1$.

5. $\iint_{\Omega} (x + y) ds$, де Ω – частина циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка лежить між

площинами $z = 0$ і $z = 1$.

6. $\iint_{\Omega} (x + y - z) ds$, де Ω – частина циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка лежить між

площинами $z = 0$ і $z = 2$.

7. $\iint_{\Omega} (x^2 - 1) ds$, де Ω – круг, який утворюється при перетині циліндра

$x^2 + y^2 = 4$ і площини $z = -1$.

8. $\iint_{\Omega} (1 - xy) ds$, де Ω – межа піраміди, яка обмежена поверхнями $x = 0$,

$y = 0$, $z = 0$, $x/2 - y/3 + z/4 = 1$.

9. $\iint_{\Omega} xyz ds$, де Ω – межа куба $\{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Поверхневі інтеграли

10. $\iint_{\Omega} (x+1)ds$, де Ω – круг, який утворюється при перетині циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і площини $z = 2$.
11. $\iint_{\Omega} xds$, де Ω – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
12. $\iint_{\Omega} yds$, де Ω – півсфера $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
13. $\iint_{\Omega} xds$, де Ω – частина площини $z = 1$, яка лежить у кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
14. $\iint_{\Omega} yds$, де Ω – частина площини $x = 1$, яка лежить в кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.
15. $\iint_{\Omega} z^2 ds$, де Ω – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
16. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2 - 2z)ds$, де Ω – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
17. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2)ds$, де Ω – межа множини $\{(x; y; z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.
18. $\iint_{\Omega} zds$, де $\Omega = \eta$ – двовимірний параметричний многовид
$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, & D = \{(u; v) : v \in [0; 2\pi], u \in [0; 1]\} . \\ z = v, (u; v) \in D, \end{cases}$$
19. $\iint_{\Omega} (xy + yz + zx)ds$, де Ω – частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 2x$.

2. Знайдіть поверхневі інтеграли другого роду

1. $\iint_{\Omega} z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона межі куба $\{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

2. $\iint_{\Omega} x dx dy$, де Ω – зовнішня сторона межі куба $\{(x; y; z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
3. $\iint_{\Omega} x z dx dy$, де Ω – частина $x + y + z = 1$ зовнішньої сторона межі піраміди, обмеженої площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
4. $\iint_{\Omega} x y dy dz$, де Ω – частина $x + y + z = 1$ зовнішньої сторона межі піраміди, обмеженої площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
5. $\iint_{\Omega} y z dx dz$, де Ω – частина $x + y + z = 1$ зовнішньої сторона межі піраміди, обмеженої площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
6. $\iint_{\Omega} x z dx dy + x y dy dz + y z dx dz$, де Ω – зовнішня сторона межі піраміди, обмеженої площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.
7. $\iint_{\Omega} x dx dy$, де Ω – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
8. $\iint_{\Omega} z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
9. $\iint_{\Omega} y dx dy$, де Ω – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
10. $\iint_{\Omega} z dx dy + x dy dz + y dx dz$, де Ω – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
11. $\iint_{\Omega} z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, розміщеного між площинами $z = 0$ та $z = 1$.
12. $\iint_{\Omega} z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона еліпсоїда $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
13. $\iint_{\Omega} z dx dy + x dy dz + y dx dz$, де Ω – зовнішня сторона циліндра $x^2 + y^2 = 1$, розміщеного між площинами $z = 0$ та $z = 2$.
14. $\iint_{\eta} y dy dz - x dz dx + z dx dy$, де η – двовимірний параметричний многовид

Поверхневі інтеграли

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, & D = \{(u; v) : v \in [0; 2\pi], u \in [0; 1]\} . \\ z = u, (u; v) \in D, \end{cases}$$

3. За допомогою формули Остроградського-Гауса та безпосередньо знайдіть поверхневі інтеграли

1. $\iint_{\Omega} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де Ω – зовнішня сторона межі піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.
2. $\iint_{\Omega} xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де Ω – зовнішня сторона межі куба $\{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$
3. $\iint_{\Omega} z^2 x dy dz + x^2 y dz dx + y^2 z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
4. $\iint_{\Omega} (x + xy^2) dy dz + (y - yx^2) dz dx + (z - 3) dx dy$, де Ω – зовнішня сторона межі тіла T , яке обмежене поверхнями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $z = 1$.
5. $\iint_{\Omega} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, де Ω – зовнішня сторона межі циліндра, $\{(x; y; z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.
6. $\iint_{\eta} y^2 x dy dz + x^2 y dz dx + 13z^2 dx dy$, де η – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
7. $\iint_{\Omega} (x + z) dy dz + (z + y) dx dz$, де Ω – зовнішня сторона поверхні, яка є межею тіла T , яке обмежене поверхнями $x^2 + y^2 = 9$, $z = x$, $z = 0$ ($z \geq 0$).

Розділ 3. Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$. Елементи теорії поля.

У цьому розділі будемо розглядати інтеграли по кривих в $\mathbb{R}^3$, тобто криволінійні інтеграли першого та другого родів в $\mathbb{R}^3$. А також основні твердження, що з ними пов'язані. Окрім того, введемо основні поняття теорії поля та сформулюємо в цих термінах основні теореми попередніх розділів.

1. Крива і шлях в $\mathbb{R}^3$. Згадані в попередньому розділі різні погляди на криву стосуються і кривих в $\mathbb{R}^3$. *Шляхом в $\mathbb{R}^3$ або одновимірним шляхом в $\mathbb{R}^3$* називається функція $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Таким чином, шлях γ в $\mathbb{R}^3$ задається параметрично системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), t \in (\alpha; \beta). \end{cases} \quad (1)$$

або у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де $\vec{r} = xi + yj + zk$, $\vec{r}(t) = \gamma_1(t)\vec{i} + \gamma_2(t)\vec{j} + \gamma_3(t)\vec{k}$. Точка $\gamma(a) = (\gamma_1(a); \gamma_2(a); \gamma_3(a))$ називається *початком шляху*, а точка $\gamma(\beta) = (\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta); \gamma_3(\beta))$ його *кінцем*.

Зауваження 1. На проміжку $[\alpha; \beta]$ є природний порядок точок, який індукують на кривій певний порядок точок, тобто перетворює криву в орієнтовну криву.

Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3)$ називається *гладким* або *регулярним*, якщо функції γ'_1 , γ'_2 і γ'_3 є неперервними на $[\alpha; \beta]$ і для всіх $t \in [\alpha; \beta]$ $\|\vec{r}'(t)\| := \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} \neq 0$. Шлях $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається *кусково-гладким*, якщо він є неперервним і існують точки α_k , $k \in \overline{0; \nu}$, такі, що $\alpha = \alpha_0 < \dots < \alpha_k < \dots < \alpha_{\nu} = \beta$ і звуженням γ на кожний

проміжок $[\alpha_k; \alpha_{k+1}]$ є гладким шляхом. *Дотичною* до гладкого шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ в точці $t \in [\alpha; \beta]$ або в точці $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t))$ називається пряма

$$\begin{cases} x - \gamma_1(t) = \gamma'_1(t)\tau, \\ x - \gamma_2(t) = \gamma'_2(t)\tau \\ y - \gamma_3(t) = \gamma'_3(t)\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Вектор $l_v = (v_1; v_2; v_3) = (\cos \tilde{\alpha}_1; \cos \tilde{\alpha}_2; \cos \tilde{\alpha}_3)$, тобто вектор $\dot{l}_v = (v_1; v_2; v_3) = (\tilde{r}' / \|\tilde{r}'\|)$, де

$$\begin{aligned} v_1 = \cos \tilde{\alpha}_1 &= \frac{\langle l_v; \tilde{e}_1 \rangle}{\|l_v\| \|\tilde{e}_1\|} = \frac{\gamma'_1(t)}{\pm \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)}}, \\ v_2 = \cos \tilde{\alpha}_2 &= \frac{\langle l_v; \tilde{e}_2 \rangle}{\|l_v\| \|\tilde{e}_2\|} = \frac{\gamma'_2(t)}{\pm \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)}}, \\ v_3 = \cos \tilde{\alpha}_3 &= \frac{\langle l_v; \tilde{e}_3 \rangle}{\|l_v\| \|\tilde{e}_3\|} = \frac{\gamma'_3(t)}{\pm \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)}}, \end{aligned}$$

називається *одиничним вектором дотичної*. Вектор l_v утворює з базисними векторами $i = \tilde{e}_1 = (1; 0; 0)$, $j = \tilde{e}_2 = (0; 1; 0)$ і $k = \tilde{e}_3 = (0; 0; 1)$ кути $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ і $\tilde{\alpha}_3$. Напрямних векторів дотичної є два. Кожен з них визначається знаком перед коренем у формулах для його координат. У випадку, коли початок кривої співпадає з початком шляху, що є її параметризацією, а також, коли мова йде тільки про шлях, перед коренем потрібно брати знак “+”. За іншої трактовки терміну “крива” цей знак потрібно вибирати у відповідності з додатковими вказівками. Пряма, яка є перпендикулярною до дотичної до кривої в точці $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t))$ і проходить через цю точку називається *нормаллю* до кривої. Нормалей гладка крива має нескінченно багато. Всі ці нормалі лежать в одній площині, що проходить через цю точку і є перпендикулярними до

дотичної. Вектор $\dot{n}_0 = \frac{dl_v}{\|dl_v\|}$ називається *напрямним вектором головної*

нормалі, а нормаль паралельна цьому вектору, називається *головною нормаллю*. Площина, яка містить дотичну і головну нормаль, називається *стичною площиною*. Рівняння

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{vmatrix} x - \gamma_1(t) & y - \gamma_2(t) & z - \gamma_3(t) \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & \gamma_3'(t) \\ \gamma_1''(t) & \gamma_2''(t) & \gamma_3''(t) \end{vmatrix} = 0$$

є рівнянням стичної площини. Крива має стичну площину, якщо вона є регулярною і $\gamma_1''^2(t) + \gamma_2''^2(t) + \gamma_3''^2(t) \neq 0$.

У просторі криву задають також як перетин двох поверхонь і, зокрема, системою

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Зауваження 2. Якщо: 1) функції F_1 і F_2 є неперервними в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0) \in \mathbb{R}^3$; 2) $F_1(x_0; y_0; z_0) = 0$ і $F_2(x_0; y_0; z_0) = 0$; 3) функції F_1 і F_2 мають в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$ частинні похідні $\partial_1 F$, $\partial_2 F_1$, $\partial_3 F_1$, $\partial_1 F_2$, $\partial_2 F_2$ і $\partial_3 F_2$, які є неперервними функціями в точці $(x_0; y_0; z_0)$; 4) ранг матриці $\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 & \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 & \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \end{pmatrix}$ дорівнює 2 в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$, то локально, тобто в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$, криву, задану системою (2), можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), t \in (\alpha; \beta). \end{cases}$$

При цьому всі функції γ_i є неперервно-диференційованими на проміжку

$(\alpha; \beta)$. Справді, нехай наприклад, $\begin{vmatrix} \partial_2 F_1 & \partial_3 F_1 \\ \partial_2 F_2 & \partial_3 F_2 \end{vmatrix} (x_0; y_0; z_0) \neq 0$. Згідно з

теореми про неявну функцію, в деякому околі точки $(x_0; y_0; z_0)$ рівняння задає дві функції $y = f_2(x)$ і $z = f_3(x)$ так, що функція $(f_2; f_3)$ є відображенням деякого околу точки x_0 на деякий окіл точки $(y_0; z_0)$. Тому в розглядуваному випадку можна взяти $x = t$, $t_0 = x_0$, $\gamma_1(t) = t$, $\gamma_2(t) = f_2(t)$ і $\gamma_3(t) = f_3(t)$.

2. Криволінійний інтеграл першого роду в $\mathbb{R}^3$. Нехай спрямована крива γ в $\mathbb{R}^3$ задана параметрично системою

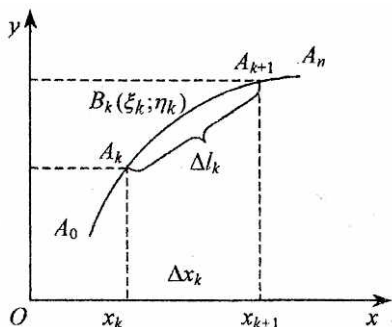
$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases} \quad (1)$$

і f – деяка функція на γ . Розглянемо розбиття $\{t_k : k \in \overline{0; \nu}\}$ проміжку $[\alpha; \beta]$ таке, що $\alpha = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_\nu = \beta$. Точкам t_k з проміжку $[\alpha; \beta]$ на кривій відповідають точки $A_k(\gamma_1(t_k); \gamma_2(t_k); \gamma_3(t_k))$. На кожному проміжку $[t_k; t_{k+1}]$ візьмемо довільну точку τ_k (їй відповідатиме точка $B_k((\xi_k; \eta_k; \varsigma_k))$) і розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k; \eta_k; \varsigma_k) \Delta l_k, \quad (2)$$

де $\xi_k = \gamma_1(\tau_k)$, $\eta_k = \gamma_2(\tau_k)$, $\varsigma_k = \gamma_3(\tau_k)$ і Δl_k – довжина дуги $A_k A_{k+1}$ тобто довжина звуження шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ на $[t_k; t_{k+1}]$. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda := \max\{\Delta t_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$. **Криволінійним інтегралом першого роду функції f по шляху γ** називається границя

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$



Криволінійний інтеграл першого роду має звичайні для інтегралів властивості.

