

УДК 519.682

Застосування пакету MathCad до розрахунку мостових елементів конструкцій*Іваник Є. Г., Сікора О. В., Берегуляк Л. В.*

Львівський національний аграрний університет,
кафедра вищої математики, вул. В. Великого, м. Дубляни, 80381
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Показано можливість застосування пакету MathCAD до розрахунку трьохелементної мостової опори методом скінченних елементів (МСЕ). Використано варіаційно-різницеву схему, яка будується на основі загальної ідеї розчленування складної технічної системи на елементи, що природним чином приводить до поняття скінченного елемента. Сформована програма застосовна до розрахунку одно-, двох- і трьохелементної мостової опори.

1. Вступ

Можливості пакета MathCAD [1, 2] дозволяють ефективно описати обчислювальні алгоритми в математичних позначеннях, виконати їх і оформити результат. Пакет добре сполучає математичний опис проблеми, обчислювальні можливості і засоби відображення ПК. Інтегрований пакет MathCAD — це ще один крок до удосконалення в галузі комп'ютерної технології розв'язання обчислювальних задач і автоматизованого проектування науково-технічних досліджень у різних галузях людської діяльності. Система MathCAD достатньо проста в освоєнні та використанні і потребує мінімальних навиків роботи на ПК. Розглянемо як ілюстрацію застосування пакета до розрахунку трьохелементної мостової опори методом скінченних елементів (МСЕ).

За часів СРСР щорічно будували декілька сотень мостів та тисячі малих штучних споруд на дорогах. У спадок Україні залишилось понад тисячу мостових споруд, з яких значна частина потребує ремонту та реконструкції. Тому актуальною є проблема здійснення проектних робіт з ремонту і реконструкції автомобільних і залізничних мостів, невід'ємною складовою яких є моделювання та розрахунок напружено-деформованого стану, що існує в конструкціях мостових будівель і споруд. Ця проблема має комплексний характер і містить наукову, технічну та фахову складові. Для виконання значної за обсягом кількості проектних робіт, які до того ж мають нестандартний характер, необхідно здійснити великий обсяг наукоємних досліджень. Наукові розробки, своєю чергою, необхідно трансформувати в технічні засоби, основним з яких має стати певний програмний продукт, за допомогою якого провадиться проектування. Для виконання наукових розробок необхідно докладання зусиль кваліфікованих фахівців. Вимоги до математичної підготовки сучасного інженера, який займається науково-прикладними проблемами, постійно зростають. Це висуває нові вимоги до його наукової кваліфікації. Крім ґрунтовних знань за своєю основною спеціальністю йому необхідно знати і вміти використовувати в практичній діяль-

ності можливості обчислювальної техніки, сучасні математичні методи. Варто мати на увазі, що бурхливий розвиток швидкодіючих обчислювальних комплексів зробило вельми актуальним удосконалення і розвиток числових методів розв'язання задач, які виникають з потреб інженерної практики. Тому інженер-дослідник має вміти вибирати комбінації різних відомих методів і здійснювати їх реалізацію в середовищі відповідних прикладних програм цільового призначення.

Абревіатура МСЕ відома кожному фахівцю, що займається питаннями математичного моделювання технічних систем — це метод скінченних елементів. Сьогодні МСЕ — один з найбільш ефективних методів розв'язування крайових задач математичної фізики. Різні аспекти застосування МСЕ відображено в монографіях [3, 4, 5].

Оскільки помилки в оцінюванні технічних характеристик міцності і деформативності матеріалів конструкцій, відхилення від проектних рішень під час будівництва та експлуатації може призвести до аварійного стану будівель і споруд, то поставимо за мету розв'язання комплексної науково-технічної проблеми на прикладі моделювання деформації мостової опори.

