

Застосування теоретичних основ оптимізації найкращого наближення та відновлення функцій у вирішенні проблеми ідентифікації сили лобового опору повітря руху літальних об'єктів

Грабчак В.І.*, Ванкевич П.І.*, Іваник Є.Г.*, Сікора О.В.**

email: sikora60@mail.ru

** Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів*

*** Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100*

Викладено підхід до ідентифікації функції лобового опору повітря, яка є основним аеродинамічним фактором і супроводжує рух літального об'єкта в атмосфері. Метод базується на ідеї оптимального відновлення функцій в умовах кратної і неповної інформації про відновлювальну функцію.

Ключові слова: найкраще наближення, оптимізація, сила лобового опору, літальний об'єкт, розрахунок траєкторії руху, система диференціальних рівнянь руху, крайова задача, обернена задача, некоректно поставлена задача, ідентифікація в умовах неповної інформації.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Головним завданням і проблемою, які постають перед розробниками літальних апаратів та ракетної техніки, а також конструкторів ракетних систем, є, за решти рівноцінних умов, прагнення мінімізувати лобовий опір. Незважаючи на давню історію вивчення питання опору повітряної атмосфери в процесі руху балістичних тіл чи керованих літальних апаратів, досі не можна з впевненістю стверджувати, що існує досконала методика теоретичного розрахунку сили опору повітря.

Одним з можливих шляхів вирішення проблеми визначення значень функції лобового опору повітря руху тіла в просторі є підхід, заснований на постановці некоректних задач математичної фізики і побудові їх наближених розв'язків, стійких до малих змін вхідних значень, та методів оптимального відновлення функцій. Тісний взаємозв'язок з класом некоректно поставлених задач математичної фізики існує з оберненими задачами математичної фізики, у тому числі з коефіцієнтними [1–6] визначення відповідних характеристик, які характеризують особливість фізичного поля.

На відміну від безпосереднього експериментального дослідження розгляданого фізичного процесу (прямі вимірювання) мають місце дотичні вимірювання (вимірювання кінематичних характеристик, які супроводжують рух тіла в атмосфері), результати яких інтерпретуються на основі розв'язку відповідної оберненої задачі.

АНАЛІЗ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ З ПРОБЛЕМИ НАБЛИЖЕНОГО ПОДАННЯ ТА ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ

Задача зображення функції виникає в тих випадках, коли треба зафіксувати у вигляді формули емпіричну функціональну залежність, причому вона може мати вигляд таблиці або графіка. Особлива потреба в придатній до використання формули з'являється тоді, коли саме вона відсутня, а наявна лише деяка апріорна інформація про неї. Треба відзначити, що підходи до отримання розв'язків некоректно поставлених задач було розвинуто в багатьох класичних працях [1–6]. Основним способом побудови розв'язку, що історично склався, став метод підбирання, але найбільш придатним для побудови обґрунтованого алгоритму

розв'язування некоректних крайових задач є підхід, який був розроблений А.М. Тихоновим [3], і дістав назву регуляризуючого оператора.

Некоректно поставлені задачі висувають перед дослідниками низку питань, які потребують особливо ретельного висвітлення. Проблема ідентифікації відповідної функціональної залежності, яка визначає процес руху об'єкта в атмосфері, має ту особливість, що теорія та експеримент перебувають у тісному взаємозв'язку, обумовлюючи характер проведення як теоретичних досліджень, так і експериментальних натурних випробувань [2–10]. Практично в основі будь-якого експерименту, спрямованого на визначення аеродинамічних характеристик, завжди закладено ідеї, близькі до теорії ідентифікації (відтворення) в умовах неповної інформації і теорії некоректних задач. Типовий випадок, коли маючи деякі дані експерименту дослідники, не вдаючись в тонкощі причинно-наслідкових зв'язків, притаманних руху літального об'єкта в атмосфері, відтворюють необхідну функцію, користуючись кінематичними параметрами траєкторії. Однак тут слід бути дуже уважним, адже діючи в полі некоректних задач, можна отримати неоднозначні і нестійкі до вхідних даних розв'язки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І ФОРМУЛЮВАННЯ МЕТИ СТАТТІ

Особливо важливим є створення надійних методів розв'язування обернених задач, стійких обчислювальних алгоритмів для адекватної інтерпретації результатів експериментальних випробувань. Для цього слід залучати фундаментальні результати оптимізації і найкращого відновлення функцій.

Метою статті визначимо постановку задачі про наближення функції, належної до деякого (більш менш широкого класу), яка має наближатись у вказаному смислі відповідною функцією з деякого більш вузького класу, а також ілюстрацію методу найкращого наближення і відновлення функцій стосовно ідентифікації основного аеродинамічного параметра, який супроводжує рух будь-якого літального апарату – це функція лобового опору.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Будемо трактувати проблему вивчення руху об'єкта (це може бути літак, ракета, артилерійський снаряд) в атмосфері як деяку

крайову задачу визначення невідомої функції $\Phi(x)$ з рівняння

$$L\Phi(x) = f(x) (x \in V) \quad (1)$$

всередині відкритого інтервала або області V , яка має задовольняти N лінійним крайовим умовам

$$B_i\Phi(x) = b_i (i = 1, 2, \dots, N; x \in S), \quad (2)$$

де $S = \partial V$ – межа області V ; кожна з $B_i\Phi(x)$ є лінійною однорідною функцією від шуканої функції $\Phi(x)$ та її похідних.