Теорема 1. Для кожної спрямованої кривої γ , заданої системою (1),

$$\int_{\gamma^-} f(x; y; z) dl = \int_{\gamma} f(x; y; z) dl \quad (3)$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

якщо останній інтеграл існує, де γ^- – крива, протилежна до γ , тобто крива, задана системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(-t), \\ y = \gamma_2(-t), \\ z = \gamma_3(-t), \quad t \in [-\beta; -\alpha]. \end{cases}$$

Доведення. Рівність (3) випливає безпосередньо з означення криволінійного інтеграла. ►

Теорема 2. Якщо функції $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_3: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно-диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, а функція f є неперервною на шляху $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, то

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t)) \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} dt.$$

Приклад 1. Нехай Γ – це крива, яку отримують при перетині кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і циліндра $x^2 + y^2 = x$. Знайдемо параметризацію кривої. Нехай $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді з рівняння циліндра випливає, що $\rho = \cos \varphi$ і тому $\cos^2 \varphi + z^2 = 1$. Таким чином, отримуємо

$$\begin{cases} x = \cos^2 \varphi, \\ y = \sin \varphi \cos \varphi, \\ z = |\sin \varphi|, \varphi \in [-\pi/2; \pi/2]. \end{cases}$$

Тому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z dl &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin \varphi| \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + s^2} ds \\ &= \left(s \ln(1 + s^2) + \ln(1 + \sqrt{1 + s^2}) \right) \Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

3. Криволінійний інтеграл другого роду в $\mathbb{R}^3$. Нехай спрямована крива γ в $\mathbb{R}^3$ задана параметрично системою (1) і P , Q та R – деякі функції на γ . Розглянемо розбиття $\{t_k : k \in \overline{0; \nu}\}$ проміжку $[\alpha; \beta]$ таке, що $\alpha = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_{\nu} = \beta$. Точкам t_k на кривій відповідають точки $A_k(\gamma_1(t_k); \gamma_2(t_k); \gamma_3(t_k))$. На кожному проміжку $[t_k; t_{k+1}]$ візьмемо довільну

точку τ_k (їй відповідатиме точка $B_k((\xi_k; \eta_k; \varsigma_k))$) і розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{v-1} P(\xi_k; \eta_k; \varsigma_k) \Delta x_k, \quad (1)$$

де $\xi_k = \gamma_1(\tau_k)$, $\eta_k = \gamma_2(\tau_k)$, $\varsigma_k = \gamma_3(\tau_k)$, $x_k = \gamma_1(t_k)$, $y_k = \gamma_2(t_k)$, $z_k = \gamma_3(t_k)$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ і $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda := \max\{\Delta t_k : k \in \overline{0; v-1}\}$. Криволінійним інтегралом першого роду функції P по шляху γ за першою змінною (x) називається границя

$$\int_{\gamma} P(x; y; z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma.$$

Подібно визначаються криволінійні інтеграли за іншими змінними:

$$\int_{\gamma} Q(x; y; z) dy := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{v-1} Q(\xi_k; \eta_k; \varsigma_k) \Delta y_k,$$

$$\int_{\gamma} R(x; y; z) dz := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{v-1} R(\xi_k; \eta_k; \varsigma_k) \Delta z_k$$

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz := \int_{\gamma} P(x; y; z) dx + \int_{\gamma} Q(x; y; z) dy + \int_{\gamma} R(x; y; z) dz.$$

Теорема 1. Для кожної спрямованої кривої γ

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} P(x; y; z) dx &= - \int_{\gamma} P(x; y; z) dx & \int_{\gamma^-} Q(x; y; z) dy &= - \int_{\gamma} Q(x; y; z) dy, \\ \int_{\gamma} R(x; y; z) dz &= - \int_{\gamma^-} R(x; y; z) dz \end{aligned}$$

якщо інтеграли в прaviх частинах існують.

Теорема 2. Якщо функції P , Q і R є неперервними на кривій γ і функції γ_1 , γ_2 і γ_3 є неперервно-диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx &= \int_{\alpha}^{\beta} P(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t)) \gamma_1'(t) dt, \\ \int_{\gamma} Q dy &= \int_{\alpha}^{\beta} Q(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t)) \gamma_2'(t) dt, \end{aligned}$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\gamma} R dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \gamma_3(t)) \gamma_3'(t) dt.$$

Зауваження 1. Якщо шлях γ в $\mathbb{R}^3$ задається параметрично системою (1) то,

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\gamma} (P \cos \tilde{\alpha}_1 + Q \cos \tilde{\alpha}_2 + R \cos \tilde{\alpha}_3) dl,$$

де $l_{\gamma} = (\cos \tilde{\alpha}_1; \cos \tilde{\alpha}_2; \cos \tilde{\alpha}_3)$ - одиничний вектор дотичної.

Приклад 1. Знайдемо інтеграл

$$\int_{\gamma} y^2 dx + z dy - x dz,$$

де γ - відрізок, який з'єднує точки $(1;0;1)$ і $(0;1;1)$ з початком $(1;0;1)$. Знайдемо рівняння цього відрізка як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-1}{1-1} = t,$$

$$\begin{cases} x=1-t, \\ y=t, \\ z=1, \quad t \in [0;1]. \end{cases}$$

Тоді

$$\int_{\gamma} y^2 dx + z dy - x dz = \int_0^1 (-t^2 dt + dt) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Приклад 2. Нехай D_{xy} - деяка область з гладкою межею ∂D_{xy} , яка задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

і η - поверхня задана рівняння $z = \eta_1(x; y)$. Тоді образом кривої ∂D_{xy} є деяка крива $\tilde{\gamma}$ на поверхні η , яка задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \eta_1(\gamma_1(t); \gamma_2(t)), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

і

$$\int_{\gamma} P dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\gamma_1(t); \gamma_2(t); \eta_1(\gamma_1(t); \gamma_2(t))) \gamma_1'(t) dt .$$

Приклад 3. Знайдемо інтеграл

$$\int_{\gamma} xy^2 dx + yz^2 dy - zx^2 dz ,$$

де розміщена над площиною XOY частина кола, яка є перетином поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 45$, $2x + y = 0$. Це коло можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = x, \\ y = -2x, \\ z = \sqrt{45 - 5x^2}, \quad x \in [-3; 3]. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} & xy^2 dx + yz^2 dy - zx^2 dz \\ &= 4x^3 dx - 2x(45 - 5x^2)3dx - \sqrt{45 - 5x^2} x^2 \frac{(-2x)dx}{\sqrt{45 - 5x^2}} = (180x - 17x^3)dx . \end{aligned}$$

Тому

$$\int_{\gamma} xy^2 dx + yz^2 dy - zx^2 dz = \pm \int_{-3}^3 (180x - 17x^3) dx = \pm \frac{2781}{2} .$$

Знак інтегралу не визначений, оскільки не вказано в якому напрямку знаходиться інтеграл. Якщо було б вказано, що інтеграл знаходиться в напрямку від точки $(3; -6; 6)$ до точки $(-3; +6; 6)$, то

$$\int_{\gamma} xy^2 dx + yz^2 dy - zx^2 dz = \int_3^{-3} (180x - 17x^3) dx = -\frac{2781}{2} .$$

Приклад 4. Нехай γ – крива з початком в точці $(0; 0; 0)$ і кінцем в точці $(2; 0; 0)$, яка утворюється в результаті перетину циліндра $x^2 + y^2 = 2x$ та гіперboloїда $z = xy$ і яка лежить в півпросторі $z > 0$. Тоді

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \sqrt{2x - x^2}, \\ z = x\sqrt{2x - x^2}, \quad x \in [0; 2], \end{cases}$$

– параметризація γ .

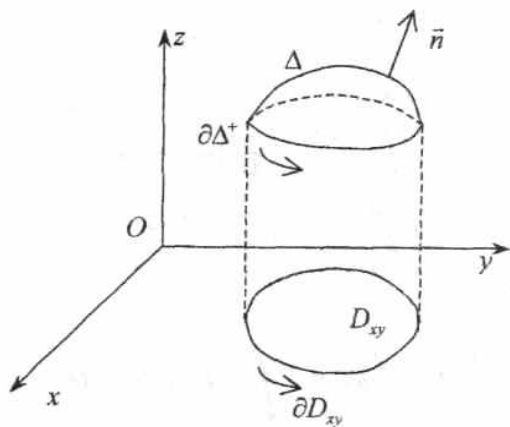
Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\gamma} z dx + 2x dy - y dz = \int_0^2 \left((x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + \sqrt{1+(x-1)^2} - \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-(x-1)^2}} - 3x + 2x^2 \right) dx = -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

4. Формула Стокса. Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – однозв'язна замкнена область, межа ∂D якої є замкнутою жордановою кусково-гладкою кривою $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2): [\alpha; \beta] \rightarrow \partial D$, яка задає додатну орієнтацію ∂D . Нехай далі $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладка поверхня. Тоді межа $\partial^+ \eta = (\partial \eta_1^+; \partial \eta_2^+; \partial \eta_3^+): [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$, де $\partial \eta_j^+(t) = \eta_{j,j}(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$, називається *узгоджено орієнтованим* або *додатно-орієнтованим краєм* поверхні $\Omega = \eta$. Образно кажучи, узгоджена орієнтація поверхні та її краю означає, що спостерігачеві, який рухається по краю разом з біжучою точкою кривої так, що нормаль, яка задає орієнтацію поверхні, пронизує його з ніг до голови, здається, що поверхня знаходиться зліва від нього.

Теорема 1. Нехай функції P , Q і R є неперервними на поверхні $\Omega = \eta$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Тоді справедлива формула Стокса

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \eta} P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{\eta} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (1)$$



Доведення. Обмежимося розглядом випадку, коли поверхня $\Omega = \eta$ задана рівнянням $z = z(x; y)$, $(x; y) \in D_{xy}$. Тоді

$$\int_{\partial^+ \eta} P(x; y; z) dx = \int_{\partial D_{xy}} P(x; y; z(x; y)) dx.$$

Застосуємо до останнього інтеграла формулу Гріна. Тоді

$$\int_{\partial \eta^+} P dx = \int_{\partial D_{xy}} P(x; y; z(x; y)) dx = - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

Але $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$. Тому

$$\begin{aligned} \int_{\partial \eta^+} P dx &= - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) \frac{1}{\cos \gamma} dx dy \\ &= - \iint_{\eta} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) ds. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \eta^+} Q dx &= - \iint_{\eta} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) ds, \\ \int_{\partial \eta^+} R dx &= - \iint_{\eta} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta - \frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha \right) ds. \end{aligned}$$

Додавши отримані рівності, знаходимо, що

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial \eta^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\eta} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) ds ,$$

звідки випливає (1). ►

Аналогом відповідного критерію в $\mathbb{R}^2$ є таке твердження

Теорема 2. Нехай $D \subset \mathbb{R}^3$ – поверхнево однозв'язна область в, а функції P , Q і R є неперервними в D разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Тоді еквівалентними є наступні умови:

1) для будь-якого кусково-гладкого замкненого жорданового шляху

$$\gamma \subset D \text{ виконується } \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0 ;$$

2) існує така диференційовна в D функція $U : D \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$dU = Rdx + Qdy + Rdz ;$$

3) криволінійний інтеграл

$$\int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz , (x; y; z) \in D , (x_0; y_0; z_0) \in D ,$$

не залежить від шляху інтегрування в D ;

4) в області D виконується

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Якщо остання умова виконана, то

$$U(x; y; z) = \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz + c ,$$

і

$$\int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x; y; z) - U(x_0; y_0; z_0) ,$$

де c - стала і $(x_0; y_0; z_0)$ - довільна точка області D . У цьому ж випадку за U можна взяти функцію

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y; z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y; z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0; y_0; z) dz .$$

