УДК 517.984

Два збурення узагальненої спектральної функції типу Марченка різницевого оператора другого порядку на півосі

Кишакевич Ю. Л.
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
вул. Івана Франка 24, м. Дрогобич, 82100

Досліджено вплив двох збурень узагальненої спектральної функції типу Марченка різницевого оператора другого порядку на півосі на коефіцієнти цього оператора та вигляд узагальнених ортогональних поліномів

У п.8 [1] розглянено деякі збурення узагальненої спектральної функції типу Марченка різницевого оператора другого порядку на півосі (у. М.). У цій статті досліджується вплив двох збурень у. М. на різницевий оператор другого порядку, які не увійшли до [1].

Уведемо позначення. Нехай P — лінійний простір поліномів однієї комплексної змінної, P' — лінійний простір адитивних і однорідних функціоналів, заданих на $\boldsymbol{P}$. Значення функціонала $\boldsymbol{u}$ на поліномі $\boldsymbol{p}$ позначимо $|u|p\rangle$, а послідовність $\{|u|x^n\rangle \equiv u_n; \quad n = 0, 1, 2, ...\}$ називаємо моментною послідовністю функціоналу $\boldsymbol{u}$. Операції множення функціоналу на многочлен $\boldsymbol{q(x)}$ та на $(x-a)^{-1}$ вводимо за формулами:

$$\forall u \in P' \ \forall q \in P \ \forall p \in P |\, q(x)u|p(x)\rangle \equiv |\, u|q(x)p(x)\rangle,$$

$$\left|\,(x-a)^{-1}u\right|p(x)\big\rangle \equiv |u|(p_a^*(x)\,\rangle,$$

де

$$p_a^*\left(x\right) = \frac{p(x)-p(a)}{x-a}.$$

Для збурення функціоналів:

$$\forall b \in C \quad |\tau_b u\,|p\,(x)\rangle = |u|p\,(x+b)\,\rangle$$

справедлива Лема.

$$\forall b \in C \quad |\tau_b u\,|p\,(x)\rangle = |u|p\,(x)\,\rangle + |xu|p_0^*\,(x+b)\,\rangle - |(x-b)\,u|p_b^*\,(x)\,\rangle \tag{1}$$

$$\forall b \in C \quad |\tau_b u\,|p\,(x)\rangle = |u|p\,(x+b)\,\rangle = |u|p\,(x)\,\rangle + |u|p\,(x+b) - p\,(x)\,\rangle; \tag{2}$$

$$|u|p\,(x+b) - p\,(x)\,\rangle = \left|u\right|x\frac{p\,(x+b)-p\,(b)}{x} - (x-b)\,\frac{p\,(x)-p\,(b)}{x-b}\,\Big\rangle = |xu|p_0^*\,(x+b)\,\rangle - |(x-b)\,u|p_b^*\,(x)\,\rangle.$$

З рівностей (2) і (3) випливає твердження леми.
Нехай R — у.М. задачі Коші

$$\omega_{n+1}\,(x) + \omega_{n-1}\,(x) + b_n\omega_n\,(x) = x\omega_n\,(x)\,; \quad (n = 0, 1, 2, \ ...)\,. \tag{3}$$

$\omega_{-1} = 0; \omega_0 = 1$, де $b_n \in C \quad (n = 0, 1, 2, \ ...)$, тобто поліноми $\omega_n\,(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ ...)$ ортогональні відносно деякого адитивного і однорідного функціоналу R, визначеного на лінійному просторі поліномів з комплексними коефіцієнтами:

$$|R|\,\omega_n\,(x)\,\omega_k\,(x)\rangle = \delta_{nk} \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ ...)\,. \tag{4}$$

Нехай $r_n = \{R_{i+j}\}_{i,j=0}^{n}$. За теоремою 2 п.6 [1] маємо:

$$detr_n = 1; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Коефіцієнти b_n виражаються через моменти функціоналу $\boldsymbol{R}$ так:

$$b_n = \tfrac{1}{\det\ r_n}\begin{vmatrix} 1 & R_1 & \cdots & R_{n-1} & R_{n+1} \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_n & R_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_n & R_{n+1} & \cdots & R_{2n-1} & R_{2n+1} \end{vmatrix} - \\ -\tfrac{1}{\det\ r_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & R_1 & \cdots & R_{n-2} & R_n \\ R_1 & R_2 & \cdots & R_{n-1} & R_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n-1} & R_n & \cdots & R_{2n-3} & R_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{5}$$

