

Теоретичні засади методу апроксимації у вирішенні проблеми ідентифікації аеродинамічної сили опору руху об'єкта в атмосфері

Грабчак В. І., Ванкевич П. І.*, Іваник Є. Г.*, Сікора О. В.***

email: sikora60@mail.ru

* Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

** Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики

З використанням основ функціонального аналізу викладено підхід до вирішення задачі про апроксимацію функцій, які описують технічний процес або явище. Розвинутий підхід ілюструється розв'язком задачі про ідентифікацію функції лобового опору повітря в умовах неповної (неточної, отриманої на основі наближених радарних вимірювань елементів траєкторії руху) інформації, шляхом її вираження через кусково-сталі одиничні функції, та подальшим застосуванням однокрокового методу Ейлера розв'язування задачі Коші.

Ключові слова: елемент найкращого наближення, ідентифікація в умовах неповної інформації, дискретна апроксимація, інтегральна апроксимація, сплайн-функції, середньо-квадратичне наближення, чебишовське наближення, задача Коші, однокроковий метод Ейлера-Коші, доплерівський радар.

ВСТУП

Маючи в своєму розпорядженні адекватну методику визначення закону зміни опору повітря рухові балістичного тіла досліднику неважко розраховувати необхідні кінематичні характеристики, що супроводжують цей процес (кут підвищення, швидкість вильоту балістичного тіла даного калібру, ваги і форми), щоб він уразив ціль на певній віддалі, під даним кутом і з певною швидкістю. З другого боку, якщо розробники ракетної техніки мають можливість варіювати аеродинамічними характеристиками, які супроводжують політ керованого пристрою, то це є запорукою створення досконалих ракетних систем. Адже чим більший лобовий опір, тим більш потужнішою і тяжчою має бути двигунна установка для забезпечення необхідної швидкості руху та виконання передбачених польотним завданням маневрів. При цьому відповідно зростають витрати пального і необхідні для переміщення на визначену віддаль його запа-

си, і навпаки, зниження лобового опору дозволяє без суттєвого зростання ваги ракети, лише внаслідок зменшення злітної маси і економії у вазі двигунної установки і запасів палива збільшити корисну навантаженість ракетної системи, як, наприклад, бойової частини, апаратури систем керування, органів керування та оснащення іншими досконалішими агрегатами, обладнанням та пристроями.

В процесі моделювання руху особливу увагу звертають на атмосферні умови, які задаються в табличному або аналітичному вигляді. На практиці взаємозв'язок між параметрами, що визначають аеродинамічні фактори, є невідомий і, в основному, задається у вигляді деякої таблиці. Тому основною задачею, яка полягає у використанні наявних табличних даних для наближеного відновлення відповідного шуканого параметра у формі функціональної залежності, є задача про наближення (апроксимацію) функцій, тобто ідентифікація апроксимуючої залежності.

При цьому розрізняють два підходи: якщо наближення будується на заданій дискретній множині точок, то апроксимація називається точковою, до якої відносять інтерполяцію чи середньоквадратичне наближення; при побудові наближення на неперервній множині точок, апроксимація має назву неперервною (або інтегральною).

Слід також мати на увазі, що використання експериментальних даних завжди передбачає наявність випадкових похибок. Вони можуть бути зменшеними до як завгодно малого значення, але шляхом багатократного повторення дослідів та експериментів. Однак це не завжди доцільно, бо супроводжується значними матеріальними витратами та фактором часу, пов'язаним з проведенням експерименту. Значно ефективніше, в розумінні менш витратно і швидше, отримувати уточнені дані якісною математичною обробкою результатів спостережень і вимірювань. З історії розвитку зовнішньої балістики відомий випадок, який мав місце в тридцятих роках минулого сторіччя, коли в режимі економії було поставлено завдання підготувати таблиці бомбометань для деякого зразка бомби, єдиний екземпляр якої скидався в умовах, які допускали виконання балістичних вимірювань. Зрозуміло, що в подібних випадках інтерполяція неможлива, а екстраполяція без надійної теорії є ризикованою і ненадійною справою, що здатна привести до цілком помилкових кінцевих результатів.

У класичному аналізі методи дослідження функцій, заданих аналітично, доведені до досконалості, тоді як дослідження функцій, заданих таблично, складає значні технічні і методологічні труднощі. Тому значну роль відіграють математичні методи при аналізі результатів вимірювань.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ З ПРОБЛЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Відома значна кількість літературних джерел, на основі матеріалів яких можна розвивати математичні методи аналізу результатів вимірювань, спробувати виділити з загальних результатів вплив окремих з багаточисельної сукупності факторів, які так чи інакше впливають на перебіг

розглядуваного явища [1–3]. Але внаслідок того, що далеко не всі задачі балістики з розрахунку траєкторій руху мають точні замкнуті розв'язки, значну роль у розрахунковій практиці відіграють наближені методи, серед яких найбільш плідними є варіаційні методи [4–7] і методи функціонального аналізу [8–14].