Сьогодні задачі обчислювального характеру з використанням персональних комп'ютерів можна розв'язувати на трьох основних рівнях: 1) в середовищі вибраної системи програмування; 2) на основі спеціальних обчислювальних процедур і програм; 3) за допомогою спеціальних пакетів програм. Серед засобів третього рівня особливої уваги заслуговує інтегрований багатofункціональний пакет MathCAD фірми MathSoft Inc.

2. Постановка задачі розрахунку деформації мостової опори під дією зосередженого зовнішнього навантаження

Реалізацію МСЕ виконаємо із застосуванням пакета MathCAD [1, 2]. Виникає питання: навіщо MathCAD, якщо є спеціально адаптовані системи для моделювання і розрахунку напружено-деформованого стану будівельних конструкцій, зокрема мостових. Особливість цієї системи, орієнтованої на професійних математиків, що займа-

ються прикладними дослідженнями, у тому, що вона оперує звичними для програмістів та науковців математичними залежностями, а також містить значну кількість логічних операторів, що дозволяє враховувати під час розв'язування прикладних задач багатоваріантність. Той чи інший математичний метод, реалізований науковцем, що займається дослідженням будівельних конструкцій, у системі MathCAD, легко сприймає математик-програміст, який має трансформувати його в спеціалізований програмний засіб. Інтегрований пакет MathCAD — це ще один крок до удосконалення в галузі комп'ютерних технологій розв'язування обчислювальних задач і автоматизованого проектування науково-технічних досліджень. Представляючи в середовищі пакета обчислювальний алгоритм і пояснення (коментарі) до нього, користувач формує документ, який можна зберегти в пам'яті ПК для подальшого використання і удосконалення. Готовий документ можна вивести на екран дисплея, принтер і/або плоттер, що особливо зручний у разі підготовки різних науково-технічних звітів.

У роботі [6] описано розрахунок деформації одного розтягнутого (стиснутого) скінченного елемента у формі стержня, але відсутній приклад розрахунку конструкції з кількох скінченних елементів. Своєю чергою, в праці [7] дано опис загальної методики застосування МСЕ стосовно конструкції, розбитої на велику кількість скінченних елементів, але там розглянуто побудову матриці жорсткості тільки для одного окремого елемента.

3. Виклад основного матеріалу

Застосуємо матрицю жорсткості, описану в [4, 5], і загальну методику, розвинуту в [8], до конкретної математичної задачі — моделювання деформації мостової опори під дією зовнішнього силового навантаження зосередженою силою P , що складається з трьох скінченних елементів (рис. 1).

Розпочнемо з коректної постановки задачі і побудувавши для неї математичну модель, апаратом розв'язання якої буде МСЕ, реалізуємо отриманий алгоритм в системі MathCAD Professional.

З розрахункової схеми, наведеної на рис. 1, очевидно, що діючі на систему сили, направлені вздовж опори, а напруження і деформації розподілені по площі опори рівномірно.