5. Скалярне поле. Похідна за вектором. Градієнт. Скалярним полем в $\mathbb{R}^3$ називається упорядкована пара $(D; U)$ області $D \subset \mathbb{R}^3$ і функції $U: D \rightarrow \mathbb{R}$. Множина $\{(x; y; z): U(x; y; z) = c\}$, де c – стала, називається *поверхнею рівня* поля або *еквіпотенціальною поверхнею*. *Похідною скалярного поля в точці $(x_0; y_0; z_0)$ за вектором $l_N = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$* називається границя

$$\frac{\partial U}{\partial l_N} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - U(x_0; y_0; z_0)}{t}.$$

Теорема 1. Якщо функція U є диференційованою в точці $(x_0; y_0; z_0)$, то вона має в цій точці похідну за будь-яким вектором l_N і

$$\frac{\partial U}{\partial l_N} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma.$$

Доведення. Ця теорема випливає із формули для знаходження похідної композиції функцій, бо

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial l_n} &= \left(U(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta, z + t \cos \gamma) \right)'_{t=0} \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Вектор

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k},$$

називається **градієнтом** скалярного поля. Якщо використати позначення

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

то можемо записати градієнт у вигляді

$$\text{grad } U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U.$$

Тому $\frac{\partial U}{\partial l_N} = \langle l_N; \text{grad } U \rangle = \|\text{grad } U\| \cos \varphi$, де φ – кут між векторами l_N і $\text{grad } U$. При цьому,

$$\|\text{grad } U\| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}, \quad \left| \frac{\partial U}{\partial l_n} \right| \leq \|\text{grad } U\|.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

Крім цього, якщо $I_N = \frac{\text{grad} U}{\|\text{grad} U\|}$, то $\frac{\partial U}{\partial l_n} = \text{grad} U$. До того ж, вектор

$\text{grad} U$ є перпендикулярним до площини

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + \frac{\partial U}{\partial y}(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + \frac{\partial U}{\partial z}(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0,$$

яка є дотичною площиною до поверхні рівня. Таким чином, $\text{grad} U$ є вектор, перпендикулярний до поверхні рівня поля, його напрям збігається з напрямом найбільшого зростання поля, а його довжина дорівнює швидкості зростання поля.

6. Векторне поле. Векторна форма теорем Остроградського-Гаусса та Стокса. *Векторним полем* в $\mathbb{R}^3$ називається упорядкована пара $(D; \vec{a})$ області $D \subset \mathbb{R}^3$ і заданої в ній вектор-функції $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Векторне поле $(D; \vec{a})$ позначають як правило символом $\vec{a}$. *Векторною лінією* векторного поля $(D; \vec{a})$ називається така крива Γ , що в кожній її точці $(x; y; z)$ дотична паралельна вектору $\vec{a}(x; y; z)$, тобто вектори $\vec{r}'$ і $\vec{a}$ є паралельними. Отже, їхні координати є пропорційними:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Тому для знаходження векторних ліній поля $\vec{a}$ потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \\ \frac{dx}{P} = \frac{dz}{R}. \end{cases}$$

Приклад 1. Якщо

$$\vec{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} + 0 \cdot \vec{k},$$

то $dz = 0$, тобто $z = c$ – стала. Далі маємо

$$x dx + y dy = 0, \quad d(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = c_1.$$

Отже, векторними лініями є сім'я кіл

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c_1, \\ z = c, \end{cases}$$

де c_1 і c – сталі.

Дивергенцією векторного поля $(T; \vec{a})$ називається функція

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

а число

$$\Pi = \Pi(\Omega) = \iint_{\Omega} \langle \vec{a}; \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

називається **поток** векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через поверхню Ω в напрямі вектора $\vec{n} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Приклад 2. Якщо

$$\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + 2zx \vec{k}$$

то $\operatorname{div} \vec{a} = 2x + 2y + 2x = 4x + 2y$.

Приклад 3. Якщо $\vec{a} = y\vec{i} + y^2 \vec{j} + 2zx \vec{k}$ і Ω – зовнішня сторона циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 1$, яка розміщена між площинами $z = -2$ і $z = -1$, то для знаходження $\Pi(\Omega)$ розглядаємо дві частини поверхні Ω : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 і Ω_2 – ті частини Ω , які лежать відповідно справа та зліва від площини $x = 0$. При цьому, $\Pi(\Omega) = \Pi(\Omega_1) + \Pi(\Omega_2)$ і Ω_1 та Ω_2 задаються відповідно рівняннями $x = \sqrt{1 - y^2}$ та $x = -\sqrt{1 - y^2}$, $(y; z) \in D_{YZ} := [-1; 1] \times [-2; -1]$. Оскільки

$$\iint_{\Omega} P dydz = \iint_{\Omega} P \cos \alpha ds = \iint_{D_{YZ}} P(x(y; z); y; z) dydz,$$

$$\iint_{\Omega} Q dzdx = \iint_{\Omega} Q \cos \beta ds = - \iint_{D_{YZ}} Q(x(y; z); y; z) x'_y dydz,$$

$$\iint_{\Omega} R dx dy = \iint_{\Omega} R \cos \gamma ds = - \iint_{D_{YZ}} R(x(y; z); y; z) x'_z dydz,$$

$$\cos \gamma = 0, \text{ то } \iint_{\Omega_1} R \cos \gamma ds = \iint_{\Omega_2} R \cos \gamma ds = 0,$$

$$\iint_{\Omega_1} P \cos \alpha ds = \iint_{\Omega_2} P \cos \alpha ds = \iint_{D_{YZ}} y dydz = \int_{-2}^{-1} dz \int_{-1}^1 y dy = \int_{-2}^{-1} y dy = 0.$$

Далі, $\cos \beta > 0$, якщо $y > 0$ і $\cos \beta < 0$, якщо $y < 0$. Тому

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

$$\iint_{\Omega_1} Q \cos \beta ds = \iint_{D'_{yz}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy dz - \iint_{D'_{yz}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy dz = \int_{-2}^1 dz \int_0^1 y dy - \int_{-2}^1 dz \int_{-1}^0 y dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\iint_{\Omega_2} Q \cos \beta ds = - \iint_{D'_{yz}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy dz + \iint_{D'_{yz}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy dz = - \int_{-2}^1 dz \int_0^1 y dy + \int_{-2}^1 dz \int_1^0 y dy = -1.$$

Як наслідок,

$$\Pi(\Omega) = \iint_{\Omega_1} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds + \iint_{\Omega_2} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = 0$$

Теорема 1 (векторна форма теореми Остроградського-Гаусса).

Нехай межа замкненої кубовної області $T \subset \mathbb{R}^3$ є об'єднанням скінченного числа гладких поверхонь, спільними точками яких є хіба-що їх крайові точки, а функції P , Q і R є неперервними в T разом зі своїми частинними похідними $\partial P / \partial x$, $\partial Q / \partial y$ і $\partial R / \partial z$, а $\vec{l}_N = \vec{l}_N = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂T . Тоді потік векторного поля $(T; \vec{a})$ через межу ∂T області T в напрямку вектора $\vec{l}_N$ дорівнює інтегралу по T від дивергенції поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\iint_{\partial T} \langle \vec{a}; \vec{l}_N \rangle ds = \iiint_T \operatorname{div} \vec{a} dv.$$

Доведення. Ця теорема є іншим формулюванням теореми Остроградського-Гаусса. ►

Зауваження 1. З теореми про середнє для потрійних інтегралів випливає, що $\operatorname{div} \vec{a}(x_0; y_0; z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Pi(\partial^+ U(x_0; y_0; z_0); \varepsilon)}{\frac{4}{3} \pi \varepsilon^3}$. Остання

формула може бути прийнята за означення дивергенції. Ті точки $(x_0; y_0; z_0) \in T$, для яких $\operatorname{div} \vec{a}(x_0; y_0; z_0) \neq 0$ називаються джерелами поля.

Ротором векторного поля $(T; \vec{a})$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, називається вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

тобто

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}.$$

Векторне поле $(T; \vec{a})$ називається *соленоїдальним*, якщо існує таке векторне поле $(T; \vec{A})$, для якого $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{A}$. При цьому $\vec{A}$ називається *векторним потенціалом* векторного поля $(T; \vec{a})$.

Теорема 2. Нехай межа замкненої кубовної області $T \subset \mathbb{R}^3$ об'єднанням скінченного числа гладких поверхонь, спільними точками яких є хіба-що їх крайові точки, а функції P , Q і R є неперервними в T разом зі своїми частинними другого порядку і поле $(T; \vec{a})$ є соленоїдальним. Тоді його потік через поверхню ∂T дорівнює нулеві.

Доведення. Ця теорема є наслідком попередньої, бо для соленоїдальних полів

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0.$$

Справді, оскільки поле є соленоїдальним, то існує векторна функція $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ така, що

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \vec{k}$$

і тому

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Область $D \subset \mathbb{R}^3$ називається *просторово однозв'язною*, якщо кожна замкнена квалровна область T , для якої справедлива формула Остроградського-Гаусса, належить D , якщо ∂T належить D .

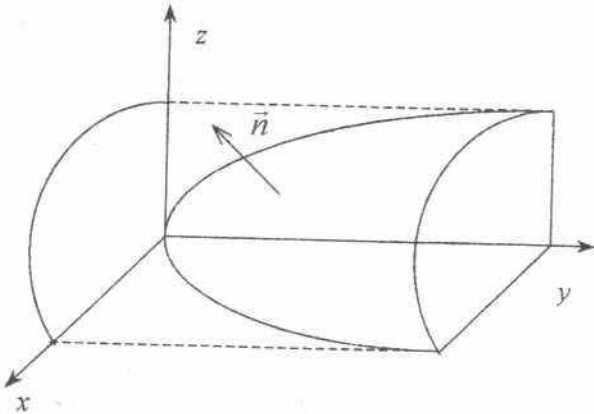
Приклад 1. Весь простір та куля є просторово однозв'язними областями. Область $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\}$ не є просторово однозв'язною.

Область $T \subset \mathbb{R}^3$ будемо називати *допустимою*, якщо для неї справедлива формула Остроградського-Гаусса. Можна довести також наступне твердження.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

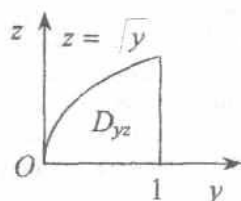
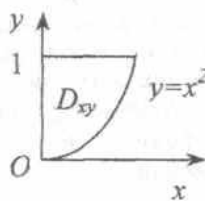
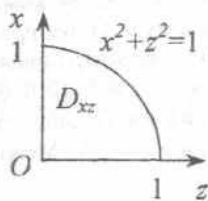
Теорема 3. Нехай область $D \subset \mathbb{R}^3$ є просторово однозв'язною, а функції P , Q і R в D разом зі своїми частинними похідними другого порядку. Тоді наступні умови є еквівалентними: 1) поле $(D; \vec{a})$ є соленоїдальним; 2) $\operatorname{div} \vec{a}(x; y; z) = 0$ для всіх $(x; y; z) \in D$; 3) потік поля $(D; \vec{a})$ через кожну поверхню ∂T , яка є межею допустимої області $T \subset D$, дорівнює нулеві.

Приклад 1. Знайдемо потік Π векторного поля $\vec{a} = x^2 \vec{i} + x \vec{j} + xz \vec{k}$ через верхню сторону (тобто в напрямі нормалі $\vec{n}$, яка утворює гострий кут з віссю OZ) частини параболоїда $y = x^2 + z^2$, яка розміщена в першому октанті між площинами $y = 0$ і $y = 1$.



Враховуючи, що $\cos \alpha \geq 0$, $\cos \beta \leq 0$ і $\cos \gamma \geq 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iint_{\Omega} \langle \vec{a}; \vec{n} \rangle ds = \iint_{\eta} x^2 dy dz + x dz dx + dx dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} (y - z^2) dy dz - \iint_{D_{xy}} x dz dx + \iint_{D_{xy}} \sqrt{y - x^2} x dx dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (y - z^2) dz - \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x \sqrt{y - x^2} dx = \frac{1}{15}.
 \end{aligned}$$



Інтеграл

$$C = C(\gamma) = \int_{\gamma} \langle \vec{a}; d\vec{r} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{a}; \vec{v} \rangle dl = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

називається **циркуляцією** векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вздовж шляху γ , де $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$.

Теорема 3 (векторна форма теореми Стокса). Нехай γ – замкнений гладкий шлях задає узгоджено орієнтовний край гладкої поверхні $\Omega \subset D$, орієнтація якої задана її нормальним вектором $\vec{l}_N = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ і функції P , Q і R є неперервними на поверхні $\Omega = \eta$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку функція. Тоді циркуляція векторного поля $(D; \vec{a})$ вздовж γ дорівнює потоку ротора поля через поверхню Ω :

$$\int_{\gamma} \langle \vec{a}; d\vec{r} \rangle = \iint_{\Omega} \langle \vec{l}_N; \text{rot } \vec{a} \rangle ds.$$

Доведення. Ця теорема є іншим формулюванням теореми Стокса.

