

Деякі зауваження про розв'язок інтерполяційної задачі в одному класі цілих функцій нульового порядку та розв'язки диференціального рівняння другого порядку з цілими коефіцієнтами

Винницький Б.В., Шепарович І.Б.

Email: vynnytskyi@ukr.net, isheparovych@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Інститут фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кафедра математики, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

У даній статті знайдено умови на послідовність (b_n) , за яких інтерполяційна задача $G(\lambda_n)=b_n$, де $|\lambda_n/\lambda_{n+1}| \leq \Delta < 1$, має розв'язок в одному класі цілих функцій, який визначається лічильною функцією послідовності (λ_n) . Отриманий результат застосовано до опису розв'язків диференціального рівняння $f''+af=0$ з цілим коефіцієнтом. Таким чином, узагальнені результати Ю. Казьміна [4] стосовно інтерполяції та покращені результати С. Банка стосовно осциляції.

Ключові слова: ціла функція, інтерполяційна задача, інтерполяційна послідовність, послідовність нулів, диференціальне рівняння.

ВСТУП ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Нехай $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ – послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел, яка не має скінченних часткових границь,

$N_\lambda(r) = \sum_{|\lambda_k| \leq r} \log \frac{r}{|\lambda_k|}$, G – ціла функція і

$M_G(r) = \max \{|g(z)| : |z|=r\}$. Дослідженню умов, за яких існує розв'язок інтерполяційної задачі

$$G(\lambda_k) = b_k \quad (1)$$

в різних класах цілих функцій присвячені численні дослідження [1], [2], [3], [4]. Виникає запитання про те, для яких послідовностей (λ_k) і (b_k) існує ціла функція G , яка задовольняє

$$\ln M_G(r) \leq N_\lambda(r) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

(в близькій постановці інтерполяційна задача розглядалась, наприклад в [6]). Частково відповідь на це запитання отримано в [5]. Зокрема показано, що якщо $b_k=0$, а послідовність (λ_k) для деякого $\Delta < 1$ задовольняє умову

$$|\lambda_k / \lambda_{k+1}| \leq \Delta, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

то така функція існує. Далі, якщо згадана функція $G \neq 0$ з (1) існує, то $|b_k| \leq c_0 \exp(N_\lambda(|\lambda_k|))$ (тут і далі c_i – додатні сталі), тобто

$$\sup \left\{ |\lambda_k|^{-k} |b_{k,0}| \prod_{s=1}^k |\lambda_s| : k \in \mathbb{N} \right\} = c < \infty.$$

А.О.Гельфонд [1] і Ю.А.Казьмін [4] розглянули інтерполяційну задачу (1) для $\lambda_k = q^{k-1}$, $|q| > 1$. Так з результатів Ю.А. Казьміна [4] випливає таке твердження

Теорема К. Нехай $|q| > 1$, $\lambda_k = q^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.
Тоді для кожної послідовності (b_k) такої, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |q|^{\frac{(k-1)}{2}} |b_k|^{1/k} \leq r_1, \quad r_1 \in (\Delta; 1)$$

інтерполяційна задача (1), має єдиний розв'язок в класі цілих функцій g , які задовольняють умову

$$\ln M_g(r) \leq \frac{\ln^2 \rho_1 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + c.$$

для будь-якого $\rho_1 > r_1$.

У статті [7] наводяться дві теореми (1, 2), які узагальнюють результат Ю.А.Казьміна для послідовності (λ_k) , що задовольняє умову (3). У даній статті доводимо загальніше твердження, яке, крім цього дає більш точну оцінку росту функції $M_g(r)$.

Теорема 1. Нехай (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, і (b_k) – така послідовність комплексних чисел, що $|b_k| \leq c_1 \exp(N(r_1 |\lambda_k|))$ для деякого $r_1 \in (0; +\infty)$ і для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо $\nu = \min\{j \in \mathbb{Z} : r_1 < 1/\Delta^j\}$, $\rho_1 = 1/\Delta^\nu$, $\lambda = \max\{0; \nu - 1\}$, то існує ціла функція G , така що виконується (1) і для будь-якого $\rho_0 > \rho_1$ і всіх $r > 0$:

$$M_G(r) \leq c_2 r^\lambda \exp(N(\rho_0 r)) \quad (3)$$

Звідси випливають раніше доведені твердження.

Наслідок 1. (Теорема 2 [7]) Нехай (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, і (b_k) – така послідовність комплексних чисел, що $|b_k| \leq c_1 \exp(N(r_1 |\lambda_k|))$, $r_1 \in (\Delta; 1)$. Тоді існує ціла функція G , така що виконується (1) і $M_G(r) \leq c_2 \exp(N(\rho_1 r))$ для будь-якого $\rho_1 > r_1$.

