УДК 517.5

Про одну теорему єдиності для цілої функції при уточненому порядку Бутру

Винницький Б. В., Шаповаловський О. В.

Vynnytskyi@ukr.net, shap.ov@mail.ru

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,

кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Доведено теорему єдиності для цілої функції скінченного типу при уточненому порядку Бутру

Нехай p - ціле невід'ємне число, $1 < p < \eta_1 \leqslant \eta_2 < p+1$. Нехай $l(r)$ - неперервно-диференційовна на $[0;+\infty)$ функція, така, що:

$$\lim_{r\to\infty} l'(r)r\ln r \to 0, \qquad (1)$$

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} l(r) = \eta_1, \quad \overline{\lim}_{r\to\infty} l(r) = \eta_2 \qquad (2).$$

Визначена таким чином функція називається уточненим порядком Бутру [1]. При $\eta_1 = \eta_2$ функція $l(r)$ є уточненим порядком [2]. Нехай (λ_n) - послідовність різних додатних чисел з єдиною граничною точкою на нескінченності, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Через K_1, K_2, ... позначаємо додатні сталі. Метою статті є доведення наступного твердження, яке пов'язане з повнотою систем експонент з вагою в просторі $L^2(\mathbb{R})$ (див. [3]) і яке у випадку $l(t) \equiv l$, $l := \eta_1 = \eta_2$ міститься в [4], а у випадку уточненого порядку (тобто, при $\eta_1 = \eta_2$) в [5].

Теорема. *Нехай послідовність (λ_n) додатних чисел є послідовністю нулів деякої цілої функції f, для якої при деякому $d \in [0;+\infty)$ виконується*

$$|f(z)| \leqslant O\left(\exp\left((d + o(1))\, |y|^{l(|y|)}\right)\right),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, |z| \to +\infty \qquad (3).$$

Тоді, якщо для довільних $B \geqslant \eta_2$

$$\int_1^{+\infty} t^{l(t)-B-1} dt = +\infty \qquad (4)$$

і

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{l(\lambda_n)}} > \frac{d}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}, \qquad (5)$$

то $f(z) \equiv 0$.

Функція $l(r)$ зберігає багато властивостей уточненого порядку, інколи з незначними змінами. В лемах 1-3 відмітимо ті властивості [6, с.91-92], які будуть нами використані.

Лема 1. *Якщо $l(r)$ - уточнений порядок Бутру, то функція $\varphi(r) = r^{l(r)-1}$ є монотонно зростаючою функцією при достатньо великих r.*

Нехай $r = \varphi^{-1}(t)$ - єдиний при $t > t_0$ розв"язок рівняння $t = \varphi(r)$, де $\varphi(r) = r^{l(r)-1}$. Нехай $q(t) = 1 + \frac{\ln\varphi^{-1}(t)}{\ln t}$.

Лема 2. *$q(t)$ є уточненим порядком Бутру, причому*

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} q(t) = \frac{\eta_2}{\eta_2 - 1} \stackrel{def}{=} q_1,$$

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} q(t) = \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} \stackrel{def}{=} q_2.$$

Лема 3. *Для довільних k, $0 < k < +\infty$ виконується*

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\varphi(kr)}{\varphi(r)} = k^{\eta_2 - 1},$$

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\varphi(kr)}{\varphi(r)} = k^{\eta_1 - 1}.$$

Наслідок. *Для довільних k, $0 < k < +\infty$ виконується*

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\varphi^{-1}(kr)}{\varphi^{-1}(r)} = k^{q_2 - 1},$$

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\varphi^{-1}(kr)}{\varphi^{-1}(r)} = k^{q_1 - 1}.$$

Доведення наступних двох лем є аналогічним до доведення відповідних результатів з [5].