Розглядаючи аеродинамічні сили, можна зазначити, що формулюючи задачу руху снаряда, відкидають майже всі сили, за винятком сили лобового опору. Однак існують випадки, коли таке припущення не є правильним, тобто не можна нехтувати впливом аеродинамічних сил, відмінних від сили лобового опору, оскільки постає суттєве питання стійкості рухомого об'єкту. При цьому виникає основна проблема – чи будуть різноманітні аеродинамічні сили і моменти намагатись погасити кут атаки або, навпаки, збільшувати його настільки, що відбудеться прокидання. Відповідь на це питання лежить в площині розгляду рівнянь руху у повній деталізації з урахуванням різних аеродинамічних сил. Рівняння руху стають надзвичайно складними та важкими для вивчення внаслідок набуття нелінійності. Загальний метод дослідження проблеми, як показують виконані дослідження в роботах [2, 4], полягають у заміні змінних таким чином, щоб швидкозмінні величини у рівняннях були замінені з використанням відповідних апроксимацій [11–13] такими, що змінюються плавно, внаслідок чого диференціальні рівняння, які описують рух об'єкта на значній частині траєкторії, стають близькими до лінійних. У випадку обертання снаряду його вісь, в середньому, відхилена вправо і доверху (для снарядів правого обертання). Саме ця обставина і є суттєвою, наприклад, у бомбометанні, внаслідок чого вона має більшу дальність, ніж це впливає з теорії, яка враховує тільки лобовий опір, а також пояснює причину відхилення снаряду вправо. Уточнюючі оцінки цих явищ можуть бути отриманими за допомогою методу поправок.

В серії робіт [15–17] показано, що перспективним напрямом визначення аеродинамічних параметрів, які супроводжують рух тіла в атмосфері, є напівемпіричний підхід, який заснований на апроксимації їх функ-

ціями, які можливо описати відповідними аналітичними виразами на основі отриманих експериментальних даних балістичних стрільб. Їх використання не вимагає значного устаткування і вирішується за допомогою використання ЕОМ з достатньої для складання таблиць стрільби точністю; при цьому проведено селекцію підходящих для цього аналітичних функцій та обґрунтовано можливість їх використання для опису сили опору повітря.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ СТАТТІ

Метою статті визначимо постановку задачі про найкраще наближення функції, належної до деякого класу у визначеному смислі відповідною функцією, а також ілюстрацію цього методу стосовно ідентифікації функції лобового опору з використанням даних радарних вимірювань доплерівської системи.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Теорія функціонального аналізу [8, 9] передбачає можливість апроксимації функцій інтерполяційними многочленами. Однак в ряді випадків інтерполяція неефективна, бо її застосування приводить до необхідності побудови многочленів високої степені, з якими не завжди зручно працювати. Цьому запобігають таким чином. Відрізок, на якому необхідно апроксимувати задану функцію $f(x)$, розбивають на частини малої довжини і для кожного з даних відрізків будується відповідний многочлен вже меншого степеня. Однак і цей прийом має свої недоліки, оскільки в багатьох випадках бажано мати наближену залежність, яка може бути застосованою для всього відрізка визначення заданої функції.

Інтерполяцію здійснюють таким чином, щоб інтерполяційний поліном вибирався з умови, що у вузлах його значення дорівнюють значенням функції $f(x)$. Але, якщо значення функції $f(x)$ у вузлах знайдено з похибкою (наприклад, є визначеними з певного експерименту), то, очевидно, точно прирівнювати значення многочлена і функції у вузлах недоцільно. Значно ефективніше в цьому випадку підбирати для апроксимації таку функцію,

яка може і не рівна заданій функції у визначених вузлах, проте найкраще наближає цю функцію на всьому відрізку.

Розглянемо загальні засади теорії апроксимації. Нехай M – деяка множина в просторі дійсних чисел $\mathcal{R}$. Зокрема, це може бути відрізок $[a; b]$ або скінчена сукупність точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ з відрізка $[a; b]$. Далі, нехай в множині M задано деякий простір (множину) функцій (наприклад, простір неперервних функцій, простір кусково-гладких функцій, простір функцій, сумованих з квадратом тощо), який позначатимемо через $H(M)$. Нехай цей простір лінійний і нормований. Візьмемо в $H(M)$ $m+1$ лінійно незалежних елементів $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ і розглянемо всі можливі комбінації

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x). \quad (1)$$

Множина такого роду функцій $\varphi(x)$ утворює $(m+1)$ -вимірний лінійний нормований простір, який позначимо через W_{m+1} .

Нормований простір $H(M)$ перетворюється в метричний за допомогою введення метрики згідно формули

$$\rho(f, g) = \|f - g\|, \text{ де } f, g \in H(M).$$

Нехай $f(x)$ деяка фіксована функція з $H(M)$ і така, що $f(x) \notin W_{m+1}$. Числова множина $\rho(f, g)$ обмежена знизу (згідно означення норми – це невід'ємні числа). Тому існує нижня межа значень $\rho(f, g)$.

$$\text{Внаслідок цього число } \rho_0 = \inf_{\varphi(x) \in W_{m+1}} \rho(f, \varphi)$$

назвемо відстанню від f до класу W_{m+1} , а елемент $\hat{\varphi}$ такий, що $\rho(f, \hat{\varphi}) = \rho_0$, назвемо елементом найкращого наближення (найкращим елементом).