Особливістю сформульованої крайової задачі виду (1), (2) є не лише її пряме розв'язання, але й те, що вона містить ознаки, притаманні широкому класу задач, які виникають в різноманітних технічних застосуваннях, і мають назву обернених задач математичної фізики; це полягає перш за все у визначенні кількісних характеристик досліджуваного об'єкта (явища) за результатами вимірювань в експериментах або деяких побіжних проявлень оператора $L\Phi(x) = f(x)$. Отже постає проблема ідентифікації правої частини рівняння (1), або деякого виділеного з неї комплексу у вигляді функціональної залежності, причому з одночасним визначенням самого розв'язку крайової задачі (1), (2).

Елемент $\Phi(x)$ може мати вигляд, наприклад, вектора, функції, системи функцій (тобто функціонального вектора). Нехай досліджуваний елемент $\Phi_t(x)$ належить певному класу $U (\Phi_t(x) \in U)$. Найчастіше величина $\Phi_t(x)$ недоступна для прямого вимірювання і дається у вигляді деякого її прояву посередністю дії оператора

$$L\Phi_t(x) = f_t(x). \quad (3)$$

В залежності (3) оператор L визначається суттю досліджуваного процесу та характером експериментального пристрою, до якого слід віднести вимірювальну апаратуру. Під операторним символом $L\Phi(x)$ мають на увазі образ класу функцій U при його відображенні з допомогою оператора L . Згідно рівняння (3) $f_t(x) \in L\Phi$. Тому перед дослідником постає задача: за результатами вимірювань елемента $f_t(x)$, тобто правої частини рівняння, треба встановити кількісні характеристики $\Phi_t(x)$. Але елемент $f_t(x)$ в даному випадку отримується шляхом низки вимірювань, тобто не строго детермінований. Якщо поряд з елементом $f_t(x)$ мати на увазі

деяку величину $\hat{f}_t(x)$, то вона відповідно буде деяким наближенням елемента $f_t(x)$. Отже в цьому випадку мова може йти лише про знаходження деякого наближення шуканого пробного елемента $\Phi_t(x)$. Це може трактуватись як знаходження наближеного розв'язку рівняння

$$L\Phi(x) = \hat{f}_t(x). \quad (4)$$

Відзначимо, що в такому трактуванні вихідної крайової задачі права частина рівняння (4) взагалі кажучи не є елементом простору образів множини U . Тому ставити задачу про знаходження точного розв'язку рівняння (1) або (4) не доводиться, бо точного розв'язку в звичному розумінні взагалі не існує. Крім того, слід брати до уваги той факт, що в задачах зовнішньої балістики, яка визначається багатьма факторами, більшість з яких мають ймовірністну природу, обернений L^{-1} до прямого оператора не є неперервним, в сенсі того, що малим змінам елемента $\hat{f}_t(x)$ можуть відповідати великі зміни розв'язку $\Phi(x) = L^{-1}\hat{f}_t(x)$. В такому сенсі розв'язок в більшості випадків утруднює фізичну інтерпретацію результатів вимірювань, з яких ідентифікується права частина $\hat{f}_t(x)$. Таким чином, для такого роду комбінованих задач (коли розв'язок прямої задачі будується в умовах неповної інформації про збурюючі впливи на систему у вигляді задання величини $\hat{f}_t(x)$) виникає питання: що слід розуміти під «наближеним розв'язком». Якщо таке поняття чітко визначене, то постає задача побудови таких алгоритмів знаходження наближених розв'язків, які вже володіють властивістю стійкості до малих змін вихідних даних $\hat{f}_t(x)$, тобто таких, що малим змінам вихідних даних відповідають малі зміни побудованого розв'язку.

Вказані особливості обернених задач і виникаючі при цьому проблеми властиві більш широкому класу так званих некоректно поставлених задач, до яких належать більшість обернених задач математичної фізики [1, 2].

Таким чином, приходимо до розгляду класу некоректно поставлених обернених задач, в яких необхідно визначити кількісні характеристики $\Phi(x)$ досліджуваного об'єкта за результатами вимірювань (випробувань) їх прояву згідно рівняння (1) або (4). В такого роду задачах не для всякої правої частини, ідентифікованої шляхом проведення

комплексу вимірювань, існує класичний розв'язок, який до того ж володіє властивістю стійкості до малих змін величини $f(x) \in L\Phi$.

Формулювання коректно поставленої задачі визначення $\Phi(x)$ з множини U за вихідними даними f з множини F , $f = R(u)$, на множинах (U, F) , які є метричними з відповідними віддальми $\rho_U(\Phi_1, \Phi_2)$, $\rho_F(f_1, f_2)$, викладено в класичних робіт [2–4].

