

Обчислення похідних потенціалу простого шару на граничних поверхнях в осесиметричному випадку

Дорошенко М.В., Лазурчак Л.В.

email: nikdorman@mail.ru

кафедра інформатики та обчислювальної математики
Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

вул. Стрийська, 3, Дрогобич, Львівська обл., 82100.

У роботі розроблена методика виділення особливостей на граничних розімкнутих поверхнях в осесиметричному випадку. Показано, що на граничних поверхнях в осесиметричному випадку похідні потенціалу простого шару мають логарифмічну особливість та особливість типу Коші.

Ключові слова: крайові умови, звичайні диференціальні рівняння, потенціал простого шару, розімкнуті поверхні.

ВСТУП

З математичної точки зору задача розрахунку електростатичних полів та траєкторій руху електронів зводиться до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа та задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Найбільш ефективним методом розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа виявився метод інтегральних рівнянь [1-6], який полягає в тому, що невідомий потенціал електростатичного поля представляється у вигляді потенціалу простого шару.

При моделюванні траєкторій руху електронів в емісійних електронно-оптичних системах виникає необхідність обчислення похідних потенціалу простого шару на розімкнутих поверхнях. Така задача є достатньо складною, тому що на граничних поверхнях похідні можуть мати особливості.

У роботі [2] описаний ефективний алгоритм обчислення граничних значень похідних потенціалу простого шару в плоскому випадку.

У даній роботі розглядається алгоритм знаходження похідних потенціалу простого шару на розімкнутих поверхнях в осесиметричному випадку.

1. ВИДІЛЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ В ПОХІДНИХ ПОТЕНЦІАЛУ ПРОСТОГО ШАРУ

В осесиметричному випадку система звичайних диференціальних рівнянь для знаходження траєкторій руху електрона представляється в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} &= \frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \\ \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} &= \frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{z}}\end{aligned}\quad (1)$$

з такими початковими умовами:

$$\begin{aligned}\bar{r}(t_0) &= r_0, \bar{z}(t_0) = z_0 \\ \frac{d\bar{r}(t_0)}{dt} &= r_0', \frac{d\bar{z}(t_0)}{dt} = z_0'\end{aligned}\quad (2)$$

Праві частини системи (1) є похідними потенціалу простого шару. Початкові умови (2) задаються на граничній поверхні.

На граничній поверхні похідні потенціалу простого шару мають особливості при суміщенні точки спостереження з точкою інтегрування.

Розглянемо алгоритм обчислення таких похідних.

Нехай твірна розімкнутої поверхні представляється такими параметричними рівняннями:

$$r = r(\alpha), z = z(\alpha), a \leq \alpha \leq b. \quad (3)$$

Функції $r(\alpha)$, $z(\alpha)$, за допомогою яких, представляється твірна осесиметричної поверхні є достатньо гладкими функціями. Похідна потенціалу простого шару має особливості на краю розімкнутих осесиметричних поверхонь та особливості в ядрі. Методика виділення особливостей на краю розімкнутих поверхонь описана в роботі [5].

У даній роботі розглядається алгоритм виділення особливостей в тому випадку, коли точка спостереження співпадає з точкою інтегрування.

Потенціал простого шару на розімкнутій поверхні в осесиметричному випадку представимо таким чином:

$$U(\alpha, \bar{\alpha}) = \int_a^b \mu(\alpha) \theta(\alpha) F(\alpha) r(\alpha) E(\alpha, \bar{\alpha}) d\alpha,$$

де

$$\theta(\alpha) = (\alpha - a)^{-n_1} (b - \alpha)^{-n_2}, 0 \leq n_1 \leq 1, 0 \leq n_2 \leq 1,$$

$$F(\alpha) = \sqrt{r^2(\alpha) + z^2(\alpha)}, E(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{K(k)}{\sqrt{(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))^2 + (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))^2}}.$$

Інтеграл має особливості на краю розімкнутої поверхні та слабку особливість в ядрі. Оскільки підінтегральна функція має особливості на проміжку інтегрування, то для обчислення даного інтеграла не можна застосовувати квадратурні формули вищих порядків, наприклад, квадратурну формулу Гауса.

Ефективний чисельний алгоритм обчислення такого інтегралу запропоновано в роботі [5], а саме: виділення особливості в густині здійснюється за допомогою заміни змінних, а особливість в ядрі виділяється методом Канторовича ослаблення особливості.

