УДК 517.5

Про існування розв'язку інтерполяційної задачі в одному класі цілих функцій, який визначається лічильною функцією

Винницький Б. В., Шепарович І. Б.

vynnytskyi@ukr.net, isheparovych@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Вказані умови розв'язуваності інтерполяційної задачі $g(\lambda_k) = b_{k,0}$ в класі цілих функцій, який визначається усередненою неванліннівською характеристикою послідовності λ_k. Узагальнено один результат Ю. Казьміна.

Нехай $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ — послідовність різних відмінних від нуля комплексних чисел, яка не має скінченних часткових границь, $n_\lambda(r)$ – кількість членів послідовності $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$, для яких $|\lambda_k| \leqslant r$, $N_\lambda(r) = \sum\limits_{|\lambda_k|\leqslant r} \log \frac{r}{|\lambda_k|}$, g — ціла функція і $M_g(r) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$. Вивченню умов розв'язуваності інтерполяційної задачі

$$g(\lambda_k) = b_{k,0} \tag{1}$$

в різних класах цілих функцій присвячені численні дослідження [1], [2], [3], [4].

Добре відомо, що для цілої функції $g \not\equiv 0$, яка має нулі у всіх точках λ_k, виконується

$$N_\lambda(r) \leqslant \ln M_g(r) + O(1), \quad r \to \infty.$$

Це випливає з рівності Єнсена [1]

$$m \log r + \sum_{0<|a_k|\leqslant r} \log \frac{r}{|a_k|} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \log \left|g(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \ln \frac{\left|g^{(m)}(0)\right|}{m!}.$$

де a_k — відмінні від нуля нулі функції g і m — порядок її нуля $a = 0$. Водночас для деяких послідовностей $(\lambda_k,\ k \in \mathbb{N})$ існують [5] цілі функції $g \not\equiv 0$, які мають нулі в усіх точках λ_k і

$$\ln M_g(r) \leqslant N_\lambda(r) + O(1), \quad r \to \infty. \tag{2}$$

Виникає запитання про те, для яких послідовностей (λ_k) і $(b_{k,0})$ існує ціла функція g, яка задовольняє (2) (в близькій постановці інтерполяційна задача розглядалась в [6], [7], [8], [9]). Дати повну відповідь на таке запитання нам не вдається. Якщо $b_{k,0} = 0$ і існує таке число $\Delta < 1$, що

$$|\lambda_k/\lambda_{k+1}| \leqslant \Delta, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

то така функція існує [5]. Далі, якщо згадана функція існує, то $|b_{k,0}| \leqslant c_0 \exp\left(N_\lambda(|\lambda_k|)\right)$ (тут і далі c_i – додатні сталі), тобто

$$\sup\left\{|\lambda_k|^{-k} |b_{k,0}| \prod_{s=1}^{k} |\lambda_s| : k \in \mathrm{N}\right\} = c < +\infty. \tag{4}$$

Ми доведемо, зокрема, наступне твердження.

Теорема 1. Нехай (λ_k) – *довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що виконується (3). Тоді для кожної послідовності* $(b_{k,0})$*, яка задовольняє умову (4), існує ціла функція* g *, яка задовольняє умову (1) і*

$$\ln M_g(r) \leqslant N_\lambda((1 + o(1))r) + \ln r, \quad r \to \infty. \tag{5}$$

Для доведення теореми 1 потрібні деякі приготування. Позначимо

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k). \tag{6}$$

Лема 1 [10]. *Нехай послідовність* (λ_k) *задовольняє умову (3). Тоді ціла функція* L *вигляду (6) задовольняє умови*

$$\log M_L(r) = N_\lambda(r) + O(1),\ r \in (0; +\infty),$$

$$\log|\lambda_k L'(\lambda_k)| = N_\lambda(|\lambda_k|) + O(1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лема 2 [10]. Нехай $L(z)$ – *ціла функція, яка має нулі в точках* λ_k і $l_k(z) = L(z)/(z - \lambda_k)$ *Тоді для всіх* $k \in \mathrm{N}, \varepsilon > 0$ і $r > 0$ *виконується*

$$M_{l_k}(r) \leqslant 4\,(1 + 1/\varepsilon)\, \frac{M_L((1 + \varepsilon)r)}{|\lambda_k| + r}.$$

Доведення теореми 1. Нехай $G(z) = zL(z)$, де L вигляду (6). Тоді $G'(\lambda_k) = \lambda_k L'(\lambda_k)$. Покажемо, що функція

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(z) b_{k,0}}{G'(\lambda_k)(z - \lambda_k)} \tag{7}$$