Основним способом побудови розв'язку некоректно поставлених задач, що історично склався, став метод підбирання [11], який полягає в тому, що обчислюється ліва частина рівняння (4) для деякої підмножини $U_1 \subset U$, тобто розв'язується пряма задача, і за шукане наближення вибирається такий елемент $\Phi_1(x) \in U_1$, для якого нев'язка $\rho_F(L\Phi, f)$ (певним чином вибрана міра відхилення) мінімальна. Зазвичай за множину $U_1 \subset U$ вибирається сімейство певних елементів $\Phi(x)$, залежних від скінченної кількості числових параметрів, які забезпечують умову, що підмножина U_1 утворює замкнуту множину скінченновимірному простору. Якщо є впевненість в тому, що шуканий розв'язок $\Phi_t(x) \in U_1$ та $f(x) = f_t(x)$, то в цьому випадку $\inf \rho_F(L\Phi, f_t) = 0$ і ця нижня грань досягається саме на точному розв'язку рівняння $L\Phi(x) = f_t(x)$. В цьому разі виникаюче правомірне питання, про збіжність деякої послідовності $\{\Phi_n\}$, для якої нев'язка $\rho_F(L\Phi_n, f_t) = 0$ прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, до точного розв'язку $\Phi(x)$, дає ствердну відповідь, що гарантує можливість отримувати методом вдалого підбирання наближеного розв'язку [11–13].

Але за інших умов метод підбору не придатний для отримання наближених розв'язків. Ці умови визначаються співвідношеннями між множинами метричних просторів U і F , в яких формулюється вихідна коректно поставлена крайова задача, і пов'язані з класами коректності [4]. Якщо вдається ефективно вказати класи коректності, то це гарантує можливість побудови стійких наближених розв'язків.

Взагалі для розв'язування некоректних задач відомі, крім методу підбирання, також метод квазірозв'язків, квазіобертань та низка інших методів [14–17], які в певній мірі узгоджуються з фундаментальною ідеєю методу регуляризації [12].

Відповідно до загальних засад теорії наближення виділяється три комплекси задач, які визначають зміст поставленої задачі [12].

Перший з них пов'язаний з питанням наближення певним методом фіксованого елемента X з лінійного нормованого простору X елементами фіксованої множини $\aleph$ з, тобто $\aleph \subset X$. Величину

$$E(x, \aleph) = \inf_{u \in \aleph} \|x - u\|$$

називають найкращим наближенням елемента X множиною $\aleph$ в метриці простору X . Якщо існує елемент $u_0(x) \in \aleph$, такий, що $E(x, \aleph) = \|x - u_0(x)\|$, то він має назву елементом найкращого наближення для X в множині $\aleph$.

Наступний крок припускає, що про наближуваний елемент немає достовірної інформації, тобто та, яка є в наявності, є неповною, і тому, можна лише говорити про наближення, визначеного наявною інформацією про множину $\aleph$ з X елементами наперед фіксованої множини $\aleph \subset X$. За найкраще наближення множини $\aleph \subset X$ множиною $\aleph \subset X$ приймається величина

$$E(\aleph, \aleph) = \sup_{x \in \aleph} E(x, \aleph),$$

і якщо існує деякий елемент $x_0 \in \aleph$, такий, для якого

$$E(\aleph, \aleph) = E(x_0, \aleph),$$

то його називають екстремальним елементом в $\aleph$ відносно множини $\aleph$ і простору X .

В третьому кроці об'єднуються задачі, пов'язані з відшукуванням найкращої (у визначеному сенсі) наближуючої множини і методу наближення. Зокрема, коли йдеться про найкраще наближення, розглядається задача відшукування величини

$$E_{\Xi}(\aleph) = \inf_{\aleph \in \Xi} E(\aleph, \aleph),$$

де Ξ – деяка сукупність множин $\aleph \subset X$.

Стосовно кола питань, які піднімає зовнішня балістика, то клас $\aleph$ переважно наповнюється дійсними функціями $f(x)$, заданими і неперервними на проміжку (a, b) ; клас $\aleph$ може обіймати, наприклад, звичайні дійсні поліноми, або набір базових гладких функцій з зосередженими інтервалами зміни, поліноміальні сплайни тощо.

Задачу теорії наближення, якщо розглядати її конструктивно, можна інтерпретувати як задачу оптимального відновлення функції за умов неповної інформації. Наприклад, якщо мова йде про найкраще наближення функції $f(t)$ з класу $\aleph$

функціями фіксованого підпростору F_N , то це треба трактувати так, що вимагається, використовуючи деяку інформацію про функцію $f(t)$, зокрема те, що функція $f(t) \in \aleph$, вказати в підпросторі F_N функцію $g(t)$, яка найменше, в певному (визначеному) сенсі, відрізняється від дійсної функції $f(t)$ і, отже, найкращим чином ідентифікує вихідну функцію $f(t)$ в підпросторі F_N . Для ефективного встановлення функції $g(t)$ в основному використовується дискретна інформація про відтворену функцію $f(t)$, яка задається числовим вектором $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$, координати якого можуть трактуватись як значення функції $f(t)$ і (або) її похідних в фіксованій системі точок, коефіцієнти Фур'є функції $f(t)$ за деякою ортогональною системою тощо. Внаслідок цього формулюється постановка задачі в такому загальному вигляді [8, 12].

