УДК 536.12:621.891

Розв'язування крайової задачі про визначення нестаціонарного температурного поля в безмежній пластинці з прямокутним вирізом

Іваник Є. Г., Коляно Я. Ю., Сікора О. В., Остапчук Л. А.

informatyka@drohobych.net

Львівський національний аграрний університет, Українська академія друкарства, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Розглянуто підхід до визначення температурного поля в безмежній пластинці з прямокутним вирізом. Цей підхід базується на використанні узагальненої функції, для визначення якої отримано диференціальне рівняння, у правій частині якого містяться імпульсні функції типу дельта-функції та її похідних; розв'язок цього рівняння подано в інтегральному вигляді, яке містить дві функції, що є значеннями шуканої температури на краях вирізу. Невідомі функції визначаються з інтегральних рівнянь типу Вольтерра по часовій змінній і типу Фредгольма за координатами; їх розв'язок знаходиться методом послідовних наближень, обґрунтування застосування якого сформульовано у вигляді теореми.

Вступ

Дослідження температурних полів і напружень в багатоступінчатих тонкостінних елементах конструкцій та тіл з вирізами, отворами, пазами скінчених розмірів має важливе практичне значення при виченні технологічних процесів зварювання різнотовщинних пластин, оболонок, стержнів різного діаметру; термоміцності металоскляних спаїв ніжок оболонок електро- вакуумних приладів, які містять тонкі циліндричні ступінчаті струмопідведення; при дослідженні та аналізі похибок вимірювань опору низьких температур, обумовлених теплопритоком по струмовиведеннях і захисній арматурі; розрахунках на міцність будівельних конструктивних елементів, типу мостових опор або перекрить.

В роботах [1-3] виведено диференціальні рівняння з коефіцієнтами типу імпульсних функцій, які описують тепловий стан багатоступінчатих ізотропних тонких пластин, циліндричних оболонок і стержнів в урахуванням тепловіддачі та джерел тепла, а також термопружність пластин круглого і прямокутного січення.

Виклад основних результатів та чисельні розрахунки

Розглянемо однорідну необмежену пластинку товщиною 2δ в системі координат x_1Ox_2 з прямокутним вирізом $|x_1| \leqslant a_1$, $|x_2| \leqslant a_2$. Через бокові поверхні пластинки $x_3 = \pm\delta$ і прямокутну границю вирізу здійснюється теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона. Нехай температура середовища, яке омиває поверхні $x_3 = \pm\delta$, рівна нулю, а на прямокутних границях вирізу задано температуру t_c. Крім того припускаємо, що на безмежності температура пластинки та її градієнти у відповідних напрямах прямують до нуля. Поставимо задачу визначення температурного поля в розглядуваній системі.

Для визначення нестаціонарного температурного поля маємо таку крайову задачу [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - \varkappa^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} N(x_{i\pm1}) = \pm h_i (T - t_c) S_+(t) N(x_{i\pm1}) \tag{2}$$

$$x_i = a_i \ (i = 1, 2),$$

$$T|_{(x_1, x_2)\to\infty} = 0, \ \left.\frac{\partial T}{\partial x_i}\right|_{(x_1, x_2)\to\infty} = 0, \tag{3}$$

$$T|_{t=0} = 0,$$

де в рівнянні (1) та крайових умовах (2), (3) позначено: $\varkappa^2 = \frac{\alpha}{K\delta}$; a – коефіцієнт температуропровідності; K – коефіцієнт теплопровідності; t – час; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь $x_3 = \pm\delta$; $N(x_i) = S_+(x_i + a_i) - S_-(x_i - a_i)$ – характеристична функція відрізка [4]; $S_\pm(\cdot)$ – одиничні функції Гевісайда [5].

Для узагальненої функції $\theta = TN(x_1, x_2)$, $N(x_1, x_2) = 1 - N(x_1)N(x_2)$, враховуючи умову (2), а також правила диференціювання узагальнених функцій [6-8], маємо таке диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} - \varkappa^2\theta = \frac{1}{a}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \tag{4}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \{h_i (T - t_c) N(x_{i\pm1}) \times$$

$$\times [\delta_+(x_i + a_i) - \delta_-(x_i - a_i)] -$$

$$- T|_{x_i = a_i + 0} N(x_{i\pm1}) \times$$

$$\times \left[\delta'_+(x_i + a_i) - \delta'_-(x_i - a_i)\right]\} S_+(t).$$

У рівнянні (4) $\delta_\pm(\cdot)$, $\delta'_\pm(\cdot)$ – дельта-функції Дірака та її похідні, породжені відповідними одиничними функціями [5].

