

Зауваження про дві інтерполяційні задачі в одному класі цілих функцій нульового порядку

Винницький Б.В., Шепарович І.Б.

Email: vynnytskyi@ukr.net, isheparovych@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Інститут фізики, математики, економіки та інноваційних техноогій, кафедра математики, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Знайдено умови на послідовність (b_n) , за яких інтерполяційні задачі $\omega(\lambda_k) = b_{k,1}$, $g'(\lambda_k) = b_{k,2}$, де $|\lambda_n/\lambda_{n+1}| \leq \Delta < 1$, мають розв'язок в одному класі цілих функцій, який визначається лічильною функцією послідовності (λ_n) .

Ключові слова: ціла функція, інтерполяційна задача, інтерполяційна послідовність, послідовність нулів.

Різноманітні інтерполяційні задачі в класах цілих функцій розглядалися в працях О. Гельфонда, Ю. Казьміна, А. Леонтева, Г. Лапіна, А. Грішина, К. Малютіна, Ю. Коробейника, А. Братищева, О. Боженко та інших математиків (див. [1 - 12]).

О.Гельфонд і Ю.Казьміна [4] розглянули інтерполяційні задачі

$$\omega(\lambda_k) = b_{k,1}, \quad (1)$$

$$g'(\lambda_k) = b_{k,2} \quad (2)$$

з вузлами інтерполяції $\lambda_k = q^{k-1}$, $|q| > 1$. Метою даної статті є розгляд інтерполяційних задач (1) – (2) у випадку коли (λ_k) – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел, які задовольняють умову

$$|\lambda_k / \lambda_{k+1}| \leq \Delta < 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

для деякого $\Delta \in (0;1)$. Нехай $n(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1$,

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad M_g(r) = \max \{ |g(z)| : |z| \leq r \}.$$

Основний наш результат міститься в теоремі 1, яка є узагальненням деяких результатів з [4]. Особливістю результату є виділення класів розв'язності безпосередньо в термінах характеристик послідовності (λ_k) .

Теорема 1. Нехай послідовність (λ_k) задовольняє умову (3) для деякого $\Delta \in (0;1)$,

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right). \text{ Тоді для кожної послідовності}$$

$(b_{n,1})$ такої, що $|b_{n,1}| \leq c_1 \exp(N(q|\lambda_n|))$, $\Delta < q < 1$, інтерполяційна задача (1) має єдиний розв'язок в класі цілих функцій ω , які задовольняють умову (тут і далі через c_i позначаємо додатні сталі)

$$M_{\omega}(r) \leq c_2 \exp(N(\rho_1 r)), \quad r \in [0; +\infty), \quad (4)$$

для кожного $\rho_1 > q$ і цим розв'язком є функція

$$\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n,1} L(z)}{(z - \lambda_n) L'(\lambda_n)}.$$

Окрім цього, для кожної послідовності $(b_{n,2})$ такої, що

$$|\lambda_n| |b_{n,2}| \leq c_5 \exp(N(|\lambda_n|) + N(q|\lambda_n|)), \quad \Delta < q < 1,$$

функція

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n,2} L^2(z)}{(z - \lambda_n) L^2(\lambda_n)}$$

є цілою, задовольняє умову (2) і

$$M_g(r) \leq c_0 \exp(N(r) + N(\rho_1 r)), \quad r \in [0; +\infty) \quad (5)$$

для кожного $\rho_1 > q$.

Доведення. Доведемо спочатку єдиність. Припустимо, що для деякої послідовності $(b_{n,1})$ в класі (4) існує дві різні цілі функції $\omega = f_1$ і $\omega = f_2$, які є розв'язками задачі (1). Тоді функція $f = f_2 - f_1$ має нулі в усіх точках λ_k і задовольняє умову $M_f(r) \leq c_2 \exp(N(\rho_1 r))$ для деякого $\rho_1 < 1$. Тому з нерівності Ієнсена отримуємо $N(r) \leq N(\rho_1 r) + c_0$. Маємо суперечність, бо $N(r) - N(\rho_1 r) \rightarrow +\infty$, якщо $\rho_1 < 1$ і $r \rightarrow +\infty$.