Нехай X – лінійний нормований простір визначених на деякому проміжку функцій $f(t)$. Набір $M_N = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ заданих на X функціоналів, який можна трактувати як метод кодування, співставляє функції $f(t) \in X$ вектор

$$T(f, M_N) = \{\eta_1(f), \eta_2(f), \dots, \eta_N(f)\}, \quad (5)$$

який містить N одиниць інформації про функцію $f(t)$. Задачу відновлення функції $f(t)$ згідно інформації, визначеній залежністю (5), найкраще вирішувати співставленням вектору $T(f, M_N)$ функції

$$g(f; M_N, \Phi_N; t) = \sum_{k=1}^N \eta_k(f) \phi_k(t), \quad (6)$$

де $\Phi_N = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_N(t)\}$ – деяка система лінійно незалежних функцій з простору X . Зрозуміло, що набір саме з N лінійно незалежних функцій забезпечує можливість ефективного використання наявної інформації з N одиниць. За міру похибки відновлення приймається величина

$$\|f(\cdot) - g(f; M_N, \Phi_N; \cdot)\|_X. \quad (7)$$

Якщо крім вектора $T(f, M_N)$ жодної іншої інформації про функцію $f(t)$ немає, то задача оцінки похибки відновлення втрачає смисл. Щоб ця задача стала коректною, треба володіти крім цього також апіорною інформацією (наприклад, про гладкість $f(t)$),

яка гарантувала б, принаймні, обмеженість величини (7) для функції $f(t)$ з одним і тим же вектором інформації $T(f, M_N)$. Априорна інформація визначає деякий клас функцій $\mathfrak{Z}$, а величина

$$\varphi(\mathfrak{Z}; M_N, \Phi_N)_X = \sup_{f \in \mathfrak{Z}} \|f(\cdot) - g(f; M_N, \Phi_N)\|_X \quad (8)$$

є похибкою відновлення в класі $\mathfrak{Z}$.

В результаті виникають такі задачі.

- 1) При фіксованому методі кодування N знайти систему функцій Φ_N , для якої величина (8) приймає мінімальне значення.
- 2) При фіксованій системі функцій Φ_N знайти набір функціоналів M_N , який мінімізує похибку відновлення значення (8) в класі $\mathfrak{Z}$. Ця задача є класичною в теорії апроксимації [13, 17]; якщо обмежитись розглядом тільки лінійних функціоналів $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$, то йдеться про відшукування найкращого лінійного методу наближення для класу $\mathfrak{Z}$ за фіксованого наближуючого підпростору F_N .
- 3) Мінімізувати похибку (8) одночасно за елементами системи $M_N = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ та Φ_N , тобто оцінити величину

$$\varphi_N(\mathfrak{Z}, X) = \inf_{M_N, \Phi_N} \varphi(\mathfrak{Z}, M_N, \Phi_N)_X. \quad (9)$$

Таким чином йдеться про відшукування найкращого методу відновлення функцій класу $\mathfrak{Z}$ серед всіх алгоритмів, визначених залежністю (6), які використовують N одиниць інформації про функцію $f(t)$. Також вводиться в розгляд ще така величина

$$\varphi'_N(\mathfrak{Z}, X) = \inf_{M'_N, \Phi_N} \varphi(\mathfrak{Z}, M'_N, \Phi_N)_X, \quad (10)$$

де M'_N – набір заданих на X лінійних функціоналів $\{\eta_k\} (k=1, 2, \dots, N)$; отже задача, визначена співвідношенням (4.10) передбачає відшукування найкращого лінійного методу відновлення.

В основному задача передбачає глобальне відновлення функції $f(t) \in \mathfrak{Z}$ за інформацією $T(f, M_N)$ згідно співвідношення (5) одночасно на всьому проміжку, тобто ставиться задача відновити функцію $f(t)$ одночасно в кожній точці t ; похибка при цьому вимірюється мірою (7) у відповідному просторі. В реальній ситуації, коли за інформацією $T(f, M_N)$ необхідно відновити значення функції $f(t)$ в деякій фіксованій

точці t_* , слід ставити задачу про оптимальне відновлення лінійного функціоналу $\eta(t) = f(t_*)$ за відомим вектором інформації $M_N = \{\eta_1(f), \eta_2(f), \dots, \eta_N(f)\}$ та умові, що $f(t)$ належить деякому визначеному априорною інформацією класу $\mathfrak{Z}$. Якщо кодуєчий набір функціоналів M_N фіксований, то наближене значення $f(t_*)$ природним чином визначається у вигляді числа

$$g(f; M_N, c) = \sum_{k=1}^N c_k \eta_k(f),$$

де $c = \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ – вектор коефіцієнтів, який передбачається відомим досліднику. Задача полягає у знаходженні величини

$$\varepsilon(\mathfrak{Z}; M_N, t_*)_X = \inf_c \sup_{f \in \mathfrak{Z}} |f(t_*) - g(f; M_N, t_*)|$$

і встановленні мінімізуючого вектора коефіцієнтів $\bar{c} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_N\}$, який визначає найкращий метод відновлення.