Зауваження 1. Якщо $|q| > 1$, $\lambda_k = q^{k-1}$, то $N_\lambda(r) = \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + O(1)$, $r \in [1; +\infty)$. Тому з теореми 1 випливає сформульоване твердження Ю.А. Казьміна [4].

Отриманий результат можна застосувати до теорії диференціальних рівнянь. Розглянемо рівняння

$$f'' + a_0 f = 0 \quad (4)$$

і дослідимо, за яких умов існує цілий розв'язок цього рівняння з послідовністю нулів (λ_k) . Дослідженню цього та суміжних запитань для різних класів цілих та голоморфних у крузі функцій присвячено чимало праць, огляд яких міститься, наприклад, в [8, 9]. Зокрема, на запитання: Чи існує ціла трансцендентна функція a_0 , така що (λ_k) є послідовністю нулів розв'язку рівняння (4), одним з перших дав відповідь В. Седа [10]. Він довів таке твердження (дивись також в [9]).

Теорема С. Для довільної послідовності $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ комплексних чисел, яка не має скінченних часткових границь існує така ціла функція a_0 , що рівняння (4) має цілий розв'язок f і послідовність (λ_k) є послідовністю нулів функції f .

Результати В. Седи розвинені в багатьох роботах [8, 9, 11, 12, 13]. Зупинимось лише на тих, які пов'язані з послідовністю (λ_k) вигляду (2). Так С. Банк [12] довів таке твердження.

Теорема Б 1. Нехай (λ_k) – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, які задовольняють умову (2). Тоді існує ціла трансцендентна функція a_0 порядку 0 така, що рівняння (4) має такий розв'язок, для якого (λ_k) є послідовністю нулів.

С. Банк [12] отримав також необхідні умови на послідовність (λ_k) , яка є послідовністю нулів розв'язку рівняння (4).

Теорема Б 2. Нехай (λ_k) – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, які мають скінченний показник збіжності, і $p = \inf\{\alpha \in \mathbb{Z}_+ : \sum_n |\lambda_n|^{-(\alpha+1)} < +\infty\}$. Позначимо

$$\mu_k = \sum_{n \neq k} \left((\lambda_n - \lambda_k)^{-1} - (1/\lambda_n) - (\lambda_k / \lambda_n^2) - \dots - (\lambda_k^{p-1} / \lambda_n^p) \right) \quad \text{якщо } p > 0,$$

$$\mu_k = \sum_{n \neq k} (\lambda_n - \lambda_k)^{-1}, \text{ якщо } p=0.$$

Тоді, якщо (λ_k) є послідовністю нулів розв'язку рівняння (4), де a_0 - ціла трансцендентна функція скінченного порядку, то існує дійсне число $b>0$ і $k_0 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$|\mu_k| \leq \exp(|\lambda_k|^b), k \geq k_0.$$

Виходячи з цього твердження, С. Банк показав, що послідовність (λ_n) , $n \in \mathbb{N}$, де $\lambda_{2k-1} = 2^k$, $\lambda_{2k} = 2^k + \varepsilon_k$, $0 < \varepsilon_k < \exp(-\exp(2^k))$, не може бути послідовністю нулів розв'язку рівняння (4), де a_0 - ціла трансцендентна функція скінченного порядку.

Пізніше Дж. Грохен та Дж. Хейтокангас [12] уточнили результат С. Банка (Теорема Б 1.) і довели таке твердження.

Теорема Г-Х. Нехай (λ_k) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел, які задовольняють умову (2). Тоді існує ціла трансцендентна функція a_0 така, що рівняння (4) має розв'язок, для якого (λ_k) є послідовністю нулів і

$$\ln M_{a_0}(r) = O(\ln^2 r).$$

У ході доведення вищезгаданих тверджень, що стосуються рівняння (4), розв'язок (4) будується у вигляді $f = Le^G$, де L - ціла функція, для якої (λ_k) - послідовність простих нулів, G - деяка ціла функція. Підставивши $f(z) = L(z)e^{g(z)}$ в (4), отримаємо

$$e^{g(z)}(g''(z) + g'^2(z))L(z) + e^{g(z)}(2g'(z)L'(z) + L''(z)) + a_0(z)L(z)e^{g(z)} = 0. \quad (5)$$

Звідси випливає: $g'(\lambda_k) = -\frac{L''(\lambda_k)}{2L'(\lambda_k)}$. Отож,

дана задача зводиться до знаходження умов існування розв'язку інтерполяційної задачі (1), де $G = g'$, $b_k = -\frac{L''(\lambda_k)}{2L'(\lambda_k)}$. Тому на підставі теореми 1 ми отримаємо наступне твердження.

