

УДК 517.5

Зауваження про узагальнені власні вектори лінійних диференціальних операторів

Винницький Б.В., Хаць Р.В.

email: vynnytskyi@ukr.net, khats@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра математики,
вул. Стрийська, 3, Дрогобич, Львівська обл., 82100

Введено поняття множини узагальнених власних значень та множини узагальнених власних векторів лінійного оператора. Наведені означення ми розглядаємо як метод пошуку біртогональної системи підсистеми власних векторів деяких лінійних операторів в гільбертовому просторі, системи класичних власних векторів яких є переповненими. Сказане ми демонструємо на прикладі одного несамопряженого оператора.

Ключові слова: функція Бесселя, повна система, евклідовий простір, лінійний диференціальний оператор, формально спряжений оператор, узагальнені власні вектори.

Нехай $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ – деяка непорожня множина, $C(\Lambda)$ – векторний простір функцій $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, неперервних на проміжку $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $C^{(k)}(\Lambda)$ – множина тих функцій $f \in C(\Lambda)$, для яких $f^{(k)} \in C(\Lambda)$ і $L_2((0;1); x^2 dx)$ – простір вимірних функцій $f: (0;1) \rightarrow \mathbb{C}$ таких, що функція $t \rightarrow tf(t)$ належить до $L_2(0;1)$, зі скалярним добутком $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 t^2 f_1(t) \overline{f_2(t)} dt$ і нормою $\|f\|^2 := \int_0^1 t^2 |f(t)|^2 dt$. Нехай

$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$ – функція Бесселя першого роду порядку ν . Добре відомо [4], що функція J_ν є розв'язком рівняння $y'' + y'/x + (1 - \nu^2/x^2)y = 0$, функція $y(x) = J_\nu(x\rho)$ є розв'язком рівняння $y'' + y'/x - \nu^2/x^2 = -\rho^2 y$, а функції $y(x) = \sqrt{x\rho} J_{\pm\nu}(x\rho)$ є розв'язком диференціального рівняння

EMBED Equation.DSMT4

Нехай далі $H = L_2((0;1); x^2 dx)$ і

$B: H \rightarrow H$ – оператор, породжений формальним диференціальним оператором

$l_0^*(u) = -u'' - 4x^{-1}u'$ і область визначення $D(B)$ якого складається з тих функцій $u \in C^{(2)}[0;1]$, які задовольняють крайові умови

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Оператор B не має власних значень, але існують зліченна множина $\{\mu_j: j \in \Lambda\} \subset \mathbb{C}$ і повна система $(U_j: j \in \Lambda)$ ненульових елементів $U_j \in H = L_2((0;1); x^2 dx)$ такі, що

$$U_n - U_k \in D(B) \quad (2)$$

і

$$B(U_n - U_k) = \mu_n U_n - \mu_k U_k \quad (3)$$

для будь-яких $k \in \Lambda$ і $n \in \Lambda$.

Доведення. Оскільки при $x \rightarrow 0 +$ $u''(x) + 4x^{-1}u'(x) = O(x^{-1})$, то $B(u) \in H$, якщо $u \in D(B)$. Далі, у випадку $\rho = 0$ функції $u = x^{-3}$ і $u = 1$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння $u'' + 4x^{-1}u' = -\rho^2 u$. У випадку $\rho \neq 0$ лінійно незалежними розв'язками цього рівняння є функції $u(x) = x^{-2} \sqrt{x\rho} J_{-3/2}(\rho x)$ і $u(x) = x^{-2} \sqrt{x\rho} J_{3/2}(\rho x)$. Але жодна ненульова лінійна комбінація цих функцій не може задовольняти (1), бо

$$\rho\sqrt{x\rho}J_{-3/2}(x\rho)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x}+\frac{\rho^2x}{2}-\frac{\rho^4x^3}{8}+O(x^5)\right), \quad x \rightarrow 0+, \quad (4)$$

$$\sqrt{\rho x}J_{3/2}(\rho x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{\rho^2x^2}{3}+\frac{\rho^4x^4}{30}+O(x^6)\right), \quad x \rightarrow 0+. \quad (5)$$

Тому власних функцій цей оператор не має. Далі, нехай ρ_k , $k \in \mathbb{N}$, – додатні нулі функції $J_{3/2}$, $\mu_k = \rho_k^2$ і $U_k(x) = \rho_k^{-2}x^{-2}\sqrt{\rho_k x}J_{3/2}(\rho_k x)$. Тоді $U_k \in H = L_2((0;1); x^2 dx)$, бо згідно з (5)

$$U_k(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-\frac{1}{3}+\frac{\rho_k^2x^2}{30}+O(x^4)\right), \quad x \rightarrow 0+.$$

