

Вплив електричного поля на оптичні властивості домішкових квантових точок *GaAs* та *CdS*

Бойчук В.І., Кропивницька К.М., Лешко Р.Я.

email: kropkateryna@gmail.com

кафедра теоретичної і прикладної фізики та комп'ютерного моделювання
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
вул. Стрийська, 3, Дрогобич, Львівська обл., 82100

Досліджено оптичні властивості сферичної квантової точки з параболічним потенціалом обмеження у випадках, коли є донорна і акцепторна домішки та за наявності електричного поля. Обчислено силу осцилятора між основним і першим збудженим станами електрона для різних величин потенціалу обмеження та напруженості зовнішнього електричного поля. На основі знайдених сил осцилятора переходу отримано лінійний та нелінійний коефіцієнти поглинання та оптичний показник заломлення. Результати представлені як функції від енергії кванта падаючого світла при різних значеннях величини потенціалу й електричного поля.

Ключові слова: домішки акцепторна та донорна, квантова точка.

ВСТУП

Домішки відіграють значну роль при аналізі властивостей напівпровідників, які використовуються для виготовлення приладів. Навіть невелика концентрація домішок збільшує провідність напівпровідника на декілька порядків. За останні кілька десятиліть спостерігається підвищена увага до проблеми домішкових станів через великі перспективи фізичних застосувань низькорозмірних напівпровідникових структур, а саме: квантових ям, квантових дріотів та квантових точок (КТ). У роботах [1, 2] вперше обчислено енергію зв'язку водневоподібної домішки у двовимірній квантовій ямі. Домішкові стани у одновимірному квантовому дріоті детально вивчено у [3, 4]. Робота [5] присвячена дослідженню впливу домішкових станів на фізичні властивості КТ. Показано, що КТ з домішкою є дуже хорошою моделлю для розуміння цілого ряду електронних та оптичних властивостей гетеросистем з КТ. Енергія [6-10] домішкових станів у КТ була вивчена дуже детально, натомість проблема нелінійних оптичних властивостей домішкових станів досліджена менше. Через квантове обмеження домішко-

вих електронів (дірок) виникає можливість зміною розмірів та форм КТ так керувати їх електронною структурою, щоб пристосувати енергетичний спектр для отримання бажаних оптичних переходів. Ці особливості є корисними при розробці оптико-електронних приладів із заданими випромінювальними і пропускними властивостями та ультравузькими спектральними лініями.

Нелінійні оптичні властивості КТ досліджувалися експериментально і теоретично авторами робіт [11-23]. При дослідженні оптичних переходів КТ надзвичайно важливим є аналіз домішкових станів, бо квантове обмеження квазічастинок у такій структурі повинне збільшувати силу осцилятора електрон-домішкового збудження. Крім того, знаючи залежність енергії оптичного переходу від величини квантового обмеження (розміру КТ), можна керувати величиною резонансних частот.

Ще одним фактором впливу на фізичні властивості КТ є зовнішнє електричне поле. Воно спричиняє зсув енергетичних рівнів та польову залежність часу життя носіїв заряду КТ [24-26]. Тому вплив домішки та прикладеного електричного поля на оптичні влас-

тивості КТ є дуже цікавою проблемою темою як з наукової, так і прикладної точок зору.

У представленій роботі ми зосередимося на вивченні оптичних властивостей воднево-подібної домішки у сферичній КТ за наявності зовнішнього електричного поля. Обчислено сили осцилятора квантового переходу між основним та першим збудженим станами, відповідний лінійний, нелінійний та сумарний коефіцієнти поглинання (КП) і сумарний оптичний показник заломлення (ПЗ).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Розглядаємо сферичну КТ, що поміщена у матрицю. Нехай в центрі КТ знаходиться іон домішки (донорної чи акцепторної), а на систему накладено зовнішнє однорідне електричне поле. Тоді в рамках наближення ефективної маси, гамільтоніан системи електрон та іон домішки сферичної параболічної КТ за наявності електричного поля може бути записаний таким чином

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 r^2 + |e|Ez + V, \quad (1)$$

де V описує взаємодію між електроном та іоном домішки:

$$V = \frac{\lambda e^2}{\epsilon r} \quad (2)$$

Випадок, коли в КТ є акцепторна домішка відповідає умові $\lambda = +1$, а для донорної домішки $\lambda = -1$, $\vec{r}$ - радіус-вектор електрона, m^* - ефективна маса електрона, параметр ω_0 задає величину квантової ями, ϵ - діелектрична проникність кристалу КТ та $\vec{E}$ - напруженість зовнішнього електричного поля, яке прикладене у напрямку осі OZ .