Теорема 2. Нехай послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$. Тоді існує ціла функція a_0 така, що рівняння (4) має цілий розв'язок f такий, що послідовність (λ_k) є послідовністю нулів функції f і

$$M_f(r) \leq c_2 \exp(N_\lambda(r) + c_2 r \exp(N_\lambda(\rho_0 r)))$$

для всіх $r > 0$, $\rho_0 > \Delta$ і деякої сталої c_2 .

1. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ.

1.1. Доведення теореми 1.

Для доведення теореми 1 потрібні деякі приготування.

Лема 1. Нехай послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$. Тоді для функції

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k) \quad (6)$$

виконується

$$\ln M_L(r) = N(r) + O(1), \quad r \in [0; +\infty).$$

$$\ln |\lambda_k L'(\lambda_k)| = N_\lambda(|\lambda_k|) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Це твердження міститься, наприклад, в [13]. Для його отримання досить зауважити, що

$$\begin{aligned} N(r) \leq \ln M_L(r) \leq N(r) + \sum_{|\lambda_k| \leq r} \log \left(1 + \frac{|\lambda_k|}{r} \right) \\ + \sum_{|\lambda_k| > r} \log \left(1 + \frac{r}{|\lambda_k|} \right), \\ |\lambda_k L'(\lambda_k)| = \sum_{n=1}^k \log \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_n|} + \sum_{n=1}^{k-1} \log |1 - \lambda_n / \lambda_k| \\ + \sum_{n=k+1}^{\infty} \log |1 - \lambda_k / \lambda_n|. \end{aligned}$$

Лема 2 [13]. Нехай $L(z)$ - ціла функція, яка має нулі в точках λ_k і $l_k(z) = L(z)/(z - \lambda_k)$. Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ і $r > 0$ виконується

$$M_{l_k}(r) \leq 4(1 + 1/\varepsilon) \frac{M_L((1 + \varepsilon)r)}{|\lambda_k| + r}.$$

Лема 3. Нехай послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $\rho_1 = 1/\Delta^\nu$ і $1/\Delta^{\nu-1} \leq r_1 < 1/\Delta^\nu$. Тоді,

$(\forall k \in \mathbb{N})$:

$$\exp(N_\lambda(r_1|\lambda_k|)) \leq r_1^{k+(\nu-1)/2} \exp(N_\lambda(|\lambda_k|)), \quad (7)$$

$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall r > |\lambda_1|)$:

$$\exp(N_\lambda(r)) \leq \frac{1}{\rho_1^m} \exp(N_\lambda(\rho_1 r)). \quad (8)$$

Доведення. Відомо, що (див. в [14, лема 1.8.], [15])

$$\exp(N_\lambda(r)) = \max \left\{ \frac{r^m}{\prod_{j=1}^m |\lambda_j|} : m \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

$$\text{і } \exp(N_\lambda(r)) = \frac{r^k}{\prod_{j=1}^k |\lambda_j|}, \text{ якщо } r \in [|\lambda_k|; |\lambda_{k+1}|).$$

Доведемо нерівність (7). Знайдеться $s \in \mathbb{N}$ таке, що $|\lambda_s| \leq r_1 |\lambda_k| < |\lambda_{s+1}|$. Тому у випадку $\nu \geq 1$, якщо $1/\Delta^{\nu-1} \leq r_1 < 1/\Delta^\nu$, виконується

$$r_1 |\lambda_k| < \frac{|\lambda_k|}{\Delta^\nu} = \frac{|\lambda_{s+1}|}{\Delta^\nu} \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_{s+1}|} = \frac{|\lambda_{s+1}|}{\Delta^\nu} \Delta^{s+1-k} \leq |\lambda_{s+1}| \Delta^{s-k-\nu+1} \leq |\lambda_{s+1}|$$

для $s \geq k + \nu - 1$ ($s = k$ для $\nu = 1$). Отож, враховуючи, що у випадку $\nu \geq 1$, $r_1 \geq 1$ і $s \geq k$, $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\exp(N(r_1|\lambda_k|))}{\exp(N(|\lambda_k|))} &\leq \frac{\frac{(r_1|\lambda_k|)^s}{\prod_{j=1}^s |\lambda_j|}}{\frac{(|\lambda_k|)^k}{\prod_{j=1}^k |\lambda_j|}} = \frac{\frac{r_1^s |\lambda_k|^k |\lambda_k|^{s-k}}{\prod_{j=1}^k |\lambda_j| \prod_{j=k+1}^s |\lambda_j|}}{\frac{|\lambda_k|^k}{\prod_{j=1}^k |\lambda_j|}} \\ &= r_1^k \frac{r_1^{s-k} |\lambda_k|^{s-k}}{\prod_{j=k+1}^s |\lambda_j|} \leq r_1^k \frac{r_1^{s-k} |\lambda_k| |\lambda_k| \dots |\lambda_k|}{|\lambda_{k+1}| |\lambda_{k+2}| \dots |\lambda_s|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq r_1^k \Delta^{(k-s)\nu} \Delta^{\frac{(s-k+1)s-k}{2}} \leq r_1^k \frac{1}{\Delta^{(s-k)(\nu-(s-k+1)/2)}} \\ &\leq r_1^k \frac{1}{\Delta^{(s-k)(s-k+1)/2}} \leq r_1^k. \end{aligned}$$

