

Розв'язування задач лінійного програмування за допомогою інтегрованого середовища Word та Matlab

Дорошенко М.В., Когут У.П.

email: informatyka@drogobych.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики
вул. Стрийська, 3, Дрогобич, Львівська обл., 82100

У статті розглядається методика створення інтегрованого середовища Word та Matlab та аналіз його можливостей при розв'язуванні задач лінійного програмування симплексним методом.

Ключові слова: задача лінійного програмування, симплекс-метод, М-книги, Word, Matlab.

ВСТУП

Задачі лінійного програмування знаходять широке застосування в різних галузях знань, де використовуються математичні методи. Такі задачі є математичними моделями деяких економічних задач, а саме: задач про оптимальних розподіл ресурсів та прибутків. Такі моделі називаються нормативними моделями [5] тому що, включають критерії якості функціонування систем. Крім того нормативна модель містить дескриптивну частину. Дескриптивною частиною в задачах лінійного програмування є система обмежень. Необхідність розв'язання таких задач призводить до того, що лінійне програмування стало важливим елементом освіти фахівця з інформатики.

Методи розв'язування задач лінійного програмування реалізовані у вигляді стандартних функцій у системах комп'ютерної математики, таких як Mathematica, Maple, Matlab, MathCad [1-3, 6, 7], а також в табличному процесорі Microsoft Excel як команда Пошук розв'язку. Програму Пошук розв'язку можуть використовувати фахівці з економіки для аналізу задач про оптимальний розподіл ресурсів та прибутків.

Але для підготовки спеціалістів з інформатики важливим є засвоєння методів розв'язування задач лінійного програмування. Тому важливим є вибір програмного середовища, в якому студенти будуть вивчати алгоритми методів розв'язування задач лінійного програмування.

Мета статті проаналізувати можливості інтегрованого середовища Word та Matlab для розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Існує універсальний метод розв'язування задач лінійного програмування, а саме: симплексний метод та його модифікації (модифікований симплексний метод, метод штучного базису, двоїстий симплексний метод) [4, 8, 9].

Симплексний метод – це прямий метод розв'язування задач лінійного програмування, що дає точний розв'язок задачі у випадку, коли множина допустимих розв'язків не пуста та виконується критерій оптимальності [8].

Алгоритм симплексного методу реалізований у вигляді стандартних функцій у системах комп'ютерної математики, таких як Mathematica, Maple, Matlab, MathCad, а також в табличному процесорі Microsoft Excel як команда Пошук розв'язку.

Фахівці з інформатики повинні не тільки вміти використовувати стандартні програми розв'язування задач лінійного програмування, а досконало знати алгоритми симплексних методів і вміти їх застосовувати для розв'язування конкретних задач лінійного програмування. Тому при проведенні лабораторних занять при вивченні теми «Лінійне програмування» важливо, щоб кожний студент досконало засвоїв кроки симплексних методів, вмів аналізувати результати, які отримуються після виконання кожного кроку симплексного методу. Для цього доцільно, щоб додаток, в якому здійснюється реалізація симплексного методу розв'язування конкретної задачі лінійного програмування містив опис алгоритму та команди покрокової реалізації методу. Дану проблему можна розв'язати використовуючи інтегроване середовище Word та Matlab.

Важливою властивістю системи Matlab є можливість створення текстових документів в середовищі текстового процесора Word з одночасним проведенням у ньому обчислень за допомогою команд системи Matlab та фіксуванням результатів обчислень в текстовому документі, створеному в системі Word [7]. Завдяки такій можливості можна створювати текстові документи безпосередньо в процесорі Word, за допомогою яких здійснюються складні науково-технічні розрахунки. Такі текстові документи називаються М-книгами. Для створення М-книги потрібно використати пакет NoteBook, який входить в прикладну систему Matlab. Цей пакет зв'язується з текстовим процесором Word з допомогою спеціального Word-шаблону, який міститься в системі Matlab. Для того, щоб можна було створювати М-книгу потрібно, щоб шаблон, що носить ім'я M-book. dot, був заздалегідь приєднаний до процесора Word.

Для створення М-книги потрібно виконати такі дії:

- 1) завантажити тестовий процесор Word;
- 2) виконати в діалоговому вікні Word команду New меню File;
- 3) у вікні, яке з'явиться на екрані, вибрати шаблон M-book.

У результаті таких дій буде завантажена система Matlab, і вид головного меню процесора Word декілька зміниться – у ньому з'явиться нове меню Notebook. Це і свідчитиме про те, що до текстового процесора Word приєднана система Matlab.

Написання М-книги пов'язане з набором тексту, а також операторів і команд системи Matlab. Введення тексту здійснюється за звичайними правилами текстового процесора Word.

Щоб ввести і виконати команду Matlab необхідно:

- 1) написати текст команди у вигляді окремого рядка;
- 2) після набору рядка з командою не натискати клавішу <Enter> (курсор повинен залишитися в рядку команди);
- 3) вибрати команду Define Input Cell з меню Notebook або натиснути клавіші <Alt+D>. Після цього вид рядка команди повинен змінитися – символи команди набудуть темно-зеленого кольору, а команда стане облямованою квадратними дужками темно-сірого кольору;
- 4) вибрати мишкою команду Evaluate Cell або натиснути комбінацію клавіш <Ctrl+Enter>. Результатом цих дій повинно стати поява відразу після тексту команди результатів її виконання системою Matlab.