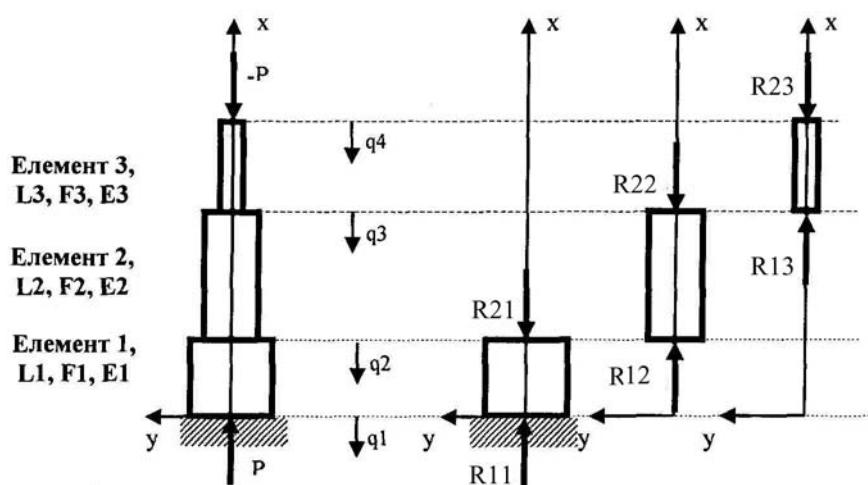


Рис. 1. Модель мостової трохелементної опори

Будемо застосовувати функціонали теорії пружності [8, 9], які є ефективним засобом якісного аналізу варіаційних і диференціальних формулювань та є теоретичною основою для побудови прямих варіаційних і варіаційно-різницевих методів, які отримують все більшого розвитку і застосування завдяки зростаючим можливостям обчислювальної техніки. Використаємо варіаційно-різницеву схему, яка будується на основі загаль-

ної ідеї розчленування складної технічної системи на елементи, що природно приводить до поняття скінченного елемента. Розчленування зазвичай супроводжується механічним трактуванням, що виражено у виборі так званої основної системи (для якої додаткові умови виконано) і невідомих (розшукуються за допомогою часткового функціонала).

Функціонал повної потенціальної енергії опори координатні функції має вигляд [10]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EF \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L p(x) u(x) dx, \quad (1)$$

де $u(x)$ — зміщення, направлене вздовж осі абсцис; $\frac{du}{dx} = \varepsilon_x$ — деформація, відносно видовження (стиск); $E \frac{du}{dx} = \sigma_x$ — нормальне напруження, що рівномірно розподілене по перерізу площею F мостової опори; $p(x)$ — функція, яка описує інтенсивність зовнішніх сил, діючих вздовж опори; L — довжина відповідного скінченного елемента; E — модуль Юнга матеріалу континууму, що займає скінчений елемент.

Оскільки у функціонал виду (1) входять тільки перші похідні переміщень, то їх можна апроксимувати поліномами першого степеня

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (2)$$

Кожен i -й елемент має два ступені вільності — q_i та q_{i+1} . Знайдемо зв'язок між коефіцієнтами полінома (2) та степенями вільності.

Використавши загальну методику, описану в працях [7, 11], для кожного із скінчених елементів, визначаємо коефіцієнти полінома (2), координатні функції та функцію переміщень через ступені вільності і координатні функції. У результаті виконання відповідних процедур дістаємо:

скінчений елемент 1 —
коефіцієнти полінома

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{q_1}{L_1} + \frac{q_2}{L_1} \end{pmatrix},$$

координатні функції

$$f_{11} = 1 - \frac{x}{L_1}, \quad f_{12} = \frac{x}{L_1},$$

функція переміщень першого скінченного елемента

$$u_1(x, q_1, q_2) = q_1 \cdot f_{11} + q_2 \cdot f_{12};$$

скінчений елемент 2 —
коефіцієнти полінома

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 1 & L_1 + L_2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2}{L_2} \cdot q_2 - \frac{L_1}{L_2} \cdot q_3 \\ -\frac{q_2}{L_2} + \frac{q_3}{L_2} \end{pmatrix},$$

скінчений елемент 2 —

$$[K_{22}]^e = E_2 F_2 \begin{bmatrix} \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,1,0)}{dx} dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,0,1)}{dx} dx \\ \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,1,0)}{dx} dx & \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{du_2(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{du_2(x,0,1)}{dx} dx \end{bmatrix} =$$

$$f_{21} = \frac{L_1 + L_2}{L_2} - \frac{x}{L_2}, \quad f_{22} = -\frac{L_1}{L_2} + \frac{x}{L_2},$$

функція переміщень другого скінченного елемента

$$u_2(x, q_2, q_3) = q_2 \cdot f_{21} + q_3 \cdot f_{22};$$

скінчений елемент 3 —
коефіцієнти полінома

$$\begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1 + L_2 \\ 1 & L_1 + L_2 + L_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} \cdot q_3 - \frac{L_1 + L_2}{L_3} \cdot q_4 \\ -\frac{q_3}{L_3} + \frac{q_4}{L_3} \end{pmatrix},$$