Розглянемо алгоритм знаходження похідних потенціалу простого шару на розімкнутій поверхні. Похідні на розімкнутій поверхні в осесиметричному випадку представимо в такому вигляді:

$$\left(\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{r}} \right)^{\pm} = \frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha} \cos(\bar{\alpha}, r) + \left[\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial n_{\bar{\alpha}}} \mp \frac{1}{2} \mu(\bar{\alpha}) \right] \cos(n_{\bar{\alpha}}, r);$$

$$\left(\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^{\pm} = \frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha} \cos(\bar{\alpha}, z) +$$

$$\left[\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial n_{\bar{\alpha}}} \mp \frac{1}{2} \mu(\bar{\alpha}) \right] \cos(n_{\bar{\alpha}}, z);$$

$$\cos(\bar{\alpha}, r) = \frac{-r'(\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha})}; \cos(\bar{\alpha}, z) = \frac{-z'(\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha})};$$

$$\cos(n_{\bar{\alpha}}, r) = \frac{-z'(\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha})};$$

$$\cos(n_{\bar{\alpha}}, z) = \frac{r'(\bar{\alpha})}{F(\bar{\alpha})};$$

Похідну $\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha}$ представимо в такому вигляді:

$$\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha} = \int_a^b \tau(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A(\alpha, \bar{\alpha}) + B(\alpha, \bar{\alpha}) \ln \frac{1}{\eta(\alpha, \bar{\alpha})}}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} \right) d\alpha + \frac{b_0}{2} \int_a^b \tau(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} \ln \frac{1}{\eta(\alpha, \bar{\alpha})} \right) d\alpha = I_1 + \frac{b_0}{2} I_2.$$

де

$$\tau(\alpha) = \mu(\alpha) F(\alpha) \theta(\alpha) r(\alpha);$$

$$R(\alpha, \bar{\alpha}) = (r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))^2 + (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))^2;$$

$$P(\alpha, \bar{\alpha}) = (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))^2 + (r(\alpha) - r(\bar{\alpha}))^2;$$

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_{s=0}^4 a_s \eta^s(\alpha, \bar{\alpha});$$

$$B(\alpha, \bar{\alpha}) = \sum_{s=1}^4 b_s \eta^s(\alpha, \bar{\alpha});$$

$$\eta(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{P(\alpha, \bar{\alpha})}{R(\alpha, \bar{\alpha})};$$

Інтеграл I_1 особливості в ядрі немає і для його обчислення можна використовувати довільну квадратурну формулу. Інтеграл I_2 має особливі точки при $\alpha = \bar{\alpha}$, тому його запишемо так:

$$I_2 = \int_a^b \tau(\alpha) V^{(1)}(\alpha, \bar{\alpha}) \ln R(\alpha, \bar{\alpha}) d\alpha + \int_a^b \tau(\alpha) V^{(1)}(\alpha, \bar{\alpha}) \ln \frac{1}{P(\alpha, \bar{\alpha})} d\alpha + 2 \int_a^b \frac{\tau(\alpha) V^{(2)}(\alpha, \bar{\alpha})}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} d\alpha + 2 \int_a^b \frac{\tau(\alpha) V^{(3)}(\alpha, \bar{\alpha})}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} d\alpha = I_{21} + I_{22} + 2I_{23} + 2I_{24};$$

де

$$V^{(1)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha}) - (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha})}{R^{\frac{3}{2}}(\alpha, \bar{\alpha})}$$

$$V^{(2)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha}) - (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha})}{R(\alpha, \bar{\alpha})}$$

$$V^{(3)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha}) - (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha})}{P(\alpha, \bar{\alpha})}$$

Інтеграли I_{21} і I_{23} не мають особливості при $\alpha = \bar{\alpha}$. Для їх обчислення можна застосовувати довільні квадратурні формули вищих порядків, наприклад, квадратурну формулу Гауса. Інтеграл I_{22} має логарифмічну особливість при $\alpha = \bar{\alpha}$. Методика обчислення таких інтегралів описана в роботі [1]. Інтеграл I_{24} має сильну особливість при $\alpha = \bar{\alpha}$, тому представимо його у такому вигляді:

$$I_{24} = \int_a^b \frac{\tau(\alpha)}{R(\alpha, \bar{\alpha})} \left(\frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}} + K(\alpha, \bar{\alpha}) \right) d\alpha =$$

$$\int_a^b \frac{\tau(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}} d\alpha + \int_a^b \tau(\alpha) K(\alpha, \bar{\alpha}) d\alpha = I'_{24} + I''_{24}; \quad (4)$$

$$K(\alpha, \bar{\alpha}) = V^{(3)}(\alpha, \bar{\alpha}) + \frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}}; f(\alpha) = \frac{\tau(\alpha)}{R(\alpha, \bar{\alpha})}.$$

У роботі [2] показано, що підінтегральна функція в другому інтегралі визначена на проміжку інтегрування, тому він особливості немає і для його обчислення можна застосовувати квадратурні формули. Перший інтеграл є інтегралом типу Коші, який існує в сенсі головного значення і обчислюється таким чином:

$$\int_a^b \frac{f(\alpha)}{\alpha - \bar{\alpha}} d\alpha = \int_a^b \frac{f(\alpha) - f(\bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}} d\alpha + \int_a^b \frac{f(\bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}} d\alpha.$$

Для обчислення першого інтегралу в правій частині (4) можна застосувати довільну квадратурну формулу, а другий інтеграл обчислюється аналітично і дорівнює такій величині:

$$\int_a^b \frac{f(\bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}} d\alpha = f(\bar{\alpha}) \ln \frac{b - \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}.$$

Отже, у похідній $\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha}$ особливість виділена.