Розглядаючи різні простори і вводячи порізноручну норму в них, дістають різні конкретні випадки теорії апроксимації.

Виконуючи постановку задачі про апроксимацію деякої функції, що описує той чи інший технічний процес або явище, природно виникає питання про існування і єдиність елемента найкращого наближення.

Для довільних нормованих просторів ця задача складає значні труднощі, однак апроксимація функціями виду (1) передбачає

існування найкращого елемента, проте не завжди єдиного.

В арсеналі дослідника, що вивчає реальні технічні процеси перебігу складних явищ, значну перевагу має апарат рівномірного наближення функцій. Нехай маємо простір неперервних функцій $C[a; b]$ на якому введено норму $\|f\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|$, яка в цьому просторі визначає метрику $\rho(f, g) = \|f - g\| = \max_{x \in [a; b]} |f(x) - g(x)|$. Тоді побудова елемента найкращого наближення в цьому просторі зводиться до відшукування таких коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_m$ лінійної комбінації $\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$, де $\{\varphi_j(x)\}$ – деякі лінійно незалежні функції з простору $C[a; b]$, що величина

$$\max_{x \in [a; b]} \left| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) \right|$$

набуває найменшого значення.

Задача апроксимації в цьому випадку називається задачею найкращого рівномірного або чебишовського наближення на проміжку $[a; b]$.

Найчастіше за систему $\{\varphi_j(x)\}$ вибирають степеневі функції $1, x, x^2, \dots, x^m$, тобто задача найкращого рівномірного наближення виконується алгебраїчними многочленами.

Треба брати до уваги, що коли функція $f(x)$ задана лише в скінченій кількості точок $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, що відповідає дискретному

випадку, то норма $\|f\| = \max_{x \in Q} |f(x)|$ і знаходження елемента найкращого наближення в цьому випадку зводиться до відшукування такої функції $g(x)$, для якої $\|f(x) - g(x)\| = \max_{x \in Q} |f(x) - g(x)|$ набуває найменшого значення.

Чебишовські наближення відіграють важливу роль у практичних застосуваннях, зокрема, якщо інформацію про досліджувані функції треба зберігати в пам'яті обчислювальних систем. Вводити масив значень функції в пам'ять не ефективно,

оскільки для цього треба відводити значний об'єм в машинному просторі і витратити багато часу для відшукування необхідного значення функції, що становить значні труднощі в реальних умовах підготовки даних для ведення вогню артилерійських систем. Тому ефективніше дану функцію $f(x)$ замінювати деякою іншою $g(x)$, яка обчислюється значно простіше; при цьому функцію $g(x)$ визначають таким чином, щоб вона на заданій множині значень аргументу відхилялася від вихідної функції $f(x)$ не більш ніж на задану (достатньо малу) величину ε .

Наближений розв'язок задачі чебишовського наближення функції $f(x)$

$$\sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

узагальненим поліномом виду вирішується так: вибирається на проміжку $[a; b]$ досить густа сітка точок $G = \{x_1, \dots, x_n\}$ і ставиться задача про відшукування таких значень $a_0, a_1, \dots, a_m$, за яких величина

$$\rho^* = \max_{1 \leq i \leq n} \left| f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \right| \quad (2)$$

досягає найменшого значення. Якщо вибрана сітка G достатньо густа, то величина ρ^* близька до значення віддалі $\rho(f, g)$ в просторі $C[a; b]$, а поліном $\varphi^*(x)$, який найкраще наближає функцію $f(x)$ на дискретній множині точок $G = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, достатньо близький до шуканого полінома $\varphi(x)$, який найкраще наближає задану функцію $f(x)$ на всьому відрізку $[a; b]$.

Наступний етап – відшукування найменшого значення величини η за обмежень

$$\left| f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) \right| \leq \eta \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

або, що рівнозначно, вирішення задачі мінімізації η при обмеженнях

$$-f(x_i) + \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) + \eta \geq 0$$

$$f(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x_i) + \eta \geq 0 \quad (3)$$

В залежностях (2), (3) $f(x_i)$, $\varphi_j(x_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) – відомі числа, причому значення $\varphi_j(x_i)$ є коефіцієнтами при невідомих a_j . Отже, обмеження (3) є системою $2n$ лінійних нерівностей відносно змінних $a_0, a_1, \dots, a_m, \eta$. Цільова функція $Z = \eta$, яку треба мінімізувати, також лінійна відносно вказаної системи змінних $a_0, a_1, \dots, a_m, \eta$. Таким чином, вирішення поставленої задачі зведено до задачі лінійного програмування [3, 5], вирішення якої неважко здійснити з використанням адаптованих схем відповідно до вибраного операційного середовища.

Очевидно, що коли найкраще чебишовське наближення функції $f(x)$ шукається не на відрізку $[a,b]$, а на дискретній множині G (наприклад, якщо функція $f(x)$ задана таблично, що відповідає випадку, найбільш наближеному до практики), то таку задачу описаним способом можна розв'язати достатньо точно (звичайно з точністю до похибок обчислень).

