УДК 517.5

Асимптотична поведінка логарифмічних похідних цілих функцій з покращеним розподілом нулів

Хаць Р. В.

khats@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Отримано асимптотичні формули для логарифмічних похідних цілих функцій з покращеним розподілом нулів.

Нехай $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t)=\sum_{\lambda_n\leqslant t}1$, p — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-p-1}<+\infty$ і ([1, с. 18])

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\frac{z^k}{\lambda_n^k}\right), \qquad (1)$$

— ціла функція, визначена канонічним добутком Вейєрштраса роду p. Нехай L — ціла функція додатного порядку цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера ([1, с. 182]). У [2, 3] для таких функцій знайдено асимптотичні формули їх логарифмічних похідних зовні деяких виняткових множин. Зокрема, в [2, с. 64], [3, с. 28] (див. також [4, с. 126]) встановлено наступне. Якщо $\rho\in(0,+\infty)$ — неціле число і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$n(t)=\Delta t^{\rho}+o(t^{\rho}),\quad t\to+\infty,\quad \Delta\in[0,+\infty), \qquad (2)$$

то для цілої функції L нецілого порядку ρ, визначеної канонічним добутком (1) роду $p=[\rho]$, для кожного $\delta>0$ рівномірно за $\varphi\in[\delta,2\pi-\delta]$ виконується

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}=\frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\rho\pi}e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1}+o(r^{\rho-1}),$$
$$r\to+\infty.$$

Якщо ж умова (2) виконується з $\rho\in\mathbb{N}$, то для цілої функції (1) порядку ρ справджується співвідношення ([2, с. 72], [3, с. 30])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}=\Omega(re^{i\varphi})+o(r^{\rho-1}),\quad r\to+\infty,$$

рівномірно за $\varphi\in[\delta,2\pi-\delta]$, $\delta>0$, де

$$\Omega(re^{i\varphi})=$$
$$=\begin{cases} e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1}\sum\limits_{\lambda_n\leqslant r}\lambda_n^{-\rho}+ \\ \quad+\Delta\rho i(\varphi-\pi)e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1}, \quad p=\rho, \\ 0, \quad p=\rho-1. \end{cases} \qquad (3)$$

Аналогічні асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку з від'ємними нулями отримано в [5], а для голоморфних в одиничному крузі функцій в [6].

У зв'язку з вивченням цілих функцій покращеного регулярного зростання [7–11] актуальною є задача про знаходження асимптотики логарифмічної похідної цих функцій, що передбачає отримання тонших асимптотичних оцінок в порівнянні з цілими функціями цілком регулярного зростання. У даній замітці будуть встановлені асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції (1) з *покращеним розподілом нулів* (див. нижче умову (4)). Зокрема, подібно до [11], ми доведемо наступні твердження, які покращують і узагальнюють результат з [12] про асимптотику логарифмічної похідної канонічного добутку нульового роду.

Теорема 1. *Нехай $\Delta\in[0,+\infty)$, $\rho\in(0,+\infty)$ — неціле число, $p=[\rho]<\rho_1<\rho<p+1$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову*

$$n(t)=\Delta t^{\rho}+o(t^{\rho_1}),\quad t\to+\infty. \qquad (4)$$

Тоді для цілої функції (1) виконується

$$\left|\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}-\frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\rho\pi}e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1}\right|\sin\frac{\varphi}{2}=$$
$$=o(r^{\rho_1-1}),\quad r\to+\infty,\quad \varphi\in(0,2\pi). \qquad (5)$$

Теорема 2. *Нехай $\Delta\in[0,+\infty)$, $\rho\in\mathbb{N}$, $\rho_1\in(\rho-1,\rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (4). Тоді для цілої функції (1)*

$$\left|\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}-\Omega(re^{i\varphi})\right|\sin\frac{\varphi}{2}=o(r^{\rho_1-1}),$$
$$r\to+\infty,\quad \varphi\in(0,2\pi), \qquad (6)$$

де функція $\Omega(re^{i\varphi})$ визначена формулою (3).

Доведення теореми 1. Нехай $z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in(0,2\pi)$. Оскільки ([2, с. 64], [3, с. 28])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}=$$
$$=z^p\left\{pz\int\limits_0^{+\infty}\frac{n(t)dt}{t^{p+1}(z-t)^2}-(p+1)\int\limits_0^{+\infty}\frac{n(t)dt}{t^p(z-t)^2}\right\},$$

то

$$P(re^{i\varphi}):=\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}-$$

$$-pr^{p+1}e^{i(p+1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta t^\rho dt}{t^{p+1}(re^{i\varphi}-t)^2}+$$
$$+(p+1)r^pe^{ip\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta t^\rho dt}{t^p(re^{i\varphi}-t)^2}=$$
$$=z^p\left\{pz\int_0^{+\infty}\frac{n(t)-\Delta t^\rho}{t^{p+1}(z-t)^2}\,dt-\right.$$
$$\left.-(p+1)\int_0^{+\infty}\frac{n(t)-\Delta t^\rho}{t^p(z-t)^2}\,dt\right\}. \quad (7)$$