Гамільтоніан (1) можна перетворити до вигляду

$$H = H_0 + V, \quad (3)$$

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 x^2 + \frac{p_y^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 y^2 + \frac{p_z^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 (z + \beta)^2 - \frac{1}{2}|e|E\beta, \quad (4)$$

$$\beta = \frac{|e|E}{m^*\omega_0^2}.$$

Рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (4) розв'язується точно. У випадку сильного

обмеження руху електрона кулонівська взаємодія V відіграє роль збурення [27, 28].

Власні функції і власні значення енергій низькоенергетичних станів електрона, що обмежений сферичною параболічною КТ за наявності електричного поля, приймають вигляд:

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \phi_{n_x}(x) \phi_{n_y}(y) \phi_{n_z}(z + \beta), \quad (5)$$

$$E_{n_x n_y n_z}^{(0)} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega_0 - \frac{1}{2} |e| E \beta, \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

$$\text{де} \quad \phi_{n_i}(x_i) = C_{n_i} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2x_0^2}\right) H_{n_i}\left(\frac{x_i}{x_0}\right), \quad (7)$$

$$x \equiv x_1, y \equiv x_2, z + \beta \equiv x_3, x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_0}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$C_{n_i} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} x_0 2^{n_i} n_i!}} - \text{константа нормування,}$$

$H_{n_i}\left(\frac{x_i}{x_0}\right)$ - поліном Ерміта і $\phi_{n_i}(x_i)$ - нормована хвильова функція i -го одновимірного осцилятора.

Після введення сферичних координат

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (9)$$

ми отримуємо хвильові функції нульового наближення у сферичних координатах.

Зокрема, при $N = n_x + n_y + n_z = 0$ хвильова функція електрона (в основному стані) запишеться так:

$$\psi_{000}^0(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{(\pi x_0^2)^{3/4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2x_0^2} - \frac{1}{x_0^2} \beta r \cos \theta - \frac{\beta^2}{2x_0^2}\right).$$

Ця функція відповідає магнітному квантовому числу $m = 0$, яке є "добрим" квантовим числом і в електричному полі. Тоді І-поправка до енергії основного стану електрона, що взаємодіє з зарядженою домішкою, має вигляд

$$V_{00} = \langle \psi_{000}^0 | V | \psi_{000}^0 \rangle = \frac{\lambda e^2}{2\epsilon \beta \pi^{1/4}} \text{Erf}\left[\frac{\beta}{x_0}\right],$$

де $\text{Erf}[x]$ - функція помилок. Для $N = 1$ маємо незбурені хвильові функції трьох станів ($m = 0, \pm 1$):

$$\psi_{001}^0(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{x_0^{5/2} \pi^{3/4}} (r \cos \theta + \beta) \exp\left(-\frac{r^2}{2x_0^2} - \frac{\beta r \cos \theta}{x_0^2} - \frac{\beta^2}{2x_0^2}\right),$$

$$\psi_{100}^{\pm 1}(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{x_0^{5/2} \pi^{3/4}} r \sin \theta \exp\left(-\frac{r^2}{2x_0^2} - \frac{\beta r \cos \theta}{x_0^2} - \frac{\beta^2}{2x_0^2} \pm i\varphi\right). \quad (10)$$

У КТ стани з $N = 1$ є трикратно вироджені,

тому поправки до енергій обчислюємо методом теорії збурень для виродженого спектру. Недіагональні матричні елементи

$$V_{m'm} = \langle \psi_{n_x n_y n_z}^{m'} | V | \psi_{n_x n_y n_z}^m \rangle = 0, \quad m' \neq m. \quad (11)$$