Лема 4. *Нехай f - ціла функція скінченного типу меншого або рівного σ при уточненому порядку Бутру $l(t)$, $q_0 > 1$ - фіксоване число. Тоді існують число h, яке залежить лише від q_0, і послідовність (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_k < q_0 r_{k-1}$, $k \geqslant 1$ такі, що для будь-якого $\varepsilon > 0$*

$$\ln|f(z)| > -h(\sigma + \varepsilon)\,|z|^{l(|z|)}, |z| = r_k, k > k_0(\varepsilon). \qquad (6)$$

Доведення. Виберемо числа $R_1 > 0$, $R_2 = q_1 R_1$,..., $R_k = q_1 R_{k-1}, \ldots$; $q_1 = \sqrt{q_0}$. Тоді [7, с. 40] існують кола $|z| = r_k$, $R_{k-1} < r_k < R_k$, на яких

$$\ln|f(z)| > -h * \ln M_f(2eR_k), h* > 0,$$

$$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z = r|\}.$$

За умовою

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^{l(r)}},$$

звідки

$$\ln M_f(r) < (\sigma + \varepsilon)\, r^{l(r)}, r > r_0(\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Тому,

$$\ln|f(z)| > -h * \ln M_f(2eR_k) >$$

$$> -h * (\sigma + \varepsilon)(2eR_k)^{l(2eR_k)}, k > k_0(\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Оскільки [6, с. 91-92] функція $r^{l(r)}$ є зростаючою при достатньо великих r, то враховуючи лему 3 і нерівність $R_k < q_1 r_k$, маємо

$$\ln|f(z)| > -h*(\sigma+\varepsilon)(2eq_1 r_k)^{l(2eq_1 r_k)} >$$
$$> -h*(\sigma+\varepsilon)(2eq_1)^{\eta_2}(1+o(1))\, r_k^{l(r_k)} =$$
$$= -h(\sigma+\varepsilon)\, r_k^{l(r_k)}, k > k_0(\varepsilon), \varepsilon > 0.$$

Лема 5. *Нехай f - ціла функція скінченного типу меншого або рівного σ при уточненому порядку Бутру $l(t)$. Тоді для довільного $B > 1$*

$$-\frac{1}{2\pi R^{2B}}\int_1^R m^{B-1}\ln\left|f\left(me^{\frac{i\pi}{2B}}\right)f\left(me^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|dm \leqslant$$
$$\leqslant K_2\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}}, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{\frac{-\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\cos B\theta d\theta \leqslant K_3\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{B-1}}. \tag{8}$$

Доведення. Для функції f при $|z| < \rho$ справедлива формула Пуассона-Єнсена [6, с.16]

$$\ln|f(z)| = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\cdot Re\left(\frac{\rho e^{i\theta}+z}{\rho e^{i\theta}-z}\right)d\theta +$$
$$+\sum_{|a_\nu|<\rho}\ln\left|\frac{\rho(z-a_\nu)}{\rho^2-\overline{a}_\nu z}\right|, \tag{9}$$

де (a_ν) - нулі функції f. Нехай $|z| = m \leqslant R$ і $k \in \mathbb{N}$ таке число, для якого $r_{k-1} \leqslant R < r_k$, де (r_k) - послідовність із леми 4. Візьмемо в (9) $\rho = r_{k+1}$. Враховуючи (6) і нерівності

$$\left|\frac{\rho(z-a_\nu)}{\rho^2-\overline{a}_\nu z}\right| \geqslant \frac{\rho\,||m|-|a_\nu||}{\rho^2+|a_\nu|\,m} \geqslant \frac{||m|-|a_\nu||}{2\rho},$$

маємо

$$\ln|f(z)| \geqslant -h(\sigma+\varepsilon)\rho^{l(\rho)}\frac{\rho+m}{\rho-m} + \sum_{|a_\nu|<\rho}\frac{|m-|a_\nu||}{2\rho}.$$