Далі, добре відомо, що $N(r) = \sum_{|\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|}$.

Тому $\exp(N(\lambda_n)) = \frac{|\lambda_n|^n}{\prod_{k=1}^n |\lambda_k|}$ і

$$\exp(N(q|\lambda_n|)) = \frac{(q|\lambda_n|)^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} |\lambda_k|} = q^{n-1} \frac{|\lambda_n|^n}{\prod_{k=1}^n |\lambda_k|}. \quad \text{Окрім}$$

цього, для функції $L(z)$ справедливі оцінки [13, 14]

$$\ln M_L(r) = N(r) + O(1), \quad r \in [0; +\infty),$$

$$\ln |\lambda_k L'(\lambda_k)| = N(|\lambda_n|) + O(1), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\max \left\{ \left| \frac{L(z)}{z - \lambda_n} \right| : |z| \leq r \right\} \leq c(\varepsilon) \frac{M_L((1+\varepsilon)r)}{r + |\lambda_n|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$r \in [0; +\infty), \quad \varepsilon > 0.$$

Тому

$$\left| \frac{b_{n,1} L(z)}{L'(\lambda_n)(z - \lambda_n)} \right| \leq c_3 \exp(N(\rho_2 r)) \frac{|\lambda_n| \exp(N(q|\lambda_n|))}{\exp(N(|\lambda_n|))(r + |\lambda_n|)}$$

$$= c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \frac{|\lambda_n| q^{n-1}}{(r + |\lambda_n|)}, \quad \rho_2 := (1 + \varepsilon).$$

Нехай $|\lambda_m| \leq r < |\lambda_{m+1}|$, $|z| \leq r$ і $\rho_1 = \rho_2 q$. Тоді $m = n(r)$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_{n,1} L(z)}{(z - \lambda_k) L'(\lambda_n)} \right| \leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n| q^{n-1}}{(r + |\lambda_n|)}$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\sum_{n=1}^m q^{n-1} \frac{|\lambda_n|}{r} + \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-1} \right)$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\sum_{n=1}^m q^{n-1} \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_m|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-1} \right)$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\sum_{n=1}^m \Delta^{m-n} q^{n-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty} q^{n-1} \right)$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\frac{\Delta^m}{q} \sum_{n=1}^m \left(\frac{q}{\Delta} \right)^n + \frac{q^m}{1-q} \right)$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\frac{\Delta^m}{q} \left(\frac{q}{\Delta} \right) \frac{\left(\frac{q}{\Delta} \right)^m - 1}{\left(\frac{q}{\Delta} \right) - 1} + \frac{q^m}{1-q} \right)$$

$$\leq c_4 \exp(N(\rho_2 r)) \left(\frac{q^m}{q - \Delta} + \frac{q^m}{1-q} \right)$$

$$\leq c_5 \exp(N(\rho_2 r)) q^m = c_5 \exp \left(N(\rho_2 r) - m \ln \frac{1}{q} \right)$$

$$= c_5 \exp \left(N(\rho_2 r) - n(r) \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \right).$$

Далі, знайдеться стала $c_1 \geq 0$ така, що

$$n(\rho_2 r) \leq n(r) + c_1.$$

Справді, нехай $1/\Delta^{s-1} \leq \rho_2 < 1/\Delta^s$, $s \in \mathbb{N}$. Тоді $m = n(r)$ і

$$\rho_2 r < \rho_2 |\lambda_{m+1}| \leq \frac{1}{\Delta^s} |\lambda_{m+1}| = |\lambda_{m+s+1}| \frac{1}{\Delta^s} \frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_{m+s+1}|} \leq |\lambda_{m+s+1}|.$$

Тому $n(\rho_2 r) \leq m + s + 1 = n(r) + s + 1$ і

$$N(\rho_2 r) - N(\rho_1 r) = \int_{\rho_1 r}^{\rho_2 r} \frac{n(t)}{t} dt \leq n(\rho_2 r) \log \frac{\rho_2}{\rho_1} =$$

$$= (s+1) \log \frac{\rho_2}{\rho_1} + n(r) \log \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Отже, на основі попередніх оцінок переконуємось, що функція $w(z)$ є цілою і задовольняє умови (1), (4).