координатні функції

$$f_{31} = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{L_3} - \frac{x}{L_3}, \quad f_{32} = -\frac{L_1 + L_2}{L_3} + \frac{x}{L_3},$$

функція переміщень третього скінченного елемента

$$u_3(x, q_3, q_4) = q_3 \cdot f_{31} + q_4 \cdot f_{32}.$$

Матрицю коефіцієнтів жорсткості визначимо за формулою, наведеною в роботі [8]

$$k_{ij} = F \int_0^L \sigma_i(x) \varepsilon_j(x) dx = \int_0^L EF \left(\frac{du}{dx} \right)_i \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)_j dx, \quad (i = 1, 2; j = 1, 2).$$

У результаті для розглядуваних скінчених елементів дістаємо:

скінчений елемент 1 —

$$[K_{11}]^e = E_1 F_1 \begin{bmatrix} \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \times \frac{du_1(x,1,0)}{dx} dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,1,0)}{dx} \times \frac{du_1(x,0,1)}{dx} dx \\ \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \times \frac{du_1(x,1,0)}{dx} dx & \int_0^{L_1} \frac{du_1(x,0,1)}{dx} \times \frac{du_1(x,0,1)}{dx} dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} E_1 F_1 & -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 \\ -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & \frac{1}{L_1} E_1 F_1 \end{bmatrix};$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 \\ \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 \end{bmatrix};$$

скінченний елемент 3 –

$$[K_{33}]^e = E_3 F_3 \begin{bmatrix} \int_{L_1+L_2+L_3}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{d u_3(x,1,0)}{dx} dx & \int_{L_1+L_2+L_3}^{L_1+L_2+L_3} \frac{d u_3(x,1,0)}{dx} \cdot \frac{d u_3(x,0,1)}{dx} dx \\ \int_{L_1+L_2+L_3}^{L_1+L_2} \frac{d u_3(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{d u_3(x,1,0)}{dx} dx & \int_{L_1+L_2+L_3}^{L_1+L_2} \frac{d u_3(x,0,1)}{dx} \cdot \frac{d u_3(x,0,1)}{dx} dx \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \\ \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \end{bmatrix}.$$

Незв'язна глобальна матриця згідно з залежностями, поданими в роботі [4], матиме вигляд

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{11}]^e & [0] & [0] \\ [0] & [K_{22}]^e & [0] \\ [0] & [0] & [K_{33}]^e \end{bmatrix},$$

де

$$[K_{11}]^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad [K_{22}]^e = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = [A]^T \cdot [K]^e \cdot [A],$$

$[K_{33}]^e = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$, k_{ij} – коефіцієнти жорсткості скінченних елементів в глобальній нумерації $i = \overline{1,6}$; $j = \overline{1,6}$.

Глобальна кінематична матриця $[A]$ трьохелементної опори моста і глобальна матриця жорсткості $[K]$ на основі формул з монографії [12] будуть:

звідки отримуємо

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} E_1 F_1 & -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & \frac{1}{L_1} E_1 F_1 + \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 + \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \end{bmatrix}.$$

Глобальне рівняння жорсткості для опори моста, що пов'язує зовнішні сили та лінійні переміщення вузлів, на основі [8], запишеться так:

$$\{P\} = [K] \cdot \{q\}. \quad (3)$$

Перепишемо рівняння (3), згрупувавши відносно ступенів вільності, що відповідають закріпленним зв'язкам (в цьому випадку це один зв'язок опори з фундаментом q_1), і розбивши його на блоки:

$$\begin{Bmatrix} P_s \\ P_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sf} \\ K_{fs} & K_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_s \\ q_f \end{Bmatrix}.$$

Оскільки $q_s = q_1 = 0$, то

$$\{P_f\} = [K_{ff}] \cdot \{q_f\}, \quad \{P_s\} = [K_{sf}] \cdot \{q_f\}, \quad (4)$$