Враховуючи (4), для $N>N(\varepsilon)$ отримуємо

$$|P(re^{i\varphi})|\leqslant pr^{p+1}\int_0^{+\infty}\frac{|n(t)-\Delta t^\rho|}{t^{p+1}|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt+$$
$$+(p+1)r^p\int_0^{+\infty}\frac{|n(t)-\Delta t^\rho|}{t^p|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt<$$
$$<pr^{p+1}\int_0^{N}\frac{|n(t)-\Delta t^\rho|}{t^{p+1}|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt+$$
$$+\varepsilon pr^{p+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\rho_1-p-1}}{|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt+$$
$$+(p+1)r^p\int_0^{N}\frac{|n(t)-\Delta t^\rho|}{t^p|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt+$$
$$+\varepsilon(p+1)r^p\int_0^{+\infty}\frac{t^{\rho_1-p}}{|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt:=$$
$$=I_1(r,\varphi)+I_2(r,\varphi)+I_3(r,\varphi)+I_4(r,\varphi). \quad (8)$$

Тоді

$$I_1(r,\varphi)+I_3(r,\varphi)=O(r^{p-1})=o(r^{\rho_1-1}),$$
$$r\to+\infty,\quad \varphi\in[0,2\pi]. \quad (9)$$

Позаяк (див. [13, с. 85])

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\,dx}{x^2+2x\cos\gamma+1}=\frac{\pi\sin(\alpha\gamma)}{\sin\gamma\sin(\alpha\pi)},$$
$$0<|\gamma|<\pi,\quad -1<\alpha<1,$$

то (заміна $t=ur$)

$$I_2(r,\varphi)+I_4(r,\varphi)=\varepsilon pr^{\rho_1-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p-1}}{|e^{i\varphi}-u|^2}\,du+$$
$$+\varepsilon(p+1)r^{\rho_1-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p}}{|e^{i\varphi}-u|^2}\,du=$$
$$=\varepsilon pr^{\rho_1-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p-1}}{u^2-2u\cos\varphi+1}\,du+$$
$$+\varepsilon(p+1)r^{\rho_1-1}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p}}{u^2-2u\cos\varphi+1}\,du<$$
$$<\frac{\varepsilon c(\rho_1)r^{\rho_1-1}}{\sin(\varphi/2)}, \quad (10)$$

де $c(\rho_1)$ — стала, яка залежить від ρ_1. До того ж, подібно як в ([4, с. 94])

$$-\Delta pr^{p+1}e^{i(p+1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{t^\rho dt}{t^{p+1}(re^{i\varphi}-t)^2}+$$
$$+\Delta(p+1)r^pe^{ip\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{t^\rho dt}{t^p(re^{i\varphi}-t)^2}=$$
$$=-\Delta pr^{\rho-1}e^{i(p+1)\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho-p-1}du}{(e^{i\varphi}-u)^2}+$$
$$+\Delta(p+1)r^{\rho-1}e^{ip\varphi}\int_0^{+\infty}\frac{u^{\rho-p}du}{(e^{i\varphi}-u)^2}=$$
$$=-\frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\rho\pi}e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1}.$$

Звідси і з (7)–(10) випливає (5). Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in(0,2\pi)$ і $p=\rho$. Оскільки ([2, с. 72], [3, с. 30])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}=z^{\rho-1}\sum_{\lambda_n\leqslant r}\lambda_n^{-\rho}-\frac{n(r)}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1}-$$
$$-z^{\rho-1}\int_0^r n(t)\frac{\rho t-(\rho-1)z}{t^\rho(z-t)^2}\,dt-$$
$$-z^\rho\int_r^{+\infty}n(t)\frac{(\rho+1)t-\rho z}{t^{\rho+1}(z-t)^2}\,dt,$$

то, враховуючи (4), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\left|\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})}-r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}\sum_{\lambda_n\leqslant r}\lambda_n^{-\rho}+\right.$$
$$+\Delta r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}+$$
$$+\Delta r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}\int_0^r\frac{\rho t-(\rho-1)re^{i\varphi}}{(re^{i\varphi}-t)^2}\,dt+$$
$$\left.+\Delta r^\rho e^{i\rho\varphi}\int_r^{+\infty}\frac{(\rho+1)t-\rho re^{i\varphi}}{t(re^{i\varphi}-t)^2}\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|n(r)-\Delta r^\rho|}{r}+$$
$$+r^{\rho-1}\int_0^r|n(t)-\Delta t^\rho|\frac{\rho t+(\rho-1)r}{t^\rho|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt+$$
$$+r^\rho\int_r^{+\infty}|n(t)-\Delta t^\rho|\frac{(\rho+1)t+\rho r}{t^{\rho+1}|re^{i\varphi}-t|^2}\,dt<$$
$$<\varepsilon r^{\rho_1-1}+\varepsilon r^{\rho_1-1}\int_0^1\frac{u^{\rho_1-\rho}(\rho u+(\rho-1))}{u^2-2u\cos\varphi+1}\,du+$$
$$+\varepsilon r^{\rho_1-1}\int_1^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-\rho-1}((\rho+1)u+\rho)}{u^2-2u\cos\varphi+1}\,du<$$
$$<\frac{\varepsilon c(\rho)r^{\rho_1-1}}{\sin(\varphi/2)}. \quad (11)$$