На практиці значний інтерес становить задача найкращого наближення в евклідовому просторі, тобто в деякому лінійному просторі, де визначено операцію скалярного добутку [8, 9].

Нехай $f(x)$ – деяка функція з евклідового простору E . Будемо наближати її узагальненим многочленом, заданим у вигляді (1), в якому $\{\varphi_j(x)\}$ – лінійно незалежні функції з простору E . Задача найкращого наближення формулюється стандартним чином: підібрати коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_m$ узагальненого многочлена $\varphi(x)$ так, щоб величина

$$\rho^2(f, \varphi) = \|f(x) - \varphi(x)\|^2 = \left\| f(x) - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x) \right\|^2$$

була найменшою (для зручності мінімізується не сама відстань, а її квадрат). Многочлен $\varphi(x)$, який мінімізує величину $\rho^2(f, \varphi)$, називається многочленом найкращого середньоквадратичного наближення [12]

функції $f(x)$, а метод, який реалізує дану задачу має назву метод найменших квадратів [2, 12]. Величина, яка мінімізується, є функцією коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_m$, яку позначимо як $S(x; a_0, a_1, \dots, a_m)$. Опускаючи для зручності записів аргумент x запишемо явний вираз введеної функції $S(x; a_0, a_1, \dots, a_m)$:

$$\begin{aligned} S(x; a_0, a_1, \dots, a_m) &= \left\| f - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j \right\|^2 = \\ &= \left(f - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j, f - \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{j=0}^m a_j (f, \varphi_j) + \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m a_j a_k (\varphi_j, \varphi_k) \end{aligned}$$

Використовуючи стандартну процедуру апарату функцій багатьох змінних для відшукування їх екстремальних значень (в даному випадку мінімуму) зведемо розв'язування задачі про визначення шуканих коефіцієнтів до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (в теорії має назву нормальна система)

$$\sum_{j=0}^m a_j (\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, m), \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_j) &= \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \\ (f, \varphi_i) &= \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx. \end{aligned}$$

Визначник системи (4)

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \dots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{vmatrix}$$

є визначником Грама системи функцій $\varphi_k(x)$ [6, 18]. Відомо, що цей визначник не рівний нулю (він завжди додатний), якщо система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ лінійно незалежна. Тому система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок.

Таким чином, знаходження многочлена $\varphi(x)$, який дає найкраще середньоквадратичне

наближення функції $f(x)$, зведено до розв'язування лінійної алгебраїчної системи рівнянь виду (4).

Часто за систему $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ беруть функції $1, x, x^2, \dots, x^m$, які належать простору $C_2[a; b]$ – простір функцій, що мають на проміжку $[a; b]$ неперервні похідні до 2-го порядку включно, і лінійно незалежні при будь-якому показнику m . У цьому випадку $\varphi(x)$ буде звичайним алгебраїчним многочленом

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

При цьому елементом найкращого наближення для функції $f(x) \in C_2[a; b]$ буде многочлен $P_m(x)$, для якого $\|f(x) - P_m(x)\|^2$ набуває найменшого значення.

Розглянемо процедуру наближення функцій, заданих таблично, методом найменших квадратів. Припустимо, що функція $f(x)$ задана своїми значеннями в скінченному числі точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ з відрізка $[a; b]$. Найкраще наближення даної функції $f(x)$ дається виразом (1), причому $m \leq n$. У цьому випадку многочлен найкращого наближення шукається в просторі функцій, що задані на дискретній множині точок $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ з скалярним добутком

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i).$$

Позначимо простір з введеним добутком через E_{n+1} . Норми елементів і відстань між двома елементами визначаються формулами

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\sum_{i=0}^n f^2(x_i)};$$

$$\rho(f, g) = \sqrt{\sum_{i=0}^n [f(x_i) - g(x_i)]^2}.$$

Тоді коефіцієнти $a_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ многочлена найкращого наближення знаходяться відповідно до нормальної системи (4), в якій визначено:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=0}^n \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k);$$

$$(f, \varphi_i) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \varphi_i(x_k).$$

При $m = n$ многочлен найкращого наближення, побудований методом найменших квадратів, збігається з інтерполяційним многочленом; справді, для цього випадку буде

$$\begin{aligned} S(x; a_0, a_1, \dots, a_m) &= \rho^2(f, g) = \\ &= \sum_{i=0}^n [f(x_i) - g(x_i)]^2 = 0 \end{aligned}$$

а для величини $\rho^2(f, g)$ значення 0 є найменшим з усіх можливих.

Якщо $m \geq n+1$, то система функцій $a_j (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ лінійно залежна в E_{n+1} . Це впливає з того, що многочлен

$$\begin{aligned} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) &= \\ &= x^{n+1} + \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 \end{aligned}$$

на дискретній множині Q набуває нульових значень.