Тепер розглянемо методику знаходження похідної $\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial n_{\bar{\alpha}}}$. Представимо її в такому вигляді:

$$\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial n_{\bar{\alpha}}} = \int_a^b \tau(\alpha) \frac{\partial}{\partial n_{\bar{\alpha}}} \left(\frac{A(\alpha, \bar{\alpha}) + B(\alpha, \bar{\alpha}) \ln \frac{1}{\eta(\alpha, \bar{\alpha})}}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} \right) d\alpha +$$

$$+ \frac{b_0}{2} \int_a^b \tau(\alpha) \frac{\partial}{\partial n_{\bar{\alpha}}} \left(\frac{1}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} \ln \frac{1}{\eta(\alpha, \bar{\alpha})} \right) d\alpha = I_1 + \frac{b_0}{2} I_2.$$

Інтеграл I_1 особливості в ядрі немає і для його обчислення можна використовувати довільну квадратурну формулу.

Покажемо, що інтеграл I_2 має логарифмічну особливість при $\alpha = \bar{\alpha}$. Представимо інтеграл I_2 в такому вигляді:

$$I_2 = \int_a^b \tau(\alpha) D^{(1)}(\alpha, \bar{\alpha}) \ln \frac{1}{\eta(\alpha, \bar{\alpha})} d\alpha +$$

$$2 \int_a^b \frac{\tau(\alpha) D^{(2)}(\alpha, \bar{\alpha})}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} d\alpha +$$

$$2 \int_a^b \frac{\tau(\alpha) D^{(3)}(\alpha, \bar{\alpha})}{\sqrt{R(\alpha, \bar{\alpha})}} d\alpha =$$

$$= I_{21} + 2I_{22} + 2I_{23},$$

$$\text{де } D^{(1)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha}) + (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha})}{R^{\frac{3}{2}}(\alpha, \bar{\alpha})}$$

$$D^{(2)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{-(r(\alpha) + r(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha}) - (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha})}{R(\alpha, \bar{\alpha})}$$

$$D^{(3)}(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{(r(\alpha) - r(\bar{\alpha}))z'(\bar{\alpha}) + (z(\alpha) - z(\bar{\alpha}))r'(\bar{\alpha})}{P(\alpha, \bar{\alpha})}$$

Інтеграл I_{22} немає особливості при $\alpha = \bar{\alpha}$, а інтеграл I_{21} має логарифмічну особливість. Методика виділення такої особливості розроблена в роботах [1,5]. У роботі [2] показано, що інтеграл типу I_{23} немає особливості при $\alpha = \bar{\alpha}$.

Отже, показано, що похідна $\frac{\partial U(\bar{r}, \bar{z})}{\partial \alpha}$

має логарифмічну особливість та особливість типу Коші. Нормальна похідна потенціалу простого шару на граничній поверхні має тільки логарифмічну особливість.

Точність знаходження похідних потенціалу простого шару на граничній поверхні залежить від степені точності квадратурної формули та від точності знаходження невідомої густини $\mu(\alpha)$. Невідома густина є розв'язком такого інтегрального рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_a^b \mu(\alpha) \vartheta(\alpha) F(\alpha) r(\alpha) E(\alpha, \bar{\alpha}) d\alpha = U_0. \quad (5)$$

В інтегральному рівнянні (5) U_0 - граничне значення потенціалу на поверхні.

У роботі [3] розроблений підхід до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, який полягає в наступному:

1. Невідома густина та гранична поверхня представляються за допомогою ізопараметричних перетворень або сплайнів. Виділення особливості в густині здійснюється за допомогою заміни змінних, а для виділення особливості в ядрі застосовується метод Канторовича ослаблення особливості.
2. За допомогою методу колокації розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

ВИСНОВКИ

1. Показано, що підінтегральна функція в похідних потенціалу простого шару на розімкнутих поверхнях в осесиметричному випадку має логарифмічну особливість та особливість типу Коші.

2. Розроблено алгоритм виділення логарифмічної особливості та особливості типу Коші в похідних потенціалу на

розімкнутих поверхнях в осесиметричному випадку, що дозволяє для їх наближеного обчислення застосовувати квадратурні формули.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Наука, 1984. – 475с.
2. Дорошенко М.В., Дудник О.М., Пушак Я.С. Виділення особливостей у похідних потенціалу простого шару на розімкнутих контурах. // Вісн. ДУ «Львівська політехніка». – 1997. № 320. – С. 63-66.
3. Дорошенко М.В., Дудник О.М., Пушак Я.С. Два підходи до чисельного розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. // Вісн. ДУ «Львівська політехніка». – 1998. № 341. – С. 103-105.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Наука, – 1987. – 379 с.
5. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, – 1986. – 459 с.
6. Chapko R., Johansson B.T. On some iterative methods based on boundary integrals for elliptic Cauchy problems in semi-infinite domains // Electronic Journal of Boundary Elements. – 2009. – 7.– P. 1-12.