Якщо ж $m' = m$, то отримаємо такі поправки:

$$V_{0,0} = \langle \psi_{001}^0 | V | \psi_{001}^0 \rangle = \frac{\lambda e^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{x_0^2} \right) \left(-2 \frac{\beta}{x_0} e^{-\frac{\beta^2}{x_0^2}} + \sqrt{\pi} \operatorname{Erf} \left[\frac{\beta}{x_0} \right] \right)}{\varepsilon \sqrt{\pi} \frac{\beta^3}{x_0^2}}, \quad (12)$$

$$V_{1,1} = V_{-1,-1} = \langle \psi_{010}^{-1} | V | \psi_{010}^{-1} \rangle = \frac{\lambda e^2}{\varepsilon \beta} \left[\left(2 - \frac{x_0^2}{\beta^2} \right) \operatorname{Erf} \left[\frac{\beta}{x_0} \right] + \frac{2 \exp \left(-\frac{\beta^2}{x_0^2} \right)}{\sqrt{\pi} \frac{\beta}{x_0}} \right]. \quad (13)$$

Дуже важливою фізичною характеристикою для вивчення оптичних властивостей, які пов'язані з електричними дипольними дозволенними переходами є сила осцилятора квантового переходу. Для міжрівневих переходів ($f \leftrightarrow i$) сила осцилятора P_{fi} визначається як

$$P_{fi} = \frac{2m_0}{\hbar^2} \Delta E_{fi} |M_{fi}|^2, \quad (14)$$

де $\Delta E_{fi} = E_f - E_i$ - різниця енергій нижчого і вищого рівнів, $M_{fi} = \langle \psi_i | ez | \psi_f \rangle$ - електричний дипольний момент переходу з стану ψ_i в стан ψ_f . Сила осцилятора може дати додаткову інформацію про тонку структуру і правила відбору для оптичного поглинання світла [29].

Обчислення поглинання світла базується на методі матриці густини, за яким КП світла представляється у вигляді [30]

$$\alpha(\omega, I) = \alpha^{(1)}(\omega) + \alpha^{(3)}(\omega, I), \quad (17)$$

$$\text{де} \quad \alpha^{(1)}(\omega) = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}} \frac{\sigma_s |M_{fi}|^2 \hbar \Gamma_{fi}}{(\hbar \omega - \Delta E_{fi})^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2}, \quad (18)$$

та

$$\alpha^{(3)}(\omega, I) = -\omega \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon_R}} \left(\frac{I}{2\varepsilon_0 n_r c} \right) \frac{\sigma_s |M_{fi}|^2 \hbar \Gamma_{fi}}{\left[(\hbar \omega - \Delta E_{fi})^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2 \right]^2} \times \left\{ 4 |M_{fi}|^2 - \frac{(M_{ff} - M_{ii})^2 \left[3\Delta E_{fi}^2 - 4\Delta E_{fi} \hbar \omega + \hbar^2 (\omega^2 - \Gamma_{fi}^2) \right]}{\Delta E_{fi}^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2} \right\} \quad (19)$$

- лінійний та нелінійний КП, відповідно. У наведених вище рівняннях c - швидкість світла, I - інтенсивність електромагнітного поля, σ_s - концентрація електронів, μ - маг-

нітна проникність системи, n_r - показник заломлення та ε_R - відносна діелектрична проникність середовища, μ_0 та ε_0 - магнітна та діелектрична сталі вакууму. Матричний елемент Γ_{ff} називають швидкістю релаксації стану f і є оберненим до часу релаксації стану $|f\rangle$. Недіагональний матричний елемент Γ_{fi} ($f \neq i$) називають швидкістю релаксації з стану f в стан i . Оскільки електричні дипольні моменти переходу з стану ψ_{000}^0 в стани ψ_{010}^{-1} та ψ_{100}^1 рівні нулеві, тому обмежимося лише дослідженням переходу з стану ψ_{000}^0 в стан ψ_{001}^0 .

Відносні лінійний та нелінійний ПЗ визначаються співвідношеннями [30]

$$\frac{\Delta n^{(1)}(\omega)}{n_r} = \frac{1}{2n_r^2 \varepsilon_0} \frac{\sigma_s |M_{fi}|^2 (E_{fi} - \hbar \omega)}{(E_{fi} - \hbar \omega)^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\Delta n^{(3)}(\omega)}{n_r} = -\frac{\mu_0 \mu c I}{4\varepsilon_0 n_r^3} \frac{\sigma_s |M_{fi}|^2}{\left[(E_{fi} - \hbar \omega)^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2 \right]^2} \times \left\{ 4(E_{fi} - \hbar \omega) |M_{fi}|^2 - \frac{(M_{ff} - M_{ii})^2}{E_{fi}^2 + (\hbar \Gamma_{fi})^2} (E_{fi} - \hbar \omega) \times \right. \\ \left. \times [E_{fi}(E_{fi} - \hbar \omega) - (\hbar \Gamma_{fi})^2] - (\hbar \Gamma_{fi})^2 (2E_{fi} - \hbar \omega) \right\}. \quad (21)$$

Сумарний відносний ПЗ знаходимо з формули

$$\frac{\Delta n(\omega)}{n_r} = \frac{\Delta n^{(1)}(\omega)}{n_r} + \frac{\Delta n^{(3)}(\omega)}{n_r}. \quad (22)$$

1.2. Аналіз результатів

Усі обчислення проводились для двох структур *CdS* та *GaAs*.