Тоді

$$-\frac{1}{2\pi R^{2B}}\int_1^R m^{B-1}\ln\left|f\left(me^{\frac{i\pi}{2B}}\right)f\left(me^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|dm \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{2\pi R^{2B}}\left(\int_1^R m^{B-1}\ln\left|f\left(me^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|dm + \right.$$
$$\left. + \int_1^R m^{B-1}\ln\left|f\left(me^{\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|dm\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi R^{2B}}\left(h(\sigma+\varepsilon)\rho^{l(\rho)}\int_0^R m^{B-1}\frac{\rho+m}{\rho-m}dm + \right.$$
$$\left. + R^{B-1}\sum_{|a_\nu|<\rho}\int_0^R \ln\frac{2\rho}{|m-|a_\nu||}dm\right). \tag{10}$$

Оцінимо перший доданок в правій частині (10). Оскільки $r_k < q_0 r_{k-1}$, то $q_0 R < \rho < q_0^2 R$ і, використовуючи лему 3, отримаємо

$$\frac{1}{\pi R^{2B}}h(\sigma+\varepsilon)\rho^{l(\rho)}\int_0^R m^{B-1}\frac{\rho+m}{\rho-m}dm \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi R^{2B}}h(\sigma+\varepsilon)\left(q_0^2 R\right)^{l\left(q_0^2 R\right)}\int_0^R m^{B-1}\frac{q_0^2 R+R}{q_0 R-R}dm \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi R^{2B}}h(\sigma+\varepsilon)\, q_0^{2\eta_2}R^{l(R)}\frac{q_0^2+1}{q_0-1}\int_0^R m^{B-1}dm =$$
$$= \frac{1}{\pi R^{2B}}h(\sigma+\varepsilon)\, q_0^{2\eta_2}\frac{q_0^2+1}{q_0-1}R^{l(R)}\left.\frac{m^B}{B}\right|_0^R =$$
$$= \frac{h(\sigma+\varepsilon)\, q_0^{2\eta_2}\left(q_0^2+1\right)}{\pi B(q_0-1)}\cdot\frac{R^{l(R)}}{R^B} = K_1\frac{R^{l(R)}}{R^B}. \tag{11}$$

Розглянемо другий доданок в правій частині (10). Функція $\chi(x) = \ln\frac{2\rho}{|x|}$ задовольняє всім вимогам леми 7.2 із [6, с. 56] на проміжку $(-\rho;\rho)$ з $E = (-|a_\nu|, R-|a_\nu|)$. Тому за цією лемою

$$\int_0^R \ln\frac{2\rho}{|m-|a_\nu||}dm = \int_{-|a_\nu|}^{R-|a_\nu|}\ln\frac{2\rho}{|t|}dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}\ln\frac{2\rho}{t}dt = R\ln\frac{4e\rho}{R} \leqslant R\ln\left(4eq_0^2\right). \tag{12}$$

Оскільки f - функція скінченного типу, то [8, с. 209]

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{n(t,0)}{t^{l(t)}} = \tau < \infty, \tag{13}$$

де $n(t,0)$ - кількість нулів $f(z)$ в крузі $|z| \leqslant t$. Тоді з леми 3 і (11-13), отримуємо

$$-\frac{1}{2\pi R^{2B}}\int_1^R m^{B-1}\ln\left|f\left(me^{\frac{i\pi}{2B}}\right)f\left(me^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|dm \leqslant$$
$$\leqslant K_1\frac{R^{l(R)}}{R^B} + \frac{R^{B-1}}{\pi R^{2B}}\sum_{|a_\nu|<\rho}R\ln\left(4eq_0^2\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_1\frac{R^{l(R)}}{R^B} + \frac{\ln\left(4eq_0^2\right)}{\pi R^B}n\left(q_0^2 R, 0\right) \leqslant$$
$$\leqslant K_1\frac{R^{l(R)}}{R^B} + \frac{\ln\left(4eq_0^2\right)}{\pi R^B}(\tau+\varepsilon)\left(q_0^2 R\right)^{l\left(q_0^2 R\right)} \leqslant$$
$$\leqslant K_1\frac{R^{l(R)}}{R^B} + \frac{\ln\left(4eq_0^2\right)}{\pi R^B}(\tau+\varepsilon_1)\, q_0^{2\eta_2}R^{l(R)} \leqslant$$
$$\leqslant K_2\frac{R^{l(R)}}{R^B} = K_2\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}}.$$