1. Розглянемо таке збурення функціоналу $R \in P'$:

$$\forall b \in C \quad |\tau_b R\,|p\,(x)\rangle = |R|p\,(x+b)\,\rangle; \tag{6}$$

Внаслідок леми маємо:

$$\forall b \in C \quad |\tau_b R\,|p\,(x)\rangle = |R|p\,(x)\,\rangle + |xR|p_0^*\,(x+b)\,\rangle - |(x-b)\,R|p_b^*\,(x)\,\rangle$$

або

$$\forall b \in C \quad |\tau_b R\,|p\,(x)\rangle = |R|p\,(x)\,\rangle + |L|p\,(x)\,\rangle, \tag{7}$$

де

$$\forall b \in C \quad |L\,|p\,(x)\rangle = |xR|p_0^*\,(x+b)\,\rangle - |(x-b)\,R|p_b^*\,(x)\,\rangle.$$

Використовуючи методику п.8 [1], знаходимо многочлени, ортонормовані відносно функціоналу $S \equiv \tau_b R$, різницеве рівняння другого порядку, яке вони задовольняють, а також зв'язок між коефіцієнтами обох різницевих рівнянь.

Уведемо позначення:

а) $D_n = \|\delta_{km} + |L|(\omega_k \omega_m)\,\rangle\|; \quad k, m = 0, 1, 2, ..., n-1$, (δ_{km} – символ Кронекера);
б) $det\ D_n = \Delta_n$;
в) $\gamma_{\rm n}^{-1} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\prod\limits_{k=2}^{n}\sqrt{\frac{\Delta_{k-1}\Delta_{k+1}}{\Delta_k^2}}; \quad n = 1, 2, ...$;
г)

$$\Phi_n\,(x) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} & & & \vdots & |L|\omega_n\,\rangle \\ & D_n & & \vdots & |L|\omega_1\omega_n\,\rangle \\ & & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & |L|\omega_{n-1}\omega_n\,\rangle \\ \omega_0\,(x) & \omega_1\,(x) & \cdots & \omega_{n-1}\,(x) & \omega_n\,(x) \end{vmatrix}; \quad (n = 1, 2, ...)\,.$$

Теорема 1. Якщо $\Delta_{\rm n} \neq 0, (n = 2, 3, ...)$, то многочлени $\varphi_n\,(x) = \gamma_n \Phi_n\,(x)$ ортонормовані відносно функціоналу $\boldsymbol{S}$. Поліноми $\varphi_n\,(x)$ задовольняють різницеве рівняння:

$$a_n\varphi_{n+1}\,(x) + a_{n-1}\varphi_{n-1}\,(x) + \tilde{b}_n\varphi_n\,(x) = x\varphi_n\,(x)$$

і початкові умови:

$$\varphi_{-1} = 0; \;\; \varphi_0\,(x) = 1.$$

Коефіцієнти цього різницевого рівняння визначаються за формулами:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}; \quad a_n = \sqrt{\frac{\Delta_n\Delta_{n+2}}{\Delta_{n-1}^2}}; \quad (n = 1, 2, ...),$$

$$\tilde{b}_n = \gamma_n^2 \cdot \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \cdot b_n + \frac{\gamma_n^2}{\Delta_n}\begin{vmatrix} & & & \vdots & |L|\omega_n\,\rangle \\ & D_n & & \vdots & |L|\omega_1\omega_n\,\rangle \\ & & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & |L|\omega_{n-1}\omega_n\,\rangle \\ |L|\omega_{n+1}\,\rangle & |L|\omega_1\omega_{n+1}\,\rangle & \cdots & |L|\omega_{n-1}\omega_{n+1}\,\rangle & |L|\omega_n\omega_{n+1}\,\rangle \end{vmatrix} -$$