Таблиця 1. Параметри матеріалів

Матеріал	m_e	ε	n_r	μ
<i>CdS</i>	0,2 m_0	5,5	2,3	0,96
<i>GaAs</i>	0.067 m_0	12.4	3.2	0,83

Тут m_0 - маса вільного електрона. Нехай $\sigma_s = 5,0 \times 10^{24} \text{ м}^{-3}$, $I = 0.5 \times 10^{10} \text{ Вт/м}^2$, $\Gamma_{ff} = 1 \text{ пс}^{-1}$, $\Gamma_{fi} = 1/0.14 \text{ пс}^{-1}$. На рис. 1а, 1б зображено графіки залежності сили осцилятора одного електрона та кулонівської домішки у сферичній КТ від величини $\hbar \omega_0$ для акцепторної домішки ($\lambda = +1$, суцільна лінія), донорної домішки ($\lambda = -1$, пунктирна лінія) та без домішки ($\lambda = 0$, штрихпунктирна лінія), відповідно. Електричне поле на рис. 1а, 1б

дорівнює 15 кВ/см.

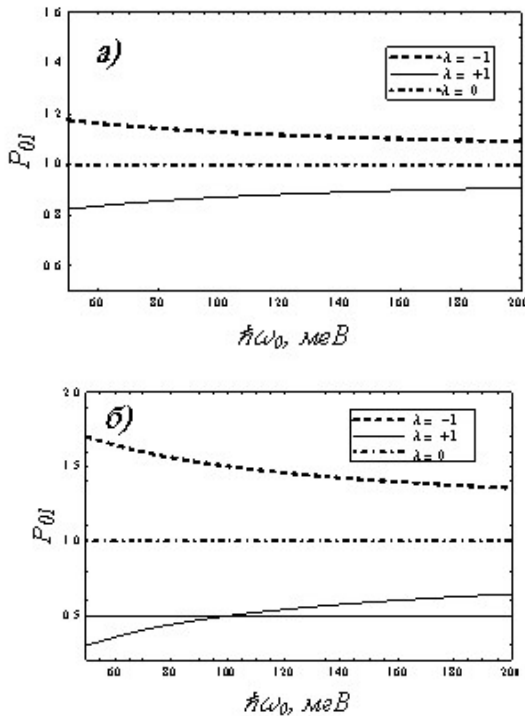


Рис. 1. Залежність сили осцилятора електрона у сферичній параболічній квантовій точці GaAs (а) і CdS (б) між станами ψ_{000}^0 і ψ_{001}^0 від енергії $\hbar\omega_0$ для $E = 15$ кВ/см.

З цих рисунків видно, що вплив іона домішки на силу осцилятора квантового переходу електрона є значним. Сила осцилятора електрона КТ з іоном донорної домішки зменшується, а для іона акцепторної домішки збільшується при збільшенні потенціальної ями ($\hbar\omega_0$). Функція $P_{01} = P_{01}(\hbar\omega_0)$ для КТ без домішки є майже сталою і рівною одиниці при будь-яких значеннях $\hbar\omega_0$. Отже, вплив на значення величини сили осцилятора є різним залежно від типу домішки. Ми побачимо також, що збільшення обмежуючого потенціалу зменшує вплив домішки на зміну сили осцилятора.

Крім того, у роботі розглядаються оптичні властивості електрона сферичної КТ. Було знайдено лінійний, нелінійний та сумарний КП, сумарну відносну зміну ПЗ світла як функції від енергії фотона $\hbar\omega$ для донорної та акцепторної домішки, відповідно. На рис. 2 і 3 подано залежність $\alpha = \alpha(\omega)$ та $\Delta n = \Delta n(\omega)$ для двох різних величин квантової ями ($\hbar\omega_0 = 50$ меВ, $\hbar\omega_0 = 100$ меВ) за наявності електричного поля $E = 15$ кВ/см.