У випадку $\nu \leq 0$, якщо $1/\Delta^{\nu-1} \leq r_1 < 1/\Delta^\nu$, виконується

$$\begin{aligned} r_1 |\lambda_k| &\geq \frac{|\lambda_k|}{\Delta^{\nu-1}} = \frac{|\lambda_s|}{\Delta^{\nu-1}} \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_s|} = \frac{|\lambda_s|}{\Delta^{\nu-1}} \frac{|\lambda_k|}{|\lambda_s|} \geq \\ &\geq \frac{|\lambda_s|}{\Delta^{\nu-1}} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{k-s} = |\lambda_s| \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{k+\nu-1-s} \geq |\lambda_s| \end{aligned}$$

для $s \leq k + \nu - 1 \leq k - 1$ ($s = k - 1$ для $\nu = 0$). Отож, для $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{\exp(N(r_1|\lambda_k|))}{\exp(N(|\lambda_k|))} &\leq \frac{\frac{(r_1|\lambda_k|)^s}{\prod_{j=1}^s |\lambda_j|}}{\frac{(|\lambda_k|)^k}{\prod_{j=1}^k |\lambda_j|}} = r_1^k \frac{r_1^{s-k} \prod_{j=s+1}^k |\lambda_j|}{|\lambda_k|^{k-s}} \\ &\leq r_1^k \frac{r_1^{s-k} |\lambda_{s+1}| |\lambda_{s+2}| \dots |\lambda_k|}{|\lambda_k| |\lambda_k| \dots |\lambda_k|} \leq r_1^k \Delta^{(k-s)(\nu+(k-s-1)/2)} \\ &\leq r_1^k \Delta^{(k-s)\nu} \Delta^{\frac{(s-k+1)s-k}{2}} \leq r_1^k \Delta^{(k-s)(\nu+(k-s-1)/2)} \\ &\leq r_1^k \frac{1}{\Delta^{(s-k)(s-(k-1))/2}} \leq r_1^k \frac{1}{\Delta^{\nu(\nu-1)/2}} \leq r_1^{k+(\nu-1)/2}. \end{aligned}$$

Далі доведемо нерівність (8). Для кожного $r > |\lambda_1|$ знайдеться таке $m \in \mathbb{N}$, що $|\lambda_m| \leq r < |\lambda_{m+1}|$ і знайдеться $p \in \mathbb{N}$, що $|\lambda_p| \leq \rho_1 r < |\lambda_{p+1}|$, якщо $\rho_1 = 1/\Delta^\nu$ і $\nu \geq 1$. Тому

$$\begin{aligned} \rho_1 r < |\lambda_{m+1}| &= \rho_1 \frac{|\lambda_{m+1}| |\lambda_{m+2}|}{|\lambda_{m+2}| |\lambda_{m+3}|} \dots \frac{|\lambda_p|}{|\lambda_{p+1}|} |\lambda_{p+1}| \\ &\leq |\lambda_{p+1}| \rho_1 \Delta^{p-m} \leq |\lambda_{p+1}| \frac{1}{\Delta^\nu} \Delta^{p-m} = |\lambda_{p+1}| \Delta^{p-m-\nu} \leq |\lambda_{p+1}|, \end{aligned}$$

якщо $p \geq m + \nu$. Отож, для $\nu \geq 1$

$$\frac{\exp(N(r))}{\exp(N(\rho_1 r))} \leq \frac{\prod_{j=1}^m |\lambda_j|}{(\rho_1 r)^{m+\nu}} = \frac{\prod_{j=m+1}^{m+\nu} |\lambda_j|}{(\rho_1 r)^\nu} \frac{1}{\rho_1^m}$$

$$= \frac{\prod_{j=m+1}^{m+\nu} |\lambda_j|}{|\lambda_p|^\nu} \frac{1}{\rho_1^m} \leq \frac{\prod_{j=m+1}^{m+\nu} |\lambda_j|}{|\lambda_{m+\nu}|^\nu} \frac{1}{\rho_1^m} \leq \Delta^{\nu(\nu-1)/2} \frac{1}{\rho_1^m} \leq \frac{1}{\rho_1^m}.$$

Якщо $\nu \leq 0$, то $|\lambda_m| \leq r < |\lambda_{m+1}|$,

$|\lambda_p| \leq \rho_1 r < |\lambda_{p+1}|$ для деяких $m \in \mathbb{N}$ і $p \in \mathbb{N}$.