де

$$[K_{ff}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} E_1 F + \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & 0 \\ \left(-\frac{L_1+L_2}{L_2^2} + \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 & \left(\frac{L_1+L_2}{L_2^2} - \frac{L_1}{L_2^2} \right) E_2 F_2 + \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \\ 0 & \left(-\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} + \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 & \left(\frac{L_1+L_2+L_3}{L_3^2} - \frac{L_1+L_2}{L_3^2} \right) E_3 F_3 \end{bmatrix},$$

$$[K_{sf}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} E_1 F_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{q_f\} = \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \quad \{P_f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix}.$$

Загальний розв'язок рівняння (4) в символічному вигляді буде

$$\{q_f\} = [K_{ff}]^{-1} \cdot \{P_f\}. \quad (5)$$

Реакція опори і реакції скінченних елементів опори моста на основі залежностей (4), (5) матимуть вигляд

$$\{P_s\} = [K_{sf}] \cdot \{q_f\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ефективність розробленої методики проілюструємо на прикладі числового алгоритму розрахунку трьохелементної мостової опори, який було реалізовано в системі MathCAD 2001 Professional згідно з отриманими залежностями (4)-(7).

Ідентифікатори змінних в програмі мають вигляд:

P – реакція фундаменту; R11, R21, R12, R22, R13, R23 – реакції скінченних елементів; q1, q2, q3, q4 – лінійні переміщення вузлів; x, y – осі координат; L1, F1, E1; L2, F2, E2; L3, F3, E3 – довжина, площа перерізу та модуль Юнга відповідного скінченного елемента.

Послідовність виконання програми:

1) ввід вхідних даних

перший скінчений елемент

E1:=1.764×10¹⁰ $\frac{N}{m^2}$, F1:=5 m², L1:=5 m;

другий скінчений елемент

E2:=1.764×10¹⁰ $\frac{N}{m^2}$, F2:=3 m², L2:=5 m;

третій скінчений елемент

E3:=1.764×10¹⁰ $\frac{N}{m^2}$, F3:=2 m², L3:=5 m;

Величина зовнішнього силового навантаження P:= 2×10⁶ N.

2) розрахунок

перший скінченний елемент –

u1(x)=α11+α12x – переміщення вздовж осі опори першого скінченного елемента, q1, q2 – ступені вільності першої опори; згідно з описаною вище методикою отримуємо

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q1 \\ -\frac{1}{5m} \cdot q1 + \frac{1}{5m} \cdot q2 \end{pmatrix},$$

отже,

$$u1(x, q1, q2) := \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q1 \\ q2 \end{pmatrix}$$

$$\text{series, } q1, q2 \rightarrow \left(1 - \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q1 + \frac{1}{5m} \cdot q2,$$

матриця жорсткості

$$Ke1 := E1 \cdot F1 \cdot \begin{pmatrix} \int_0^{L1} \frac{d}{dx} u1(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u1(x, 1, 0) dx & \int_0^{L1} \frac{d}{dx} u1(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u1(x, 0, 1) dx \\ \int_0^{L1} \frac{d}{dx} u1(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u1(x, 1, 0) dx & \int_0^{L1} \frac{d}{dx} u1(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u1(x, 0, 1) dx \end{pmatrix},$$

$$Ke1 = \begin{pmatrix} 1.764 \times 10^{10} & -1.764 \times 10^{10} \\ -1.764 \times 10^{10} & 1.764 \times 10^{10} \end{pmatrix} \frac{N}{m^2};$$

другий скінченний елемент –

u2(x)=α21+α22x – переміщення вздовж осі опори першого скінченного елемента, q2, q3 – ступені вільності другої опори; аналогічно, як у випадку першого елемента матимемо