Окрім цього, при $x \rightarrow 0+$

$$U_k(x) - U_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{(\rho_n^2 - \rho_k^2)x^2}{30} + O(x^4)\right).$$

Тому $(U_k - U_n)(0) = 0$, $U_k - U_n \in D(B)$ і оскільки $l_0^*(U_k) = \rho_k^2 U_k$, то (3) також виконується. До того ж, згідно з [8, 9] система $(U_j : j \in \mathbb{N})$ є повною в $H = L_2((0;1); x^2 dx)$.

Зауваження 1. Оператор B , розглядуваний в теоремі 1, має й інші множини $\{\mu_j : j \in \Lambda\} \subset \mathbb{C}$ та $\{U_j : j \in \Lambda\} \subset H$ такі, що виконуються умови (2) і (3). Зокрема, нехай $\tilde{\rho}_k$, $k \in \mathbb{N}$, – ті нулі функції $J_{-3/2}$, для яких $\tilde{\rho}_k > 0$ або $\text{Im } \tilde{\rho}_k > 0$, $\mu_k = \tilde{\rho}_k^2$, $\hat{u}_1 = x^{-2}\tilde{\rho}_1\sqrt{x\tilde{\rho}_1}J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_1)$ і

$$\hat{u}_k = x^{-2}(\tilde{\rho}_1^2 - \tilde{\rho}_k^2)^{-1}\tilde{\rho}_k\sqrt{x\tilde{\rho}_k}J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_k), \quad k > 1.$$

Тоді згідно з (4), функції $U_k = \hat{u}_k + (\mu_k - \mu_1)^{-1}\hat{u}_1$ належать простору $H = L_2((0;1); x^2 dx)$ і задовольняють умови (2) та (3), якщо $\Lambda = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. При цьому, система $(U_j : j \in \Lambda)$ є повною [7] в просторі $L_2((0;1); x^2 dx)$.

Множина $\mathfrak{M}(B) = \{\mu_j : j \in \Lambda\} \subset \mathbb{C}$ називається [1, 2, 6] множиною узагальнених власних значень лінійного оператора $B : H \rightarrow H$ у

векторному просторі H з областю визначення $D(B)$, якщо знайдеться така множина $\mathfrak{A}(B) = \{U_j : j \in \Lambda\}$ ненульових елементів $U_j \in H$, що виконуються умови (2) і (3). При цьому множина $\mathfrak{A}(B)$ називається множиною узагальнених власних векторів оператора B .

Ці поняття є інколи корисними при пошуку біортогональних систем таких систем, які стали повними і мінімальними після відкидання скінченного числа членів з деякої переповненої системи. Зробимо декілька зауважень з цього приводу. Оператор $B : H \rightarrow H$ ми називаємо формально спряженим оператором лінійного оператора $A : H \rightarrow H$ в евклідовому просторі H зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, якщо $\langle A\psi; u \rangle = \langle \psi; Bu \rangle$ для всіх $\psi \in D(A)$ і всіх $u \in D(B)$.

Теорема 2. Нехай $A : H \rightarrow H$ – деякий лінійний оператор в евклідовому просторі H зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, областю визначення $D(A)$, множиною власних значень $\{\lambda_j : j \in \Lambda\}$ і відповідною множиною власних векторів $\{\psi_j : j \in \Lambda\}$. Нехай кожне число $\mu_j = \overline{\lambda_j}$, $j \in \Lambda$, є узагальненим власним значенням деякого оператора $B : H \rightarrow H$, який є формально спряженим оператором оператора A і $(U_j : j \in \Lambda)$ – відповідна система узагальнених власних векторів оператора B . Тоді $\langle \psi_k; U_n \rangle = 0$, $\lambda_k \neq \lambda_n$.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \lambda_k \langle \psi_k; U_n \rangle &= \lambda_k \langle \psi_k; U_n - U_k \rangle + \lambda_k \langle \psi_k; U_k \rangle = \langle A\psi_k; U_n - U_k \rangle + \lambda_k \langle \psi_k; U_k \rangle = \\ &= \langle \psi_k; B(U_n - U_k) \rangle + \lambda_k \langle \psi_k; U_k \rangle = \langle \psi_k; \mu_n U_n - \mu_k U_k \rangle + \lambda_k \langle \psi_k; U_k \rangle = \\ &= \langle \psi_k; \mu_n U_n \rangle - \langle \psi_k; \mu_k U_k \rangle + \lambda_k \langle \psi_k; U_k \rangle = \langle \psi_k; \mu_n U_n \rangle = \lambda_n \langle \psi_k; U_n \rangle, \end{aligned}$$

що дає підстави зробити відповідний висновок.

