УДК 517.5

Про аналог результату Рубела і Тейлора для голоморфних в одиничному крузі функцій

Шепарович І. Б.

isheparovych@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Інститут фізики, математики та інформатики, кафедра математичного аналізу, вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, 82100

Методом коефіцієнтів Фур'є знайдено умови, за яких певна послідовність комплексних чисел (λ_ν) є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функції.

Нехай $\eta : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ – неспадна функція; f – ціла функція з нескінченною послідовністю нулів. У 1968 році Л.Рубел і Б.Тейлор [1] отримали опис послідовностей нулів для класу цілих функцій f скінченного η - типу. Зокрема, вони довели таке твердження.

Для того, щоб (λ_ν) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел з єдиною точкою скупчення на ∞, була послідовністю нулів цілої функції f, що задовольняє умову

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in \mathbb{C}) : |f(z)| \leqslant \exp(A\eta(B|z|)),$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall r > 0) : N(r) \leqslant A\eta(Br),$$

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall r_1 > 0)(\forall r_2 > r_1)(\forall k \in \mathbb{N}) :$$

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leqslant r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leqslant \frac{A\eta(Br_1)}{r_1^k} + \frac{A\eta(Br_2)}{r_2^k},$$

де

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt; \quad n(t) = \sum_{|\lambda_\nu| \leqslant t} 1.$$

У 1970 році цим же методом В.Бек [2] отримав аналог результату Л.Рубела і Б.Тейлора [1] для класу голоморфних в одиничному крузі $U(0;1) = \{z : |z| < 1\}$ функцій f скінченного η - типу. Але цей результат не є критеріальним, якщо його розглядати у формі з [1]. Так, з тверджень, викладених в [2] випливає, що, якщо (λ_ν) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = 1$, є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі $U(0;1)$ функції f, що задовольняє умову

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in U(0;1)) :$$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(A\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right), \tag{1}$$

то:

$$(\exists A_1)(\exists B_1)(\forall r \in (0;1)) : N(r) \leqslant A_1\eta\left(\frac{B_1}{1-r}\right) \tag{2}$$

і для деяких сталих $A_2,\ B_2$ та всіх $k \in \mathrm{N},\ r_1 \in (0;1),\ r_2 \in (r_1;1)$

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |\lambda_\nu| \leqslant r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_2}{(1-r_1)^2 r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) + \frac{A_2}{(1-r_2)^2 r_2^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_2}\right).$$

Якщо ж виконуються умови (2) і для деяких сталих $A_2,\ B_2$ та всіх $k \in \mathrm{N},\ r_1 \in (0;1),\ r_2 \in (r_1;1)$

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{r_1 < |\lambda_n| \leqslant r_2} \frac{1}{\lambda_\nu^k} \right| \leqslant \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) + \frac{A_2}{r_2^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_2}\right), \tag{3}$$

то f задовольняє умову

$$(\exists A > 0)(\exists B > 0)(\forall z \in U(0;R)) :$$

$$|f(z)| \leqslant \exp\left(\frac{A}{(1-|z|)^3}\eta\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right). \tag{4}$$

Метою статті є покращити результат В.Бека і наблизити до критеріального.

Нехай f – функція, голоморфна в крузі $U(0;1)$, яка має нескінченну множину нулів, $f(0) = 1$, (λ_ν) - послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що $\lim\limits_{\nu\to\infty} |\lambda_\nu| = 1$,

$$c_k(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| e^{-ik\varphi} d\varphi$$

– коефіцієнти Фур'є функції f. Якщо (λ_ν) є послідовністю нулів функції f, то [1]

$$c_k(r; f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^k + \frac{1}{2k} \sum_{|\lambda_\nu| \leqslant r} \left(\left(\frac{r}{\lambda_\nu}\right)^k - \left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k \right),$$

$$c_{-k}(r; f) = c_k(r; f), \quad c_0(r; f) = N(r),$$

$$N(r) = \sum_{|\lambda_\nu| \leqslant r} \ln\frac{r}{|\lambda_\nu|},$$

де α_k знаходиться з розвинення

$$\log f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.$$

Через A_i і $B_i (i \in \mathbb{N})$ позначаємо додатні сталі. Доведемо такі теореми.