Аналогічно отримуємо оцінку

$$\left| \frac{b_{n,2} L^2(z)}{(z - \lambda_n) L^2(\lambda_n)} \right| \leq |L(z)| \frac{|L(z)| |\lambda_n|}{|(z - \lambda_n)| |\lambda_n|} \frac{|b_{n,2}|}{|L'(\lambda_n)|^2}$$

$$\leq c_6 \frac{\exp(N(r)) \exp(N(\rho_2 r)) |\lambda_n|^2 |b_{n,2}|}{\exp(2N(|\lambda_n|))(r + |\lambda_n|)}$$

$$\leq c_7 \frac{\exp(N(r) + N(\rho_2 r)) |\lambda_n| \exp(N(|\lambda_n|) + N(q|\lambda_k|))}{\exp(2N(|\lambda_n|))(r + |\lambda_n|)}$$

$$\leq c_7 \frac{\exp(N(r) + N(\rho_2 r)) |\lambda_n| \exp(N(q|\lambda_k|))}{\exp(N(|\lambda_n|))(r + |\lambda_n|)}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{b_{n,2} L^2(z)}{(z - \lambda_n) L^2(\lambda_n)} \right| \leq c_8 \exp(N(r) + N(\rho_1 r)),$$

якщо $|z| \leq r$. Тому функція g також задовольняє всі умови теореми.

Зауваження 1. У випадку $\lambda_k = q^{k-1}$ умова (1) рівносильна умові

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

[2] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. – 176 с.

[3] Лапин Г.П. Интерполирование в классе целых функций конечного порядка // Изв. высш. уч. заведений. Математика. – 1959, №5(12) – С.146–153.

[4] Казьмин Ю.А. Об одной задаче А.О. Гельфонда // Матем. сб. - 1973. -132, №4.- С. 520-543.

[5] Братищев А. В. Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. №1. С. 30-44.

[6] Коробейник Ю. Ф. Об одной интерполяционной задаче для целых функций // Изв. ВУЗов. Матем. 1985. №2. С. 37-45.

[7] Боженко О.А., Гришин А.Ф., Малютин К.Г. Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка. Матем. сб., 2015, т.79, №2, с.3-28.

[8] Гришин А. Ф., Руссаковский А. М. Свободная интерполяция целыми функциями

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left(\ln M_{\omega}(r) - \frac{\log^2(\rho_1 r)}{2 \ln |q|} - \frac{\log(\rho_1 r)}{2} \right) < +\infty, \text{ а умова}$$

$$|b_{n,1}| \leq c_1 \exp(N(q|\lambda_n|)) - \text{умові}$$

$$\sup \left\{ |q|^{-\frac{(k-1)}{2}} |b_{k,1}|^{1/k} : k \in \mathbb{N} \right\} < +\infty$$

Тому теорема 1 містить деякі результати [4].

Зауваження 2. Нам не вдалося побудувати за вказаних умов функцію з класу (4), яка одночасно була б розв'язком обох задач (1) та (2).

// Теория функций, функц. анализ и их прилож. - 1985. - 44. - С. 32 - 42.

[9] Винницький Б. В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Мат. замет., 1980. – 27, № 3. - С. 361 - 372.

[10] Винницький Б.В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Мат. замет.1981. – 29, № 4. - С. 503 - 516.

[11] Винницький Б.В., Шепарович І.Б. Про інтерполяційні послідовності одного класу функцій, аналітичних в одиничному крузі // Укр.. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №7. – С.879–886

[12] Винницький Б. В., Шепарович І. Б. Про існування розв'язку інтерполяційної задачі в одному класі цілих функцій, який визначається лічильною функцією // АПФМІ, 2012. – № 4. - С. 12 - 14.

[13] Винницький Б. В. О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами // УМЖ., 1986. – 38, № 2. - С. 143 - 148.

[14] Винницький Б. В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент // Матем. сб., 1988. – 135 (177), № 1. - С. 59 - 79.