УДК 517.5

Асимптотика спеціальної цілої функції

Хаць Р. В.

khats@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Отримано деякі асимптотичні оцінки для спеціальної цілої функції за регулярного зростання послідовності її нулів.

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{a;b} = [a;b] \cap \mathbb{N}_0$, $(\lambda_n : n \in \mathbb{N})$ — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \longrightarrow +\infty$ при $n \to +\infty$, $n(t) := \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$, $N(r) := \sum_{\lambda_n \leqslant r} \log \frac{r}{\lambda_n} = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt$, $r > 0$, і

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Далі вважатимемо функцію $\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$, $f(0) = 1$, визначеною за формулою

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$$

в комплексній площині з радіальними розрізами від точок $\lambda_1 e^{\frac{2\pi s i}{m}}$, $s \in \overline{0; m-1}$ до ∞.

Цілі функції вигляду (1) відіграють важливу роль в теорії рядів Діріхле, при дослідженні базисів із систем експонент і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач [1–8]. В роботі [1, с. 46–49] (див. також [2, с. 69–71]) досліджено асимптотичні властивості таких спеціальних цілих функцій і, зокрема, встановлено наступне твердження.

Теорема A. *Нехай $\Delta \in (0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$, $m > \rho$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{n(t)}{t^\rho} = \Delta.$$

Тоді для цілої функції (1) виконується

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} = \frac{\pi\Delta}{\sin\frac{\pi\rho}{m}} \cos\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)$$

для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta, \frac{2\pi}{m} - \delta]$. Крім цього, якщо послідовність (λ_n) задовольняє додаткову умову

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > d\lambda_n^{1-\rho}, \quad n > n_0, \quad d > 0,$$

то

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log\left|\frac{1}{f'(\lambda_n)}\right|}{\lambda_n^\rho} = -\pi\Delta \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m}.$$

За інших додаткових умов на нулі функції (1) можна одержати точніші асимптотичні оцінки (див. роботи [3–12]).

У багатьох застосуваннях до різного роду задач комплексного аналізу виникає необхідність в отриманні аналогу теореми A для тонших асимптотик цілої функції (1). Метою статті є встановлення такого аналогу.

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, $m > \rho$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову*

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1}), \quad t \to +\infty. \tag{2}$$

Тоді для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in \left(\frac{2\pi s}{m}, \frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$, $s \in \overline{0; m-1}$, при $r \to +\infty$ виконується

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin\frac{\pi\rho}{m}} e^{i\rho(\varphi - \pi/m)} + \frac{o(r^{\rho_1})}{|\sin\frac{m\varphi}{2}|}. \tag{3}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, де $\varphi \in \left(\frac{2\pi s}{m}, \frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$, $s \in \overline{0; m-1}$. Оскільки, за умови (2),

$$\log f(re^{i\varphi}) = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{z^m}{t^m}\right) dn(t) =$$

$$= -mz^m \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t(t^m - z^m)}\, dt,$$

то

$$S(re^{i\varphi}) :=$$

$$= \log f(re^{i\varphi}) + mr^m e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho-1} dt}{t^m - r^m e^{im\varphi}} =$$

$$= -mz^m \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho}{t(t^m - z^m)}\, dt. \tag{4}$$

Враховуючи (2), для $N > N(\varepsilon)$ отримуємо

$$|S(re^{i\varphi})| \leqslant mr^m \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{t|t^m - r^m e^{im\varphi}|}\, dt <$$

$$< mr^m \int_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{t|t^m - r^m e^{im\varphi}|}\, dt + J_1 =$$

$$= J_1 + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \tag{5}$$

де

$$J_1 := \varepsilon m r^m \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1 - 1}}{|t^m - r^m e^{im\varphi}|}\, dt.$$