Зауваження 1. Візьмемо довільну точку $(x_0; y_0; z_0)$ і довільний одиничний вектор $\vec{l}_N$ і коло U_ε радіуса ε з центром у точці $(x_0; y_0; z_0)$, яке лежить у площині, яка проходить через цю точку є перпендикулярною до $\vec{l}_N$. Тоді $\text{rot}_{\vec{l}_N} \vec{a} := \langle \vec{l}_N; \text{rot } \vec{a} \rangle$ – проекція $\text{rot } \vec{a}$ на вектор $\vec{l}_N$. З останньої теореми та теореми про середнє для подвійних інтегралів випливає, що

$$\text{rot}_{\vec{l}_N} \vec{a}(x_0; y_0; z_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{C(U_\varepsilon)}{\pi \varepsilon^2}.$$

Взявши три лінійно незалежні вектори на основі останньої формули можемо дати інше означення ротора векторного поля.

Область $T \subset \mathbb{R}^3$ називається **поверхнево однозв'язною**, якщо для кожної гладкої замкненої жорданової кривої $\gamma \subset T$ існує гладка проста поверхня $\eta \subset T$, для якої γ є краєм, тобто якщо кожну замкнену жорданову криву γ можна неперервно деформувати в точку, не виходячи

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

за межі T .

Приклад 1. Куля, паралелепіпед є прикладами поверхнево однозв'язних областей, а тор є прикладом поверхнево неоднорозв'язної області.

Поле $(D; \vec{a})$, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, називається *потенціальним*, якщо існує така диференційовна в D функція $U : D \rightarrow \mathbb{R}$, що $\vec{a} = \text{grad} U$, тобто

$$\vec{a} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}, \quad dU = Rdx + Qdy + Rdz.$$

Ця функція називається *потенціалом* поля $(D; \vec{a})$.

Теорема 4. Нехай $D \subset \mathbb{R}^3$ – поверхнево однозв'язна область в, а функції P , Q і R є неперервними в D разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Тоді еквівалентними є наступні умови:

- 1) поле $(D; \vec{a})$ є потенціальним;
- 2) циркуляція векторного поля $(D; \vec{a})$ вздовж кожного гладкого замкненого шляху γ з D дорівнює нулеві;

- 3) криволінійний інтеграл

$$\int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (x; y; z) \in D, \quad (x_0; y_0; z_0) \in D,$$

не залежить від шляху інтегрування в D ;

- 4) $\text{rot } \vec{a} = 0$ в усіх точках області D ;

- 5) в області D виконується

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Якщо остання умова виконана, то потенціалом поля є функція

$$U(x; y; z) = \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz + c,$$

і

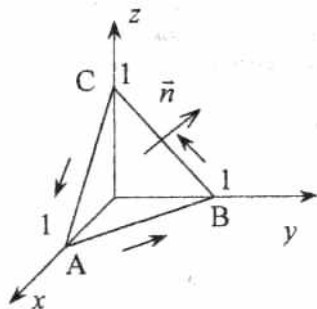
$$\int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y; z)} Pdx + Qdy + Rdz = U(x; y; z) - U(x_0; y_0; z_0),$$

де c – стала і $(x_0; y_0; z_0)$ – довільна точка області D . В цьому ж випадку за U можна взяти функцію

$$U(x; y; z) = \int_{x_0}^x P(x; y; z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0; y; z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0; y_0; z) dz.$$

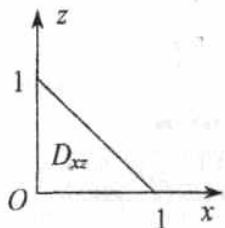
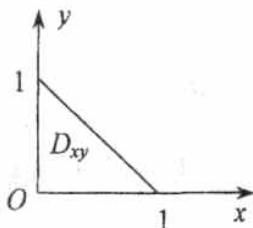
Доведення теореми 4 базується на теоремі 3 і є аналогічним до доведення її аналогу для $\mathbb{R}^2$. ►

Приклад 1. Знайдемо циркуляцію векторного поля $\vec{a} = (x - 2x)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$ по межі трикутника η з вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ і $C(0; 0; 1)$, якщо орієнтація $\partial\eta$ узгоджена з орієнтацією η , а орієнтація η задана за допомогою нормалі, яка утворює гострий кут з віссю Oz .



Використовуючи формулу Стокса, отримуємо

$$\begin{aligned} c_r &= \int_{\partial\eta} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\eta} \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} ds = \iint_{\eta} \vec{n} \cdot (-7\vec{j} + \vec{k}) ds = \iint_{\eta} (-7) dx dy + dx dy \\ &= -7 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -3. \end{aligned}$$



Зауваження 1. Можна довести, що за досить загальних припущень кожне векторне поле $(D; \vec{a})$ подається у вигляді суми $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ соленоїдального поля $\vec{b}$ і потенціального поля $\vec{c}$. Основною задачею векторного аналізу є задача про знаходження поля за його ротором та дивергенцією, тобто задача про знаходження розв'язку

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

системи

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{a} = \rho, \\ \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{I}. \end{cases} \quad (1)$$

Можна довести, що за певних умов розв'язком системи (1) є функція

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 := & -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\rho(\xi; \eta; \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \\ & + \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{I}(\xi; \eta; \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

а кожний інший розв'язок $\vec{a}_2$ є сумою $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}$, де $\vec{a}$ – один з розв'язків системи

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{a} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{a} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Поле $\vec{a}$, яке задовольняє систему (2), називається лапласівським. Якщо область D є однозв'язною, то з (2) випливає, що поле $\vec{a}$ є потенціальним. Отже, існує потенціал U такий, що $\vec{a} = -\operatorname{grad} U$. Звідси і з (2) отримуємо, що

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Функція U , яка є розв'язком останнього рівняння, називається гармонійною.

7. Запитання для самоконтролю.

11. Як можна задати шлях (одновимірний) в $\mathbb{R}^3$?
12. Сформулюйте означення дотичної і нормалі до кривої в $\mathbb{R}^3$. Запишіть формули.
13. Скільки нормалей можна провести до кривої?
14. Сформулюйте означення та властивості криволінійного інтегралу першого роду в $\mathbb{R}^3$.
15. Сформулюйте і доведіть теорему про обчислення криволінійного інтегралу першого роду.
16. Сформулюйте означення та властивості криволінійного інтегралу другого роду в $\mathbb{R}^3$.
17. Сформулюйте і доведіть теорему про обчислення криволінійного інтегралу другого роду.

18. Виведіть формулу Стокса.
19. Яке поле називаємо потенціальним? Соленоїдальним?
20. Що таке напрямні косинуси?
21. Що таке градієнт скалярного поля?
22. Що таке дивергенція? Ротор? Циркуляція? Потік векторного поля через поверхню?
23. Сформулюйте теорему про незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування у звичайній та польовій формі.
24. Сформулюйте теореми Остроградського-Гауса і Стокса у векторній формі.

8. Вправи і задачі теоретичного характеру.

1. Доведіть твердження

1. Нехай функції P , Q , і R є неперервними в $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}$ разом зі своїми частинними похідними першого порядку і $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ де $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Тоді інтеграл $\iint_{\Omega} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$ від $r > 0$ не залежить, де Ω – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$2. \iiint_T \frac{\partial u}{\partial x} \Delta u dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\partial^+ T} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma ds,$$

якщо функція u має неперервні частинні похідні другого порядку в замкненій кубовій області $T \subset \mathbb{R}^3$.

3. $\int_{\Gamma} yz dx + xz dy + xy dz = 0$ для кожної замкненої гладкої кривої $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.

2. Доведіть тотожності

1. $\operatorname{rot}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \operatorname{rot} \vec{a}_1 + \operatorname{rot} \vec{a}_2$.
2. $\operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$
3. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$.
4. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$.
5. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$.
6. $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$.
7. $\nabla \times \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a}$.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

8. $\langle \nabla; \vec{a} \rangle = \operatorname{div} \vec{a}$.
9. $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u$.
10. $\Delta u = \nabla^2 u$.

9. Вправи і задачі розрахункового характеру.

4. Знайдіть криволінійні інтеграли першого роду

$$1. \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) dl, \text{ де } \gamma \text{ — частина гвинтової лінії } \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$2. \int_{\gamma} (x + y) dl, \text{ де } \gamma \text{ — частина кола } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = x, \end{cases} \text{ яка лежить у} \\ \text{першому октанті.}$$

$$3. \int_{\gamma} xyz dl, \text{ де } \gamma \text{ — частина кола } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = 1/4, \end{cases} \text{ яка лежить у} \\ \text{першому октанті.}$$

$$4. \int_{\gamma} z dl, \text{ де } \gamma \text{ — частина кривої } \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ y^2 = x, \end{cases} \text{ від точки } (0; 0; 0) \text{ до} \\ \text{точки } (1; 1; \sqrt{2}).$$

5. Знайдіть криволінійні інтеграли другого роду

$$1. \int_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz, \text{ де } \gamma \text{ — шлях } \begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \\ z = t^3, t \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$2. \int_{\gamma} y dx + z dy + x dz, \text{ де } \gamma \text{ — шлях } \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$3. \int_{\gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz, \text{ де } \gamma \text{ — частина кривої } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = 1, \end{cases} \text{ від} \\ \text{точки } (2; 0; 1) \text{ до точки } (0; 0; 1).$$

4. $\int_{\gamma} zdx + 2xdy - ydz$, де γ – частина кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ z = xy, z \geq 0, \end{cases}$ від точки $(0;0;0)$ до точки $(2;0;0)$.

5. $\int_{\gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, де γ – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y = x, \end{cases}$ обхід якого здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(1,0,0)$.

6. Знайдіть функцію u за її повним диференціалом

1. $du = xdx + ydy + zdz$.

2. $du = \left(zy + \frac{y^3}{3}\right)dx + (xz + xy^2)dy + (xy + z^2)dz$.

3. $du = (2xy + y^2 + yz^2)dx + (x^2 + 2xy + xz^2)dy + 2xyzdz$.

7. Знайдіть інтеграли, переконавшись, що підінтегральний символ є повним диференціалом

1. $\int_{(1;1;1)}^{(1;-1;-1)} xdx + y^2dy - z^2dz$.

2. $\int_{(0;0;0)}^{(1;1;1)} (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz$.

3. $\int_{(7;2;3)}^{(5;3;1)} yzdx + xzdy + xydz$.

8. За допомогою формули Стокса та безпосередньо знайдіть криволінійні інтеграли

1. $\int_{\gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, де γ – узгоджено орієнтована межа півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, орієнтація якої задана за допомогою зовнішньої нормалі.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

2. $\int_{\gamma} z^2 x dx + (z + x + y) dy + y^2 z dz$, де γ – крива $\begin{cases} x^2 + y^2 = x, \\ x^2 - y^2 = z^2, \end{cases}$ – узгоджено орієнтована із зовнішньою стороною циліндра
 3. $\int_{\gamma} x(y + z) dx + y(x + z) dy + z(x + y) dz$, де γ – крива $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = x, z \geq 0, \end{cases}$ – узгоджено орієнтована із зовнішньою стороною сфери.
 4. $\int_{\gamma} (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, де γ – додатно орієнтована межа трикутника з вершинами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ і $(0; 0; 1)$.
9. Знайдіть похідну скалярного поля u в заданій точці в напрямі нормалі до поверхні Ω , яка утворює гострий кут з віссю OZ
1. $u = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$, $\Omega: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, (1; 1; 1)$.
 2. $u = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz$, $\Omega: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, (1; 1; 1)$.
 3. $u = 14x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$, $\Omega: z^2 = x^2 + 2y^2 - 4$, $(-2; 12; 1)$.
 4. $u = \arctg yx + xz$, $\Omega: x^2 + y^2 - 2z = 10, (2; 2; -1)$.
10. Знайдіть похідну скалярного поля u в заданій точці за вектором $\vec{l}$, співнаправленим з вектором $\vec{q}$
1. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $(1; 1; 1)$.
 2. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$, $\vec{q} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 0\vec{k}$, $(1; 5; -2)$.
 3. $u = x^2 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $\vec{q} = \vec{j} - \vec{k}$, $(1; -3; 4)$.
 4. $u = xy - xz$, $\vec{q} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $(-4; 3; -1)$.
11. Знайдіть похідну скалярного поля u в заданій точці c за вектором $\vec{l}$, співнаправленим з вектором, що має початок у точці a і кінець у точці b
1. $u = x + \ln(x^2 + y^2)$, $c = a = (2; 1; 1)$, $b = (0; 2; 1)$.