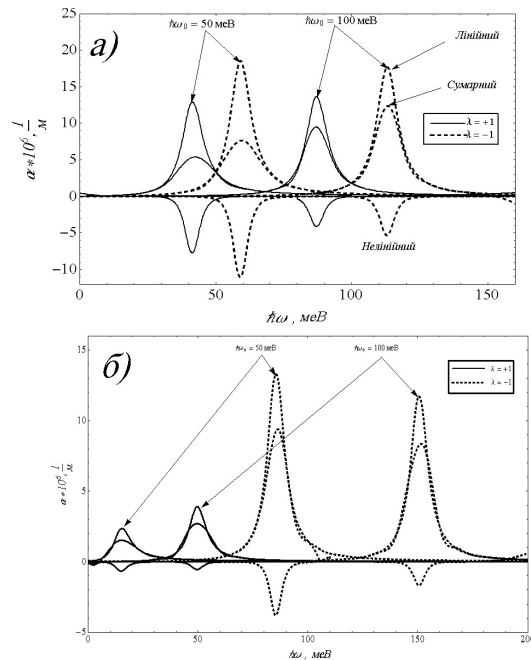


Рис. 2. Залежність лінійного, нелінійного та сумарного КП GaAs (а) і CdS (б) від енергії фотона для $\hbar\omega_0 = 50$ меВ, $\hbar\omega_0 = 100$ меВ, $E = 15$ кВ/см.

Видно, що $\alpha^{(1)}$ має додатні, а $\alpha^{(3)}$ - від'ємні значення. Загальний коефіцієнт $\alpha(\omega) = \alpha^{(1)}(\omega) + \alpha^{(3)}(\omega)$ суттєво зменшується через $\alpha^{(3)}$. Отже, при великих значеннях інтенсивності світла слід брати до уваги нелінійний (залежний від інтенсивності) коефіцієнт поглинання поблизу резонансної частоти ($\hbar\omega \approx \hbar\omega_0$). З іншого боку, піки електронного поглинання за наявності іона донорної домішки значно більші за піки поглинання для іона акцепторної домішки в КТ при тій самій силі обмеження. Можна сказати, що донорну домішку краще використовувати для отримання великих значень КП. Крім того, видно, що піки поглинання для донорної домішки знаходяться вище за енергією, ніж піки поглинання акцепторної домішки. Високоенергетичний зсув виникає через різницю енергії між основним і першим збудженим станом для цих фізичних ситуацій. Це впливає на зсув максимуму заломлення, і піки Δn для донорної домішки знаходяться вище, ніж для акцепторної домішки (рис. 3).

Рис. 4 і 5 відповідають $\hbar\omega_0 = 50$ меВ і на них подано лінійний, нелінійний та сумарний КП та ПЗ як функції від енергії фотона $\hbar\omega$ при двох різних значеннях електричного поля $E = 25$ кВ/см і $E = 75$ кВ/см. Видно,

що коли прикладене електричне поле збільшується, то піки ПЗ та КП у випадку наявності в КТ донорної домішки зсуваються в червону сторону спектру, в той час як для акцепторної домішки – у синій бік спектру. Як видно з рис. 2 та 3, піки КП та ПЗ інтенсивно зменшуються із збільшенням E . З другої сторони, при одному і тому ж значенні поля піки поглинання донорної домішки значно вищі за піки акцепторної домішки. Проте домішка не впливає на зміну ПЗ, що добре видно з рис. 3.

Оскільки значення ефективної маси, що входить в P_{01} , є більше у *CdS*, ніж у *GaAs*, то і відповідно, значення сили осцилятора є більшим. Як видно з рис. 2, різниця між піком поглинання між основним і збудженим станами акцепторної домішки ($\lambda = +1$) є меншою за ту ж різницю для донорної домішки ($\lambda = -1$). Оскільки потенціальна яма має параболічну форму, то, що чим більший множник біля неї, то вона вужча, і відповідно, рівні знаходяться на більшій відстані один від одного.