Аналогічно

$$\rho_1 r \geq \rho_1 |\lambda_m| = \rho_1 \frac{|\lambda_m|}{|\lambda_p|} |\lambda_p| \geq \frac{|\lambda_p| \rho_1}{\Delta^{m-p}} \geq \Delta^{p-m-\nu} |\lambda_p| \geq |\lambda_p|,$$

якщо $\nu \geq p - m$. Тому для $r > 0$, оскільки

$m \geq p - \nu \geq p$, то

$$\frac{\exp(N_\lambda(r))}{\exp(N_\lambda(\rho_1 r))} = \frac{\prod_{j=1}^m |\lambda_j|}{(\rho_1 r)^p} = \frac{r^m}{\rho_1^p r^p \prod_{j=p+1}^m |\lambda_j|}$$

$$= \frac{(\rho_1 r)^{m-p}}{\rho_1^m |\lambda_{p+1}| |\lambda_{p+2}| \dots |\lambda_m|} \leq \frac{(|\lambda_{p+1}|)^{m-p}}{\rho_1^m |\lambda_{p+1}| |\lambda_{p+2}| \dots |\lambda_m|} \leq \frac{1}{\rho_1^m} \Delta^{(m-p)(\frac{m-p-1}{2})} \leq \frac{1}{\rho_1^m}$$

Лему доведено.

Лема 4. Нехай послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, і (b_k) – така послідовність комплексних чисел, що $|b_k| \leq c_1 \exp(N(r_1 |\lambda_k|))$ для деякого $r_1 \in [0; +\infty)$ і всіх $k \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо $\nu = \min\{j \in \mathbb{Z} : r_1 < 1/\Delta^j\}$, $\rho_1 = \max\{1/\Delta^\nu; \Delta\}$, $\lambda = \max\{0; \nu - 1\}$, $\mu = \max\{0; \nu\}$, і $P(z) = z^\mu L(z)$, то функція

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k P(z)}{P'(\lambda_k)(z - \lambda_k)}$$

є цілою і $M_G(r) \leq c_2 r^\lambda \exp(N(\rho_0 r))$ для будь-якого $\rho_0 > \rho_1$ і всіх $r > 0$.

Доведення. Згідно з лемами 1 та 2:

$$\left| \frac{L(z)}{(z - \lambda_k)} \right| \leq c \frac{\exp(N((1+\varepsilon)r))}{r + |\lambda_k|} \text{ для всіх } \varepsilon > 0, r > 0 \text{ і}$$

$k \in \mathbb{N}$. Тоді для функції $P(z) = z^\mu L(z)$ справедлива оцінка $M_p(r) \leq c_3 r^\mu \exp(N(r))$, а

$$\text{для функції } l_k(z) = \frac{P(z)}{(z - \lambda_k)} :$$

$$M_{l_k}(r) \leq c_3 r^\mu \frac{\exp(N((1+\varepsilon)r))}{r + |\lambda_k|} \text{ для всіх } k \in \mathbb{N} \text{ і}$$

$r \geq 0$. Окрім цього, $|b_k| \leq c_1 \exp(N(r_1 |\lambda_k|))$,

$$|\lambda_k| P'(\lambda_k) \geq c_4 |\lambda_k|^\mu \exp(N(|\lambda_k|)) \text{ для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Тому для будь-яких $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$:

$$\left| \frac{b_k P(z)}{P'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \right| \leq$$

$$\leq c_5 \frac{\exp(N((1+\varepsilon)r)) \exp(N(r_1 |\lambda_k|))}{\exp(N(|\lambda_k|))} \frac{r^\mu |\lambda_k|}{|\lambda_k|^\mu (r + |\lambda_k|)},$$

якщо $|z| \leq r$.

У випадку $\nu \geq 1$, $\mu = \nu$. Знайдеться таке $m \in \mathbb{N}$, що $|\lambda_m| \leq (1+\varepsilon)r < |\lambda_{m+1}|$. Тому, враховуючи (7) і (8),

$$\left| \frac{b_k P(z)}{P'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \right| \leq c_6 \exp(N((1+\varepsilon)r)) r_1^k \frac{r^{\nu-1}}{|\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{r}{(r + |\lambda_k|)}$$

$$\leq c_6 r^{\nu-1} \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \frac{r_1^k}{\rho_1^m} \frac{r}{|\lambda_k|^{\nu-1} (r + |\lambda_k|)}.$$