Теорема 1. *Якщо (λ_ν) є послідовністю нулів голоморфної в одиничному крузі функції з класу (1), то виконується (2) і для деяких сталих* A_2, B_2 та всіх $k \in \mathrm{N}$, $r_1 \in (0;1)$, $r_2 \in (r_1;1)$

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leqslant \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right)+$$
$$+\frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k(1-r_2)}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_2}\right). \qquad (3')$$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови (2) і $(3')$, то існує голоморфна в одиничному крузі $U(0;1)$ функція, яка задовольняє умову*

$$(\exists A'>0)(\exists B'>0)(\forall z \in U(0;1)):$$
$$|f(z)| \leqslant \exp\left(\frac{A'}{(1-|z|)^2}\eta\left(\frac{B'}{1-|z|}\right)\right). \qquad (1')$$

Доведення цих теорем ґрунтується на основі таких лем:

Лема 1. *Якщо виконується (1), то*

$$(\forall r \in [0;1))(\forall k \in \mathbb{Z}): |c_k(r;f)| \leqslant A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Доведення. Справді, згідно з рівністю Ієнсена маємо

$$N(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi,$$

звідки отримуємо (2). До того ж,

$$\log\left|f(re^{i\varphi})\right| = \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| - \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|},$$

$$\left|\log\left|f(re^{i\varphi})\right|\right| = \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| + \log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}.$$

Тому

$$\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \leqslant A\,\eta\left(\frac{B}{1-r}\right),$$

$$|c_k(r;f)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi \leqslant$$
$$\leqslant 2A\eta\left(\frac{B}{1-r}\right).$$

Лему доведено.

Доведення теореми 1. Якщо виконуються умови теореми 1, то

$$\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}=\frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k\right)=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_2}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2}\alpha_k\right)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_2}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_2^k\right)-\left(\frac{1}{r_1^k}\left(\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\left(\frac{r_2^k}{\lambda_\nu^k}-\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r_1}\right)^k\right)+\frac{1}{2}\alpha_k r_1^k\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-\frac{1}{2kr_1^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-\frac{1}{2kr_1^{2k}}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$=\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k+\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{r_2^{2k}}-\frac{1}{r_1^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\overline{\lambda_\nu}^k=$$

$$\frac{1}{r_2^k}c_k(r_2;f)-\frac{1}{r_1^k}c_k(r_1;f)+\frac{1}{2kr_2^{2k}}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\overline{\lambda_\nu}^k-\frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}\frac{\overline{\lambda_\nu}^k}{r_1^k}.$$

Тому

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right|\leqslant\frac{1}{r_2^k}|c_k(r_2;f)|+\frac{1}{r_1^k}|c_k(r_1;f)|+\frac{1}{2kr_2^k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}1+\frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r_1}1\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r_2^k}\left|c_k(r_2;f)\right| + \frac{1}{r_1^k}\left|c_k(r_1;f)\right| + \frac{1}{2kr_2^k}\left(n(r_2)-n(r_1)\right) + \frac{1}{2kr_1^k}\left(1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}}\right)n(r_1).$$

Але

$$\beta := \frac{r_1}{r_2} \geqslant r_1, \quad 1-\frac{r_1^{2k}}{r_2^{2k}} = (1-\beta)(1+\beta+\beta^2+...+\beta^{2k-1}) \leqslant (1-\beta)2k \leqslant (1-r_1)2k,$$

$$N\left(\frac{1+r}{2}\right) \geqslant \int\limits_r^{\frac{1+r}{2}} \frac{n(t)}{t}dt \geqslant n(r)\ln\frac{\frac{1+r}{2}}{r} = n(r)\ln\frac{1+r}{2r} = n(r)\ln\left(1+\frac{1-r}{2r}\right) \geqslant \frac{1-r}{2}n(r).$$

Тому, за лемою 1 отримуємо

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leqslant \frac{A_2}{r_1^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1}\right) + \frac{A_2}{r_2^k}\max\left\{1;\frac{1}{k(1-r_2)}\right\}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_2}\right).$$

Теорема 1 доведена.