Доведемо другу частину леми 5. Нехай $\ln^+ x = \max\{0, \ln x\}$, $\ln^- x = \min\{0, \ln x\}$, $x > 0$. Не зменшуючи загальності надалі можемо вважати, що $f(0) = 1$. Якщо ж $f(0) \neq 1$, то будемо розглядати функцію $\frac{f(z)}{f(0)}$ якщо $f(0) \neq 0$, або $\frac{j!z^{-j}f(z)}{f^{(j)}(0)}$, якщо

$f(z)$ в точці $z=0$ має нуль порядку j. Запишемо для функції f формулу Єнсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta=\sum_{|a_\nu|\leqslant\rho}\ln\frac{\rho}{|a_\nu|}\geqslant 0,$$

де a_ν - нулі функції $f(z)$. Оскільки

$$0\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^-\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta,$$

то подібно до [9, с. 420]

$$-\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\cos(B\theta)\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln^-\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|\cos(B\theta)\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln^-\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^-\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi\rho^B}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|f\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi\rho^B}2\pi(\sigma+\varepsilon)\rho^{l(\rho)}\leqslant K_3\frac{\rho^{l(\rho)-1}}{\rho^{B-1}}=K_3\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{B-1}}.$$

Доведення теореми.

Припустимо, що $f(z)\neq 0$. Застосуємо до функції $f\left(z^{1/B}\right)$ формулу Карлемана [6, с. 41] для правої півплощини

$$\frac{1}{B}\sum_{1<\lambda_n\leqslant R}\left(\frac{1}{\lambda_n^B}-\frac{\lambda_n^B}{R^{2B}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\cos B\theta d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{t^B}-\frac{t^B}{R^{2B}}\right)\ln\left|f\left(te^{\frac{i\pi}{2B}}\right)f\left(te^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|\frac{dt}{t}$$

$$+O(1),R\to+\infty \qquad (14).$$

Оцінимо перший доданок у (14). Враховуючи (3) отримуємо:

$$\frac{1}{\pi R^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}\ln\left|f\left(Re^{i\theta}\right)\right|\cos B\theta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}(d+o(1))(R\sin\theta)^{l(R\sin\theta)}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R^B}\int_{-\frac{\pi}{2B}}^{\frac{\pi}{2B}}(d+o(1))R^{l(R)}(\sin\theta)^{\eta_2}\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi R^B}(d+o(1))R^{l(R)}\frac{\pi}{B}\leqslant(d+o(1))\frac{R^{l(R)-1}}{R^{B-1}}=$$

$$=(d+o(1))\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}},R\to+\infty \qquad (15).$$

Оцінимо другий доданок у (14):

$$\frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{t^B}-\frac{t^B}{R^{2B}}\right)\ln\left|f\left(te^{\frac{i\pi}{2B}}\right)f\left(te^{-\frac{i\pi}{2B}}\right)\right|\frac{dt}{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_1^R\frac{1}{t^{B+1}}2(d+o(1))\left(t\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{l\left(t\sin\frac{\pi}{2B}\right)}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d+o(1)}{\pi}\int_1^R\frac{1}{t^{B+1}}t^{l(t)}\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}dt=$$

$$=\frac{d+o(1)}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt,R\to+\infty \quad (16).$$

Отже, з (15) і (16) випливає:

$$\frac{1}{B}\sum_{1<\lambda_n\leqslant R}\left(\frac{1}{\lambda_n^B}-\frac{\lambda_n^B}{R^{2B}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant L_2\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt+L_1\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}}+O(1),R\to+\infty, \quad (17)$$

де $L_1=d+o(1)$, $L_2=\frac{d+o(1)}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}$.