Якщо $k > m$, то

$$\frac{r_1^k}{\rho_1^m} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{r}{r + |\lambda_k|} \leq \frac{r_1^k}{\rho_1^k} \frac{\rho_1^{k-m}}{|\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{|\lambda_{m+1}|}{(1+\varepsilon)|\lambda_k|}$$

$$\leq \frac{r_1^k}{\rho_1^k} \frac{\Delta^{\nu(m-k)+(v-1)(k-1)+k-m-1}}{(1+\varepsilon)|\lambda_1|^{\nu-1}} \leq \frac{r_1^k}{\rho_1^k} \frac{\Delta^{\nu m - \nu - m}}{(1+\varepsilon)|\lambda_1|^{\nu-1}}$$

$$\leq \frac{\Delta^{-1}}{(1+\varepsilon)|\lambda_1|^{\nu-1}} \left(\frac{r_1}{\rho_1} \right)^k,$$

$$\text{оскільки } \frac{1}{|\lambda_k|} \leq \frac{\Delta^{k-1}}{|\lambda_1|}, \frac{|\lambda_{m+1}|}{|\lambda_k|} \leq \Delta^{k-m-1}.$$

Якщо ж $k \leq m$, то $|\lambda_k| \leq |\lambda_m|$ і тому

$$\frac{r_1^k}{\rho_1^m} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{r}{r+|\lambda_k|} \leq \frac{r_1^k}{\rho_1^k} \frac{1}{|\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{r}{r+|\lambda_k|} \leq \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \frac{1}{|\lambda_1|^{\nu-1}}$$

Отже, у випадку $\nu \geq 1$

$$\begin{aligned} |G(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_6 r^{\nu-1} \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \frac{r_1^k}{\rho_1^m |\lambda_k|^{\nu-1}} \frac{r}{(r+|\lambda_k|)} \leq \\ &c_7 r^{\nu-1} \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \right) \\ &\leq c_7 r^{\lambda} \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \sum_{k=1}^{\infty} (r_1 \Delta^{\nu})^k. \end{aligned}$$

Оскільки $r_1 \Delta^{\nu} < 1$, то

$$|G(z)| \leq c_8 r^{\nu-1} \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \leq c_8 r^{\lambda} \exp(N(\rho_0 r))$$

і ми приходимо до твердження леми 4 у розглядуваному випадку.

Якщо $\nu \leq 0$, то $\mu = 0$. Нехай $\rho_1 \geq \Delta$. Тоді на підставі наведених вище оцінок та леми 3 отримуємо, що

$$\begin{aligned} |G(z)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_5 \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \frac{r_1^k}{\rho_1^m} \frac{|\lambda_k|}{r+|\lambda_k|} \leq \\ &\leq c_6 \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \frac{\rho_1^{k-m} |\lambda_k|}{(1+\varepsilon)r} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \right) \\ &\leq c_6 \exp(N(\rho_1(1+\varepsilon)r)) \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \frac{\Delta^{k-m} |\lambda_k|}{|\lambda_m|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \right) \\ &\leq c_6 \exp(N((1+\varepsilon)r)) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^k \leq c_7 \exp(N((1+\varepsilon)r)) \end{aligned}$$

для $|z| \leq r$. Тому лема 4 доведена.

З леми 4 безпосередньо випливає справедливість теореми 1, оскільки побудована в лемі 4 функція G задовольняє умови (1) і (3).

1.2. Доведення теореми 2.

Для доведення теореми 2 доведемо такі допоміжні твердження.

Лема 5. Нехай (λ_k) - така послідовність комплексних чисел, що збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k| \quad \text{і} \quad L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k). \quad \text{Тоді}$$

$$\frac{L''(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} = -2 \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k}.$$

Лема 5 міститься, фактично, в [11]. Для її отримання досить зауважити, що

$$L'(z) = \frac{L(z)}{z - \lambda_k} = \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{L(z)}{z - \lambda_n},$$

$$L''(z) = \frac{L'(z)(z - \lambda_k) - L(z)}{(z - \lambda_k)^2} + \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{L'(z)(z - \lambda_n) - L(z)}{(z - \lambda_n)^2},$$

$$L(z) = L'(\lambda_k)(z - \lambda_k) + \frac{L''(\lambda_k)}{2}(z - \lambda_k)^2 + o((z - \lambda_k)^2),$$

$$z \rightarrow \lambda_k.$$

$$L'(z) = L'(\lambda_k) + L''(\lambda_k)(z - \lambda_k) + o((z - \lambda_k)), \quad z \rightarrow \lambda_k.$$

Лемма 6. Якщо послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, то

$$\left| \frac{L''(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \right| \leq c_2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \left| \frac{L''(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)} \right| &\leq 2 \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n - \lambda_k|} \leq \\ &\leq \frac{2}{|\lambda_k|} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1 - |\lambda_n / \lambda_k|} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n| (1 - |\lambda_k / \lambda_n|)} \leq \\ &\leq \frac{2}{|\lambda_k|} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{1 - \Delta} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n| (1 - \Delta)} \leq \frac{2k}{|\lambda_k| (1 - \Delta)} + c_1 \leq c_3. \end{aligned}$$