Лема 2. *Якщо виконуються (2) і (3), то для деяких сталих* A_2', B_2' та $r_1 \in (0;1)$, $r_2 \in (r_1;1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{1}{(1-r_2)^2}$

$$\left|\frac{1}{2k}\sum_{r_1<|\lambda_\nu|\leqslant r_2}\frac{1}{\lambda_\nu^k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_2'}{kr_1^k(1-r_1)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r_1}\right) + \frac{A_2'}{kr_2^k(1-r_2)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r_2}\right).$$

Доведення. Введемо деякі позначення

$$S(r;k) = \frac{1}{k}\sum_{|\lambda_n|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_n^k}; \quad S'(r;k) = \frac{1}{k}\sum_{|\lambda_n|\leqslant r}\left(\frac{\overline{\lambda_n}}{r}\right)^k;$$

$$S(r_1;r_2;k) = S(r_2;k) - S(r_1;k).$$

Нехай $r_1' = r_1k^{\frac{1}{k}}$, $r_2' = r_2k^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді, якщо $k > \frac{1}{(1-r_2)^2} > \frac{1}{(1-r_1)^2}$, то $r_1' < \frac{3+r_1}{4}$; $r_2' < \frac{3+r_2}{4}$. Це так, бо для $k > \frac{1}{(1-r)^2}$ виконується $\frac{3+r}{4r} > \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{k}}{4(\sqrt{k}-1)} > k^{\frac{1}{k}}$. Тому

$$|S(r_1;r_1';k)| \leqslant \frac{1}{k}\int\limits_{r_1}^{r_1'}\frac{dn(t)}{t^k} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{n(r_1')}{r_1'^k} - \frac{n(r_1)}{r_1^k} + k\int\limits_{r_1}^{r_1'}\frac{n(t)}{t^{k+1}}dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\left(\frac{n(r_1')}{r_1}{}'^k - \frac{n(r_1)}{r_1^k} + kn(r_1')\int\limits_{r_1}^{r_1'}\frac{dt}{t^{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{n(r_1')}{r_1'^k} - \frac{n(r_1)}{r_1^k} - n(r_1')\left(\frac{1}{r_1'^k} - \frac{1}{r_1^k}\right)\right) =$$

$$= \frac{n(r_1')-n(r_1)}{kr_1^k} \leqslant \frac{2}{kr_1^k(1-r_1')}N\left(\frac{1+r_1'}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8A_1}{kr_1^k(1-r_1)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_1}\right).$$

Аналогічно,

$$|S(r_2;r_2';k)| \leqslant \frac{1}{k}\int\limits_{r_2}^{r_2'}\frac{dn(t)}{t^k} =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\frac{n(r_2')}{r_2'^k} - \frac{n(r_2)}{r_2^k} + k\int\limits_{r_2}^{r_2'}\frac{n(t)}{t^{k+1}}dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8A_1}{kr_2^k(1-r_2)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_2}\right).$$

Виходячи звідси та умови (3′), для $k > \frac{1}{(1-r_2)^2}$ отримуємо

$$|S(r_1;r_2;k)| = |S(r_1';r_2';k) + S(r_1;r_1';k) - S(r_2;r_2';k)| \leqslant |S(r_1';r_2';k)| + |S(r_1;r_1';k)| + |S(r_2;r_2';k)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_2}{r_1'^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_1'}\right) + \frac{A_2}{r_2'^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_2'}\right) + \frac{8A_1}{kr_1^k(1-r_1)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_1}\right) + \frac{8A_1}{kr_2^k(1-r_2)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_2}{kr_1^k}\eta\left(\frac{4B_2}{1-r_1}\right) + \frac{A_2}{kr_2^k}\eta\left(\frac{4B_2}{1-r_2}\right) + \frac{8A_1}{kr_1^k(1-r_1)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_1}\right) + \frac{8A_1}{kr_2^k(1-r_2)}\eta\left(\frac{8B_1}{1-r_2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_2'}{kr_1^k(1-r_1)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r_1}\right) + \frac{A_2'}{kr_2^k(1-r_2)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r_2}\right).$$

Лема 2 доведена.

Лема 3. *Якщо послідовність (λ_ν) задовольняє умову (3), то для неї існує послідовність $(c_k(r))$, що для деяких сталих $A_3,\ B_3$ і $k\in\mathbb{Z}\backslash 0$,*

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right),\ |k|>\frac{1}{(1-r)^2},$$
$$|c_k(r)|\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right),\ |k|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}. \tag{5}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що існує $r_0\in(0;1)$ таке, що функція η є сталою на проміжку $(0;r_0)$. Далі, оскільки

$$\forall k\in\mathbb{N}:\lim_{r\to 1-}\frac{\eta\left(\frac{1}{1-r}\right)}{r^k}=+\infty,$$