Нарешті у випадку $m \leq n$ функції $1, x, x^2, \dots, x^m$ лінійно незалежні в E_{n+1} ; дійсно, лінійна комбінація $\alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_0$,

де не всі α_i дорівнюють нулю, не може набувати нульових значень для всіх $Q = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (згідно основної теореми алгебри многочлен степеня m не може мати більше ніж m нулів). Отже, визначник нормальної системи (4) як визначник Грама лінійно незалежних функцій, не дорівнює нулеві.

На даний час широкого розповсюдження для інтерполяції отримало використання кубічних сплайн-функцій – спеціальним чином побудованих многочленів третього степеня. Їх можна трактувати механічно як деяку математичну модель гнучкого тонкого стержня з пружного матеріалу. Якщо закріпити його в двох сусідніх вузлах інтерполяції з визначеними кутами нахилів, то між точками закріплення цей стержень (механічний сплайн) прийме деяку форму, яка мінімізує його потенціальну енергію.

Нехай форма цього стержня визначається функцією $y=S(x)$. Тоді на основі рівняння зігнутої осі стержня випливає, що між кожною парою сусідніх вузлів інтерполяції функція $S(x)$ є многочленом третьої степені. Запишемо її у вигляді

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i. \quad (5)$$

Для визначення коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i на всіх n елементарних відрізках необхідно дістати $4n$ рівнянь. Частина з них випливає з умов проходження графіка функції $S(x)$ через задані точки, тобто $S(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $S(x_i) = y_i$. Ці умови можна записати у вигляді

$$S(x_{i-1}) = a_i = y_{i-1}, \quad (6)$$

$$S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i,$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Ця система містить $2n$ рівнянь. Для отримання решти необхідних рівнянь задамо умови неперервності перших і других похідних у вузлах інтерполяції, тобто умови гладкості кривої у всіх точках.

Обчислимо похідні многочлена (5):

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$$

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Прирівнюючи в кожному внутрішньому вузлі $x=x_i$ значення цих похідних, обчислених в лівому і правому від вузла інтервалах, отримуємо $2n-2$ рівнянь

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad (8)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i. \quad (9)$$

Останні з двох необхідних співвідношень отримуються з умов закріплення кінців сплайна.

Зокрема, при вільному закріпленні кінців можна прирівняти до нуля кривизну лінії в цих точках. Така функція, що має назву вільний кубічний сплайн, володіє властивістю мінімальної кривизни, тобто вона найгладша серед всіх інтерполяційних функцій даного класу. З умов нульової кривизни на кінцях випливають рівності нулю других похідних в цих точках:

$$S''(x_0) = c_1 = 0, \quad S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \quad (10)$$

Рівняння (6)–(10) складають систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $4n$ коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

З метою економії пам'яті ЕОМ і машинного часу цю систему можна звести до більш зручного вигляду. З умови (6) відразу визначаються коефіцієнти a_i . Далі з (9), (10) отримуємо

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \quad (11)$$

Підставимо ці залежності, а також значення $a_i = y_{i-1}$ у (7) і знаходимо звідси коефіцієнти

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n. \quad (12)$$

Враховуючи вирази (11), (12), виключаємо з рівняння (8) коефіцієнти b_i, d_i . Остаточо дістаємо таку систему рівнянь тільки для коефіцієнтів c_i :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad c_{n+1} = 0, \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} &= \\ &= 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Матриця цієї системи трьохдіагональна, тобто ненульові елементи знаходяться тільки на головній і двох сусідніх з нею діагоналях, розміщених зверху і знизу. Для її розв'язування доцільно використовувати метод прогонки. За знайденими з системи (13) коефіцієнтами c_i легко обчислити коефіцієнти b_i, d_i .

Перейдемо до випадку глобальної інтерполяції, тобто побудови інтерполяційного многочлена, єдиного для всього відрізка $[x_0, x_n]$. При цьому, природно, що графік інтерполяційного многочлена має проходити через всі задані точки.

Запишемо шуканий многочлен у вигляді

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (14)$$

З умов рівності значень цього многочлена у вузлах x_i відповідним заданим табличним значенням y_i отримуємо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= y_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Можна показати, що ця система має єдиний розв'язок, якщо серед вузлів інтерполяції немає співпадаючих, тобто якщо $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Розв'язавши цю систему знаходимо коефіцієнти інтерполяційного многочлена. Однак слід відзначити, що такий шлях побудови інтерполяційного многочлена потребує значного обсягу обчислень, особливо при великому числі вузлів. Існують більш прості алгоритми побудови інтерполяційного многочлена.