Зрозуміло, що оптимальний вектор $\bar{c} = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_N\}$ залежить від точки t_* , в якій відновлюється значення функції $f(t) \in \mathfrak{Z}$, тобто $\bar{c} = \bar{c}(t_*)$. Якщо вважати, що (за одного фіксованого набору M_N) точка $t = t_*$ пробігає проміжок, на якому визначено функції класу $\mathfrak{Z}$, то отримується певний набір функцій $\{\bar{c}_k(t)\} (k=1, 2, \dots, N)$, який визначає метод оптимального відновлення функції $f(t) \in \mathfrak{Z}$ в кожній довільній точці t за інформацією $T(f, M_N)$. Що стосується функцій $\bar{c}_k(t)$ з розглядуваного набору, то про них відомо лише те, що в кожній точці t вони неявно визначаються рівностями

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathfrak{Z}} \left| f(t) - \sum_{k=1}^N \bar{c}_k(t) \eta_k(f) \right| = \\ = \inf_{\bar{c}_k(t)} \sup_{f \in \mathfrak{Z}} \left| f(t) - \sum_{k=1}^N \bar{c}_k(t) \eta_k(f) \right|, \end{aligned}$$

і, не варто сподіватись, що для функцій $\bar{c}_k(t)$ вдається вказати більш явне подання.

Отже, можна відзначити, що загальна ідея оптимального відновлення полягає в тому, щоб максимальним чином використовуючи наявну інформацію про функцію $f(t)$, витиснути з неї все, що сприяє для відновлення цієї функції (або значення на ній деякого лінійного функціоналу) з мінімально можливою похибкою.

Методи відновлення, які базуються на інтерполяційних сплайнах, як відзначено в монографіях [9, 18], є оптимальними для відповідного класу $\mathfrak{Z}$ в цілому, оскільки будуються єдиним уніфікованим чином відповідно до значень функції $f(t)$ в фіксованих точках. Однак гарантована при цьому точна для всього класу $\mathfrak{Z}$ оцінка похибки відновлення для індивідуальної функції $f(t)$ з $\mathfrak{Z}$ є взагалі завищеною, бо в процесі її отримання не враховується інформація, яка міститься у векторі інформації, з допомогою якого кодується саме дана функція. Тому актуальними в цьому напрямі є такі задачі: оцінка похибки відновлення з допомогою інтерполяційних сплайнів за вектором інформації індивідуальної функції; визначення методу побудови в класі $\mathfrak{Z}$ деякої функції $g_f(t)$, яка забезпечує відновлення заданої функції.

Використаємо систему рівнянь нормального виду [19–21], яка описує рух об'єкта в атмосфері в наближенні матеріальної точки

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f_1(x, y, K_d, t), \quad \dot{v} = f_2(x, y, K_d, t), \\ \dot{x} &= u, \quad \dot{y} = v, \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = 0, \quad t \in [t_0; T]. \end{aligned} \quad (11)$$

У системі рівнянь (11) позначено: x, y – горизонтальна і вертикальна складові траєкторії руху; u, v – складові вектора швидкості руху; K_d – функція лобового опору, яку треба відновити за даними вимірювань показників швидкості наземним доплерівським радаром; t – час.

Беручи до уваги залежність між кінематичними характеристиками руху в умовах атмосфери [19] систему рівнянь (11) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\rho \frac{Vu}{C} K_d(M), \quad \dot{v} = -g - \rho \frac{Vv}{C} K_d(M), \\ \dot{x} &= u, \quad \dot{y} = v, \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t_0) = 0, \quad t \in [t_0; T], \end{aligned} \quad (12)$$

де ρ – густина повітря; C – балістичний коефіцієнт; $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ – модуль вектора швидкості; g – прискорення вільного падіння, $M(t) = V(t)/a$ – безрозмірне число Маха, віднесене до швидкості a розповсюдження звукової хвилі [20, 21].

Обернення математичної моделі (12) будемо виконувати шляхом перетворень, за якими функція $K_d(V)$, яку належить ідентифікувати, залежна від швидкості руху, яка вважається визначеною з належною

достовірністю, використовуючи при цьому дані вимірювань балістичних станцій [22–26]. Тому, якщо є певна інформація про кінематичні характеристики траєкторії руху, які є розв'язком прямої крайової задачі (12), то з рівнянь системи (12) матимемо:

$$\begin{aligned} K_d(M) &= -\rho \frac{Vu}{C \frac{\partial u}{\partial t}}, \\ K_d^*(M) &= -\rho \frac{Vv}{C \left(\frac{\partial v}{\partial t} + g \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для практичної реалізації алгоритму, визначеного співвідношеннями (13), який дозволяє розраховувати шукану функціональну залежність $K_d(M)$, необхідно знайти спосіб подання даних вимірювань доплерівським радаром, які переважно, мають дискретний характер, в зручній для операції диференціювання формі. Інтегрування вимірюваних прискорень $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}$ з

допомогою автономної системи, яка складається з акселерометрів, дозволяє сформулювати чисельний алгоритм ідентифікації функціональної залежності $K_d(M)$, або $K_d(t)$.