$$2. \quad u = xy - \frac{z}{x}, \quad c = a = (-4; 3; -1), \quad b = (1; 4; -2).$$

12. Знайдіть кут між градієнтами скалярних полів u і v у вказаній точці

$$1. \quad u = yz^2x^2, \quad v = x^32 + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad (\sqrt{2}; 1\sqrt{2}; 1\sqrt{3}).$$

$$2. \quad u = x^2yz^2, \quad v = 4\sqrt{6}x - \sqrt{69}y + 3z, \quad (2; 13; \sqrt{32}).$$

13. Знайдіть $\operatorname{div} \vec{a}$ і $\operatorname{rot} \vec{a}$

$$1. \quad \vec{a} = -\vec{i}xz + \vec{j}yx + \vec{k}y.$$

$$2. \quad \vec{a} = \vec{i}y + \vec{j}xv + \vec{k}zx.$$

$$3. \quad \vec{a} = -\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$4. \quad \vec{a} = x\vec{i}x + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$5. \quad \vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + (z^2 + x^2)\vec{j} + (x^2 + y^2)\vec{k}.$$

$$6. \quad \vec{a} = \operatorname{grad}(x^2 + y^2 + z^2).$$

14. Знайдіть векторні лінії векторного поля

$$1. \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$2. \quad \vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

$$3. \quad \vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$4. \quad \vec{a} = (y + z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}.$$

$$5. \quad \vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.$$

$$6. \quad \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}.$$

15. Знайдіть потік векторного поля $\vec{a}$ через вказану поверхню Ω

$$1. \quad \vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}, \quad \Omega \text{ частина } z = 1 \text{ зовнішньої сторони межі куба } \{(x; y; z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$2. \quad \vec{a} = x\vec{i}x + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \Omega \text{ частина } x = 1 \text{ зовнішньої сторона межі куба } \{(x; y; z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$3. \quad \vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \Omega \text{ частина } y = 1 \text{ зовнішньої сторони межі куба } \{(x; y; z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

4. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{k}$, Ω – частина $y = 0$ зовнішньої сторони межі куба $\{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
5. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{k}$, Ω – частина циліндра $x^2 + y^2 = 1$, яка лежить між площинами $z = 0$ і $z = 2$.
6. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, Ω – частина $x^2 + y^2 = 1$ зовнішньої сторони циліндра, який утворений поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = -1$.
7. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, де Ω – частина $z = -1$ зовнішньої сторони циліндра, який утворений поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = -1$.
8. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, Ω – частина $z = 0$ зовнішньої сторони циліндра, який утворений поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = -1$.
9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, Ω – зовнішня сторона півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
10. $\vec{a} = (x + x^2 z)\vec{i} + y\vec{j} + (z - x^3)\vec{k}$, Ω – зовнішня сторона півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
11. $\vec{a} = (x + yz)\vec{i} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k}$, Ω – зовнішня сторона півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

16. Знайдіть потік векторного поля через вказану поверхню Ω . Задачу розв'язати безпосередньо і скориставшись формулою Остроградського-Гауса

1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, Ω – зовнішня межа тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 2$.
2. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k} \sin z$, Ω – зовнішня межа тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 5$.
3. $\vec{a} = (x + xz)\vec{i} + y\vec{j} + (z - x^2)\vec{k}$, Ω – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
4. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$, Ω – зовнішня межа тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + z^2 = 2y$, $y = 2$.

5. $\vec{a} = xz\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, Ω – зовнішня межа тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1 - z$, $z = 0$.

6. $\vec{a} = (xy^2 + yz)\vec{i} + (xy^2 + z^2)\vec{j} + (x^2 + z^3/3)\vec{k}$, Ω – зовнішня межа тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$, $z \geq 0$.

17. Знайдіть циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж кривої γ

1. $\vec{a} = y\vec{i} - z^2\vec{j} + x^2y\vec{k}$, γ – шлях
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 1, t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

2. $\vec{a} = -x^2y\vec{i} + 4\vec{j} + x^2z\vec{k}$, γ – шлях
$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 4, t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

3. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z^2\vec{k}$, γ – шлях
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \\ z = \sin t, t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

4. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$,

γ – шлях
$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \\ z = 2(1 - \cos t), t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

5. $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$, де γ – коло
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1, \end{cases}$$
 обхід якого

здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(0; 1; 1)$ стоячи головою у верх.

6. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$, γ – еліпс
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$$
 обхід якого

здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(0; 1; 1)$ стоячи головою у верх.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + yz\vec{j} + 2z\vec{k}$, γ – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ z = 4. \end{cases}$, обхід якого

здійснюється проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(0;1;1)$ стоячи головою у вгору.

18. Знайдіть потік векторного поля $\vec{a}$ через межу Ω піраміди, утвореної площинами $x=0$, $y=0$ і площиною α в напрямку зовнішньої нормалі, а також циркуляцію векторного поля вздовж кривої γ , яка є узгоджено орієнтовна з Ω і є межею тої грані піраміди, яка належить α . Обидві величини знайти двома способами: безпосередньо і використовуючи формули Остроградського-Гаусса або Стокса

1. $\vec{a} = (x+z)\vec{i}$, $\alpha: x+y+z-2=0$.

2. $\vec{a} = (y-x+z)\vec{j}$, $\alpha: 2x-y+2z-2=0$.

3. $\vec{a} = (x+7z)\vec{k}$, $\alpha: 2x+y+z-4=0$.

4. $\vec{a} = (x+2y-z)\vec{i}$, $\alpha: -x+2y+2z-4=0$.

5. $\vec{a} = (2x+3y-3z)\vec{j}$, $\alpha: 2x-3y+2z-6=0$.

6. $\vec{a} = (x-y+z)\vec{j}$, $\alpha: -x+2y+z-4=0$.

7. $\vec{a} = (3x+4y+2z)\vec{j}$, $\alpha: x+y+2z-4=0$.

8. $\vec{a} = (5x+2y+3z)\vec{i}$, $\alpha: x+y+3z-3=0$.

9. $\vec{a} = (x-3y+6z)\vec{i}$, $\alpha: -x+y+2z-4=0$.

10. $\vec{a} = 7x\vec{i} + (5y+2)\vec{j} + 4z\vec{k}$, $\alpha: x + \frac{y}{2} + 4z - 1 = 0$.

11. $\vec{a} = 7x\vec{i} + 9y\vec{j} + \vec{k}$, $\alpha: x + \frac{y}{3} + z - 1 = 0$.

12. $\vec{a} = x\vec{i} + (z-1)\vec{k}$, $\alpha: 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

13. $\vec{a} = 2\vec{i} - y\vec{j} + 32z\vec{k}$, $\alpha: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} - 1 = 0$.

14. $\vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (9y+1)\vec{j} + 6z\vec{k}$, $\alpha: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$.

15. $\vec{a} = x\vec{i} + 12y\vec{j} + (4-2z)\vec{k}$, $\alpha: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1 = 0$.

16. $\vec{a} = (5y+3)\vec{j} + 11z\vec{k}$, $\alpha : x + \frac{y}{2} + 4z - 1 = 0$.
17. $\vec{a} = y\vec{j} + (1-2z)\vec{k}$, $\alpha : \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z - 1 = 0$.
18. $\vec{a} = 26x\vec{i} + (34y+3)\vec{j} + 20z\vec{k}$, $\alpha : 3x + \frac{y}{9} + z - 1 = 0$.
19. $\vec{a} = x\vec{i} + 2\vec{j} + 2z\vec{k}$, $\alpha : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z - 1 = 0$.
20. $\vec{a} = 2x\vec{i} + (7y+2)\vec{j} + 7z\vec{k}$, $\alpha : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.
21. $\vec{a} = (2x+1)\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}$, $\alpha : \frac{x}{3} + y + 2z - 1 = 0$.
22. $\vec{a} = \vec{i} + 5y\vec{j} + 11z\vec{k}$, $\alpha : x + y + \frac{z}{3} - 1 = 0$.
23. $\vec{a} = y\vec{j} + (4-2z)\vec{k}$, $\alpha : 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 1 = 0$.
24. $\vec{a} = 9y\vec{j} + (7z+1)\vec{k}$, $\alpha : x + y + z - 1 = 0$.
25. $\vec{a} = y\vec{j} + (1-z)\vec{k}$, $\alpha : x + \frac{y}{3} + z - 1 = 0$.
26. $\vec{a} = 26x\vec{i} + (34y+3)\vec{j} + 20z\vec{k}$, $\alpha : x + y + z - 1 = 0$.
27. $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, $\alpha : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + z + 1 = 0$.
28. $\vec{a} = 2x\vec{i} + \vec{j}$, $\alpha : x + y + \frac{z}{3} - 1 = 0$.
29. $\vec{a} = (2x-1)\vec{i} + 3z\vec{k}$, $\alpha : x + y + 2z - 1 = 0$.
30. $\vec{a} = 5y\vec{j} + 11z\vec{k}$, $\alpha : x + y + 3z - 1 = 0$.
31. $\vec{a} = 2\vec{i} + z\vec{k}$, $\alpha : 2x + y + z - 1 = 0$.
32. $\vec{a} = (3x-1)\vec{i} + 6z\vec{k}$, $\alpha : -x + \frac{y}{3} + z = 1$.
33. $\vec{a} = x\vec{i} + 12y\vec{j}$, $\alpha : x + \frac{y}{3} + z - 1 = 0$.
34. $\vec{a} = (5y+3)\vec{j} + 11z\vec{k}$, $\alpha : x + \frac{y}{2} + 4z - 1 = 0$.

Криволінійні інтеграли в $\mathbb{R}^3$

19. Перевірте, чи є поле $\vec{a}$ потенціальним та соленоїдальним. У випадку соленоїдальності знайдіть його потенціал

$$1. \quad \vec{a} = (6x - 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}.$$

$$2. \quad \vec{a} = (8x - 5yz)\vec{i} + (8y + 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k}.$$

$$3. \quad \vec{a} = (10x + 3yz)\vec{i} + (10y + 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k}.$$

$$4. \quad \vec{a} = (12x - yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z - xy)\vec{k}.$$

$$5. \quad \vec{a} = (4x + 7yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z + 7xy)\vec{k}.$$

$$6. \quad \vec{a} = (x + 2yz)\vec{i} + (y - 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}.$$

$$7. \quad \vec{a} = (5x - 4yz)\vec{i} + (5y - 4xz)\vec{j} + (5z - 4xy)\vec{k}.$$

$$8. \quad \vec{a} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}.$$

$$9. \quad \vec{a} = (3x - yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}.$$

$$10. \quad \vec{a} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}.$$

$$11. \quad \vec{a} = (x^2 - 2yz)\vec{i} + (y^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 7xy)\vec{k}.$$

$$12. \quad \vec{a} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}.$$

$$13. \quad \vec{a} = (7yz + 1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$$

$$14. \quad \vec{a} = (2xy + z)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + x\vec{k}.$$

$$15. \quad \vec{a} = (6y + 7zx)\vec{i} + (6z + 7yx)\vec{j} + (6x + 7yz)\vec{k}.$$

$$16. \quad \vec{a} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}.$$

$$17. \quad \vec{a} = (x - yz)\vec{i} + (y - xz)\vec{j} + (z - xy)\vec{k}.$$

$$18. \quad \vec{a} = (x - 2yz)\vec{i} + (y - 2xz)\vec{j} + (z - 2xy)\vec{k}.$$

$$19. \quad \vec{a} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}.$$

$$20. \quad \vec{a} = (4x - yz)\vec{i} + (4y - xz)\vec{j} + (4z - xy)\vec{k}.$$

$$21. \quad \vec{a} = (y^2 - 2zx)\vec{i} + (z^2 - 2xy)\vec{j} + (x^2 - 2xy)\vec{k}.$$

$$22. \quad \vec{a} = (z^2 - 2xy)\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} + (y^2 - 2zx)\vec{k}.$$

$$23. \quad \vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (2y - xz)\vec{j} + (2z - xy)\vec{k}.$$

$$24. \quad \vec{a} = (-x - yz)\vec{i} + (-y - xz)\vec{j} + (-z - xy)\vec{k}.$$

$$25. \quad \vec{a} = (y - zx)\vec{i} + (z - yx)\vec{j} + (x - yz)\vec{k}.$$

$$26. \quad \vec{a} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}.$$

27. $\vec{a} = (8x - 5yz)\vec{i} + (8y - 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k}$.
28. $\vec{a} = (10x - 3yz)\vec{i} + (10y - 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k}$.
29. $\vec{a} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$.
30. $\vec{a} = (4x - 7yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z - 7xy)\vec{k}$.
31. $\vec{a} = (x + 2yz)\vec{i} + (y + 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}$.
32. $\vec{a} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$.
33. $\vec{a} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}$.
34. $\vec{a} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k}$.