Оскільки виконується (4), то використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}}}{\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt}=\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{R^{l(R)-B}}{\int_1^R t^{l(t)-1-B}dt}=$$

$$=\overline{\lim_{R\to+\infty}}\frac{R^{l(R)-B}\left(l'(R)\ln(R)+(l(R)-B)\frac{1}{R}\right)}{R^{l(R)-B-1}}=$$

$$=\overline{\lim_{R\to+\infty}}(Rl'(R)\ln R+l(R)-B)=\eta_2-B\leqslant 0.$$

Тоді з (17) отримуємо

$$\frac{1}{B}\sum_{1<\lambda_n\leqslant R}\left(\frac{1}{\lambda_n^B}-\frac{\lambda_n^B}{R^{2B}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant L_2\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt\left(1+\frac{L_1}{L_2}\frac{\frac{\varphi(R)}{R^{B-1}}}{\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt}\right)+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant L_2\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt+O(1),R\to+\infty \qquad (18).$$

З іншого боку

$$\frac{1}{B}\sum_{1<\lambda_n\leqslant R}\left(\frac{1}{\lambda_n^B}-\frac{\lambda_n^B}{R^{2B}}\right)=$$

$$\int_1^R\left(\frac{1}{t^B}-\frac{t^B}{R^{2B}}\right)dn(t)+O(1),R\to+\infty,$$

де $n(t)=\sum_{\lambda_n\leqslant t}1$. З умови (5) випливає, що для деякого $\varepsilon_0>0$ виконується

$$\frac{n(t)}{t^{l(t)}}>M,M=\frac{d}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}+\varepsilon_0,t\geqslant t_0.$$

Тому

$$\frac{1}{B}\sum_{1<\lambda_n\leqslant R}\left(\frac{1}{\lambda_n^B}-\frac{\lambda_n^B}{R^{2B}}\right)=$$

$$=\int_1^R\left(\frac{1}{t^B}-\frac{t^B}{R^{2B}}\right)dn(t)+O(1)=$$

$$=\frac{1}{B}\left(\frac{n(t)}{t^B}-\frac{n(t)t^B}{R^{2B}}\right)\Bigg|_1^R+$$

$$+\int_1^R n(t)\left(\frac{1}{t^{B+1}}+\frac{t^{B-1}}{R^{2B}}\right)dt+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant M\int_1^R t^{l(t)}\left(\frac{1}{t^{B+1}}+\frac{t^{B-1}}{R^{2B}}\right)dt+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant M\int_1^R t^{l(t)-1-B}\left(1+\frac{t^{2B}}{R^{2B}}\right)dt+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant M\left(1+\frac{1}{R^{2B}}\right)\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant M\int_1^R\frac{\varphi(t)}{t^B}dt+O(1), R\to+\infty. \qquad (19)$$

Отже, з (18) і (19) маємо $L_2\geqslant M$, тобто

$$\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}>\left(\sin\frac{\pi}{2B}\right)^{\eta_2}+\frac{\varepsilon_0\pi}{d}.$$

Одержана суперечність спростовує припущення, що $f(z)\neq 0$ і тим самим теорему доведено.

Бібліографія

[1] Boutroux P. Sur l'indetermination d'une function uniforme au voisinage d'une singularite transcedente // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. — 1908. — **25**. — P. 318–370.

[2] Valiron G. *Lectures on the General Theory of Integral Functions.* — Privat Toulouse, 1923.

[3] Седлецкий А.М. Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ // Мат. сб. — 1984. — **123**, № 1. — Р. 92–107.

[4] Sedletskii A.M. *Fourier Transforms and Approximations.* — Amsterdam: OPA, 2000. — 261 p.

[5] Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. Про одну теорему єдиності для цілих функцій, пов"язану з повнотою систем експонент з вагою на осі // Математичні Студії — 2005. — **23**. — С. 161–168.

[6] Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* — М.: Наука, 1970. — 591 с.

[7] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* — М.: Наука, 1983. — 176 с.

[8] Ибрагимов И.И. *Избранные вопросы теории аналитических функций.* — Баку: Элм, 1984. — 384 с.

[9] Rubel L.A. Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — **83**. — P. 417–429.