Найпоширенішим способом вирішення задачі ідентифікації відповідної функціональної залежності є екстремальний метод розв'язування обернених задач [6, 10]. Відомі до нинішнього часу методи різняться процедурами чисельного моделювання і пошуком мінімуму функціоналу нев'язки, видом цього функціоналу і формою подання відновлювальної функції. Визначальною однак є вибір процедури мінімізації, яка в алгоритмах відіграє роль організатора пошуку.

Стосовно поставленої задачі визначення аеродинамічної функції лобового опору критерієм якості підбирання може бути виконання умови

$$\max_i |K_{di}(M) - K_{di}^*(M)| \leq \varepsilon_{dop}, \quad (14)$$

де i – номер точки вимірювання (дискретний момент часу); ε_{dop} – допустима величина нев'язки на даному часовому шарі.

Обернена задача, визначена критерієм (14), розв'язується послідовно у кожному часовому шарі.

Перш за все, покажемо, що сформульована тут задача відновлення функції лобового опору, є некоректно поставленою.

Систему диференціальних рівнянь нормального виду (12) подамо таким чином:

$$\dot{u} = K_1(t; u, v)K_d(t), \quad \dot{v} = K_2(t; u, v)K_d(t),$$

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = 0, \quad t \in [t_0; T]. \quad (15)$$

Припускаємо, що функції $K_i(t; u, v)$, $i = 1, 2$; є неперервними на деякій відкритій множині G змінних $(t; u, v)$ і $(t_0; u_0, v_0) \in G$, причому сукупність точок $(t_0; u_0, v_0) \in G$ визначають початкові умови системи (15). Згідно фундаментальної теорії систем диференціальних рівнянь [27] розв'язок задачі Коші для системи (15) рівносильний розв'язку інтегральних рівнянь Вольтера першого роду [28, 29] з ядрами $K_1(t; u, v)$ і $K_2(t; u, v)$:

$$u_0 + \int_{t_0}^t K_1(t; u(s), v(s))K_d(s)ds = u(t),$$

$$\int_{t_0}^t K_2(t; u(s), v(s))K_d(s)ds = v(t). \quad (16)$$

У поданні (16) позначено:

$K_d(s)$ – відтворювана функція з простору F , який в даному випадку є не що інше, як часовий інтервал $s \in [t_0; t]$; $u(t), v(t)$ – функції з деякого простору U , які трактуємо як визначені на основі доплерівських вимірювань сліду траси. Вважаємо, що ядра $K_i(t; u, v)$ по часу є неперервними функціями з неперервними частинними похідними $\frac{\partial K_i(t; u(s), v(s))}{\partial t}$.

Ідентифікацію функції $K_d(s)$ будемо здійснювати в класі неперервних функцій на відріжку $[t_0; t]$. Відхилення правих частин в співвідношеннях (16) будемо оцінювати в квадратичній метриці (метрика L_2) відповідно до формул

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sqrt{\int_{t_0}^T [u_1(\tau) - u_2(\tau)]^2 d\tau},$$

$$\rho_U(v_1, v_2) = \sqrt{\int_{t_0}^T [v_1(\tau) - v_2(\tau)]^2 d\tau},$$

$$[t_0; t] \subset [t_0; T],$$

а відхилення розв'язку в рівномірній метриці (метрика C) за формулою

$$\rho_F(K_{d1}, K_{d2}) = \max_{s \in [t_0; t]} |K_{d1}(s) - K_{d2}(s)|.$$

Нехай для деяких величин правих частин $u(t), v(t)$ системи (16) функція $K_d(s)$ задовольняє цю систему. Якщо замість них нам відомі лише деякі їх наближення, які незначно відрізняються (в метриці C) від вказаних величин, то можна ставити задачу тільки про знаходження наближеного значення функції $K_d(s)$, що зрештою зрозуміло і без залучення фундаментальних математичних тлумачень, оскільки це ясно з самої суті постановки даної задачі. Але праві частини системи (16) можуть не володіти властивостями достатньої гладкості, бо, як вже відзначалось, їх значення передбачається одержувати з експериментів, які передбачають вимірювання певних радіотехнічних сигналів, які згодом мають трансформуватись у відповідні кінематичні параметри, тому в кінцевому підсумку вони можуть мати кутові точки. Але в такому разі, якщо праві частини інтегральних рівнянь не задовольняють умовам гладкості, то відтворити коректно функціональну залежність $K_d(t)$ неможливо, оскільки ядра $K_i(t; u, v)$ записаних інтегральних рівнянь є гладкими функціями. Отже, наближення до $K_d(t)$ з приблизно відомими правими частинами системи (16) точно відтворити неможливо, тобто за цієї ситуації не виконується вимога існування взагалі розв'язку системи (16). Тому постає кардинальне питання, що саме слід розуміти під наближенням до функції $K_d(t)$ в умовах, коли праві частини інтегральних рівнянь є неточно детерміновані.