$$- \quad \gamma_{\rm n}^2\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}\begin{vmatrix} 1 + \left|L\right|\omega_0^2\,\rangle & |L|\omega_1\,\rangle & \cdots & |L|\omega_{n-2}\,\rangle & |L|\omega_n\,\rangle \\ |L|\omega_1\,\rangle & 1 + \left|L\right|\omega_1^2\,\rangle & \cdots & |L|\omega_1\omega_{n-2}\,\rangle & |L|\omega_1\omega_n\,\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ |L|\omega_{n-1}\,\rangle & |L|\omega_{n-1}\omega_1\,\rangle & \cdots & |L|\omega_{n-1}\omega_{n-2}\,\rangle & |L|\omega_{n-1}\omega_n\,\rangle \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Легко перевірити, що поліноми $\Phi_{\rm n}\,(x)$ задовольняють дві умови:

а) $\Phi_{\rm n}\,(x)$ – поліноми точно n-ого степеня зі старшим коефіцієнтом 1;

б) $|\mathrm{S}|\Phi_n\Phi_m\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}, & m = n. \end{cases}$

Спочатку доведемо, що $|S|\Phi_n\Phi_m\rangle = 0$ при m < n. Так як

$$\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} C_{mk}\omega_k(x),$$

то

$$|S|\Phi_n\Phi_m\rangle = \sum_{k=0}^{m} C_{mk}|S|\Phi_n\omega_k\rangle.$$

З рівності (11) маємо:

$$\Phi_n(x)\,\omega_{\mathrm{k}}(x) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} & & & \vdots & |L|\omega_n\rangle \\ & D_n & & \vdots & |L|\omega_1\omega_n\rangle \\ & & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & |L|\omega_{n-1}\omega_n\rangle \\ \omega_0(x)\,\omega_k(x) & \omega_1(x)\,\omega_k(x) & \cdots & \omega_{n-1}(x)\,\omega_k(x) & \omega_n(x)\,\omega_k(x) \end{vmatrix}; \qquad (9)$$

$$(n = 1, 2, ...)$$

Зі співвідношень (7), (4) маємо:

$$|S|\omega_p\omega_k\rangle = |R|\omega_p\omega_k\rangle + |L|\omega_p\omega_k\rangle = \begin{cases} |L|\omega_p\omega_k\rangle, & p \neq k \\ 1 + \left|L\right|\omega_k^2\rangle, & p = k. \end{cases} \qquad (10)$$

З рівностей (9) і (10) легко знайти $|S|\Phi_n\omega_k\rangle$ при $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Для прикладу знайдемо

$$|S|\Phi_n(x)\,\omega_1(x)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} & & & \vdots & |L|\omega_n\rangle \\ & D_n & & \vdots & |L|\omega_1\omega_n\rangle \\ & & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & |L|\omega_{n-1}\omega_n\rangle \\ |L|\omega_0(x)\,\omega_1(x)\rangle & 1 + \left|L\right|\omega_1^2\rangle & \cdots & |L|\omega_{n-1}(x)\,\omega_1(x)\rangle & |L|\omega_n(x)\,\omega_1(x)\rangle \end{vmatrix} = 0; \quad (n = 1, 2, ...)$$

бо у визначнику другий і останній рядки однакові. Аналогічно доводиться, що $|S|\Phi_n\omega_k\rangle = 0$ при $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Таким чином, $|S|\Phi_n\Phi_m\rangle = 0$ при $\boldsymbol{m \neq n}$.

Бачимо, що

$$\left|S\right|\Phi_n^2\rangle = |S|\Phi_n\omega_n\rangle =$$

$$= \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} & & & \vdots & |L|\omega_n\rangle \\ & D_n & & \vdots & |L|\omega_1\omega_n\rangle \\ & & & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & |L|\omega_{n-1}\omega_n\rangle \\ |L|\omega_0(x)\,\omega_{\mathrm{n}}(x)\rangle & |L|\omega_1(x)\,\omega_n(x)\rangle & \cdots & |L|\omega_{n-1}(x)\,\omega_n(x)\rangle & 1 + \left|L\right|\omega_n^2\rangle \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}; \quad (n = 1, 2, ...)$$