Позаяк ([2, с. 73])

$$\Delta r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}\int_0^r\frac{\rho t-(\rho-1)re^{i\varphi}}{(re^{i\varphi}-t)^2}\,dt+$$
$$+\Delta r^\rho e^{i\rho\varphi}\int_r^{+\infty}\frac{(\rho+1)t-\rho re^{i\varphi}}{t(re^{i\varphi}-t)^2}\,dt+$$

$$+\Delta r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi} = -\Delta\rho i(\varphi-\pi)e^{i(\rho-1)\varphi}r^{\rho-1},$$

то з (11) отримуємо (6). Нехай тепер $p=\rho-1$. Тоді ([2, с. 76])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} = -z^{\rho-1}\sum_{\lambda_n>r}\lambda_n^{-\rho} - \frac{n(r)}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1} -$$

$$-z^{\rho-1}\int_0^r n(t)\frac{\rho t-(\rho-1)z}{t^\rho(z-t)^2}\,dt-$$

$$-z^\rho\int_r^{+\infty} n(t)\frac{(\rho+1)t-\rho z}{t^{\rho+1}(z-t)^2}\,dt.$$

Оскільки в даному випадку $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-\rho}<+\infty$ і ([9]) $n(t)=o(t^{\rho_1})$ $(t\to+\infty)$, то при $r\to+\infty$

$$-z^{\rho-1}\sum_{\lambda_n>r}\lambda_n^{-\rho} = z^{\rho-1}\frac{n(r)}{r^\rho}-$$

$$-\rho z^{\rho-1}\int_r^{+\infty} o(t^{\rho_1-\rho-1})\,dt = o(r^{\rho_1-1}) = \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin(\varphi/2)}.$$

Тому, як і вище, виконується (6). Теорему 2 доведено.

Приклад. Нехай $L(z)=\cos\sqrt{z}$. Функція L є цілою функцією порядку $\rho=1/2$ з нулями $\lambda_n=(\pi n+\pi/2)^2$, $n\in\mathbb{Z}$. Згідно з теоремою Адамара

$$\cos\sqrt{z} = \prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z}{((2n-1)\pi/2)^2}\right).$$

Крім цього, $n(t)=\frac{\sqrt{t}}{\pi}+O(1)$, $t\to+\infty$, і тому умова (4) виконується з будь-яким $\rho_1\in(0,1/2)$. Оскільки $\frac{L'(z)}{L(z)}=-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$,

$$\frac{|i-\operatorname{tg}\sqrt{z}|}{2\sqrt{r}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{1+2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\cos(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2})+e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}}},$$

$z=re^{i\varphi}$, $\varphi\in(0,2\pi)$ і $(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}-1)^2\leqslant 1+2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\cos(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2})+e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\leqslant(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}+1)^2$, то

$$0<\frac{r^{\rho_1-1}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}+1}<\left|\frac{L'(z)}{L(z)}+\frac{i}{2\sqrt{z}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{r^{-1/2}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}-1}<\frac{r^{\rho_1-1}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

що в деякій мірі свідчить про точність теореми 1.

Бібліоґрафія

[1] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.

[2] Гольдберг А.А., Коренков Н.Е. Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. — 1980. – **21**, № 3. — С. 63–79.

[3] Гольдберг А.А., Коренков Н.Е. Об асимптотике логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Укр. мат. журн. — 1978. — **30**, № 1. — С. 25–32.

[4] Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* — М.: Наука, 1970. — 591 с.

[5] Заболоцький М.В. Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 1. — С. 32–40.

[6] Гірник М.О. Асимптотика логарифмічної похідної канонічного добутку Джрбашяна // Доп. НАН України. — 2004. — № 1. — С. 7–9.

[7] Хаць Р.В. Цілі функції покращеного регулярного зростання: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Дрогобич. — 2006. — 125 с.

[8] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Матем. студії. — 2004. — **21**, № 2. — С. 140–150.

[9] Хаць Р.В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку // Матем. студії. — 2004. – **22**, № 1. — С. 105–110.

[10] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one // Mat. Stud. — 2003. — **19**, № 1. — P. 97–105.

[11] Хаць Р.В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені // Матем. студії. — 2010. — **33**, № 2. — С. 215–219.

[12] Хаць Р.В. Асимптотика логарифмічної похідної та логарифму канонічного добутку нульового роду // Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики. — 2009. — № 1. — С. 54–56.

[13] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* — М.: Физматлит, 2004. – 312 с.