Фундаментальний розв'язок рівняння (4), який відповідає миттєвому точковому джерелу тепла одиничної інтенсивності, згідно [9], має вигляд

$$\vartheta(x_1,x_2,t)=\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{4\pi t}-\varkappa^2 at}. \qquad (5)$$

Оскільки права частина рівняння (4) фінітна, то його розв'язок можна одержати у вигляді згортки фундаментального розв'язку (5) і правої частини рівняння (4), тобто

$$\theta(x_1,x_2,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\vartheta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,t-t_0)\times$$
$$\times f(\xi_1,\xi_2,t_0)\,d\xi_1 d\xi_2 dt_0, \qquad (6)$$

де $f(\xi_1,\xi_2,t_0)=\sum\limits_{i=1}^{2}\{h_i\,(T-t_c)\,N(x_{i\pm1})\times$

$$\times[\delta_+(x_i+a_i)-\delta_-(x_i-a_i)]-$$
$$-T|_{x_i=a_i+0}N(x_{i\pm1})\times$$
$$\times\left[\delta'_+(x_i+a_i)-\delta'_-(x_i-a_i)\right]\}\,S_+(t).$$

Врахувавши вид функції θ, маємо залежність

$$T|_{x_i=a_i+0}=\theta|_{x_i=a_i+0}. \qquad (7)$$

Обчислюючи інтеграли у правій частині рівності (6), беручи при цьому до уваги залежність (7), дістанемо таке інтегральне представлення для узагальненої функції θ:

$$\theta(x_1,x_2,t)=\int\limits_0^t\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-a_i}^{a_i}\{\theta_i(s,t_0)\times$$
$$\times[\psi_i(a_i+x_i,x_{i\pm1}-s,t-t_0)+$$
$$+\psi_i(a_i-x_i,x_{i\pm1}-s,t-t_0)]\}\,dsdt_0- \qquad (8)$$
$$-t_c\int\limits_0^t\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{-a_i}^{a_i}[\varphi_i(a_i+x_i,x_{i\pm1}-s,t-t_0)+$$
$$+\varphi_i(a_i-x_i,x_{i\pm1}-s,t-t_0)]\,dsdt_0.$$

У виразі (8) введено такі позначення для ядер в інтегралах:

$$\theta_i(s,t_0)=\theta(a_i,s,t_0)\ (i=1,2);$$
$$\varphi(\xi,\eta,t)=\frac{1}{4\pi t}e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4at}-\varkappa^2 at};$$
$$\psi_i(\xi,\eta,t)=\left(\frac{\xi}{2at}+h_i\right)\varphi(\xi,\eta,t).$$

Ядра під інтегралами у поданні (8) визначені для всі значень координат x_1, x_2 та для величин часу t не рівному значенню t_0. Неважко переконатись, що їх можна до визначити за неперервністю також і для $t=t_0$, тобто для всіх значень аргументів. Для цього розглянемо таку функцію

$$g(\xi,\eta,t-t_0)=\frac{1}{4\pi(t-t_0)}e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4a(t-t_0)}-\varkappa^2 a(t-t_0)}.$$

Виконуючи заміну $\frac{1}{4a(t-t_0)}=\omega$ будемо мати $\frac{1}{t-t_0}=4a\omega$ і при $t\to t_0$, $\omega\to\infty$; звідси після граничного переходу дістаємо

$$\lim_{t\to t_0}g(\xi,\eta,t-t_0)=\lim_{\omega\to\infty}g(\xi,\eta,\omega)=$$
$$=\frac{a}{\pi}\lim_{\omega\to\infty}\left[\omega e^{-\omega\left(\xi^2+\eta^2\right)}\right].$$
$$\lim_{\omega\to\infty}e^{-\frac{\varkappa^2}{4\omega}}=0.$$

Отже, в інтегральному представленні (8) можна здійснювати граничний перехід по всіх аргументах. Покладаючи тоді у (8) $x_i=a_i$ приходимо до такої системи інтегральних рівнянь для визначення невідомих значень $\theta(a_1,x_2,t)$, $\theta(x_1,a_2,t)$ функції $\theta(x_1,x_2,t)$:

$$\theta_i=\int\limits_0^t\int\limits_{-a_i}^{a_i}\theta_i(s,t_0)\,\mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t-t_0)\,dsdt_0+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{-a_i}^{a_i}\theta_{i+1}(s,t_0)\,\mathrm{K}_{i+1}(a_i,x_{i\pm1},s,t-t_0)\,dsdt_0+ \qquad (9)$$
$$+F_i(x_1,x_2,t).$$

Тут позначено:

$$\mathrm{K}_i(\xi_i,\eta,s,t-t_0)=\psi_i(a_i+\xi_i,\eta-s,t-t_0)+$$
$$+\psi_i(a_i-\xi_i,\eta-s,t-t_0);$$

$$F_i(x_1,x_2,t)=-t_c\int\limits_0^t\left\{h_i\int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}}f_i(a_i,x_{i\pm1},s,t-t_0)\,ds+\right.$$
$$\left.+h_{i+1}\int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}}f_{i\pm1}(a_i,x_{i\pm1},s,t-t_0)\,ds\right\}dt_0;$$

$$f_i(\xi_i,\eta,s,t-t_0)=\varphi_i(a_i+\xi_i,\eta-s,t-t_0)+$$
$$+\varphi_i(a_i-\xi_i,\eta-s,t-t_0).$$

Отримані інтегральні рівняння (9) належать до Вольтерового типу за часом і до Фредгольмовому по геометричних координатах x_1,x_2; їх розв'язок може бути знайденим методом послідовних наближень [10].