Будемо шукати многочлен у вигляді лінійної комбінації многочленів степені n :

$$L(x) = y_0l_0(x) + y_1l_1(x) + y_2l_2(x) + \dots + y_nl_n(x). \quad (16)$$

При цьому вимагатимемо, щоб кожний многочлен $l_i(x)$ обертався в нуль у всіх вузлах інтерполяції, за виключенням одного (i -го), де він має дорівнювати одиниці. Легко перевірити, що цим умовам відповідає многочлен виду

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}. \quad (17)$$

Справді, $l_0(x_0) = 1$ при $x = x_0$. При $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ чисельник виразу (14) обертається в нуль. За аналогією з (17) отримуємо

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}, \\ l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}, \\ &\vdots \\ l_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\vdots$$

Підставляючи в (16) вирази (17), (18), знаходимо відомий вигляд формули інтерполяційного многочлена Лагранжа [15]. З цієї формули можна отримати вирази для лінійної інтерполяції ($n=1$) і квадратичної ($n=2$) інтерполяції:

$$\begin{aligned} L(x) &= y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \quad n=1, \\ L(x) &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \\ &+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, \quad n=2. \end{aligned}$$

Існує декілька узагальнень інтерполяційного многочлена Лагранжа. Наприклад, досить широко використовуються інтерполяційні многочлени Ерміта. В цьому випадку поряд зі значеннями функції y_i у вузлах x_i задаються

значення її похідної y'_i . Задача полягає в тому, щоб знайти многочлен $\varphi(x)$ степені $2n+1$, значення якого і його похідної у вузлах x_i задовольняють відповідно співвідношенням

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad \varphi'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

У цьому випадку також існує єдиний розв'язок, якщо всі значення x_i різні.

У праці [19] розвинуто спосіб ідентифікації функції лобового опору $K_d(v) = K_d(v/a) = K_d(t)$, причому v/a – приведені значення модуля вектора швидкості руху об'єкта в атмосфері до швидкості поширення звуку a , який ґрунтується на її поданні через ступінчасті – одиничні функції Гевісайда, або, як їх ще називають, «ярусні» функції [18]. Алгоритм визначення невідомих коефіцієнтів у вказаному розвиненні передбачає співставлення двох траєкторій: в безповітряному просторі (опорна траєкторія) і в атмосферних умовах (реальна траєкторія). Елементи реальної траєкторії (компоненти вектора швидкості, координати) визначаються чисельно з використанням однокрокового методу Ейлера-Коші. Отримані розрахункові залежності для знаходження коефіцієнтів, які ідентифікують функцію лобового опору, виражені через компоненти вектора нев'язок, який

формується з біжучих значень (x, y) складових траєкторії руху снаряда в умовах атмосферного спротиву, компоненти якого визначені в задані дискретні моменти часу шляхом розв'язування задачі Коші на основі однокрокового методу Ейлера-Коші [19-23], та вектор опорної траєкторії, яка передбачається відомою і має вигляд параболи [25].

В серії робіт [26–28] розвинуто підхід до ідентифікації коефіцієнтів, які визначають криву аеродинамічного лобового опору руху, що ґрунтується на формулюванні мінімаксної задачі стосовно похибки відслідковування сліду траєкторії з використанням доплерівської радарної установки; ця похибка є відхиленням між швидкістю v_r , заміряною доплерівським радаром, і швидкістю v_d в радіальному напрямі стосовно зафіксованого місцеперебування радарної установки, тобто

$$\min_{K_d(t)} \sup_{K_d(t)} |e(t)| = \min_{K_d(t)} \sup_{t \in [0; T]} |v_r(t) - v_d(t)|$$

для кожного набору значень функції лобового опору варійованих траєкторій.

Виконуючи кроки, передбачені розвиненим у [19] чисельним алгоритмом розв'язання системи диференціальних рівнянь руху зовнішньої балістики [4, 29, 30], але вже на основі відхилення з допомогою вектора нев'язки $\{\delta\} = (\delta_i^{(u)}, \delta_i^{(w)})$, сформованого відносно компонент вектора біжучої швидкості, дістанемо такі значення коефіцієнтів лобового опору:

$$K_D^{(i)} = \max \left\{ \frac{\delta_1^{(u)}}{\frac{\rho \tau_0}{C} u_0 v_0}; \frac{\delta_1^{(w)}}{\frac{\rho \tau_0}{C} w_0 v_0} \right\};$$

$$K_D^{(i)} = \max \left\{ \frac{\Delta_i^{(u)}}{\frac{\rho \tau_0}{C} u_{i-1} v_{i-1}}; \frac{\Delta_i^{(w)}}{\frac{\rho \tau_0}{C} w_{i-1} v_{i-1}} \right\} \quad (19)$$

для довільних значень $i=2, 3, \dots, N$; $\tau_0 = T/N$ – значення кроку розбиття часового проміжку $[0; T]$; T – час польоту тіла в безповітряному просторі до падіння на землю; C – балістичний коефіцієнт рухомого тіла в атмосфері, $C = m/d^2$; m – маса тіла; ρ – вагова густина повітря (в першому наближенні вважаємо сталою); $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ – модуль швидкості в довільний