є шуканою. Справді, (7) задовольняє (1). Далі, оскільки $\exp\left(N_\lambda(|\lambda_k|)\right) = |\lambda_k|^k / \prod\limits_{s=1}^{k} |\lambda_s|$, то на підставі лем 1 та 2 отримуємо

$$\left|\frac{G(z) b_{k,0}}{G'(\lambda_k)(z - \lambda_k)}\right| \leqslant \frac{4(1 + \varepsilon)/\varepsilon}{|\lambda_k L'(\lambda_k)|} \frac{M_G((1 + \varepsilon)r)}{r + |\lambda_k|} \frac{|\lambda_k|^k}{\prod\limits_{s=1}^{k} |\lambda_s|}$$

$$\leqslant c_1 \frac{r M_L((1 + \varepsilon)r)}{r + |\lambda_k|} \leqslant c_2 \frac{r \exp\left(N_\lambda((1 + \varepsilon)r)\right)}{|\lambda_k|},$$

якщо $|z| \leqslant r$. Тому, враховуючи, що $|\lambda_k| \geqslant |\lambda_1|/\Delta^{k-1}$, маємо

$$|g(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{G(z) b_{k,0}}{G'(\lambda_k)(z - \lambda_k)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \exp\left(N_\lambda((1+\varepsilon)r)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{|\lambda_k|}\leqslant$$
$$\leqslant c_3 \exp\left(N_\lambda((1+\varepsilon_1)r)+\ln r\right).$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай (λ_k) – *довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що виконується (3). Тоді для кожної послідовності* $(b_{k,0})$ *такої, що*

$$|b_{k,0}|\leqslant c_3\exp\left(N_\lambda(R_0|\lambda_k|)\right),\ R_0\in(\Delta;1),\ k\in\mathbb{N}, \tag{8}$$

і кожного $R_1\in(R_0;1)$ *існує така ціла функція* g*, що задовольняє умову (2) і*

$$\ln M_g(r)\leqslant N_\lambda(R_1 r),\quad r\to+\infty. \tag{9}$$

Доведення теореми 2. Нехай $R_0<R_2<R_1$. Покажемо, що шуканою є функція

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L(z)b_{k,0}}{L'(\lambda_k)(z-\lambda_k)}$$

Спочатку зауважимо, що (див. в [11], [12])

$$\exp\left(N_\lambda(r)\right)=\max\left\{\frac{r^m}{\prod\limits_{s=1}^{m}|\lambda_s|}:m\in\mathrm{Z}_+\right\}$$

і $\exp\left(N_\lambda(r)\right)=\frac{r^k}{\prod_{s=1}^{k}|\lambda_s|}$, якщо $r\in[|\lambda_k|;|\lambda_{k+1}|]$. Тому умова (8) рівносильна умові

$$|b_{k,0}|\leqslant c_0\frac{(|\lambda_k|R_0)^k}{\prod\limits_{s=1}^{k}|\lambda_s|},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Далі,

$$|\lambda_k L'(\lambda_k)|\geqslant c_4\exp\left(N_\lambda(|\lambda_k|)\right)=\frac{c_4|\lambda_k|^k}{\prod\limits_{s=1}^{k}|\lambda_s|}$$

і тому

$$\frac{M_{l_k}(r)|b_{k,0}|}{|L'(\lambda_k)|}\leqslant c_1\frac{|\lambda_k|M_L(r_1)|b_{k,0}|}{(r+|\lambda_k|)\,|\lambda_k L'(\lambda_k)|}\leqslant$$
$$\leqslant c_2\frac{|\lambda_k|\exp\left(N_\lambda(r_1)\right)(R_0)^k}{(r+|\lambda_k|)}\leqslant c_2\frac{|\lambda_k|\,(R_0)^k}{(r+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|},$$

якщо $r_1=(1+\varepsilon)r\in[|\lambda_p|;|\lambda_{p+1}|]$. До того ж,

$$\frac{1}{(r+|\lambda_k|)}=\frac{1}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{((1+\varepsilon)r+|\lambda_k|)}{(r+|\lambda_k|)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{(1+\varepsilon)\,(r+|\lambda_k|)}{(r+|\lambda_k|)}\leqslant\frac{(1+\varepsilon)}{(r_1+|\lambda_k|)}.$$

Отож,

$$\frac{|\lambda_k|\,(R_0)^k}{(r+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant c_3\frac{|\lambda_k|\,(R_0)^k}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}=$$
$$=c_3\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k\frac{|\lambda_k|\,(R_2)^k}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}.$$

Але

$$\frac{|\lambda_k|\,(R_2)^k}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant\frac{|\lambda_k|}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{c_4\,(r_1R_2)^k}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant$$
$$\leqslant c_4\frac{(r_1R_2)^k}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant c_4\exp\left(N_\lambda(r_1R_2)\right),$$

