УДК 517.444

Про аналоги теореми Пелі-Вінера для перетворення Ханкеля у вагових просторах L_2

Винницький Б. В., Шавала О. В.

Vynnytskyi@ukr.net, Shavala@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Знайдено можливий підхід до знаходження аналогу теореми Пелі-Вінера для перетворення Ханкеля у вагових просторах L_2 у випадку функцій Бесселя першого роду з довільним дійсним індексом

Множину всіх цілих функцій формального експоненційного типу $\sigma \in (0;+\infty)$, звуження яких на $\mathbb{R}$ належить до простору $L_2(\mathbb{R})$, позначимо через PW^2_σ, а клас парних функцій з PW^2_σ – через $PW^2_{\sigma,+}$. Згідно з теоремою Пелі-Вінера [1–3] клас PW^2_σ складається з функцій G, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} g(t)dt, \qquad g \in L_2(-\sigma;\sigma),$$

а клас $PW^2_{\sigma,+}$ – з функцій G, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int\limits_{0}^{\sigma} \cos(tz) g(t)dt, \qquad g \in L_2(0;\sigma).$$

Нехай J_m – функція Бесселя першого роду індексу (порядку) $m \in \mathbb{R}$. Аналоги теореми Пелі-Вінера для перетворення Ханкеля

$$f(\lambda) = \int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{\lambda t} J_m(\lambda t)\gamma(t)dt$$

і $m \geqslant -1/2$ встановлені в [4-7], для $\mathrm{Re}m \geqslant 1/2$ в [8]. В [9] розглянуто випадок $m = -3/2$. Поширення згаданих результатів на інші m стикається з певними труднощами. Тут ми вкажемо можливий підхід до знаходження опису відповідного класу функцій G для довільного m, якщо відомий розв'язок для деякого m. Проте реалізувати цей метод для конкретного m (наприклад для $m = -5/2$) не вдається із-за громіздкості відповідних перетворень. Нехай, далі, $L_2((0;1);t^p dt)$ – гільбіртів простір вимірних функцій $f:(0;1)\to\mathbb{C}$, для яких $||f||^2 := \int\limits_0^1 t^p|f(t)|^2dt < +\infty$, зі скалярним добутком $\langle f_1; f_2\rangle = \int\limits_0^1 t^p f_1(t)\overline{f_2(t)}dt$. Функція q належить до $L_2((0;1);t^p dt)$ тоді і тільки тоді, коли $g(t) = q(t)t^{p/2}$ належить до простору $L_2(0;1)$. Функція $f(t) = \sqrt{t}J_m(t)$ належить до $L_2((0;1);t^p dt)$, якщо $p > -2m-2$ і, зокрема, якщо $p = -2m-1$. У працях [4–5] доведено наступне твердження.

Теорема H. *Нехай $m \geqslant -1/2$. Функція f подається у вигляді*

$$f(\lambda) = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{\lambda t} J_m(\lambda t)\gamma(t)dt$$

з деякою функцією $\gamma \in L_2(0;1)$ тоді і тільки тоді, коли $f \in L_2(0;+\infty)$, $f(\lambda) = \lambda^{m+1/2}G(\lambda)$, де G – парна ціла функція формального експоненціального типу $\sigma \leqslant 1$. При цьому, якщо $f \neq 0$, то G – ціла трансцендентна функція.

Ми доведемо наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай $m \in \mathbb{R}$ – деяке число і функція $G_m(z)$ подається у вигляді*

$$G_m(z) = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz} J_m(tz) t^p \eta_m(t)dt \tag{1}$$

де $\eta_m \in L_2((0;1);t^p dt)$, $p > -2m-2$. Тоді рівняння

$$P'_m(z) + \frac{2m+1}{2z}P_m(z) = G_m(z) \tag{2}$$

має розв'язок $P_m(z)$, який подається у вигляді

$$P_m(z) = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz} J_{m+1}(tz) t^{p-1}\eta_m(t)dt. \tag{3}$$

Доведення. Справді, нехай $q_m(t) = t^p\eta_m(t)$. Оскільки $J_m(z) = \frac{2(m+1)}{z}J_{m+1}(z) - J_{m+2}(z)$, то

$$G_m(z) = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz} J_m(tz) q_m(t)dt =$$

$$\int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz}\left(\frac{2(m+1)J_{m+1}(tz)}{tz} - J_{m+2}(tz)\right) q_m(t)dt$$

$$= \frac{2(m+1)}{z}\int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz} J_{m+1}(tz) t^{-1} q_m(t)dt -$$

$$- \int\limits_{0}^{1} \sqrt{tz} J_{m+2}(tz) q_m(t)dt$$

$$= 2(m+1)z^{m+1/2}\int\limits_{0}^{1} \frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}} t^{m+1/2} q_m(t)dt -$$

$$-\int_0^1 \sqrt{tz}J_{m+2}(tz)q_m(t)dt,$$

$$G_m(z)z^{-m-1/2} = 2(m+1)\int_0^1 \frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}t^{m+1/2}q_m(t)dt$$

$$-z^{-m}\int_0^1 J_{m+2}(tz)t^{1/2}q_m(t)dt.$$

Нехай

$$Q_m(z) := z^{-m-1}\int_0^1 J_{m+1}(tz)t^{-1/2}q_m(t)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}t^{m+1/2}q_m(t)dt.$$