Нехай $t = ur$. Позаяк $u^{2m} - 2u^m \cos m\varphi + 1 \geqslant (u^{2m} + 1)\min\{1 - \cos m\varphi, 1\}$, $\varphi \in \left(\frac{2\pi s}{m}, \frac{2\pi(s+1)}{m}\right)$, $s \in \overline{0; m-1}$, то

$$J_1 = \varepsilon m r^{\rho_1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - 1}}{|u^m - e^{im\varphi}|}\, du \leqslant$$

$$= \varepsilon m r^{\rho_1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - 1}}{\sqrt{u^{2m} - 2u^m \cos m\varphi + 1}}\, du \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon m r^{\rho_1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - 1}}{\sqrt{(u^{2m} + 1)\min\{1 - \cos m\varphi, 1\}}}\, du <$$

$$< \frac{\varepsilon \mathrm{c}(m, \rho_1) r^{\rho_1}}{|\sin(m\varphi/2)|}, \qquad (6)$$

де $\mathrm{c}(m, \rho_1)$ — стала, яка залежить від m і ρ_1. До того ж, згідно з теорією лишків (див. [13, с. 84]),

$$m r^m e^{im\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho - 1}}{t^m - r^m e^{im\varphi}}\, dt =$$

$$= m \Delta r^\rho e^{im\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho - 1}}{u^m - e^{im\varphi}}\, du =$$

$$= \Delta r^\rho e^{im\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{\rho}{m} - 1}}{x - e^{im\varphi}}\, dx =$$

$$= -\frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin(\pi\rho/m)} e^{i\rho(\varphi - \pi/m)}.$$

Звідси і з (4)–(6) випливає (3). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $\Delta \in (0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, $m > \rho$, послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (2) і*

$$\exists n_0 \;\; \forall n \geqslant n_0 : \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \leqslant \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\rho}. \qquad (7)$$

Тоді при $n \to +\infty$

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| \geqslant \pi \Delta \lambda_n^\rho \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho}{m} + o(\lambda_n^{\rho_1}).$$

Для доведення теореми 2 потрібна наступна лема.

Лема 1. *Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$ і $\rho_1 \in (0, \rho)$. Тоді умова*

$$n = \Delta \lambda_n^\rho + o(\lambda_n^{\rho_1}), \quad n \to +\infty, \qquad (8)$$

є еквівалентною до умови (2).

Доведення. Справді, нехай $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$ і виконується (8). Тоді $n(t) = n = \Delta\lambda_n^\rho + o(\lambda_n^{\rho_1}) \leqslant \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$, $t \to +\infty$. З іншого боку, $n(t) = n + 1 - 1 = \Delta\lambda_{n+1}^\rho + o(\lambda_{n+1}^{\rho_1}) - 1 \geqslant \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$, $t \to +\infty$. Тому виконується умова (2). Навпаки, якщо виконується (2), то $n \leqslant n(\lambda_n) = \Delta\lambda_n^\rho + o(\lambda_n^{\rho_1})$, $n \to +\infty$. З іншого боку,

$$n \geqslant n(\lambda_n - \lambda_n^{\rho_1 - \rho}) =$$

$$= \Delta(\lambda_n - \lambda_n^{\rho_1 - \rho})^\rho + o((\lambda_n - \lambda_n^{\rho_1 - \rho})^{\rho_1}) =$$

$$= \Delta\lambda_n^\rho (1 - \lambda_n^{\rho_1 - \rho - 1})^\rho + o(\lambda_n^{\rho_1}(1 - \lambda_n^{\rho_1 - \rho - 1})^{\rho_1}) =$$

$$= \Delta\lambda_n^\rho (1 - \rho\lambda_n^{\rho_1 - \rho - 1} + O(\lambda_n^{2(\rho_1 - \rho - 1)})) +$$

$$+ o(\lambda_n^{\rho_1}(1 - \rho_1\lambda_n^{\rho_1 - \rho - 1} + O(\lambda_n^{2(\rho_1 - \rho - 1)}))) =$$

$$= \Delta\lambda_n^\rho - \Delta\rho\lambda_n^{\rho_1 - 1} + O(\lambda_n^{2\rho_1 - \rho - 2}) + o(\lambda_n^{\rho_1}) =$$

$$= \Delta\lambda_n^\rho + o(\lambda_n^{\rho_1}), \quad n \to +\infty.$$

Отож, виконується (8).

