

Можливості використання системи комп'ютерної математики Mathematica для розв'язування задач математичного аналізу

Кобильник Т.П., Жидик В.Б.

email: taras2408@mail.ru

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра інформатики та обчислювальної математики

У статті охарактеризовано можливості використання системи комп'ютерної математики до розв'язування окремих задач математичного аналізу, зокрема дослідження функцій на неперервність, дослідження функцій засобами диференціального числення, інтегральне числення функції однієї змінної.

Ключові слова: система комп'ютерної математики Mathematica, математичний аналіз.

Фундаментом математики є математичний аналіз. Курс математичного аналізу в університеті, як правило, починається з вивчення понять послідовності, границі послідовності та функції. Основою математичного аналізу є диференціальне та інтегральне. Часто на практичних заняттях використовують збірники задач з математичного аналізу Демидовича Б.П. [2] та Бермана Г.Н. [1].

На сьогодні існує досить багато СКМ, за допомогою яких можна розв'язувати складні математичні задачі за невеликий проміжок часу. У навчальному посібнику [4] поряд з теоретичними відомостями наведено приклади застосування комп'ютерних засобів математики, зокрема Gran1, Maxima, MathCAD, до розв'язування задач інтегрального числення функцій однієї змінної.

Розглянемо можливості використання системи комп'ютерної математики Mathematica [3] для розв'язування типових задач математичного аналізу.

Для знаходження границі функції у системі Mathematica використовується вказівка `Limit[expr, x->x0]`, за якою обчислюється границя виразу `expr` при $x \rightarrow x_0$. За допомогою опції `Direction` вказується напрям, в якому відбувається наближення до границі. Опція використовується у вигляді `Direction->1` (або `-1`), за замовчуванням `Automatic`. Значення `1` вказує на обчислення лівосторонньої границі, а `-1` – правосторонньої. Наведемо приклади:

```
Limit[Sin[x]/x, x->0]
1
Limit[Tan[x], x->Pi/2, Direction->1]
(*лівостороння границя*)
∞
Limit[Tan[x], x->Pi/2, Direction->-1]
(*правостороння границя*)
-∞
```

Ліво- та правосторонні границі використовуються при дослідженні функції на неперервність. При цьому точки розриву можуть бути першого або другого родів. Функції, що мають тільки розриви першого роду називають кусково-неперервними. Прикладом може бути східчаста функція, що на проміжках неперервності набуває сталих значень, а в кількох точках області задання змінюється стрибкоподібно на деяку величину. Прикладами функцій з розривом другого роду є $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Для задання кусково-неперервних функцій використовуються вказівки:

```
Piecewise[{{val1, cond1}, {val2, cond2}, ..., {valn, condn}}] – параметри задаються парами і визначають значення функції vali, що задовольняють умові condi ( $i \in \overline{1, n}$ ). Piecewise[{{val1, cond1}, ..., val}] – через останній параметр визначається функція на інтервалах, що залишилися.
```

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$, якщо $x \neq 0$ і $f(0) = 1$.

Розв'язування. Задамо функцію $f(x)$:

```
f = Piecewise[{{Abs[Sin[x] / x], x ≠ 0}, {1, 0}}]
```

```
{ Abs[ Sin[x] ]   x ≠ 0
  { 1             0
  { 0             True
```

Точка $x=0$ підозріла на розрив. Обчислимо ліво- та правосторонні границі при $x \rightarrow 0$:

```
Limit[f, x → 0, Direction → -1]
```

```
1
```

```
Limit[f, x → 0, Direction → 1]
```

```
1
```

Як видно, ліво- та правосторонні границі функції $f(x)$ дорівнюють одиниці. Звідси і з того, що $f(0)=1$, випливає, що функція

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ є неперервною.

Приклад 2. Задана функція

$$y(x) = \begin{cases} |x-1|, & |x| > 1, \\ \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

Знайти точки розриву, якщо вони існують.

Розв'язування. Задамо кусково-неперервну функцію за допомогою Piecewise:

```
y = Piecewise[{{Abs[x-1], Abs[x] > 1}, {Cos[Pi*x/2], Abs[x] ≤ 1}}]
```

```
{ Abs[-1+x] Abs[x] > 1
  { Cos[ Pi*x/2 ] Abs[x] ≤ 1
  { 0           True
```

На заданих інтервалах функція неперервна. Точки, в яких вона може мати розрив, це граничні точки $x = \pm 1$. Для дослідження на неперервність обчислимо ліво- та правосторонні границі в точках $x = -1$

```
(*x=-1*)
```

```
Limit[y, x → -1, Direction → -1]
```

```
Limit[y, x → -1, Direction → 1]
```

```
0
```

```
2
```

та $x=1$:

```
Limit[y, x → 1, Direction → -1]
```

```
Limit[y, x → 1, Direction → 1]
```

```
0
```

```
0
```

Як видно, у точці $x = -1$ ліво- та правосторонні границі не дорівнюють одна одній, тому функція в цій точці розривна (розрив першого роду). У точці $x = 1$ функція неперервна.