момент часу; (x, y) – координати рухомого тіла в довільний момент часу t ;

$$\Delta_i^{(u)} = \delta_i^{(u)} - F(u_0, u_1, \dots, u_{i-1}; v_0, v_1, \dots, v_{i-1});$$

$$\Delta_i^{(w)} = \delta_i^{(w)} - F(w_0, w_1, \dots, w_{i-1}; v_0, v_1, \dots, v_{i-1});$$

$$F(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{i-1}; v_0, v_1, \dots, v_{i-1}) =$$

$$= \frac{\rho \tau_0}{C} \sum_{j=1}^{i-1} \xi_{j-1} v_{j-1} K_D^{(j)}$$

Складові вектора нев'язки $\{\delta\} = (\delta_i^{(u)}, \delta_i^{(w)})$ мають узгоджуватись зі значенням похибки сліду траєкторії, яку стосовно розглядуваного випадку сформуємо так:

$$e_{bi} = \sup_{t \in [0; T]} |v_r(t_i) - v_d(t_i)|. \quad (20)$$

У співвідношенні (20) визначено:

$$v_d(t_i) = \frac{u(t_i)r_{xi} + w(t_i)r_{yi}}{\sqrt{r_{xi}^2 + r_{yi}^2}}; \quad r_{xi} = x_i - x_r;$$

$r_{yi} = y_i - y_r$; $t_i = i\tau_0$; $x(t)$, $y(t)$ – значення координат точок траєкторії, знаходяться з допомогою інтегрування сформованих на основі таблиць, знайдених компонент вектора швидкості вздовж траєкторії (u_i, w_i) , за формулою трапецій [22–24], які приводяться до рекурентних залежностей

$$x_i = x(t_i) = x_{i-1} + \frac{\tau_0}{2} (u_{i-1} + u_i),$$

$$y_i = y(t_i) = y_{i-1} + \frac{\tau_0}{2} (w_{i-1} + w_i),$$

$$x(0) = x_0 = 0; \quad y(0) = y_0 = 0.$$

Враховуючи суть доплерівського відстежування траєкторії руху та введеної похибки згідно з (20), маємо залежність

$$\sqrt{\delta_i^{(u)2} + \delta_i^{(w)2}} \leq e_{bi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Наступним кроком в уточненні викладеного тут підходу має стати використання методики кусково-лінійної апроксимації, яка полягає в заміні функції ламаними лініями, що складаються з прямолінійних відрізків.

Для побудови розглянемо кусково-лінійну апроксимацію функції однієї змінної $h(x)$, заданої на відрізку $[0; a]$. Розіб'ємо відрізок на r частин точками $x_0 < x_1 < \dots < x_r$ таким чином, щоб $x_0 = 0$, $x_r = a$ (рис. 1)

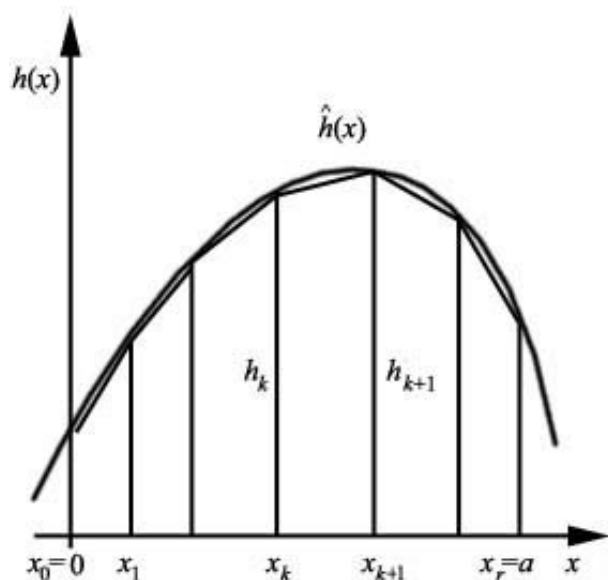


Рис. 1. Ілюстрація методу кусково-лінійної апроксимації

Обчислимо значення функції $h_k(x)$ ($k=0,1,\dots,r$) в цих точках. Сполучимо попарно точки $(x_k; h_k)$ і $(x_{k+1}; h_{k+1})$ відрізками прямої. Ламана $\hat{h}(x)$, яка складається з цих відрізків, апроксимує функцію $h(x)$ на відрізку $[0; a]$. Відзначимо, що точність можна збільшити за рахунок більш дрібного розбиття відрізка.

Рівняння ділянки ламаної $\hat{h}(x)$ між точками $(x_k; h_k)$ і $(x_{k+1}; h_{k+1})$ має вигляд:

$$\frac{\hat{h}(x) - h_k}{h_{k+1} - h_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

(рівняння прямої за двома точками).

Якщо кожне з цих співвідношень в рівності позначити через λ , то отримуємо:

$$x = \lambda x_{k+1} + (1 - \lambda)x_k,$$

$$\hat{h}(x) = \lambda h_{k+1} + (1 - \lambda)h_k, \text{ причому } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Відзначимо, що для кожного $x \in [x_k; x_{k+1}]$ існує єдине значення λ , яке задовольняє даним умовам.

Позначимо $1 - \lambda = \lambda_k$, $\lambda = \lambda_{k+1}$ перепишемо дані залежності у вигляді:

$$x = \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1},$$

$$\hat{h}(x) = \lambda_k h_k + \lambda_{k+1} h_{k+1},$$

де $\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1$, $\lambda_k \geq 0$, $\lambda_{k+1} \geq 0$.