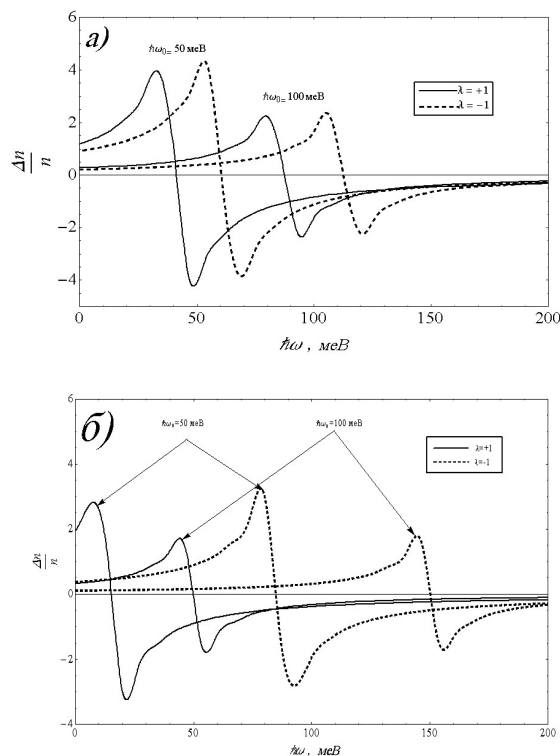


Рис. 3. Залежність сумарного ПЗ *GaAs* (а) і *CdS* (б) від енергії фотона при двох різних значеннях $\hbar\omega_0$, $E = 15$ кВ/см.

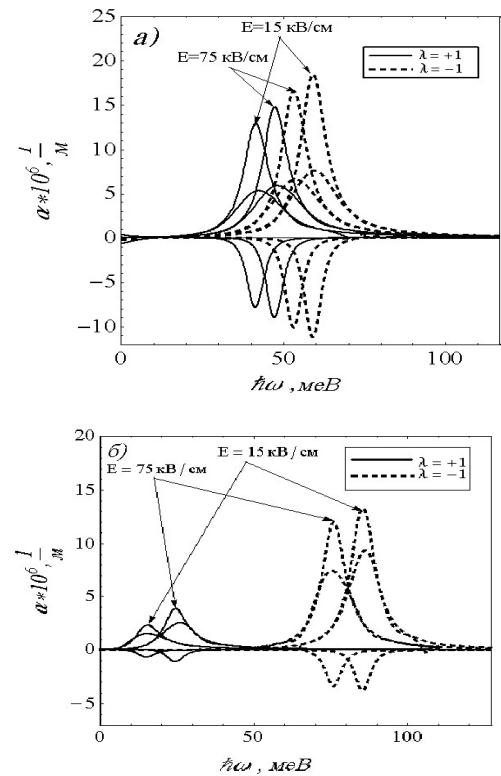


Рис. 4. Залежність лінійного, нелінійного і сумарного КП *GaAs* (а) і *CdS* (б) від енергії фотона для $\hbar\omega_0 = 50$ меВ при двох різних величинах напруженості $E = 15$ кВ/см і $E = 75$ кВ/см.

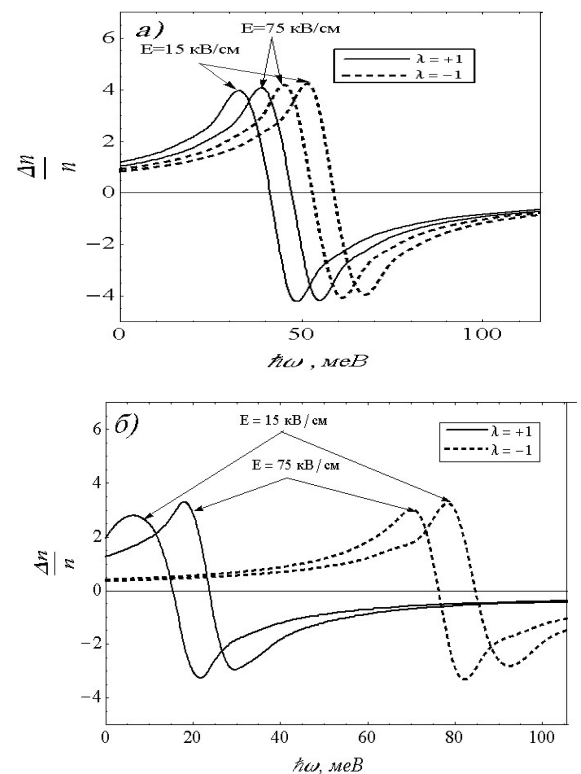


Рис. 5. Залежність сумарного ПЗ *GaAs* (а) і *CdS* (б) від енергії фотона для $\hbar\omega_0 = 50$ меВ для двох величин напруженості електричного поля: $E = 15$ кВ/см та $E = 75$ кВ/см.