Приклад 3. При якому значенні параметра a функція

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

буде неперервною.

Розв'язування. На заданих інтервалах функція неперервна. Єдиною точкою, в якій може бути розрив, це гранична точка $x = 0$. Для того щоб функція в цій точці була неперервною, необхідно і достатньо, щоб існували рівні між собою ліво- та правосторонні границі функції при $x = 0$. Задамо функцію $f(x)$ та обчислимо ліво- та правосторонні границі при $x = 0$:

```
f = Piecewise[{{Exp[x], x < 0}, {a+x, x ≥ 0}}]
```

```
{ e^x   x < 0
  { a+x  x ≥ 0
  { 0    True
```

```
a1 = Limit[f, x → 0, Direction → -1]
```

```
a
```

```
a2 = Limit[f, x → 0, Direction → 1]
```

```
1
```

Звідси отримуємо рівняння для знаходження параметра a , яке розв'язуємо з використанням функції Solve:

```
Solve[a1 == a2, a]
```

```
{{a → 1}}
```

При знайденому значенні параметра $a = 1$ функція $f(x)$ є неперервною.

1.5.2 Обчислення похідних

Засобами для символьного обчислення похідних, що містяться в ядрі системи Mathematica, охоплюються практично всі важливі типи математичних виразів. До них можуть входити як елементарні, так і спеціальні математичні функції.

Для обчислення похідних у системі Mathematica використовуються наступні функції:

D[f,x] – повертається частинна похідна функції f за змінною x ;

D[f,{x,n}] – повертається частинна похідна n -го порядку функції f за змінною x ;

D[f,x1,x2,...] – повертається змішана похідна функції f за змінними $x1, x2, \dots$;

Dt[f,x] – повертається повна похідна функції f за змінною x за умови, що всі змінні, які входять до f , залежать від x ;

Dt[f] – повертається повний диференціал функції f .

Наведемо кілька прикладів.

```
f=Sin[x]*Cos[y];
```

```
D[f,x](*похідна функції f за змінною x*)
```

```
Cos[x] Cos[y]
```

```
D[f,{x,3}](*похідна 3-го порядку функції f за змінною x*)
```

```

-Cos[x] Cos[y]
D[f,x,y] (*змішана похідна 2-го
порядку функції f за змінними x та
y*)
-Cos[x] Sin[y]
Dt[f,x] (*похідна функції f за
змінною x, y=f(x)*)
Cos[x] Cos[y] - Dt[y, x] Sin[x] Sin[y]
Dt[f] (*повний диференціал функції
f*)
Cos[x] Cos[y] Dt[x] - Dt[y] Sin[x] Sin[y]

```

Розглянемо використання похідної для дослідження функції за такою схемою:

1. Область визначення функції та її характерні точки (точки розриву, точки перетину графіка функції з осями координат).
2. Визначення парності, непарності та періодичності функції.
3. Проміжки знакосталості.
4. Проміжки зростання (спадання) функції.
5. Екстремуми функції, найбільше та найменше значення.
6. Проміжки опуклості (вгнутості) функції та точки перегину.
7. Вертикальні та похилі асимптоти.
8. Побудова графіка.

Приклад 3. Засобами диференціального числення дослідити функцію $y(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язування. Перш задамо функцію:

$$y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$$

Функція визначена на всій числовій осі за винятком точок $x = -1$ та $x = 1$, в яких знаменник дорівнює нулю. У цих точках функція $y(x)$ має розрив другого роду, оскільки не існує в цих точках скінченних границь:

```

Limit[y, x → -1, Direction → -1]
Limit[y, x → -1, Direction → 1]

```

$-\infty$

$-\infty$

```

Limit[y, x → 1, Direction → -1]
Limit[y, x → 1, Direction → 1]

```

∞

∞

Знайдемо точки, в яких функція $y(x)$ дорівнює нулю:

```
Solve[y == 0, x]
```

```
{{x → 0}}
```

Графік функції $y(x)$ перетинає вісь ОХ в точці $x = 0$.

Перевіримо на парність (непарність) функцію $y(x)$. Для цього обчислимо її значення при $-x$ та порівняємо зі значенням при x . Якщо вони рівні, то функція парна, якщо ні – непарна:

```
(y /. x → x) == (y /. x → (-x)) (*парність*)
```

$$\frac{x}{(1-x^2)^2} = -\frac{x}{(1-x^2)^2}$$

```
(y /. x → x) == -(y /. x → -x) (*непарність*)
```

True

Функція $y(x)$ непарна.