Отримані рівняння називаються параметричні рівняння відрізка. Якщо $h(x) \equiv 0$, то друга залежність обертається в тотожність $0=0$, а перша має вигляд рівняння відрізка, який лежить на осі абсцис.

Таким чином для довільного $x \in [0; a]$ рівняння ламаної можна записати у вигляді:

$$x = \sum_{k=0}^r \lambda_k x_k, \quad \hat{h}(x) = \sum_{k=0}^r \lambda_k h_k, \quad \sum_{k=0}^r \lambda_k = 1 \text{ і}$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r),$$

причому завжди відмінні від нуля два значення λ_k (якщо x є внутрішньою точкою k -го відрізка розбиття) або одно (якщо x співпадає з кінцем відрізка).

ВИСНОВКИ

Отже, в статті викладено методологічну схему наближення функцій, значення які можуть задаватись або у вигляді дискретних значень, або на неперервній множині точок. Дано аналіз найбільш вживаних випадків апроксимуючих залежностей. Вказано спосіб відшукування найменшого значення, яке відображає процедуру наближення заданої функції у чебишевському сенсі узагальненим поліномом. Обговорено можливість інтерполяції сплайн-функціями, які мають відповідний механічний смисл. Загальна методика апроксимації ілюструється узагальненням задачі ідентифікації функції лобового опору, яка найсуттєвіше впливає на рух тіла в атмосфері, побудовою чисельного алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь нормального виду, шляхом синтезу апроксимації функції лобового опору так званими ярусними або ступінчастими функціями та співставленням відхилень значень швидкості з похибкою відслідковування сліду траєкторії радарною установкою доплерівського типу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Коллатц Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика / Ф. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 444 с.
- [2] Вапник В.Н. Восстановление зависимости по эмпирическим данным / В.Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 448 с.
- [3] Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. – К. : Наук. думка, 1982. – 252 с.
- [4] Современная математика для инженеров / Под ред. Э.Ф. Беккенбаха. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 500 с.

- [5] Лучко Й.Й. Методи прикладної математики в інженерній практиці / Й.Й. Лучко, Є.Г. Іваник. Навчальний посібник; За ред. д. т. н., проф. Й.Й. Лучка. – Львів: Каменяр, 2011. – 430 с.
- [6] Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1969. – 424 с.
- [7] Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Л. Янг. – М. : Мир, 1974. – 428 с.
- [8] Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
- [9] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 544 с.
- [10] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960. – 624 с.
- [11] Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 346 с.
- [12] Линник Ю.Ю. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений / Ю.Ю. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 211 с.
- [13] Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / [Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Ягола А.Г.]. – М. : Наука, 1983. – 200 с.
- [14] Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М. : Мир, 1974. – 324 с.
- [15] Грабчак В.І. Апроксимація функцій аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак // Військово-технічний збірник. – 2012. – № 2(7). – С.20-24.
- [16] Грабчак В.І. Аналіз існуючих та перспективних методів визначення сили опору повітря руху снарядів / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко // Військово-технічний збірник. – 2013. – № 2(9). – С. 13–19.
- [17] Грабчак В.І. Апроксимація сили опору повітря руху снарядів аналітичними функціями / В.І. Грабчак, Ю.М. Косовцов, С.В. Бондаренко. – Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. Науковий журнал. – К.: НУОУ. – 2014. – Вип. 1(19). – С. 19–23.
- [18] Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1975. – 831 с.
- [19] Грабчак В.І. Застосування апроксимаційних методів до ідентифікації функції лобового опору / В.І. Грабчак, Є.Г. Іваник // Військово-технічний збірник. – № 2 (11). – Львів: АСВ, 2014. – С.13–19.
- [20] Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 272 с.
- [21] Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М. : Наука, 1986. – 744 с.
- [22] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 632 с.
- [23] Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М. : Наука, 1966. – 632 с.
- [24] Гаврилюк І.П. Методи обчислень / І.П. Гаврилюк, В.Л. Макаров. – Київ: Вища школа, 1995. – Ч. 1 – 452 с.; – Ч. 2. – 431 с.
- [25] Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. / Н.Н. Бухгольц. – М. : Наука, 1972. – 282 с.
- [26] Chen Y. Iterative learning identification of aerodynamic drag curve from tracking radar measurements / Y. Chen, Wen C., Dou H., Sun M. // Control Eng. Practice. – 1997. – Vol. 5, N 5. – P.1543–1553.
- [27] Chen Y. Drag coefficient curve identification of projectiles from flight tests via optimal dynamic fitting / Y. Chen, Wen C., Gong Z., Sun M. // Control Eng. Practice. – 1997. – Vol. 5, N 5. – P.627–636.
- [28] Chen Y. High-order iterative learning identification of projectile's aerodynamic drag coefficient curve from radar measured velocity data / Y. Chen, Wen C., Xu J-X., Sun M. // IEEE transactions of control systems technology. – 1998. – Vol. 6, N 4. – P.1543–1553.
- [29] Коновалов А.А. Внешняя баллистика / А.А. Коновалов, Ю.В. Николаев. – М. : ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.
- [30] Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – М. : ВВА, 1972. – 184 с.