Результати виконання команди виводяться синім кольором в квадратних дужках.

Щоб залишити в тексті документа введені команди та виведені результати, потрібно:

- 1) помістити курсор мишки в один з рядків виконаної команди;
- 2) вибрати команду Undefine Cells з меню Notebook або натиснути комбінацію клавіш <Alt+U>. В результаті всі символи набудуть звичайний для тексту стиль, колір та розміри, зникнуть квадратні дужки, які їх оздоблювали.

Щоб відредагувати існуючу М-книгу або внести до неї доповнення, треба виконати одну з наступних дій:

Увійти в текстовий процесор Word. Відкрити за допомогою команди Open з меню File файл М-книги.

Увійти в редактор Word та вибрати потрібну М-книгою з переліку останніх документів в нижній частині меню File.

Щоб перетворити раніше створений документ Word на М-книгу, необхідно виконати такі дії:

- 1) у редакторі Word створити нову М-книгу;
- 2) з меню Insert редактора Word вибрати команду File;
- 3) вибрати у вікні, що з'явилося, команду Вставка файлу та вибрати файл, який потрібно перетворити в М-книгу, і натиснути клавішу "Enter".

2. ОПИСАННЯ МОДЕЛІ, ОБ'ЄКТІВ ТА МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для розв'язування задач лінійного програмування лінійного програмування симплексним методом пропонується така структура М-книги:

Заголовок М-книги.

Постановка задачі лінійного програмування.

Розробка математичної моделі.

Алгоритм симплексного методу.

Побудова симплекс-таблиці для запису проміжкових та остаточних результатів виконання кроків алгоритму.

Команди системи Matlab, за допомогою яких реалізується алгоритм симплексного методу.

Структура М-книги розв'язування задачі лінійного програмування наведена нижче:

М-книга для розв'язування задач лінійного програмування симплексним методом.

Постановка задачі лінійного програмування.

Для виготовлення виробів А,В,С підприємство використовує три види сировини.

Норми використання сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А,В,С, а також загальні запаси сировини кожного виду, приведені в табл. 1. Потрібно знайти оптимальний план виробництва при якому загальна вартість всієї виробленої продукції буде максимальною.

Таблиця 1.

Види сировини	Норми затрати сировини			Загальні запаси сировини
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	8	4	6	192
III	5	3	3	180
Ціна одного виробу	9	10	16	

Математична модель задачі

$$\max L(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \quad (1)$$

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360$$

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 192$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180, \quad (2)$$

$$\text{де } x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Задачу (1) – (2) зводимо до такого вигляду:

$$\max L(x) = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0(x_4 + x_5 + x_6)$$

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360$$

$$8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_5 = 192$$

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180,$$

$$\text{де } x_j \geq 0, j = \overline{1,6}.$$

Позначимо

$$P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Критерій оптимальності. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то знайдений базисний розв'язок є оптимальний; якщо існують $\Delta_j < 0$, то можливі два випадки:

задача немає розв'язку;

задача має розв'язок і треба знайти інший базисний розв'язок.

Задача немає розв'язку тоді, коли існує $\Delta_j < 0$ і всі коефіцієнти $a_{ij} \leq 0, i = \overline{1,m}$ у відповідному стовпці. Якщо серед коефіцієнтів $a_{ij}, i = \overline{1,m}$ є додатні, то перехід до іншого базисного розв'язку здійснюється симплексним методом.

Алгоритм симплексного методу можна представити за допомогою таких кроків:

Знаходимо початковий базисний розв'язок, який задовольняє систему лінійних обмежень.

Перевіряємо критерій оптимальності. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ то переходимо до кроку 6, інакше, якщо існує $\Delta_j < 0$ і всі коефіцієнти $a_{ij} \leq 0, i = \overline{1,m}$ у відповідному стовпці, то задача лінійного програмування немає розв'язку, інакше знаходимо $\Delta_k = \max_{0 \leq j \leq n+m} |\Delta_j|$. Вектор

P_k стане новим базисним вектором.

Визначаємо вектор, який буде виключено з базису. Для цього поділимо коефіцієнти стовпця P_0 на $a_{ik} > 0, i = \overline{1,m}$

$$b'_r = \min\left(\frac{b_1}{a_{1k}}, \frac{b_2}{a_{2k}}, \dots, \frac{b_m}{a_{mk}}\right), \text{ при } a_{ik} > 0.$$

Елемент a_{rk} , який знаходиться на перетині r -го рядка та k -го стовпця називається розв'язальним елементом. Вектор P_r буде виключено з базису.