Якщо $D(B) = H$ і множина

$\mathfrak{M}(B) = \{\mu_j : j \in \Lambda\} \subset \mathbb{C}$ є множиною узагальнених власних значень лінійного оператора $B : H \rightarrow H$, то існує таке $b \in H$, що для

кожного $k \in \Lambda$ рівняння $B(u) = \mu_k u + b$ має ненульовий розв'язок $u_k \in H$. Якщо ж $D(B) \neq H$, то можуть існувати узагальнені власні вектори іншого роду.

Нехай $\overline{n; m} = [n; m] \cap \mathbb{Z}_+$, $\Lambda = \mathbb{N} \setminus \{1; m\}$ і $\overline{n; m} = \emptyset$, якщо $n > m$. При побудові узагальнених власних векторів інколи є корисним наступне спостереження.

Теорема 3. Нехай $m \in \mathbb{Z}_+$, $\Lambda = \mathbb{N} \setminus \{1; m\}$, $B: H \rightarrow H$ – лінійний оператор у векторному просторі H і $\{U_j: j \in \Lambda\}$ – деяка множина ненульових елементів простору H . Якщо існують векторний простір $\hat{H}$, лінійний оператор $\hat{B}: \hat{H} \rightarrow \hat{H}$, який має

зліченну множину власних значень $\{\mu_k: k \in \mathbb{N}\}$ і відповідну множину власних векторів $\{\hat{u}_k: k \in \mathbb{N}\}$ такі, що $\hat{H} \cap H \neq \emptyset$, $U_n - U_k \in D(B)$, $U_n - U_k \in D(\hat{B})$, $B(U_n - U_k) = \hat{B}(U_n - U_k)$ для кожних $k \in \Lambda$ і $n \in \Lambda$, та

$$U_s := \hat{u}_s + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{1}{\mu_s - \mu_i} \hat{u}_i, \quad s \in \Lambda, \quad (6)$$

належать H , то $\mathfrak{M}(B) = \{\mu_j: j \in \Lambda\}$ є множиною узагальнених власних значень оператора B , а множина $\mathfrak{A}(B) = \{U_j: j \in \Lambda\}$ – відповідною множиною узагальнених власних векторів.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} B(U_n - U_k) &= \hat{B}(U_n - U_k) = \mu_n \hat{u}_n + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{\mu_i}{\mu_n - \mu_i} \hat{u}_i - \mu_k \hat{u}_k - \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{\mu_i}{\mu_k - \mu_i} \hat{u}_i \\ &= \mu_n \left(\hat{u}_n + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{1}{\mu_n - \mu_i} \hat{u}_i \right) - \mu_k \left(\hat{u}_k + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{1}{\mu_k - \mu_i} \hat{u}_i \right) + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{\mu_k - \mu_i}{\mu_k - \mu_i} \hat{u}_i + \sum_{i \in \Lambda; m} \frac{\mu_i - \mu_n}{\mu_n - \mu_i} \hat{u}_i = \mu_n U_n - \mu_k U_k. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Узагальнені власні вектори, які подаються у вигляді (6), назвемо узагальненими власними векторами ширини $m \in \mathbb{Z}_+$. Побудовані при доведенні теореми 1 функції U_k є узагальненими власними векторами ширини $m = 0$. Розглянуті в зауваженні 1 функції U_k є узагальненими власними векторами ширини $m = 1$. Розглядаючи інші оператори (див. [10]) ми прийдемо до узагальнених власних векторів наперед заданої ширини $m \in \mathbb{Z}_+$, але це не є метою даної статті.