Також задача Коші (15), яка трансформується у вигляді інтегральних рівнянь (16), не задовольняє властивості стійкості, тобто не виконується остання вимога коректності задачі.

Справді, якщо поряд з деякою функцією $K_d(s)$ розглядати іншу функцію, яка пульсує навколо вихідного значення і задається у вигляді $K_d(s) + D \sin ns$, де n – натуральне число, то за довільного $D > 0$ і досить великих значень n отримуємо:

$$u_2(t) = u_1(t) + D \int_{t_0}^t K_1(t; u(s), v(s)) \sin ns ds,$$

$$v_2(t) = v_1(t) + D \int_{t_0}^t K_2(t; u(s), v(s)) \sin ns ds,$$

при цьому відхилення

$$\rho_U(u_1, u_2) =$$

$$= D \sqrt{\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^T K_1(t; u(s), v(s)) \sin ns \, ds \right] d\tau},$$

$$\rho_U(v_1, v_2) =$$

$$= D \sqrt{\int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^T K_2(t; u(s), v(s)) \sin ns \, ds \right] d\tau}$$

можна зробити як завгодно малими внаслідок прямування до нуля коефіцієнтів Фур'є [30] (в даному випадку ядра $K_i(t; u, v)$) з ростом їх номера n , але одночасно для двох відповідних функцій $K_d(s)$ їх відхилення складає

$$\rho_F(K_{d1}, K_{d2}) = \max_{s \in [t_0, t]} D |\sin ns| = D.$$

Отже, постає головна проблема: треба дати чітку відповідь на питання, що слід розуміти під наближенням функції $K_d(t)$, але і вказати такий алгоритм її побудови на основі сформульованих фундаментальних математичних тверджень (залежності (1)–(11)), який володіє властивістю стійкості до малих змін вхідних даних, якими в даному випадку фактично є значення швидкості $u(t), v(t)$ відтворюваної траєкторії руху, яка передбачається відслідковуватись з допомогою доплерівської радарної установки.

Сучасний рівень автоматизації експериментів і способів реєстрації їх результатів дозволяє отримати за короткий час великий об'єм інформації. Її обробку в межах реального часового проміжку можна здійснити лише за допомогою потужних обчислювальних засобів. Системи автоматизованої математичної обробки мають складати невід'ємну частину експерименту. Експеримент і система автоматизованої обробки його результатів повинні бути ланками однієї задачі.

Згідно класифікації [4] певна модель, яка формулюється у вигляді крайової задачі (1), вважається співставленою з експериментальними даними (вихідними даними експерименту), якщо відхилення у вибраній метриці між лівою частиною операторного рівняння (1) і її прояву у вигляді правої частини не перевищує деяке додатне достатньо мале число. Якщо множина всіх моделей, співставлених з експериментальними даними (які трактуємо як праві частини крайової задачі) пуста, то це означає, що моделі мають надто грубу (спрощену) структуру і тому в класі шуканих розв'язків нема співставлених (сумірних) з отримуваними даними експерименту моделей. В цьому випадку потрібно розглянути більш широкий клас моделей інтерпретації. Якщо ця

множина не пуста, то вона може мати суттєво відмінні одна від одної моделі. В таких випадках одна лише вимога співставлення можливих рішень з експериментальними даними не може бути критерієм знаходження фізично поданого наближеного розв'язку рівняння (1) через те, що в розпорядженні дослідника немає достатніх підстав для вибору рішення задачі тієї чи іншої співставленої з експериментальними даними моделі. Отримуване таким чином рішення може бути не стійким до вихідних даних. Відзначимо, що на умові співставлення засновано відомий метод підбирання наближених розв'язків. Такий відбір можна виконати, наприклад, за принципом вибору моделі мінімальної складності. Поняття складності моделі формалізується за допомогою деякого функціонала складності. Ця задача при достатньо слабких додаткових вимогах до сформульованого функціонала зводиться до мінімізації деякого комплексу, який містить параметр регуляризації [3], значення якого повинно бути узгодженим з рівнем похибки вхідних даних і може визначатися, в основному, за нев'язкою.