отже,

$$u2(x, q2, q3) := \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L1 \\ 1 & L1 + L2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q2 \\ q3 \end{pmatrix}$$

$$\text{series, } q2, q3 \rightarrow \left(2 - \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q2 + \left(-1 + \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q3,$$

матриця жорсткості

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & L1 \\ 1 & L1 + L2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q2 \\ q3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot q2 - q3 \\ -\frac{1}{5m} \cdot q2 + \frac{1}{5m} \cdot q3 \end{pmatrix},$$

$$Ke2 := E2 \cdot F2 \cdot \begin{pmatrix} \int_{L1}^{L1+L2} \frac{d}{dx} u2(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u2(x, 1, 0) dx & \int_{L1}^{L1+L2} \frac{d}{dx} u2(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u2(x, 0, 1) dx \\ \int_{L1}^{L1+L2} \frac{d}{dx} u2(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u2(x, 1, 0) dx & \int_{L1}^{L1+L2} \frac{d}{dx} u2(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u2(x, 0, 1) dx \end{pmatrix},$$

$$Ke2 = \begin{pmatrix} 1.058 \times 10^{10} & -1.058 \times 10^{10} \\ -1.058 \times 10^{10} & 1.058 \times 10^{10} \end{pmatrix} \frac{N}{m^2};$$

третій скінченний елемент –

$u3(x) = \alpha31 + \alpha32x$ – переміщення вздовж осі опори першого скінченного елемента, $q3, q4$ – ступені вільності третьої опори; звідси слідує

$$u3(x, q3, q4) := \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & L1 + L2 \\ 1 & L1 + L2 + L3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q3 \\ q4 \end{pmatrix}$$

$$\text{series, } q3, q4 \rightarrow \left(3 - \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q3 + \left(-2 + \frac{1}{5m} \cdot x\right) \cdot q4,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha31 \\ \alpha32 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & L1 + L2 \\ 1 & L1 + L2 + L3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} q2 \\ q3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha31 \\ \alpha32 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot q3 - 2 \cdot q4 \\ \frac{-1}{5m} \cdot q3 + \frac{1}{5m} \cdot q4 \end{pmatrix},$$

матриця жорсткості

$$Ke3 := E3 \cdot F3 \cdot \begin{pmatrix} \int_{L1}^{L1+L2+L3} \frac{d}{dx} u3(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u3(x, 1, 0) dx & \int_{L1}^{L1+L2+L3} \frac{d}{dx} u3(x, 1, 0) \cdot \frac{d}{dx} u3(x, 0, 1) dx \\ \int_{L1}^{L1+L2+L3} \frac{d}{dx} u3(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u3(x, 1, 0) dx & \int_{L1}^{L1+L2+L3} \frac{d}{dx} u3(x, 0, 1) \cdot \frac{d}{dx} u3(x, 0, 1) dx \end{pmatrix},$$

$$Ke3 = \begin{pmatrix} 7.056 \times 10^9 & -7.056 \times 10^9 \\ -7.056 \times 10^9 & 7.056 \times 10^9 \end{pmatrix} \frac{N}{m^2}.$$

Глобальні характеристики та співвідношення для трохелементної мостової опори є такими: глобальна незв'язна матриця жорсткості –

$$Ke := \begin{pmatrix} Ke_{1,1} & Ke_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Ke_{2,1} & Ke_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ke_{2,1,1} & Ke_{2,1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ke_{2,2,1} & Ke_{2,2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ke_{3,1,1} & Ke_{3,1,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ke_{3,2,1} & Ke_{3,2,2} \end{pmatrix},$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

глобальна кінематична матриця –

глобальна зв'язна матриця жорсткості $Kh := A^T \times Ke \cdot A$, звідки маємо такі числові значення –

$$Kh = \begin{pmatrix} 1.764 \times 10^{10} & -1.764 \times 10^{10} & 0 & 0 \\ -1.764 \times 10^{10} & 2.822 \times 10^{10} & -1.058 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & -1.058 \times 10^{10} & 1.764 \times 10^{10} & -7.056 \times 10^9 \\ 0 & 0 & -7.056 \times 10^9 & 7.056 \times 10^9 \end{pmatrix} \frac{N}{m^2},$$