Переходимо безпосередньо до доведення теореми 2. Оскільки

$$\left| \frac{L''(\lambda_k)}{2L'(\lambda_k)} \right| \leq c_3 \leq c_1 \exp(N_{\lambda}(r_1 |\lambda_k|)) \quad \text{для всіх}$$

$r_1 \in [0; +\infty)$ і $k \in \mathbb{N}$, то згідно з теоремою 1

$$\text{існує ціла } G \text{ така, що } G(\lambda_k) = -\frac{L''(\lambda_k)}{2L'(\lambda_k)} \text{ і}$$

$$M_G(r) \leq c_2 \exp(N_{\lambda}(\rho_0 r)) \quad (9)$$

для будь-якого $\rho_0 > 0$ і всіх $r > 0$. Нехай

$$g(z) = \int_0^z G(\varsigma) d\varsigma. \quad \text{Тоді}$$

$$M_g(r) \leq r M_G(r) \leq c_2 r \exp(N_{\lambda}(\rho_0 r))$$

$$i \quad g'(\lambda_k) = -\frac{L''(\lambda_k)}{2L'(\lambda_k)}. \quad \text{Якщо} \quad f(z) = L(z)e^{g(z)} \quad i$$

$$a_0(z) = -\frac{f''(z)}{f(z)}, \quad \text{то}$$

$$a_0(z) = -\frac{L''(z) + 2L'(z)g'(z) + L(z)g'^2(z) + L(z)g''(z)}{L(z)}.$$

Тому a_0 – ціла функція. При цьому f шуканим розв'язком рівняння (4) і

$$M_f(r) \leq c_2 \exp(N_\lambda(r) + c_2 r \exp(N_\lambda(\rho_0 r))),$$

що доводить теорему 2.

Зауваження 2. Якщо послідовність (λ_k) задовольняє умову (2) для деякого $\Delta < 1$, а рівняння (4) має розв'язок f , для якого (λ_k) є послідовністю нулів, то ціла функція a_0 задовольняє

$$|a_0(z)| \leq c_2 \exp(2N(R_1 r)), \quad (10)$$

для довільного $R_1 > 1$.

Це так, бо

$$|a_0(z)| \leq \left| \frac{L''(z)}{L(z)} \right| + 2 \left| g'(z) \right| \left| \frac{L'(z)}{L(z)} \right| + |g'(z)|^2 + |g''(z)|.$$

Оскільки (див. [16, наслідок 3], [17]) для всіх $z \in \mathbb{C}$ зовні виняткових кружків з множиною радіусів $E \subset [0; +\infty)$ скінченної лінійної міри і для деякого $\varepsilon > 0$ виконується

$$\left| \frac{L^{(k)}(z)}{L^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{\varepsilon(k-j)}, \quad k > j \geq 0,$$

то з (9) та теореми Коші випливає, що для довільного $R_1 > \max\{1; \rho_0\}$

$$M_{G'}(r) \leq M_G(R_1 r) \leq c_2 \exp(N(R_1 r)), \\ r \notin E \subset [0; +\infty).$$

Тому, враховуючи, що $g' = G$, $g'' = G'$, одержуємо справедливість (10) для $r \notin E \subset [0; +\infty)$. Цієї виняткової множини можна позбутися методом з [17, лема С] або з [2, с. 33].

Зауваження 3. Якщо послідовність (λ_k) задовольняє умову (2), то

$$N(r) \leq \frac{\ln^2 r}{2 \ln 1/\Delta} + \frac{1}{2} \ln \frac{r}{|\lambda_1|} + c_1, \quad r \in (1; +\infty). \quad (10)$$

Справді, нехай $r > 1$ – фіксоване число.

Тоді знайдеться таке $m \in \mathbb{N}$, що

$$|\lambda_m| \leq r < |\lambda_{m+1}| \quad i$$

$$N(r) = \sum_{k=1}^m \ln \frac{r}{|\lambda_k|} = m \ln r - \sum_{k=1}^m \ln |\lambda_k| \leq m \ln r - \\ - \sum_{k=1}^m \ln \Delta^{1-k} |\lambda_1| = m \ln r - \sum_{k=1}^m (\ln \Delta^{1-k} + \ln |\lambda_1|) =$$

$$= m \ln \frac{r}{|\lambda_1|} - \frac{m(m-1)}{2} \ln \frac{1}{\Delta},$$

бо $|\lambda_1| \leq \Delta^{k-1} |\lambda_k|$. Нехай

$$\varphi(m) = m \ln \frac{r}{|\lambda_1|} - \frac{m(m-1)}{2} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