Тоді, користуючись формулами (8) п.6 [1], знаходимо коефіцієнти різницевого рівняння $\boldsymbol{a}_n$:
$a_0^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}; \quad a_{n-1}^2 = \frac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}; \quad n > 1$

Поліноми $\varphi_{\mathrm{n}}(x) = \gamma_n\Phi_n(x)$ уже будуть $\boldsymbol{S}$ - ортонормовані. Доведемо, що поліноми $\varphi_{\mathrm{n}}(x)$ задовольняють деяке різницеве рівняння другого порядку на півосі. Нехай

$$x\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} d_{n,k}\varphi_k(x)$$

Внаслідок $\boldsymbol{S}$ -ортонормованості поліномів $\varphi_{\mathrm{n}}(x)$ звідси випливає, що

$$d_{n,k} = 0 \quad k = 0, 1, 2, ..., n-2$$

Легко бачити, що

$$d_{n,n-1} = |S|x\varphi_n(x)\,\varphi_{n-1}(x)\,\rangle = d_{n-1,n};$$

З іншого боку
$d_{n,n-1} = \left|S\right|\varphi_n(x)\left(\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}}\varphi_n(x) + p_{n-1}(x)\right)\Big\rangle = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}} = a_{n-1};\ \boldsymbol{n} \geqslant 1$
(тут $p_{n-1}(x)$ – деякий поліном $\boldsymbol{n}$ -1 степеня). Шукаємо тепер $\tilde{b}_n = d_{n,n} \quad n = 0, 1, 2, ...$ Унаслідок (11) маємо

$$\tilde{b}_n = d_{n,n} = \left|S\right|x\varphi_n^2(x)\,\rangle = \gamma_n^2\left|S\right|x\Phi_n^2(x)\,\rangle =$$

$$= \gamma_n^2\left|S\right|x\Phi_n(x)\left(\omega_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k}\omega_k(x)\right)\Bigg\rangle \tag{11}$$

Використавши (3), звідси маємо

$$\tilde{b}_n = d_{n,n} = \gamma_n^2\left(|S|\Phi_n(x)\,\omega_{n+1}(x)\,\rangle + b_n|S|\Phi_n(x)\,\omega_n(x)\,\rangle + C_{n,n-1}|S|\Phi_n(x)\,\omega_n(x)\rangle\right) \tag{12}$$

Підставивши в рівність (9) $k = n+1$, знайдемо спочатку $\Phi_{\mathrm{n}}(x)\,\omega_{n+1}(x)$, а потім і $|S|\Phi_n(x)\,\omega_{n+1}(x)\,\rangle$. Коефіцієнт $\boldsymbol{C}_{n,n-1}$ знаходимо з рівності (11) як алгебраїчне доповнення до $\omega_{n-1}(x)$. Підставивши у рівність (12) значення $|S|\Phi_n(x)\,\omega_{n+1}(x)\,\rangle$, $|S|\Phi_n(x)\,\omega_n(x)\,\rangle$ і коефіцієнта $\boldsymbol{C}_{n,n-1}$, отримаємо рівність (8).»

2. Нехай R – у.М. задачі Коші (3),(5). Розглянемо інше збурення R: $T = h_\alpha R$, яке задається формулою

$$|h_\alpha R|p(x)\,\rangle = |R|p(\alpha x)\,\rangle; \quad \alpha \in C, \alpha \neq 0 \tag{13}$$

Очевидно, що

$$T_n = |T|x^n\,\rangle = |R|(\alpha x)^n\,\rangle = \alpha^n|R|x^n\,\rangle = \alpha^n R_n; \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

Виразимо $det\, t_n$ через $det\, r_n$:

$$det\, t_n = \begin{vmatrix} T_0 & T_1 & \cdots & T_{n-1} & T_n \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_n & T_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_n & T_{n+1} & \cdots & T_{2n-1} & T_{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha R_1 & \cdots & \alpha^{n-1}R_{n-1} & \alpha^n R_n \\ \alpha R_1 & \alpha^2 R_2 & \cdots & \alpha^n R_n & \alpha^{n+1}R_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^n R_n & \alpha^{n+1}R_{n+1} & \cdots & \alpha^{2n-1}R_{2n-1} & \alpha^{2n}R_{2n} \end{vmatrix};$$