ВИСНОВКИ

Значна роль дослідження фізичних явищ, які супроводжують рух літальних об'єктів в атмосфері, належить математичному моделюванню, як ефективному засобі вивчення процесів. Математичне моделювання в ряді випадків може значною мірою замінити трудомісткий експеримент, але найчастіше доповнити його або дозволяє адекватно трактувати. Це в повній мірі стосується вивчення такого складного фізичного явища, як рух в повітряному просторі керованого або некерованого літального об'єкта, коли за наявною інформацією про умови однозначності (геометрія об'єкта, його властивості, крайові умови) визначається траєкторія його руху, а також основні аеродинамічні параметри, які значною мірою визначають цей рух. За цих умов експериментальні дані поведінки динамічної системи, яка складається з рухомого об'єкта, траєкторія якого відслідковується доплерівським радаром, є основним джерелом інформації про перебіг досліджуваного явища, та ідентифікації тих параметрів, які закладені в рівняння руху. Одночасно, відчувається явний дефіцит в достовірності вихідних даних, коли йдеться про дослідження, пов'язані з поведінкою нових видів спеціальних систем, які функціонують в реальних умовах. Тому актуальним є питання пошуку надійних

джерел отримання відповідної інформації використовуючи результати аеродинамічних експериментів на базі доплерівських радарних комплексів вимірювання кінематичних характеристик руху. Величезну користь у вирішенні даної проблеми надає методологія розв'язування відповідно поставлених обернених задач, яка перетворюється у потужний інструмент ідентифікації аеродинамічних сил, які діють на тіло, яке рухається в атмосфері. Оскільки неможливо виконати вимірювання діючих на рухомий об'єкт сил, то виникає необхідність визначати їх на основі дослідних даних, або, ще краще, побудувати обґрунтовану теорію того, як ці сили залежать від швидкості, орієнтації досліджуваного об'єкта тощо, з подальшим прицілом на те, що вимірюючи силові фактори в сприятливих умовах отримувати їх значення за всіх інших умов, які відповідають реальному перебігу даного фізичного процесу.

На завершення зазначимо, що систематичний аналіз проблем балістики передбачає використання такого математичного апарату, який дає змогу вирішити дилему, чим саме без значної шкоди для остаточного результату вирішення проблеми можна знехтувати, а чим – тимчасово, маючи на увазі пізніше в результаті відповідних уточнень, внести відповідні поправки. Тому найбільш вагомим і суттєвим результатом можна досягнути, використовуючи методи математичного моделювання в сукупності з апроксимаційними методами та методами оптимального відтворення функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Иванов В.К. Теория нелинейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
- [2] Лаврентьев М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 288 с.
- [3] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. Сер. Математика, физика. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
- [4] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 288 с.
- [5] Алифанов О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О.М.

- Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
- [6] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных некорректных задач / Ф.П. Васильев. – М. : Наука, 1981. – 400 с.
- [7] Линник Ю.Ю. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений / Ю.Ю. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 211 с.
- [8] Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / [Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Ягола А.Г.]. – М. : Наука, 1983. – 200с.
- [9] Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М. : Мир, 1974. – 324 с.
- [10] Вапник В.Н. Восстановление зависимости по эмпирическим данным / В.Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 448 с.
- [11] Коллатц Ф. Функциональный анализ и вычислительная математика / Ф. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 444 с.
- [12] Ибрагимов И.И. Теория приближения целыми функциями / И.И. Ибрагимов. – Баку: ЭЛМ, 1979. – 377 с.
- [13] Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун, В.Г. Доронин. – К. : Наук. думка, 1982. – 252 с.
- [14] Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
- [15] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 544 с.
- [16] Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 272 с.
- [17] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960. – 624 с.
- [18] Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 346 с.
- [19] Современная математика для инженеров / Под ред. Э.Ф. Беккенбаха. – М. : Изд-во иностр. лит., 1959. – 500 с.
- [20] Коновалов А.А. Внешняя баллистика / А.А. Коновалов, Ю.В. Николаев. – М. : ЦНИИ информации, 1979. – 228 с.
- [21] Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – М. : ВВА, 1972. – 184 с.
- [22] Chen Y. Iterative learning identification of aerodynamic drag curve from tracking radar measurements / Y. Chen, Wen C., Dou H., Sun M. // Control Eng. Practice. – 1997. – Vol. 5, N 5. – P.1543–1553.

- [23] Chen Y. Drag coefficient curve identification of projectiles from flight tests via optimal dynamic fitting / Y. Chen, Wen C., Gong Z., Sun M. // *Control Eng. Practice*. – 1997. – Vol. 5, N 5. – P.627–636.
- [24] Chen Y. High-order iterative learning identification of projectile's aerodynamic drag coefficient curve from radar measured velocity data / Y. Chen, Wen C., Xu J-X., Sun M. // *IEEE transactions of control systems technology*. – 1998. – Vol. 6, N 4. – P.1543–1553.
- [25] Chapman G. High-order iterative learning identification of projectile's aerodynamic drag coefficient curve from radar measured velocity data / G. Chapman, Kirk D. // *AIAA Journal*. – 1970. – Vol. 8, N 4. – P.753–758.
- [26] Грабчак В.І. Апроксимація функцій аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак // *Військово-технічний збірник*. – 2012. – № 2(7). – С.20-24.
- [27] Карташев А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – М. : Наука, 1980. – 288 с.
- [28] Верлань В.Ф. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы / В.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Наук. думка, 1986. – 543 с.
- [29] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.
- [30] Лучко Й.Й. Методи прикладної математики в інженерній практиці / Й.Й. Лучко, Є.Г. Іваник. Навчальний посібник; За ред. д. т. н., проф. Й.Й. Лучка. – Львів: Каменяр, 2011. – 430 с.