Подамо обґрунтування застосування до отриманих інтегральних рівнянь методу послідовних наближень; з цією метою перепишемо систему інтегральних рівнянь (9), розв'язок якої необхідний для визначення нестаціонарного температурного поля в площині з вирізом, у вигляді

$$\theta_i = \lambda\int_0^t \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \theta_i(s,t_0)\,\mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,ds dt_0 +$$

$$+\int_0^t \int_{-a_i}^{a_i} \theta_{i+1}(s,t_0)\,\mathrm{K}_{i+1}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,ds dt_0 +$$

$$+F_i(x_1,x_2,t). \qquad (10)$$

Твердження: Якщо функції K_i, F_i інтегровані в області $D=\{|x_i|\leqslant a_i, t\in[0,\bar t]\}$ $(i=1,2)$, то в цій області система рівнянь Вольтера-Фредгольма має єдиний розв'язок, який при довільному значенні параметра λ можна побудувати методом послідовних наближень.

Метод послідовних наближень для системи (10) приводить до ряду

$$\theta_i = \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\lambda^m \int_0^t \left[\int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \mathrm{K}_{im}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\times\right.\right.$$

$$\times F_i(s,t_0)\,ds+$$

$$\left.\left.+\int_{-a_i}^{a_i} \mathrm{K}_{i+1\,m}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,F_{i\pm1}(s,t_0)\,ds\right] dt_0\right\}+$$

$$+F_i(x_1,x_2,t), \qquad (11)$$

де $\mathrm{K}_{im}(\cdot)$ є m-ю ітерацією ядра K_i.

Доведемо спочатку, що ряд, визначений виразом (10), збігається регулярно по x при довільному значенні λ. З цією метою довизначимо відповідне ядро так, щоб система стала Фредгольмовою. Для цього припустимо

$$\mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0) =$$

$$=\begin{cases} 0, & t_0>t, \\ \mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0), & t_0<t<\bar t=\text{const}. \end{cases} \qquad (12)$$

Наступний крок – доведення методом математичної індукції, що

$$\mathrm{K}_{im}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0) = \qquad (13)$$

$$\int_{t_0}^t \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \hat{\mathrm{K}}_{im}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,ds_0 dt_1,$$

де $\hat{\mathrm{K}}_{im}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0) =$

$$\mathrm{K}_{im-1}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,\mathrm{K}_i(a_i,s_0,s,t_1,t_0).$$

Нехай $m=2$. Тоді матимемо

$$\mathrm{K}_{i2}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0) =$$

$$\int_{t_0}^t \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \hat{\mathrm{K}}_{i2}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)\,ds_0 dt_1 =$$

$$= \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \int_0^{\bar t} \mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t_1,t_1)\,\mathrm{K}_i(a_i,s_0,t_1,t_0)\,ds_0 dt_1 =$$

$$= \int_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \left\{\int_0^{t_0} \mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t_1,t_1)\,\mathrm{K}_i(a_i,s_0,s,t_1,t_0)\,dt_1+\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t} \mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1}s,t_1,t_1)\,\mathrm{K}_i(a_i,s_0,s,t_1,t_0)\,dt_1+$$

$$\left.+\int_t^{\bar t} \mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t_1,t_1)\,\mathrm{K}_i(a_i,s_0,s,t_1,t_0)\,dt_1\right\} ds_0.$$

Згідно залежності (12) – перший та останній інтеграли дорівнюють нулю. Тому $\mathrm{K}_{i2}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0) =$

$$=\begin{cases} 0,\ t_0>t, \\ \int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \int\limits_{t_0}^{t} \Omega_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0,t_1)\,ds dt_1,\ t_0<t. \end{cases}$$

Тут $\Omega_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0,t_1) =$

$$\mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_1,t_1)\mathrm{K}_i(a_i,s_0,s,t_1,t_0)$$

і формула (13) доведена для $m=2$. За індукцією її легко отримати для будь-якого m.

Оскільки функції K_{im} інтегровані, то вони неперервні і на скінченному інтервалі обмежені. Відповідно має місце наступна оцінка

$$|\mathrm{K}_{im}(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)| \leqslant \frac{M_i^m (t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} \leqslant \frac{M_i^m \bar t^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad (14)$$

де $M_i = \sup\limits_{\substack{-a_{i\pm1}<x,s<a_{i\pm1} \\ 0<t_0,t<\bar t}} |\mathrm{K}_i(a_i,x_{i\pm1},s,t,t_0)|$.