Перетворюємо елементи симплекс-таблиці за формулами послідовних виключень Жордана-Гауса

$$b'_i = \begin{cases} b_i - \frac{a_{ik}b_r}{a_{rk}}, & i \neq r, \\ \frac{b_r}{a_{rk}}, & i = r, \end{cases} \quad a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \frac{a_{ij}a_{rk}}{a_{rk}}, & i \neq r, \\ \frac{a_{ij}}{a_{rk}}, & i = r. \end{cases}$$

Новий базисний розв'язок рівний:

$$X'_6 = (0, 0, \dots, b'_r, \dots, 0, b'_{n+1}, \dots, 0, \dots, b'_{n+m});$$

$$x_r = b'_r, x_{n+r} = 0.$$

Знаходимо нові $\Delta_j = \Delta_j - (a_{rj} / a_{rk}) \Delta_k$ та

$L'_0 = L_0 - (b_r / a_{rk}) \Delta_k$. Переходимо до виконання кроку 2 алгоритму.

Оптимальний розв'язок знайдено.

Таблиця 2. Симплекс-таблиця

i	Базис	C	P0	9	10	16	0	0	0
				P1	P2	P3	P4	P5	P6
1		P4	360	18	15	12	1	0	0
2		P5	192	8	6	4	0	1	0
3		P6	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0
		P3	30	1.5		1	1	0	0
		P5	177	-1		0	0	1	0
		P6	172	0.5		0	0	0	1
			480	15	10	0	16	0	0

Для розв'язування задачі застосовуємо симплексний метод.

Використання команд Matlab

1. Задання правої частини лінійних обмежень

$$b = [360 \ 192 \ 180]$$

b =

$$\begin{matrix} 360 & 192 & 180 \end{matrix}$$

2. Задання коефіцієнтів цільової функції

c=[9 10 16]
c =
 9 10 16
cb=[0 0 0]
cb =
 0 0 0
cp=[c cb]
cp =
 9 10 16 0 0 0
 3. Задання матриці системи лінійних обмежень
A=[18 15 12 1 0 0; 8 4 6 0 1 0; 5 3 3 0 0 1]
A =
 18 15 12 1 0 0
 8 4 6 0 1 0
 5 3 3 0 0 1
 4. Визначення чисел Δ_j
delta=cb*A-cp
delta =
 15 10 0 16 0 0
 Якщо $\Delta_j \geq 0$, то перейти до виконання пункту алгоритму 10.
 5. Визначення номера розв'язального стовпця
[deltam,k]=min(delta)
deltam =
 -16
k =
 3
 6. Визначення номера розв'язального рядка
for i=1:3; if A(i,k)>0; bk(i)=b(i)/ A(i,k) ; else; bk(i)=10*b(i); end;end;
bk
bk =
 30 32 60
[bmin,r]=min(bk)
bmin =
 30
r =
 1
 7. Реалізація формул послідовних виключень Жордана-Гауса
for i=1:3; if i==r; b(i)=b(r)/A(r,k); else; b(i)=b(i)- A(i,k)*b(r)/A(r,k); end;end;
b
b =
 30 177 345/2
for i=1:3;for j=1:6; if i==r; A(i,j)=A(r,j)/A(r,k); else; A(i,j)=A(i,j)- A(r,j)*A(i,k)/A(r,k);end;end;end;
A
A =
 3/2 5/4 1 1 0 0
 -1 -7/2 0 0 1 0
 1/2 -3/4 0 0 0 1
 8. Визначення нових C_6

cb(1)=c(k)
cb =
 16 0 0
 9. Перехід на пункт 4.
 10. Оптимальний розв'язок знайдено.
 Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то базисний розв'язок оптимальний
 $X_{opt} = (0, 0, 30); F_{max} = 16 * 30 = 480.$

ВИСНОВКИ

За допомогою М-книг можна проаналізувати кожний крок симплексного методу, що дає змогу краще засвоїти майбутнім фахівцям з інформатики методи розв'язування задач лінійного програмування. У вигляді М-книг можна реалізувати інші методи розв'язування задач лінійного програмування, а саме: модифікований симплексний метод, метод штучного базису та двоїстий симплексний метод, а також методи наближеного розв'язування алгебраїчних, диференціальних та інтегральних рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Аладьев В.З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект" / Монография / Аладьев В.З., Бойко В.К., Ровба Е.А. – Гродно: Гродненский Госуниверситет, 201. – 517 с.
- [2] Голубева Л.Л. Компьютерная математика. Числовой пакет MATLAB: курс лекций / Голубева Л.Л., Малевич А.Э., Щеглова Н.Л. — Минск: БГУ, 2007.
- [3] Дьяконов В.П. МАТЕМАТИКА 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления / Дьяконов В.П. – М. : ДМК Пресс, 2006. – 576 с.
- [4] Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
- [5] Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації / Катренко А.В. – Львів: Новий світ, 2003. – 424 с.
- [6] Кетков Ю.Л. MATLAB 7: Программирование, численные методы / Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. – СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
- [7] Потемкин В.Г. Система Matlab. Справочное пособие / Потемкин В.Г. – М.: Диалог-МИФИ, 1998. – 482 с.
- [8] Цегелик Г.Г. Лінійне програмування / Цегелик Г.Г. – Львів: Світ, 1995. – 252 с.
- [9] Чемерис А. Методи оптимізації в економіці: навчальний посібник / А. Чемерис, Р. Юринець, О. Мишишин. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.