Додатки 1. Основні формули

1. Тригонометричні функції

1. Основні тригонометричні тотожності

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Формули додавання і віднімання тригонометричних функцій

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \alpha - \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. Формули подвійних і потрійних аргументів

1. Основні формули

1. $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$.
3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
4. $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
5. $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.
6. $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$.
7. $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.
8. $\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

4. Формули половинного аргументу

1. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$.
2. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$.
3. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.
4. $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
5. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
7. $\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.
8. $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$.

Додатки

$$9. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Формули перетворення суми або різниці тригонометричних функцій у добуток

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$6. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1. Основні формули

$$12. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$13. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$15. 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$16. 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$17. 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$18. 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$19. 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$20. 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$21. 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$22. 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$23. 1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$26. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Додатки

$$27. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$28. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$29. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$1. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$2. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$3. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$4. \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$5. \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$6. \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$7. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

7. Формули зниження степеня тригонометричних функцій

$$1. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad 2. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$3. \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}. \quad 4. \cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

8. Формули зведення

$$1. \sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad 2. \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha. \quad 4. \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha.$$

1. Основні формули

$$5. \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha .$$

$$6. \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha .$$

$$7. \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha .$$

$$8. \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha .$$

$$9. \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha .$$

$$10. \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha .$$

$$11. \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha .$$

$$12. \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha .$$

$$13. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$14. \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha .$$

$$15. \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$16. \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha .$$

$$17. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha .$$

$$18. \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$19. \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha .$$

$$20. \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha .$$

9. Значення тригонометричних функцій деяких основних кутів

$f(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

10. Обернені тригонометричні функції

$$1. \sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$2. \arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

$$3. \arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Додатки

4. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.
5. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\cos(\arccos x) = x$, $-1 \leq x \leq 1$.
8. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
9. $\arccos(\cos x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.
10. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.
11. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
12. $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
13. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, $-\infty < x < +\infty$.
14. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
15. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
16. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
17. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.
18. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leq x < 0$, $0 < x \leq 1$.
19. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$, $-\infty < x < +\infty$.
20. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
21. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $0 < x < \pi$.
22. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
23. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $-1 \leq x < 0$, $0 < x \leq 1$.

1. Основні формули

$$24. \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$25. \arcsin x = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$26. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$27. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$28. \arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$29. \arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$30. \arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$31. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$32. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$33. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Додатки

$$34. \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

$$35. \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$36. \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$37. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$38. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$39. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$40. \arcsin x + \arcsin y =$$

$$\begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & xy < 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) - \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x < 0, \quad y < 0, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) + \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

1. Основні формули

$$41. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi, & xy > 1, \quad x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi, & xy > 1, \quad x > 0. \end{cases}$$

$$42. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arccctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$43. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$44. \operatorname{arccctg} x + \operatorname{arccctg} y = \operatorname{arccctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

2. Гіперболічні функції

$$1. \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

$$2. \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

$$3. \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$4. \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$5. e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

$$6. e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$7. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$8. \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$9. \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$10. \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

$$11. \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$$

$$12. \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}.$$

$$13. \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x.$$

$$14. \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

$$15. \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \quad 16. \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$17. \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

$$18. \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

$$19. \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

$$20. \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

Додатки

21. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$. 22. $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
23. $\operatorname{arch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. 24. $\operatorname{arch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.
25. $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$. 26. $\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1; +\infty)$.

3. Основні границі

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$. 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a \in (0; +\infty)$. 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, $|q| < 1$. 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, $|q| > 1$.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n!} = 0$, $p \in \mathbb{R}$. 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in (1; +\infty)$.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$, $p \in \mathbb{R}$, $a \in (1; +\infty)$. 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $a \in (1; +\infty)$.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$, $a \in (0; +\infty)$. 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$. 14. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+1/x)^x = e$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$. 16. $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_a(1+1/x) = \frac{1}{\ln a}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. 18. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1+1/x) = 1$.
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a \in (0; +\infty)$. 22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\varepsilon} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0; +\infty)$. 24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in (1; +\infty)$. 26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$.

4. Таблиця основних похідних

1. Основні формули

1. $(c)' = 0$.
2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
4. $(e^x)' = e^x$.
5. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6. $(\ln x)' = 1/x$.
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
8. $(\sin x)' = \cos x$.
9. $(\cos x)' = -\sin x$.
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
18. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
19. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.
20. $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
21. $(\operatorname{arch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
22. $(\operatorname{arch}_- x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
23. $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.
24. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
25. $([x])' = 0$, $x \neq k \in \mathbb{Z}$.
26. $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$.

5. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 dx = C$.
2. $\int dx = x + C$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6. $\int e^x dx = e^x + C$.
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Додатки

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$
15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
17. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$
18. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$
19. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
20. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
22. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, a > 0.$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$
25. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$
26. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0.$
27. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$
28. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a > 0.$

Додатки 2. Деякі зображення многовидів за допомогою програмного забезпечення Maple

Одновимірні многовиди

1. *Астроїда (Бубна)* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$a=1$; `plot([a*cos(t)^3,a*sin(t)^3,t=-0..2*Pi],title="Астроїда (Бубна)",
color = brown);`

$a := 1$

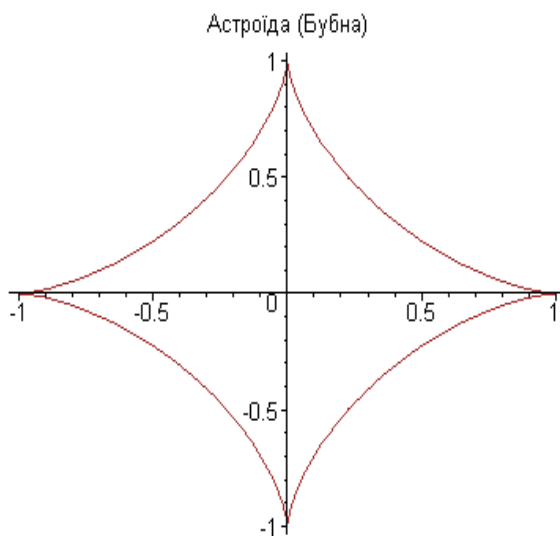


Рис.1

2. *Декартів лист* $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

$a := 2$; `plot([3*a*t/(t^3+1), (3*a*t*t)/(t^3+1), t = -.7 .. 35], title = "Декартів
лист", color = green);`

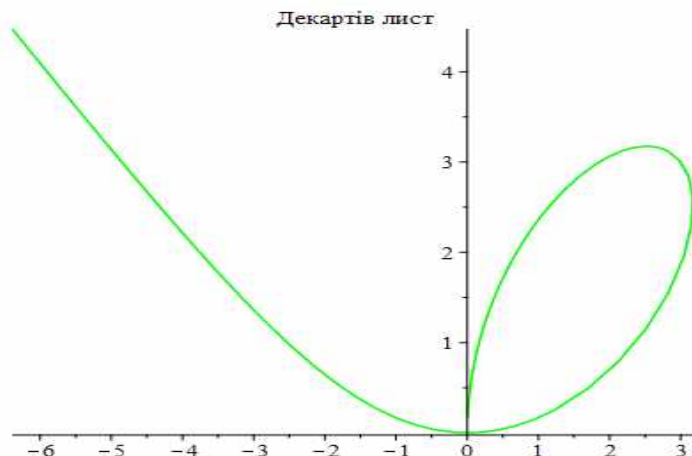


Рис.2

3. Циклоїда
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Коло радіусу a котиться по осі OX і одна з його точок описує цю криву)
 $a := 1$; `plot([a*(t-sin(t)), a*(1-cos(t)), t=-15..15], x=-15..15, y=-0.5..2.3,`
`title="Циклоїда", color = violet);`

$a := 1$

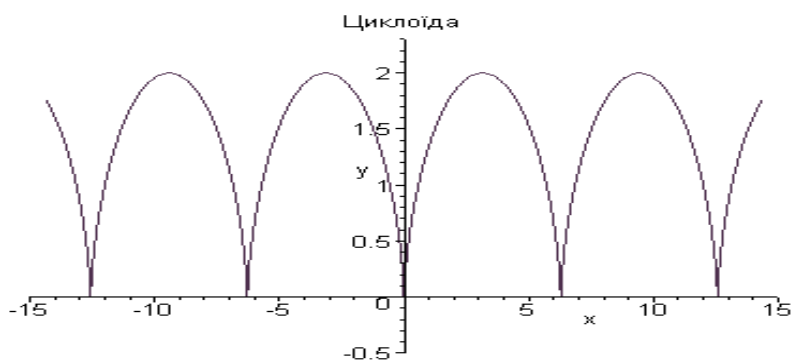


Рис.3

4. Епіциклоїда
$$\begin{cases} x = a((1+m) \cos mt - m \cos(1+m)t) \\ y = a((1+m) \sin mt - m \sin(1+m)t), t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Коло радіуса ma котиться по колу радіусом a зовні і одна з його точок описує цю криву)

```
> a:=1; m:=1; plot([a*((1+m)*cos(m*t)-m*cos(1+m)*t),
a*((1+m)*sin(m*t)-m*sin(1+m)*t),t=-15..15], x=-5..5, y=-8..8,
title="Епіциклоїда", color = brown);
```

$a := 1 \quad m := 1$

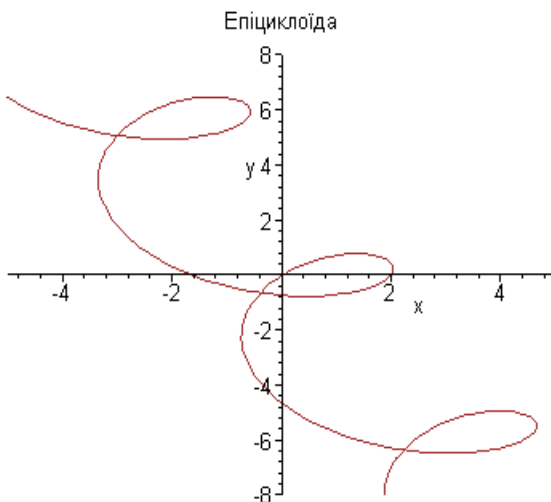


Рис.4

5. Гіпоциклоїда

$$\begin{cases} x = a((1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t) \\ y = a(-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t), t \in R. \end{cases}$$

(Коло радіуса ma котиться по колу радіусом a всередині і одна з його точок описує цю криву)

```
a:=1; m:=0.5;
```

```
plot([a*((1-m)*cos(m*t)+m*cos(1-m)*t), a*((-1)*(1-m)*sin(m*t)+m*sin(1-m)*t),t=-25..25], title="Гіпоциклоїда");
```

$a := 1 \quad m := .5$

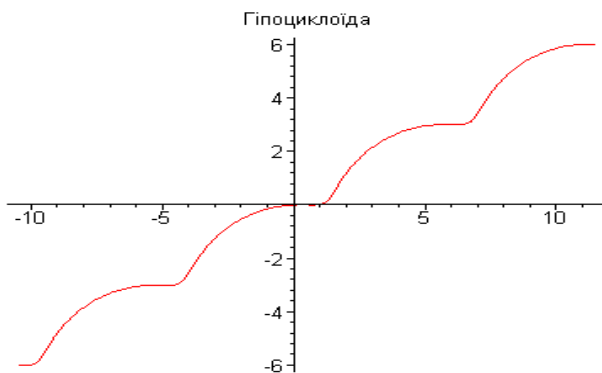


Рис.5

6. Евольвента круга
$$\begin{cases} x = a(t \sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), t \in [0; +\infty). \end{cases}$$

(На коло намотана нитка за годинниковою стрілкою, її розмотують проти ходу годинникової стрілки так, щоб нитка була натягнутою; кінець нитки описує цю криву)

$a:=1;$

$\text{plot}([a*(t*\sin(t)+\cos(t)), a*(\sin(t)-t*\cos(t))], t=-75..75, x=-75..75, y=-75..75, \text{title}=\text{"Евольвента круга"}, \text{color} = \text{green});$