то для кожного $k\in\mathbb{N}$ існує $r_k\in(0;1)$, що для деякої сталої $B>0$ і для кожного $r\in(r_0;1)$ виконується

$$\frac{\eta\left(\frac{B}{1-r_k}\right)}{r_k^k}\leqslant\frac{2\eta\left(\frac{B}{1-r}\right)}{r^k}. \tag{6}$$

Виберемо $\alpha_k=-S(r_k;k)=-\frac{1}{k}\sum\limits_{|\lambda_\nu|\leqslant r_k}\frac{1}{\lambda_\nu^k}$. Тоді

$$c_k(r)=\frac{r^k}{2}\left(S(r;k)+\alpha_k\right)+\frac{1}{2}S'(r;k)=\frac{r^k}{2k}\sum_{r_k<|\lambda_\nu|\leqslant r}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\frac{1}{2k}\sum_{|\lambda_\nu|\leqslant r}\left(\frac{\overline{\lambda_\nu}}{r}\right)^k,\quad k\in\mathbb{N},$$
$$c_0(r)=N(r), \tag{7}$$
$$c_{-k}(r)=\overline{c_k(r)}.$$

Оцінимо $|c_k(r)|$. Оскільки

$$|S'(r;k)|\leqslant\frac{1}{k}n(r)\leqslant\frac{2}{k(1-r)}N\left(\frac{r+1}{2}\right),$$

то звідси та умов (2), (3), (6) за лемою 2 для $|k|>\frac{1}{(1-r)^2}$ отримуємо

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{r^k}{2}\left|S(r;k)-S(r_k;k)\right|+\frac{1}{2}\left|S'(r;k)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{r^kA_2'}{2kr_k^k(1-r_k)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r_k}\right)+\frac{A_2'}{2k(1-r)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r}\right)+$$
$$+\frac{A_1}{k(1-r)}\eta\left(\frac{2B_1}{1-r}\right)\leqslant\frac{2A_2'}{k(1-r)}\eta\left(\frac{B_2'}{1-r}\right)+$$
$$\frac{A_1}{k(1-r)}\eta\left(\frac{2B_1}{1-r}\right)\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right),$$

звідки випливає перша нервність в (5). Якщо ж $0<|k|\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}$, то з (2), (3), (6) маємо

$$|c_k(r)|\leqslant\frac{r^kA_2}{2r_k^k}\eta\left(\frac{B_2}{1-r_k}\right)+\frac{A_2}{2}\eta\left(\frac{B_2}{1-r}\right)+$$
$$+\frac{A_1}{k(1-r)}\eta\left(\frac{2B_1}{1-r}\right)\leqslant\frac{3}{2}A_2\eta\left(\frac{B_2}{1-r}\right)+$$
$$+\frac{A_1}{k(1-r)}\eta\left(\frac{2B_1}{1-r}\right)\leqslant\frac{A_2}{k(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_2}{1-r}\right)+$$
$$+\frac{A_1}{k(1-r)}\eta\left(\frac{2B_1}{1-r}\right)\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right).$$

Лема 3 доведена.

Лема 4. *Якщо послідовність (λ_ν) задовольняє умову $(3')$, то для неї існує послідовність $(c_k(r))$, така, що для деяких сталих $A_3,\ B_3$ і всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$*

$$|c_k(r)|\leqslant A_3\max\left\{1;\frac{1}{k(1-r)}\right\}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right). \tag{8}$$

Доведення. Це випливає з доведення леми 3 і такого факту

$$|S'(r;k)|\leqslant 2\max\left\{1;\frac{1}{k(1-r)}\right\}N\left(\frac{r+1}{2}\right).$$

Лема 5. *Якщо виконується (5), то існує голоморфна в одиничному крузі функція f, яка задовольняє умову (4).*

Доведення. З (5) та теореми Ріса-Фішера (див. [3], с.27) випливає існування єдиної функції $f\in L_2[-\pi;\pi]$ такої, що $f(0)=1$ і $c_k(r)$ вигляду (7) є її коефіцієнтами Фур'є. В теоремі 5.1 [1, с.84] (див. також [3, с. 28]) побудована така функція f_ρ, голоморфна в крузі $\{z:|z|<\rho\}$, для якої $c_k(r)$ є її коефіцієнтами Фур'є і (λ_ν) є її послідовністю нулів. Будуючи голоморфне продовження функції f_ρ в круг $U(0;1)$, отримуємо функцію f, для якої $c_k(r)$ є коефіцієнтами Фур'є. Тобто для довільного $k\in\mathbb{Z}$

$$c_k(r)=c_k(r;f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|e^{-ik\varphi}d\varphi.$$