Для цього з II стовпця винесемо α , з третього - α^2 , ..., з останнього - α^{n} і в результаті матимемо

$$det\, t_n = \alpha^{\frac{(1+n)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & R_1 & \cdots & R_{n-1} & R_n \\ \alpha R_1 & \alpha R_2 & \cdots & \alpha R_n & \alpha R_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^n R_n & \alpha^n R_{n+1} & \cdots & \alpha^n R_{2n-1} & \alpha^n R_{2n} \end{vmatrix};$$

Тепер з другого рядка винесемо α, з третього - α^2, ..., з останнього - α^{n} і отримаємо рівність:

$$det\, t_n = \alpha^{n(n+1)} \det r_n \tag{15}$$

З рівностей (6') п.6 [1] і (15) випливає, що

$$det\ t_n = \alpha^{n(n+1)} \tag{16}$$

Теорема 2. При $\alpha \in$ C, $\quad \alpha \neq 0$ збурення R: $T = h_\alpha R$, яке задається формулою (13), є у.М. задачі Коші:

$$\alpha\omega_{n-1}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \alpha\omega_{n+1}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) + \alpha b_n\omega_n\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) = \lambda\omega_{n-1}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right);$$

$$\omega_{-1} = 0; \qquad \omega_0 = 1$$

« Послідовність $\boldsymbol{t}_n$ задовольняє умову (4') теореми 2 п.6 [1] і є моментною послідовністю деякого функціоналу з P', тобто у.М. задачі Коші:

$$c_{n-1}\varphi_{n-1}(\lambda) + c_n\varphi_{n+1}(\lambda) + d_n\varphi_n(\lambda) = \lambda\varphi_n(\lambda); \quad n = 1, 2, ... \tag{17}$$

причому

$$\varphi_{-1} = 0; \quad \varphi_0 = 1.$$

Користуючись методикою п.6 [1], можемо послідовно вивести:

$$\mathrm{c}_0^2 = \det\ t_1; \quad \mathrm{c}_n^2 = \frac{\det\ t_{n+1}\cdot\det\ t_{n-1}}{(\det\ t_n)^2}; \quad n > 0$$

або з врахуванням (16)

$\mathrm{c}_\mathrm{n}^2 = \alpha^2$; $\boldsymbol{n} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Тоді

$$\varphi_\mathrm{n}(\lambda) = c_0^{-1}c_1^{-1}...c_{n-1}^{-1}\frac{1}{\det\ t_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & T_1 & \cdots & T_n \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1} & T_n & \cdots & T_{2n-1} \\ 1 & \lambda & \cdots & \lambda^n \end{vmatrix}; \tag{18}$$

Щоб виразити $\boldsymbol{d}_n$ через $\boldsymbol{b}_n$, прирівняємо коефіцієнти при λ^n у рівності (17), врахувавши вирази для $\boldsymbol{c}_n$ і (18):

$$d_n = \frac{1}{\det\ t_n}\begin{vmatrix} 1 & T_1 & \cdots & T_{n-1} & T_{n+1} \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_n & T_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1} & T_n & \cdots & T_{2n-1} & T_{2n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{\det\ t_{n-1}}\begin{vmatrix} 1 & T_1 & \cdots & T_{n-2} & T_n \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_{n-1} & T_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{n-1} & T_n & \cdots & T_{2n-3} & T_{2n-1} \end{vmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Врахувавши (16) і (14) та послідовно виносячи степені α з стовпців та рядків обох детермінантів отримаємо:

$$d_n = \alpha b_n; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

У рівності (18) спочатку врахуємо співвідношення (16) і (14), потім послідовно виносячи степені α зі стовпців та рядків детермінанта, отримаємо рівність

$$\varphi_n(\lambda) = \omega_n\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right); \quad n = 2, 3, ...$$

Бібліографія

[1] Лянце В., Кишакевич Ю. Узагальнені ортогональні поліноми / Дрогобич. – Ред.-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. – 2011. – 140 с.