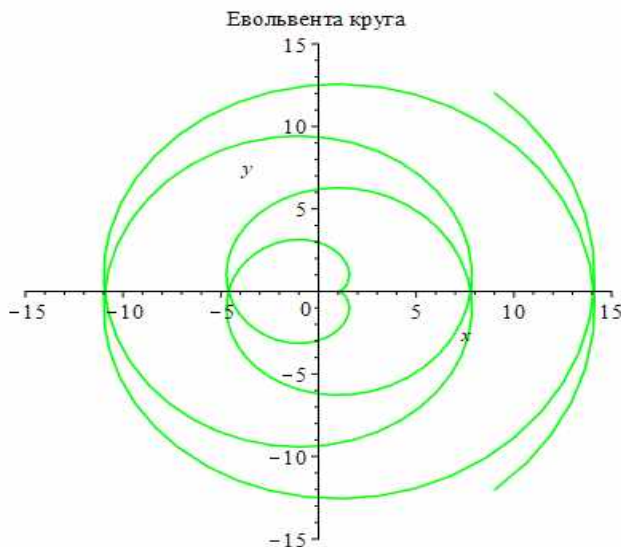


Рис.6

7. Спіраль Архімеда $\rho = \varphi, \varphi \in R$

```
p := polarplot(f, f = -10 .. 10, title = "Спіраль Архімеда", color = blue);  
display(p, view = [-15 .. 15, -15 .. 15]);
```

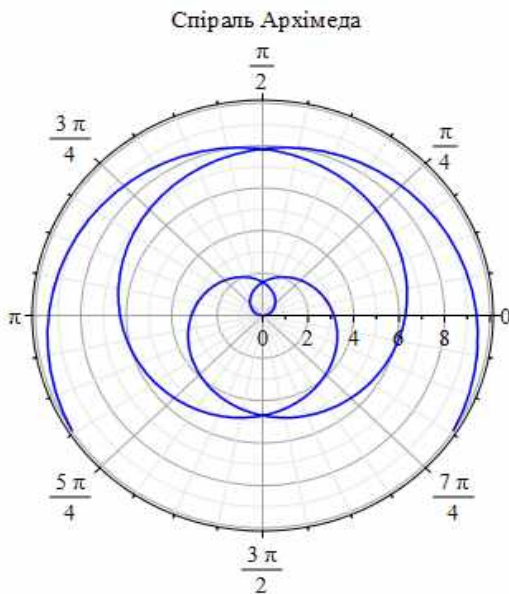


Рис.7

8. Гіперболічна спіраль $\rho = 1/\varphi$

with(plots):

```
p:=polarplot(1/f, f=-25..25);  
display(p,view=[-9..9,-0.25..1.01], title="Гіперболічна спіраль");  
display(p,view=[-0.4..0.4,-0.25..0.15], title="Збільшена нижня частина  
гіперболічної спіралі");
```

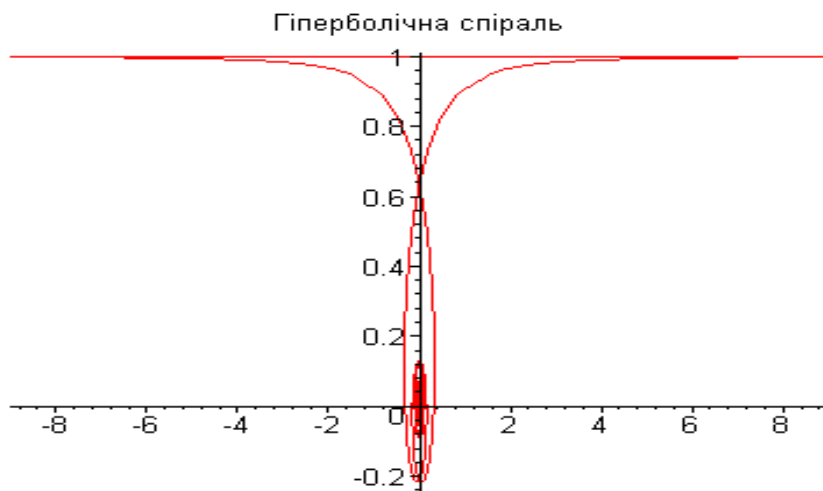


Рис.8.1



Рис.8.2

9. Логарифмічна спіраль_ $\rho = e^{\varphi}$

polarplot(exp(f), f=-10..25, title="Логарифмічна спіраль", color = black);



Рис.9

10. Лемніската Бернуллі

$$\rho = \sqrt{2a \cos 2\theta}$$

`a := 3; polarplot(sqrt(2*a*cos(2*theta)), theta = -5 .. 5, title = "Лемніската Бернуллі", color = green);`

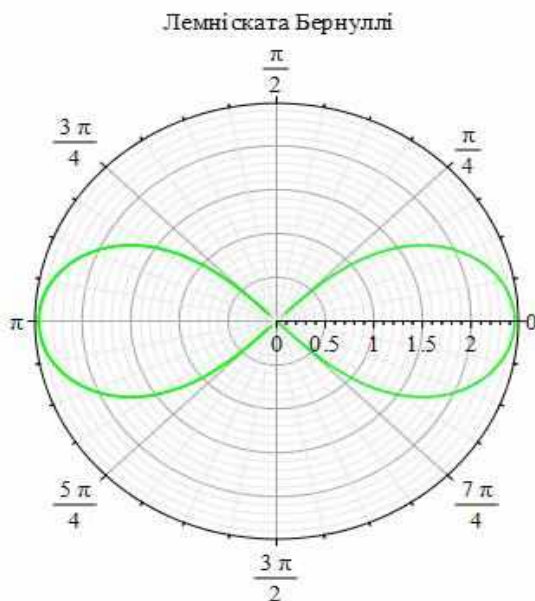


Рис.10

11. Кардіоїда

$$\rho = a(1 + \cos \varphi)$$

```
> a:=5;
polarplot(a*(1+cos(f)), f=-25..25, title="Кардіоїда");
a := 5
```

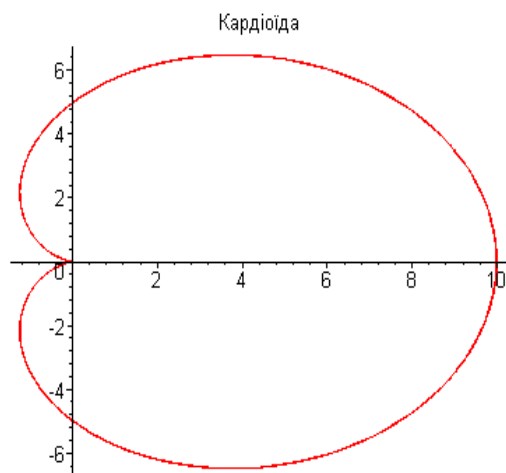


Рис.11

12. Чотирилист $\rho = \sin 2\theta$

```
>with(plots); polarplot(sin(2*theta), theta = 0 .. 2*Pi);
```

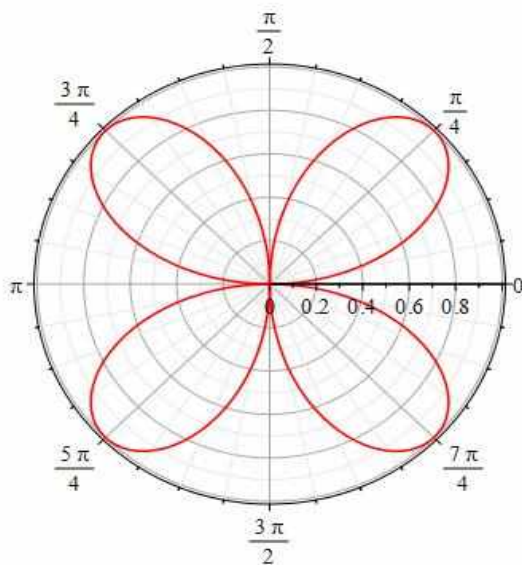


Рис.12

13. Трилист $\rho = \cos 3\theta$

>with(plots); polarplot(cos(3*theta), theta = 0.. 2*Pi);

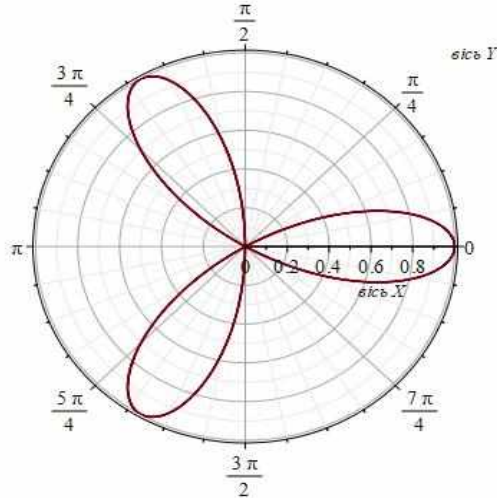


Рис.13

14. Тактриса $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, $y \in (0, a)$, $y = \sin t$

> a:=2; plot(a*log((a+sqrt(a*a-sin(t)^2))/(sin(t)^2))-sqrt(a*a-sin(t)^2), t=-25..25,title= "Тактриса", color = gold);

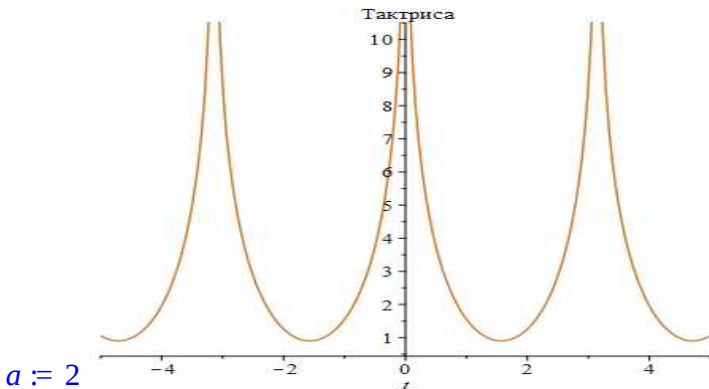
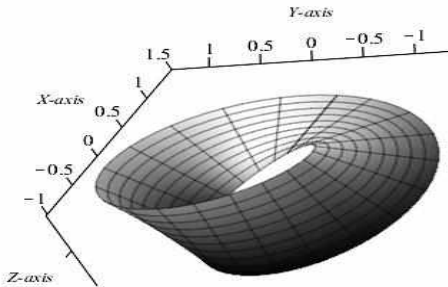


Рис.14

Двовимірні многовиди

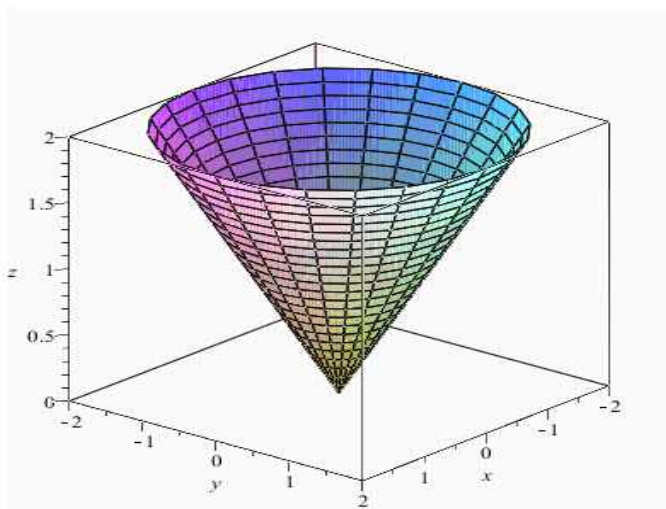
1. *Лист Мебіуса*
$$\begin{cases} x = (1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}) \cos u \\ y = (1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}) \sin u, \{ (u, v) : u \in [0; 2\pi], v \in [-1; 1] \} \\ z = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases}$$

```
plot3d([(1+(1/2)*cos((1/2)*t)*u)*cos(t), (1+(1/2)*cos((1/2)*t)*u)*sin(t),
(1/2)*sin((1/2)*t)*u], t = 0 .. 2*Pi, u = -1 .. 1, grid = [60, 10], scaling =
CONSTRAINED, orientation = [-106, 70], axes = FRAMED, shading =
ZGREYSCALE, tickmarks = [5, 8, 3], labels = ['X-axis', 'Y-axis', 'Z-
axis'])
```



2. *Конус* $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$ ($x = u \cos v, y = u \sin v, z = u, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi$)

```
plot3d([u*cos(v), u*sin(v), u], u=0..2, v=0..2*3.14, axes= box,
orientation=[40,65,0], labels=[x,y,z]);
```