якщо $p\leqslant k$. Окрім цього, якщо $p>k$, то $|\lambda_k/\lambda_p|\leqslant\Delta^{p-k}$ і

$$\frac{|\lambda_k|\,(R_2)^k}{(r_1+|\lambda_k|)}\frac{c_4r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant c_4\frac{|\lambda_k|\,(R_2)^k}{r_1}\frac{|\lambda_p|}{|\lambda_p|}\frac{r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}=$$
$$=c_4\frac{|\lambda_p|\,(R_2)^k}{r_1}\frac{|\lambda_k|}{|\lambda_p|}\frac{r_1^p}{\prod\limits_{s=1}^{p}|\lambda_s|}\leqslant c_4\,(R_2)^k\,\Delta^{p-k}\frac{r_1^{p-1}}{\prod\limits_{s=1}^{p-1}|\lambda_s|}$$
$$\leqslant c_5\,(\Delta/R_2)^{p-k}\,\frac{(r_1R_2)^{p-1}}{\prod\limits_{s=1}^{p-1}|\lambda_s|}\leqslant c_5\frac{(r_1R_2)^{p-1}}{\prod\limits_{s=1}^{p-1}|\lambda_s|}\leqslant$$
$$\leqslant c_4\exp\left(N_\lambda(r_1R_2)\right),\quad r_1R_2\in[|\lambda_{p-1}|;|\lambda_p|].$$

Тому

$$\frac{M_{l_k}(r)|b_{k,0}|}{|L'(\lambda_k)|}\leqslant c_7\left(\frac{R_0}{R_2}\right)^k\exp\left(N_\lambda(r_1R_2)\right).$$

Цим доведення теореми 2 завершено.

Зауваження 1. *Умова (9) є рівносильною умові* $\lim\limits_{r\to+\infty}\sup\frac{N_\lambda^{-1}(\ln M_g(r))}{r}\leqslant R_1$, *а умова (8) – умові* $\lim\limits_{k\to\infty}\sup|\lambda_k|^{-1}\left(|b_{k,0}|\prod\limits_{s=1}^{k}|\lambda_s|\right)^{1/k}\leqslant R_0$, *що випливає з теореми про* Ф*- тип [13].*

Зауваження 2. Якщо $|q|>1,\lambda_k=q^{k-1}$ і $\Psi(r)=\frac{\ln^2 r}{2\ln|q|}+\frac{\ln r}{2}$, *то можна переконатись, що* $N_\lambda(r)=\Psi(r)+O(1),\ r\in(0;+\infty)$. *Тому з теореми 1 випливає наступне твердження з [4]: для будь-яких* $R_0\in(1/|q|;1)$ та $R_1\in(R_0;1)$ *і кожної послідовності комплексних чисел* $(b_{k,0})$ *такої, що* $\lim\limits_{k\to\infty}\sup|q|^{-\frac{k-1}{2}}|b_{k,0}|^{1/k}\leqslant R_0$, *існує единa ціла функція, для якої* $g(q^{k-1})=b_{k,0},\ k\in\mathbb{N}$ і $\lim\limits_{r\to+\infty}\sup\frac{\Psi^{-1}(\ln M_g(r))}{r}\leqslant R_1$. *Остання умова, в свою чергу, рівносильна умові ([4], [14])* $\lim\limits_{k\to\infty}\sup|q|^{\frac{k-1}{2}}\left|g^{(k)}(0)/k!\right|^{1/k}\leqslant R_1$.

Зауваження 3. *Якщо одне з чисел* λ_k *дорівнює нулеві, то твердження теорем 1 та 2 залишаються в силі, якщо позначити* $N_\lambda(r)=\log r+\sum\limits_{0<|\lambda_k|\leqslant r}\log\frac{r}{|\lambda_k|}$.

Бібліографія

[1] Левин Б.Я. *Расспределение корней целых функций.* — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.

[2] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* — М.: Наука, 1983. — 176 с.

[3] Гришин А.Ф., Руссаковский А.М. Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1985. — **44**. — С. 32–42.

[4] Казьмин Ю.А. Об одной задаче А.О. Гельфонда // Матем. сб. — 1973. —**132**, № 4. — С. 520–543.

[5] Винницкий Б.В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ // Мат. замет. — 1980. — **27**, № 3. — С. 361—372.

[6] Ибрагимов И.И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* — М.: Наука, 1971. — 518 с.

[7] Попов А.Ю. О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии // Мат. замет. — 1989. — **46**, № 3. — С. 68–73.

[8] Осколков В.А. Некоторые базисы в пространствах регулярних функций и их применение к интерполяции // Матем. сб. — 1978. — **105(147)**, № 2. — С. 238–260.

[9] Винницкий Б.В. О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$// Мат. замет. — 1981. — **29**, № 4. — С. 503–516.

[10] Винницкий Б.В. О построении целой функции произвольного порядка с заданными асимптотическими свойствами // УМЖ. — 1986. — **38**, № 2. — С. 143–148.

[11] Винницкий Б.В. Об описании базисов из обобщенных систем экспонент // Матем. сб. — 1988. — **135 (177)**, № 1. — С. 59–79.

[12] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа: В 2-х томах.* — М.: Наука, 1978. — Т. 2. — 432 с.

[13] Винницкий Б.В. Об усл овиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций // УМЖ. — 1982. — **34**, № 6. — С. 741–744.

[14] Nachbin L. An extension of the notion of integral function of the finite exponential type // Arias Acad., Sci Brasil. — 1944. — **16**. — P. 143–147.