Оцінка (14) справедлива при $m=1$, оскільки в цьому випадку вона виражає той факт, що ядро $\mathrm{K}_{im}(\cdot)$ обмежене. Нехай залежність (14) виконується для $m-1$. Тоді із залежності (13) випливає оцінка (14).

Оцінимо тепер загальний член ряду (11):

$$|\lambda^m \mathrm{K}_i^m F_i| \leqslant \qquad (15)$$

$$\leqslant |\lambda|^m \left| \int\limits_0^t \int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} \mathrm{K}_{im}(a_i, x_{i\pm1}, s, t, t_0) F_i(s, t_0) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^m M_i^m \bar{t}^{m-1}}{(m-1)!} \int\limits_0^{\bar{t}} \int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} F_i(s, t_0)\, dsdt_0.$$

Аналогічну оцінку допускає і другий доданок в (11).

Таким чином, загальний член ряду (11) не перевищує загального члена показникового числового ряду. Відповідно, ряд (11) збігається рівномірно по x при будь-якому λ і

$$\left| \sum_{m=1} \lambda^m \mathrm{K}_i^m F^i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\bar{t}} \int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} F_i(s, t_0) \frac{|\lambda|^m M_i^m \bar{t}^{m-1}}{(m-1)!}\, dsdt_0 =$$

$$= |\lambda|^m M_i e^{|\lambda| M_i \bar{t}} \int\limits_0^{\bar{t}} \int\limits_{-a_{i\pm1}}^{a_{i\pm1}} |F_i(s, \tau_0)|\, dsd\tau_0.$$

З інтегрованості вільного члена випливає, що метод послідовних наближень для системи рівнянь Вольтера-Фредгольма являється збіжним при будь-якому значенні параметра λ, а розв'язок побудований за цим методом є єдиним. Доведення будується достатньо просто. Нехай φ_i і ψ_i два обмежені розв'язки системи (11). Тоді $\omega_i = \varphi_i - \psi_i$ задовольняє однорідним рівнянням системи; в силу оцінки (15) буде

$$|\omega_i\,(x, t)| =$$

$$|\lambda|^m \left| \int\limits_0^{\bar{t}} \int\limits_{-a_{i+1}}^{a_{i+1}} \mathrm{K}_{im}\,(a_i, x_{i+1}, s, t, t_0)\, \omega_i\,(s, t_0)\, dsdt_0 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^m M_i^m \bar{t}^{m-1}}{(m-1)!} \int\limits_0^{\bar{t}} \int\limits_{-a_{i+1}}^{a_{i+1}} |\omega_i(s, t_0)|\, dsdt_0, \qquad (16)$$

для будь-якого m із множини цілих чисел.

Припустивши в (16), що $m \to \infty$, отримаємо $|\omega_i\,(x, t)| \leqslant 0$. Звідси $\omega_i \equiv 0$. Таким чином, теорема доведена.

Висновки

На сучасному етапі розвитку науки і техніки все більшого інтересу набуває вивчення теплових процесів в тілах з особливостями технологічного характеру (конструктивні елементи можуть містити різного роду вирізи, пази, отвори і т. інш.). Тому проектувальнику або конструктору важливо крім експериментальних даних мати також результати теоретичних досліджень, які можна отримати на основі розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності, що формуються на основі диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами та при розривних граничних умовах.

Математичне обґрунтування існування, єдиності та збіжності розв'язку поставленої задачі про визначення температури в пластинці з вирізом на основі фундаментальних результатів теорії узагальнених функцій та теорії інтегральних рівнянь дає можливість побудувати ефективний алгоритм розрахунку поведінки температури в термопружних системах, що містять технологічні особливості типу вирізів.

Бібліоґрафія

[1] Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. *Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов.* — М.: Наука, 1981. — 344 с.

[2] Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. *Термоупругость тел неоднородной структуры.* — М.: Наука, 1984. — 378 с.

[3] Коляно Ю.М., Горбачев В.А. Метод продолжения функций в теплопроводности тел с пазами // Всесоюзн. конф. "Температура-84": Тез. докл. — Львов, 1984. — С. 129-130.

[4] Кеч В. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. – М.: Мир, 1978. – 518 с.

[5] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* — М.: Наука, 1975. — 831 с.

[6] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* — М.: Наука, 1979. — 320 с.

[7] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.

[8] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход.* – М.: Мир, 1976. — 311 с.

[9] Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел.* — М.: Наука, 1964. — 487 с.

[10] Верлань В.Ф., Сизиков В.С. *Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы.* — К.: Наук. думка, 1986. – 543 с.