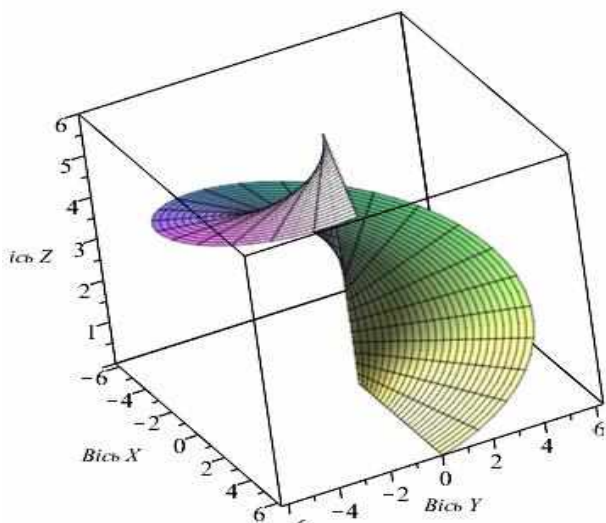


3. Гелікоїд

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v, \quad D = \{(u, v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; 1]\} \\ z = v \end{cases}$$

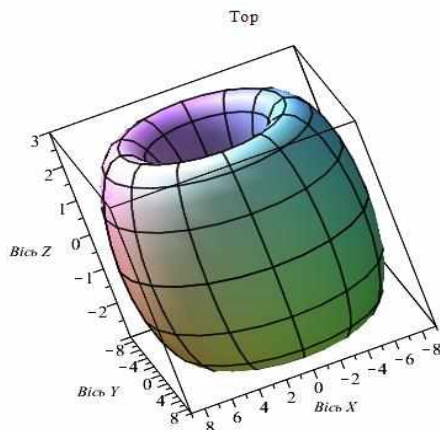
```
plot3d([u*cos(v), u*sin(v), v], u=0..2*Pi, v=0..1, axes=BOXED,
labels=['Вісь X', 'Вісь Y', 'Вісь Z'], title="Гелікоїд");
```

Гелікоїд



4. Top
$$\begin{cases} x = (b + a \cos u) \cos v \\ y = (b + a \cos u) \sin v, \quad D = \{(u, v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; 2\pi]\} \\ z = a \sin u \end{cases}$$

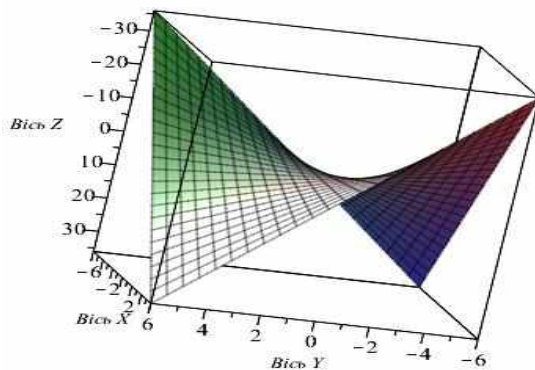
`a := 3; b := 6; plot3d([(b+a*cos(u))*cos(v), (b+a*cos(u))*sin(v), a*sin(u)],
u = 0 .. 4*Pi, v = 0 .. 4*Pi, labels = ['Вісь X', 'Вісь Y', 'Вісь Z'], title =
"Top");`



5. Гіперболічний параболоїд $z=xy$

`plot3d([u, v, u*v], u = -6 .. 6, v = -6 .. 6, labels = ['Вісь X', 'Вісь Y',
'Вісь Z'], title = "Гіперболоїд");`

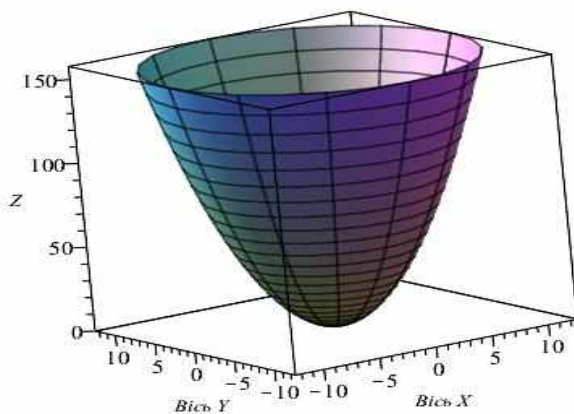
"Гіперболічний параболоїд" (сідло)



6. Параболоїд еліптичний

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u^2, \end{cases} \quad D = \{(u; v) : u \in [0; 2\pi], v \in [0; h]\}.$$

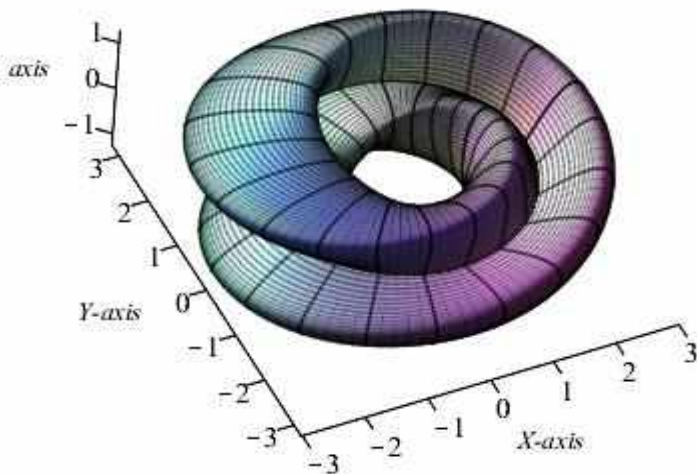
Параболоїд еліптичний



7. Пляшка Кляйна – приклад односторонньої поверхні

$$\begin{cases} x = (r + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v) \cos u \\ y = (r + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v) \sin u \\ z = \sin \frac{u}{2} \sin v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v \end{cases}$$

with(plots): plot3d([(2+cos((1/2)*u)*sin(t)-sin((1/2)*u)*sin(2*t))*cos(u),
(2+cos((1/2)*u)*sin(t)-sin((1/2)*u)*sin(2*t))*sin(u),
sin((1/2)*u)*sin(t)+cos((1/2)*u)*sin(2*t)], t = 0 .. 2*Pi, u = 0 .. 2*Pi, grid = [600,
100], scaling = CONSTRAINED, orientation = [-106, 70], axes = FRAMED,
tickmarks = [5, 8, 3], labels = ['X-axis', 'Y-axis', 'Z-axis'])



Література

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу// Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир., 1965. – 83 с.
3. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. Частина 1. Навчальний посібник. – Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. Івана Франка, 2014. – 206 с.
4. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Основи багатовимірного аналізу. Частина 2. Навчальний посібник. – Дрогобич: ПП «Швидкодрук», 2009. – 161 с.
5. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Основи одновимірного: У 4-х частинах: -Дрогобич, Коло, Ч.1, 2007 .- 260с., Ч.2, 2007 .-260с., Ч.3, 2008 .-250с., Ч.1, 2007 .-270с.,
6. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
7. Глушков П.М., Шунда Н.М. Дифференціальне числення функції однієї змінної. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
8. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М: Мир, – 1971. – 680 с.
9. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 234 с.
10. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч. 1. – 380 с.; Ч. 2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
11. Дьедонне Ж. Основы современного анализа.–М.: Мир, 1964.–430 с.
12. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 299 с.
13. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Сборник задач. – К.: Вища шк.. Головное изд-во, 1987.. – 408 с.
14. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 463 с; Ч. 2. – 2003. – 470 с.
15. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ.– М.: Наука, 1974.–487 с.
16. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Фазис, 1997. – Ч. 1. – 554 с.

17. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Наука, 1981. – Ч. 1. – 543 с.; Ч. 2. – 1984. – 640 с.
18. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: МЦНМО, 2001. – Ч. 1. – 664 с.; Ч. 2. – 2002. – 794 с.
19. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – Ч. 1. – 662 с.; Ч. 2. – 1987. – 358 с.
20. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
21. Коровкин П.П. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1972. – Ч. 1. – 447 с.
22. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. 1. – 712 с.; Т. 2. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
23. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 704 с.; Т. 2. – 671 с.
24. Ландау Э. Основы анализа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 182 с.
25. Ляшко І.І., Смельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1992. – Ч. 1 – 495 с.; Ч. 2. – 1993. – 375 с.
26. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ: В 3-х ч. – К.: Вища шк., 1983. – Ч. 1. – 495 с.
27. Майков Е.В. Математический анализ. Введение. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 48 с.
28. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 484 с.; Т. 2. – 448 с.
29. Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с.; Ч. 2. – 431 с.
30. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
31. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Просвещение, 1976. – Т. 2. – 479 с.
32. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2-х ч. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч. 1. – 343 с.; 1963. – Ч. 2. – 500 с.
33. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 616 с; Т. 2. – 800 с; Т. 3. – 656 с.
34. Шварц Л. Анализ: В 2-х т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.; Т. 2. – 528 с.
35. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1-2. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
36. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990. – 479 с.
37. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1994. – Ч. 1. – 423 с.

38. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2005. – Ч. 1. – 447 с.; Ч. 2. – 510 с.
39. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Поля Г. Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
40. Чернишов С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
41. Tom M. Apostol. Calculus: In 2 Volumes. – 1961. – Vol. 1. – 666 p; Vol. 2. – 1967. – 667 p.
42. Robert G. Bartle. The elements of real analysis. – New York, 1967. – 447 p.
43. Mauch S. Introduction to methods of applied mathematics or advanced methods for scientists and engineers. – 2002. – 1441 p.
44. Stroyan K. D. Mathematical background: foundations of infinitesimal calculus. – Academic Press, Inc., 1997. – 182 p.
45. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
46. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смолянский М.Л., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа: В 2-х ч. Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – Ч. 1. – 343 с; Ч. 2. – 336 с.
47. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2-х ч./ Под общ. ред. В.А. Садовничего. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – Ч. 1. – 416 с; Ч. 2. – 1991. – 352 с.
48. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1957. – Т. 1. – 224 с.; Т. 2. – 223 с.
49. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 255 с.
50. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
51. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.: Высш. шк., 1987. – 408 с.
52. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
53. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
54. Егорова И.А. Задачник-практикум по математическому анализу: В 3-х ч. – М.: Учпедгиз, 1962. – Ч. 3. – 105 с.
55. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.

56. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
57. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи. – М.: Наука, 1973. – 461 с.
58. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: В 3-х т. – М.: Едиториал, 2001. – Т. 1. – 360 с; Т. 2. – 2003. – 224 с.; Т. 3. – 2001. – 224 с
59. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
60. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1964. – 336 с.
61. Погорелов А.И. Контрольные работы по математическому анализу. – М.: Учпедгиз, 1951. – 50 с.
62. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юроть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1990. – Ч. 1. – 271 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.

Предметний покажчик

Багатовид (многовид)

- одновимірний 11
- двовимірний 66, 68

базис стандартний 11,30

векторна лінія 109

векторне поле 109

годограф 14

градієнт скалярного поля 108

дивергенція поля 110, 111

дотична

- пряма 15, 17, 98
- площина 66

край

- шляху 67
- додатно-орієнтований 105

крива

- гладка 13
- кусково-гладка 13
- Жорданова 13
- неперервна 13
- орієнтована 13
- спрямована 18, 22

криволінійний інтеграл

- першого роду 18, 100
- другого роду 23, 101

лист Мебіуса 64

напрямні косинуси поверхні 81

нормаль

- до кривої 13, 17, 98
- до поверхні 67

область поверхнево-однозв'язна 107, 112

орієнтація кривої 27

орієнтований простір 15

ротатор 112

параметризація

- кривої 13
- поверхні 68

пляшка Кляйна 8, 92

поверхневий інтеграл

- першого роду 72
- другого роду 78

поверхні еквіпотенціальні 108

поверхня

- гладка 63
- елементарна 68
- замкнена 68
- компактна 63
- кусково-гладка 63
- орієнтована 63, 85
- параметрично задана 84
- проста 68

повний диференціал 38

потенціальне поле 115

потік векторного поля 110

похідна за вектором 108

похідна за напрямом

скалярне поле 108

теорема

- Гріна 33
- Остроградського-Гаусса 86, 111
- Стокса 105, 114

формула

- Гріна 33
- Остроградського-Гаусса 86
- Стокса 105

циклоїда 22

циркуляція векторного поля 114

шлях

- гладкий 12, 97
- двовимірний 65
- еквівалентний 27
- кусково-гладкий 13, 97
- Жорданів 12
- замкнений 12, 68
- неперервний 12
- одновимірний 12, 97
- протилежний 13
- простий 67

Електронне навчально-методичне видання

В.М. Дільний, І.Б. Шепарович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Інтеграли по многовидах

Лекції, практичні, індивідуальні завдання.

Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка

Технічний редактор

Ірина Артимко

Підписано до друку 3.11.25. Формат 60х90/16. Times New Roman.
Умов. друк. арк. 8,5. Замов. №69.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
(Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №2155
від 12.04.2005 р.) 82100 Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к 203.