Зауваження 3. Нехай $H = L_2((0; 1); x^2 dx)$ і $\tilde{A}$ – оператор, породжений формальним диференціальним оператором $l_0(\psi) = -\psi'' + 2x^{-2}\psi$, область визначення $D(\tilde{A})$

якого складається з тих функцій $\psi \in C^{(2)}[0; 1]$, які задовольняють крайові умови $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Тоді при $x \rightarrow 0+$ маємо $-\psi''(x) + 2x^{-2}\psi(x) = O(x^{-1})$ і $\tilde{A}(\psi) \in H$, якщо $\psi \in D(\tilde{A})$. Окрім цього, функції $\psi_k(x) = \sqrt{x\rho_k} J_{3/2}(x\rho_k)$, $k \in \mathbb{N}$, є власними функціями оператора $\tilde{A}$ і оператор B є формально спряженим оператором оператора $\tilde{A}$ в просторі $H = L_2((0; 1); x^2 dx)$, бо згідно з тотожністю Лагранжа [5] для будь-яких функцій $\psi \in D(\tilde{A})$ та $u \in D(B)$

$$\begin{aligned} x^2(l_0\psi)(x)\overline{u(x)} - x^2\psi(x)\overline{(l_0^*u)(x)} &= (-x^2\psi''(x) + 2\psi(x))\overline{u(x)} - \psi(x)\overline{(-x^2u''(x) - 4xu'(x))} \\ &= \left(-x^2\psi'(x)\overline{u(x)} + 2x\psi(x)\overline{u(x)} + \psi(x)x^2\overline{u'(x)} \right)'. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \int_0^1 x^2(l_0\psi)(x)\overline{u(x)}dx = \int_0^1 x^2\psi(x)\overline{(l_0^*u)(x)}dx.$$

Зауваження 4. Нехай $H = L_2((0; 1); x^2 dx)$ і A – оператор, породжений формальним диференціальним оператором

$$l_0(\psi) = -\psi'' + 2x^{-2}\psi \text{ та крайовими умовами } \psi(1) = 0, \quad (7)$$

$$\psi(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x + o(x^2), \quad x \rightarrow 0+, \quad (8)$$

для деяких сталих $c_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1; 2\}$, і область визначення $D(A)$ якого складається з тих функцій $\psi \in C^{(2)}(0; 1]$, які задовольняють ці крайові умови і асимптотичну рівність (8) можна двічі почленно диференціювати. Тоді $(I_0\psi)(x) = 2c_2x^{-1} + o(1)$, $x \rightarrow 0+$, і $A(\psi) \in H$,

якщо $\psi \in D(A)$. Окрім цього, функції $\psi_k(x) = \tilde{\rho}_k \sqrt{x\tilde{\rho}_k} J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_k)$, $k \in \mathbb{N}$, є власними функціями оператора A і оператор B є формально спряженим оператором оператора A в просторі $H = L_2((0; 1); x^2 dx)$. Зі сказаного вище випливає, що

$$\int_0^1 \tilde{\rho}_k \sqrt{x\tilde{\rho}_k} J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_k) \left(\tilde{\rho}_n \sqrt{x\tilde{\rho}_n} J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_n) - \tilde{\rho}_1 \sqrt{x\tilde{\rho}_1} J_{-3/2}(x\tilde{\rho}_1) \right) dx = 0,$$

якщо $k \neq n$, $k > 1$ і $n > 1$. Останнє твердження іншим методом доведено в [3].

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Про узагальнення поняття власного вектора / Б.В. Винницький, Р.В. Хаць // Сучасні проблеми аналізу: Міжнародна конференція присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (30 вересня – 3 жовтня 2010 року, м. Чернівці). – Чернівці, 2010. – С. 51–52.
- [2] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Узагальнені власні вектори лінійних диференціальних операторів / Б.В. Винницький, Р.В. Хаць // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатка (19-23 вересня 2011 року, м. Дрогобич). – Львів, 2011. – С. 36.
- [3] Винницький Б.В., Шавала О.В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя / Б.В. Винницький, О.В. Шавала // Мат. студ. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 31–41.
- [4] Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

- [5] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
- [6] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. Approximation properties of Bessel functions and a generalization of the notion of eigenvector / B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats' // Complex analysis in memory of A.A. Gol'dberg: International conference (Lviv, May 31 – June 5, 2010). – Lviv, 2010. – P. 64–65.
- [7] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$ / B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats' // Mat. Stud. – 2010. – V. 34, № 2. – P. 152–159.
- [8] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. Completeness and minimality of systems of Bessel functions / B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats' // Ufa Math. J. – 2013. – V. 5, № 2. – P. 132–141.
- [9] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. Some approximation properties of systems of Bessel functions in weighted L^2 -spaces / B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats' // Complex analysis and related topics: International conference (Lviv, September 23-28, 2013). – Lviv, 2013. – P. 89–90.
- [10] Vynnyts'kyi B.V., Shavala O.V. Some properties of boundary value problems for Bessel's equation / B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala // Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. – 2013. – V. 10. – P. 169–172.