Доведення теореми 2. Оскільки [2, с. 108]

$$f'(\lambda_n) = -\frac{m}{\lambda_n} \prod_{\substack{k=1,\\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right),$$

то, використовуючи умови (2), (7) та лему 1, подібно як в [8, с. 70] і [14], отримуємо

$$\log|\lambda_n f'(\lambda_n)| = \log m + \sum_{\substack{k=1,\\ k \neq n}}^{\infty} \log\left|1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right| =$$

$$= \log m + \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(\frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m} - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right) =$$

$$= \log m + m\sum_{k=1}^{n-1} \log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 - \frac{\lambda_k^m}{\lambda_n^m}\right) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m}\right) = \log m + m\sum_{k=1}^{n-1} \log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^{mj} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{mj} =$$

$$= \log m + m\sum_{k=1}^{n-1} \log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^{mj} - \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)^{mj} \geqslant$$

$$\geqslant \log m + m\sum_{k=1}^{n-1} \log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}} - \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{mj}{\rho}} \geqslant$$

$$\geqslant \log m + m\sum_{k=1}^{n-1} \log\frac{\lambda_n}{\lambda_k} -$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\int_0^n\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}}d\xi-\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\int_n^{\infty}\left(\frac{n}{\xi}\right)^{\frac{mj}{\rho}}d\xi=$$

$$=\log m+mN(\lambda_n)-\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\left(\frac{n}{\frac{mj}{\rho}+1}-\frac{n}{1-\frac{mj}{\rho}}\right)=$$

$$=\log m+mN(\lambda_n)-2mn\rho\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\rho^2-m^2j^2}=$$

$$=\log m+mN(\lambda_n)+n\left(\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m}-\frac{m}{\rho}\right)=$$

$$=O(1)+m\left(\frac{\Delta}{\rho}\lambda_n^{\rho}+o(\lambda_n^{\rho_1})\right)+$$

$$+(\Delta\lambda_n^{\rho}+o(\lambda_n^{\rho_1}))\left(\pi\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m}-\frac{m}{\rho}\right)=$$

$$=\pi\Delta\lambda_n^{\rho}\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho}{m}+o(\lambda_n^{\rho_1}),\quad n\to+\infty.$$

Таким чином, теорему 2 доведено.

Бібліоґрафія

[1] Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* — М.: Наука, 1976. — 536 с.

[2] Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* — М.: Наука, 1983. – 176 с.

[3] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с.

[4] Братищев А.В. К одной задаче А.Ф. Леонтьева // Докл. АН СССР. — 1983. — **270**, № 2. — С. 265–267.

[5] Братищев А.В. Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — **48**, № 3. — С. 451–475.

[6] Шерстюков В.Б. О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа // Матем. заметки. — 2006. — **80**, № 1. — С. 119–130.

[7] Шерстюков В.Б. О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями // Матем. заметки. — 2007. — **82**, № 4. — С. 621–629.

[8] Винницкий Б.В. *Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных систем экспонент.* — Дрогобыч, 1991. — 195 с. / Деп. в Укр. НИИНТИ, № 277–Ук91.

[9] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one // Mat. Stud. — 2003. — **19**, № 1. — P. 97–105.

[10] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Матем. студії. — 2004. — **21**, № 2. — С. 140–150.

[11] Хаць Р.В. Асимптотика логарифмічної похідної та логарифму канонічного добутку нульового роду // Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики. — 2009. — № 1. — С. 54–56.

[12] Хаць Р.В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені // Матем. студії. — 2010. — **33**, № 2. — С. 215–219.

[13] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного.* — М.: Физматлит, 2004. — 312 с.

[14] M. Ricardo San Juan. Résolution d'un systéme infini d'équations linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1953. – **236**. – P. 1841–1843.