ВИСНОВКИ

За допомогою теорії збурень нами досліджено лінійний, нелінійний і сумарний коефіцієнти поглинання та показник заломлення системи електрон і кулонівська домішка у сферичній КТ з параболічним потенціалом. Визначено силу осцилятора, що залежить від величини потенціальної ями та напруженості прикладеного електричного поля. Результати показують, що сила осцилятора при різних знаках заряду кулонівської домішки є різною. Використавши енергії та хвильові функції основного ($L=0$) та першого ($L=1$) збудженого станів було обчислено лінійний, нелінійний, сумарний КП та сумарний ПЗ. Наші результати також показують, що значення КП та ПЗ сильно залежать не лише від обмежуючої сили, а й від прикладеного електричного поля і типу самої домішки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] F. Bassani, G. Iadonisi, B. Preziosi, Rep. Progr. Phys. 37 (1974) 1009.
- [2] G. Bastard, Phys. Rev. B 24 (1981) 4714.
- [3] G.W. Bryant, Phys. Rev. B 29 (1984) 6632.
- [4] G.W. Bryant, Phys. Rev. B 31 (1985) 7812.
- [5] J.L. Zhu, J.J. Xiong, B.L. Gu, Phys. Rev. B 41 (1990) 6001.
- [6] M.V. Tkach, V.A. Golovac'kij, Ja.M. Berezovskij. Fiz. i him. tverd. tila. 4(2), 213 (2003).
- [7] V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, R.Ya. Leshko, L.M. Turyanska. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures 44(2), 476 (2011).
- [8] V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, R.Ya. Leshko. Condensed Matter Physics 11(4), 653-661 (2008).
- [9] V.A. Golovac'kij, I.B. Frankiv. Zhurnal fizichnih doslidzhen' 16(1/2), 1706(1) (2012).
- [10] V.I. Boichuk, I.V. Bilynskiy, O.A. Sokolnyk. Physics and Chemistry of a Solid State 13(3), 586 (2012).
- [11] S.S. Li, J.B. Xia, Phys. Rev. B 55 (1997) 15434.
- [12] R. Buczko, F. Bassani, Phys. Rev. B 54 (1996) 2667.
- [13] V. Bondarenko, Y. Zhao, J. Phys. Condens. Matter 15 (2003) 1377.
- [14] S. Baskoutas, E. Paspalakis, A.F. Terzis, Phys. Rev. B 74 (2006) 153306.
- [15] S. Baskoutas, E. Paspalakis, A.F. Terzis, J. Phys. Condens. Matter 19 (2007) 395024.
- [16] S. Yilmaz, H. Safak, Physica E 36 (2007) 40.
- [17] G.H. Wang, K.X. Guo, Physica E 28 (2005) 14.
- [18] M. Sahin, Phys. Rev. B 77 (2008) 045317.
- [19] W.F. Xie, Phys. Status Solidi B 246 (2009) 1313.
- [20] S.S.Kim, S.K.Hong, K.W.Yeon, Phys. Rev. B 76 (2007) 115322.
- [21] I. Karabulut, U. Atav, H. Safak, M. Tomak, European Phys. J. B 55 (2007) 283.
- [22] S. Huang, B. Li, Phys. Lett. A 372 (2008) 4323.
- [23] I. Karabulut, S. Baskoutas, J. Appl. Phys. 103 (2008) 073512.
- [24] S.A. Empedocles, M.G. Ba Wendi, Science 278 (1997) 2114.
- [25] D.M.-T. Kuo, Y.-C. Chang, Phys. Rev. B 61 (2000) 11051.
- [26] Y.-S. Huang, S.-S. Liaw, Modern Phys. Lett. B 14 (2000) 675.
- [27] P.S. Drouvelis, P. Schmelcher, F.K. Diakonov, Phys. Rev. B 69 (2004) 035333.
- [28] F.V. Prudente, L.S. Costa, J.D.M. Vianna, J. Chem. Phys. 123 (2005) 224701.
- [29] T. Chakraborty, P. Pietilainen, Phys. Rev. Lett. 95 (2005) 136603.
- [30] M.R.K. Vahdani, G. Rezaei, Phys. Lett. A 373 (2009) 3079.