$$\text{Тоді} \quad \varphi'(m) = \ln \frac{r}{|\lambda_1|} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\Delta} (2m-1) \quad i \quad \varphi'(m) = 0,$$

$$\text{якщо} \quad \left[\frac{\ln(r/|\lambda_1|)}{-\ln \Delta} + \frac{1}{2} \right] = m. \quad \text{Тому для}$$

$$\frac{\ln r/|\lambda_1|}{\ln 1/\Delta} - \frac{1}{2} < m \leq \frac{\ln r/|\lambda_1|}{\ln 1/\Delta} + \frac{1}{2} \quad \text{вираз}$$

$$\varphi(m) = m \ln \frac{r}{|\lambda_1|} - \frac{m(m-1)}{2} \ln \frac{1}{\Delta} \quad \text{досягає}$$

найбільшого значення. Отож,

$$N(r) \leq m \ln \frac{r}{|\lambda_1|} - \frac{m(m-1)}{2} \ln \frac{1}{\Delta}$$

$$\leq \left(\frac{\ln r/|\lambda_1|}{\ln 1/\Delta} + \frac{1}{2} \right) \left(\ln \frac{r}{|\lambda_1|} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\Delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln r/|\lambda_1|}{\ln 1/\Delta} - \frac{1}{2} \right)^2 \ln \frac{1}{\Delta}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\ln^2 r/|\lambda_1|}{\ln 1/\Delta} + \frac{1}{2} \ln \frac{r}{|\lambda_1|} + \frac{1}{8} \ln \frac{1}{\Delta}.$$

ВИСНОВКИ

Теорема 1 узагальнює результати Ю. Казьміна [4] стосовно розв'язку інтерполяційної задачі (1) на випадок, коли вузли інтерполяції задовольняють умову (2), а в теоремі 2 застосовано цей результат до опису розв'язків рівняння (4), послідовність

нулів яких задовольняє умову (2) і, таким чином, отримано дещо уточнені результати С. Банка - Дж. Грохена, Дж. Хейтокангаса [11, 12] стосовно осциляції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
- [2] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983. – 176 с.
- [3] Гришин А. Ф., Руссаковский А. М. Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функц. анализ и их прилож. - 1985. - 44. - С. 32 - 42.
- [4] Казьмин Ю.А. Об одной задаче А.О. Гельфонда // Матем. сб. - 1973. -132, №4.- С. 520-543.
- [5] Винницкий Б. В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Мат. замет., 1980. – 27, № 3. - С. 361 - 372.
- [6] Винницкий Б.В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Мат. замет.1981. – 29, № 4. - С. 503 - 516.
- [7] Винницкий Б. В., Шепарович І. Б. Про існування розв'язку інтерполяційної задачі в одному класі цілих функцій, який визначається лічильною функцією // АПФМІ, 2012. – № 4. - С. 12 - 14.
- [8] Heittokangas J. A survey on Blaschke-oscillatory differential equations, with updates, in Blaschke products and their applications, Fields Institute Communications, Vol. 65, J.Mashreghi, E.Fricain (eds.). - 2012, pp. 43 – 98.
- [9] Heittokangas J., Laine I. Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros // Acta Mathematica Universitatis Comenianae. – 2005. – Vol.74, №2. – P.287–307.
- [10] Šeda V. O niektorých vlastnostiach rišeni diferenciálnej rovnice $y'' = Q(z)y$, $Q(z) \neq 0$ je celá funkcia // Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathem.– 1959. – Vol.4. – P.223–253.
- [11] Bank S. A note on the zero-sequences of solutions of linear differential equations // Results in Mathematics. – 1988. – Vol.13. – P.1–10.
- [12] J. Gröhn, J. Heittokangas, New findings on Bank-Sauer approach in oscillatory theory, Constr. Approx. – 2012. - 35. - P. 345--361.
- [13] Винницкий Б. В. О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами // УМЖ., 1986. – 38, № 2. - С. 143 - 148.
- [14] Винницкий Б. В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент // Матем. сб., 1988. – 135 (177), № 1. - С. 59 - 79.
- [15] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2-х томах.- М.: Наука, 1978. - Т.2 - 432с.
- [16] Gundersen G.G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function plus similar estimates. J. Lond. Math. Soc. 37(1), 88 -104 (1988).
- [17] Bank S. A general theorem concerning the growth of solution of first-order algebraic differential equations // Compos. Math. – 1972. – Vol.25. – P.61–70.
- [18] B. Vynnyts'kyi, O. Shavala. Remark on Šeda theorem // Acta Math. Univ. Comenianae, - vol. LXXXI, 1(2012), p. 55 – 60.