Оскільки

$$\left(\frac{J_{m+1}(z)}{z^{m+1}}\right)' = -\frac{J_{m+2}(z)}{z^{m+1}},$$

$$\left(\frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}\right)\Bigg|_z' = -\frac{J_{m+2}(tz)}{(tz)^{m+1}}t,$$

то

$$Q'_m(z) = \int_0^1 \left(\frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}\right)\Bigg|_z' t^{m+1/2}q_m(t)dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{J_{m+2}(tz)}{(tz)^{m+1}}t^{m+3/2}q_m(t)dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{J_{m+2}(tz)}{z^{m+1}}t^{1/2}q_m(t)dt,$$

тобто

$$G_m(z)z^{-m-1/2} = 2(m+1)Q_m(z) + zQ'_m(z).$$

Нехай $P_m(z) = z^{m+3/2}Q_m(z)$. Тоді $P_m(z) = \int_0^1 \sqrt{tz}J_{m+1}(tz)t^{-1}q_m(t)dt$, $Q_m(z) = z^{-m-3/2}P_m(z)$, $G_m(z)z^{-1/2} = 2(m+1)z^{-3/2}P_m(z) - (m+3/2)z^{-3/2}P_m(z) + z^{-1/2}P'_m(z)$, тобто функція P_m є розв'язком рівняння (2). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $m \in \mathbb{R}$ – деяке число. Якщо диференціальне рівняння (2) має розв'язок $P_m(z)$, який подається у вигляді (3), де $\eta_m \in L_2((0;1);t^p dt)$, $p > -2m-2$, то функція $G_m(z)$ подається у вигляді (1).*

Доведення. Справді, нехай $q_m(t) = t^p\eta_m(t)$ і $Q_m(z) = z^{-m-3/2}P_m(z)$. Тоді

$$Q_m(z) = z^{-m-1}\int_0^1 J_{m+1}(tz)t^{-1/2}q_m(t)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}t^{m+1/2}q_m(t)dt.$$

Оскільки

$$\left(\frac{J_{m+1}(z)}{z^{m+1}}\right)' = -\frac{J_{m+2}(z)}{z^{m+1}},$$

$$\left(\frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}\right)\Bigg|_z' = -\frac{J_{m+2}(tz)}{(tz)^{m+1}}t,$$

то

$$Q'_m(z) = \int_0^1 \left(\frac{J_{m+1}(tz)}{(tz)^{m+1}}\right)\Bigg|_z' t^{m+1/2}q_m(t)dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{J_{m+2}(tz)}{z^{m+1}}t^{1/2}q_m(t)dt.$$

Крім цього, $P_m(z) = z^{m+3/2}Q_m(z)$, $P'_m(z) = (m+3/2)z^{m+1/2}Q_m(z) + z^{m+3/2}Q'_m(z)$ і

$$G_m(z) = (m+3/2)z^{m+1/2}Q_m(z) + z^{m+3/2}Q'_m(z) +$$

$$+\frac{m+1/2}{z}z^{m+3/2}Q_m(z)$$

$$= 2(m+1)z^{-1/2}\int_0^1 J_{m+1}(tz)t^{-1/2}q_m(t)dt -$$

$$-z^{1/2}\int_0^1 J_{m+2}(tz)t^{1/2}q_m(t)dt$$

$$= 2(m+1)z^{-1}\int_0^1 \sqrt{tz}J_{m+1}(tz)t^{-1}q_m(t)dt -$$

$$-\int_0^1 \sqrt{tz}J_{m+2}(tz)q_m(t)dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{tz}\left(\frac{2(m+1)J_{m+1}(tz)}{tz} - J_{m+2}(tz)\right)q_m(t)dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{tz}J_m(tz)q_m(t)dt.$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. Нехай $m \in \mathbb{R}$ – деяке число. Функція $G_m(z)$ подається у вигляді (1) з деякою функцією $\eta_m \in L_2((0;1);t^p dt)$, $p > -2m-2$, тоді і тільки тоді, коли рівняння (2) має розв'язок $P_m(z)$, який подається у вигляді (3) з деякою функцією $\eta_{m+1} \in L_2((0;1);t^{p+4}dt)$. При цьому, $\eta_{m+1}(t) = t^{-2}\eta_m(t)$.

Бібліографія

[1] Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* — М.: Наука, 1964. — 268 с.

[2] Levin B. *Lectures on entire functions.* — Providence, Rhode Island: AMS, 1996. – 248 p.

[3] Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 504 с.

[4] Griffith J.L. Hankel transforms of functions zero outside a finite interval // J. Proc. Roy. Soc. New South Wales — 1955. — **89**. — P. 109–115.

[5] Ахиезер Н.И. К теории спаренных интегральных уравнений // Ученые записки. Харьковский государственный университет — 1957. — **80**. — С. 5–31.

[6] Unni K.R. Hankel transforms and entire functions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1965. — **71**, № 3, Part 1. — P. 511–513.

[7] Weiss B. Measures that vanish on half spaces // Proc. Amer. Math. Soc. — 1967. — **18**, № 1. — P. 123–126.

[8] Tuan V. On the Range of the Hankel and Extended Hankel Transforms // J. Math. Anal. and Appl. — 1997. — **209**, № 2. — P. 460–478.

[9] Vynnytskyi B., Dilnyi V. On some analogues of Paley–Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator // Міжнар. конфер. з комплексного аналізу пам'яті А.А. Гольдберга: Тези доповідей. Львів. — 2010. — С. 63–64.