Про один визначник

Кишакевич Ю.
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Нехай M — множина m довільних комплексних чисел, відмінних від нуля; $S_k(M)$ — сума усіх можливих добутків $k \quad (k \leqslant m)$ різних чисел з множини M; $S_0(M) \equiv 1$. Очевидні рівності:

$$[S_k(M \cup \{z\}) - S_k(M) = zS_{k-1}(M); \quad 1 \leqslant k \leqslant m; \quad z \in C, \quad z \notin M; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} S_k(M \cup \{z\}) - S_k(M \cup \{u\}) = (z-u)\, S_{k-1}(M); \\ z \in C, \quad u \in C, \quad z \notin M, \quad u \notin M, \quad 1 \leqslant k \leqslant m+1. \end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $\alpha_{\mathrm{p}} \in C; \quad \beta_p \in C; \quad \alpha_{\mathrm{p}} \neq 0; \quad \beta_p \neq 0; \quad p = 0, 1, 2, ...$ Уведемо такі множини з $n-1$ елементів:

$$P_0 = \{\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}, ..., \alpha_0\};$$

$$P_1 = \{\alpha_{n-3}, \alpha_{n-4}, ..., \alpha_0, \beta_0\};$$

$$P_2 = \{\alpha_{n-4}, \alpha_{n-5}, ..., \alpha_0, \beta_0, \beta_1\};$$

....

$$P_{n-1} = \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-2}\};$$

Теорема

$$d_n \equiv \det\{S_k(P_l)\} = \prod_{p=0}^{n-2}(\beta_{n-2-p} - \alpha_p) \prod_{p=0}^{n-3}(\beta_{n-3-p} - \alpha_p) \cdot \ \ldots \ \cdot \prod_{p=0}^{1}(\beta_{1-p} - \alpha_p)(\beta_0 - \alpha_0);$$

$$(k, l = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Приклади таких визначників при $n = 2, 3, 4$:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{vmatrix} = \beta_0 - \alpha_0; \tag{3}$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_0 & \alpha_0 + \beta_0 & \beta_0 + \beta_1 \\ \alpha_1\alpha_0 & \alpha_0\beta_0 & \beta_0\beta_1 \end{vmatrix} = (\beta_1 - \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_1)(\beta_0 - \alpha_0);$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_0 & \alpha_1 + \alpha_0 + \beta_0 & \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 & \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 & \alpha_1\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 + \beta_0\beta_1 & \beta_0\beta_1 + \beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_2 \\ \alpha_2\alpha_1\alpha_0 & \alpha_1\alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_0\beta_1 & \beta_0\beta_1\beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\beta_2 - \alpha_0)(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_0 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_1)(\beta_0 - \alpha_0);$$

Лема

$$d_n = \prod_{k=0}^{n-2}(\beta_{n-2-k} - \alpha_k) \cdot d_{n-1} \tag{4}$$

« Від елементів n-ого стовпця визначника d_n віднімемо відповідні елементи $(n-1)$-ого стовпця, від елементів $(n-1)$ стовпця віднімемо відповідні елнменти $(n-2)$-ого стовпця, і так продовжуємо, аж поки від елементів другого стовпця не віднімемо відповідні елементи першого. Внаслідок рівностей (2) елементи останнього стовпця після віднімання матимуть вигляд:

$$\mathrm{S_k}(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) - \mathrm{S_k}(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-3}, \alpha_0) = (\beta_{n-2} - \alpha_0)\, S_{k-1}(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{n-3})$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Перший елемент цього стовпця після віднімання дорівнюватиме нулю. Винісши за знак визначника множник $(\beta_{n-2} - \alpha_0)$ з останнього стовпця, потім множник $(\beta_{n-3} - \alpha_1)$ з передостаннього стовця, і так далі з інших стовпців, розкладемо визначник за елементами першого рядка. В результаті таких перетворень отримаємо рівність (4).»

Доведення теореми випливає з рекурентного співвідношення (4) і рівності (3).

Результат обчислення визначника d_n нагадує результат обчислення визначника Вандермонда [1, с.118].

Бібліоґрафія

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру/ М., Наука. 1977. — 496 с.