1) лінійні переміщення вузлів

$$Kff := \begin{pmatrix} Kh_{2,2} & Kh_{2,3} & Kh_{2,4} \\ Kh_{3,2} & Kh_{3,3} & Kh_{3,4} \\ Kh_{4,2} & Kh_{4,3} & Kh_{4,4} \end{pmatrix},$$

$$Ksf := \begin{pmatrix} Kh_{1,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Pf := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q2 \\ q3 \\ q4 \end{pmatrix} := Kff^{-1} \cdot Pf,$$

$$\begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.134 \times 10^{-4} \\ -3.023 \times 10^{-4} \\ -5.858 \times 10^{-4} \end{pmatrix} m$$

2) графіки лінійного переміщення $u(x)$, нормального напруження $\sigma(x)$ та осьової сили $\sigma(x)F(x)$

$q1 := 0 \text{ m}$ – згідно за умовою закріплення.

Результати числового розрахунку:

$$u(x) := \begin{cases} u1(x, q1, q2), & 0 \leq x < L1 \\ u2(x, q2, q3), & L1 \leq x < L1 + L2 \\ u3(x, q3, q4), & L1 + L2 \leq x < L1 + L2 + L3 \end{cases}$$

бляють спеціалізовані системи і адаптують результати математичного моделювання деформацій і напружень у будівельних об'єктах; по-друге, між теоретичними фактами, які засвоюють студенти при засвоєнні методів математичного моделювання, зокрема механіки будівельних споруд та практичним використанням ними набутих знань створенням і експлуатацією відповідного програмного забезпечення.

Розглянута як приклад трансформація МСЕ в програмний продукт системи MathCAD може бути застосованою:

- у разі теоретичного засвоєння МСЕ;
- у разі вивчення системи MathCAD.

Розроблений програмний комплекс можна використовувати науковцями-фахівцями для розрахунку реальних мостових опор та математиками-програмістами під час створення нових спеціальних програмних систем, що реалізують МСЕ.

Бібліографія

- [1] Аладьев В.З., Гершгорн Н.А. *Вычислительные задачи на персональном компьютере*. — К.: Техника, 1991. — 245 с.
- [2] Дьяконов В. *MathCAD 2000: учебный курс*. — СПб.: Питер, 2000. — 592 с.
- [3] Аргирис Д. *Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц*. — М.: Изд-во иностр. лит., 1968. — 240 с.
- [4] Галушко В.Г. *Вероятностно-статистические методы на автостраде*. — К.: Вища шк., 1976. — 232 с.
- [5] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств*. — М.: Мир, 1979. — 574 с.
- [6] Ігнатишин М.І. Аналіз чисельних методів розрахунку мостових конструкцій // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій / за заг. ред. Й. Й. Лучка. — Львів: Каменярь, 2005. — /No. 6. — С. 659–668.
- [7] Лучко Й., Артым И.Т., Гаврыляк А.И., Кархут И.И. Автоматизированный стенд для испытания железобетонных конструкций // Строит. материалы и конструкции. — 1989. — № 2. — С. 28–29.
- [8] Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. *Вариационные принципы в теории упругости и теории оболочек*. — М.: Наука, 1978. — 288 с.
- [9] Поляков Л.П., Файнбурд В.М. *Моделирование строительных конструкций* — К.: Будівельник, 1975. — 160 с.
- [10] Тимошенко С.П. Гудьер Д. *Теория упругости*. — М.: Наука, 1975. — 575 с.
- [11] Барашиков А.Я., Сирота М.Д. *Надежность зданий и сооружений: учебное пособие*. — К.: УМК ВО, 1993. — 212 с.
- [12] Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. — М.: Мир, 1984. — 428 с.