Функція $y(x)$ неперіодична, оскільки єдиним числовим розв'язком рівняння $y(x+T) = y(x)$, де T – період функції, є $T = 0$.

Для визначення проміжків знакосталості необхідно розв'язати дві нерівності $y(x) < 0$ та $y(x) > 0$:

```
Reduce[y < 0, x]
```

```
x < -1 || -1 < x < 0
```

```
Reduce[y > 0, x]
```

```
0 < x < 1 || x > 1
```

Отримані результати означають:

функція $y(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$;

функція $y(x) > 0$ при $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Для визначення проміжків монотонності функції $y(x)$ знайдемо її першу похідну та визначимо проміжки, на яких вона від'ємна (функція спадає) та додатна (функція зростає):

```
Reduce[D[y, x] < 0, x]
```

```
x < -1 || x > 1
```

```
Reduce[D[y, x] > 0, x]
```

```
-1 < x < 1
```

З отриманих результатів робимо висновок:

функція $y(x)$ спадає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$;

функція $y(x)$ зростає при $x \in (-1, 1)$.

Щоб визначити підозрілі на екстремум точки, прирівнюємо першу похідну функції $y(x)$ до нуля:

```
Reduce[D[y, x] == 0, Reals]
```

False

Дійсних коренів нема, тому екстремумів

не існує. Відповідно найменшим та найбільшим значенням функції $y(x)$ може бути $-\infty$ та ∞ .

Проміжки опуклості (вгнутості) функції $y(x)$ визначимо за знаком другої похідної. Якщо вона додатна, то функція $y(x)$ на цьому проміжку вгнута, якщо від'ємна, то опукла:

Reduce[D[y, {x, 2}] > 0, x]

$0 < x < 1 \mid x > 1$

Reduce[D[y, {x, 2}] < 0, x]

$x < -1 \mid -1 < x < 0$

З отриманих результатів робимо висновок:

функція $y(x)$ вгнута при $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$;

функція $y(x)$ опукла при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

Щоб визначити точки перегину функції $y(x)$, необхідно знайти корені рівняння $y''(x) = 0$ і перевірити, чи змінює друга похідна знак при переході через них:

Reduce[D[y, {x, 2}] == 0, Reals]

$x == 0$

З врахуванням проміжків опуклості (вгнутості) функції, можна стверджувати, що точка $x = 0$ є точкою перегину.

Коефіцієнти k, b рівняння похилої асимптоти визначаються через обчислення границь $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$:

k = Limit[y/x, x → Infinity]

□

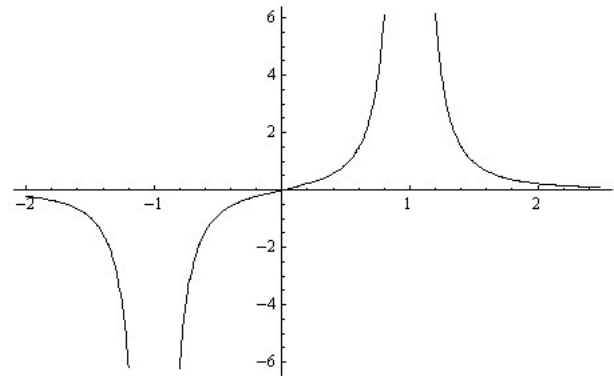
b = Limit[y - k * x, x → Infinity]

□

Для функції $y(x)$ нема похилих асимптот, а існує горизонтальна асимптота $y = 0$. Вертикальними асимптотами для графіка функції $y(x)$ можуть бути тільки прямі виду $x = x_0$, де x_0 – точка розриву другого роду. Для заданої функції вертикальними асимптотами є прямі $x = -1$ та $x = 1$.

Побудувавши графік функції $y(x)$ можна перевірити, чи правильно проведено дослідження:

Plot[y, {x, -2, 5, 2.5}, PlotStyle → Black]



У статті наведено можливості використання системи комп'ютерної математики Mathematica для розв'язування деяких задач математичного аналізу, зокрема дослідження функцій на неперервність, дослідження функцій засобами диференціального числення та інтегрального числення функції однієї змінної. Такий підхід до ознайомлення з можливостями використання системи комп'ютерної математики Mathematica можна використовувати для вивчення дисципліни «Інформаційні технології в освіті» для студентів математичних спеціальностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, Главная редакция литературы, 1985. – 384 с.
- [2] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу — 9- из — М Наука, 1977. – 624 с.
- [3] Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 576 с.
- [4] Жалдак М.І. Математичний аналіз. Інтегральне числення функцій однієї змінної з елементами інформаційних технологій: Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, С.Я. Деканов. – Київ, НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 268 с.