Тоді з нерівності Шварца та рівності Парсеваля за лемою 3 отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||d\varphi\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||^2d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_3}{(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(|k|+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

А, оскільки (див., наприклад, [4, с.27]) мають місце співвідношення

$$T(r;f)=m(r;f)+N(r;1/f)=m(r;f)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}d\varphi+$$

$$+\ln|f(0)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\ln|f(re^{i\varphi})|\big|\,d\varphi\leqslant\frac{A_4}{(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right),$$

і для $0<r<R$ виконується

$$\ln M_f(r)\leqslant\frac{R+r}{R-r}T(R;f),$$

то для $R=\frac{r+1}{2}$ маємо:

$$\ln M_f(r)\leqslant\frac{1}{1-r}T\left(\frac{r+1}{2};f\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_5}{(1-r)^3}\eta\left(\frac{B_5}{1-r}\right).$$

Лема 5 доведена.

З ходу доведення лем 2, 3, 5 випливає таке твердження:

Теорема 3. *Якщо виконуються умови (2) і (3), то існує голоморфна в $U(0;1)$ функція, яка задовольняє умову* (4).

Доведення теореми 2. Як і в ході доведення леми 5, отримаємо голоморфну в одиничному крузі функцію, коефіцієнти Фур'є якої, побудовані в лемі 3 і задовольняють умову (8). Якщо $\frac{1}{k(1-r)}>1$ $\left(k<\frac{1}{1-r}\right)$, то $|c_k(r)|\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right)$, а за лемою 3 ця ж нерівність має місце для $k>\frac{1}{(1-r)^2}$. Якщо ж $\frac{1}{1-r}\leqslant k\leqslant\frac{1}{(1-r)^2}$, то $|c_k(r)|\leqslant A_3\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right)$ або $|c_k(r)|\leqslant\frac{A_3}{k(1-r)^2}\eta\left(\frac{B_3}{1-r}\right)$. Тому з нерівності Шварца та рівності Парсеваля отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||d\varphi\leqslant\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\varphi})||^2d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(c_0^2(r)+\sum_{0<|k|\leqslant\left[\frac{1}{1-r}\right]}|c_k(r)|^2+\sum_{|k|\geqslant\left[\frac{1}{(1-r)^2}\right]+1}^{+\infty}|c_k(r)|^2+\sum_{|k|=\left[\frac{1}{1-r}\right]+1}^{\left[\frac{1}{(1-r)^2}\right]}|c_k(r)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(A_1^2\eta^2\left(\frac{B_1}{1-r}\right)+\frac{A_3^2}{(1-r)^2}\eta^2\left(\frac{B_3}{1-r}\right)\left(\sum_{0<|k|\leqslant\left[\frac{1}{1-r}\right]}\frac{1}{k^2}+\sum_{|k|\geqslant\left[\frac{1}{(1-r)^2}\right]+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\right)+2\left(\frac{1}{(1-r)^2}-\frac{1}{1-r}\right)\times\right.$$

$$\left.\times A_3^2\eta^2\left(\frac{B_3}{1-r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(A_1^2\eta^2\left(\frac{B_1}{1-r}\right)+\frac{cA_3^2}{(1-r)^2}\eta^2\left(\frac{B_3}{1-r}\right)+\frac{2r}{(1-r)^2}A_3^2\eta^2\left(\frac{B_3}{1-r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_1'}{(1-r)}\eta\left(\frac{B_1'}{1-r}\right).$$

Тоді, з ходу доведення леми 5 випливає справедливість умови $(1')$. Теорема 2 доведена.

Зауваження 1. *Без додаткових обмежень на функцію η, як, наприклад, в [5], методом коефіцієнтів Фур'є не можна отримати критерію.*

Бібліоґрафія

[1] Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic end entire functions // Bull.Soc. Math. France. — 1968. — **96**. — P. 53–91.

[2] Beck. W. *Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc. Thesis.* — University of Illinois (Urbana-Champaign), 1970.

[3] Кондратюк А.А. *Ряды Фурье и мероморфные функции.* — Львов: Вища школа, 1988. — 195 с.

[4] Гольдберг А.А., Островский И.В. *Распределение значений мероморфных функций.* — М.: Наука, 1970. — 592 с.

[5] Шамоян Ф.А. О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. — 1983. — **18**, № 1. — С. 15–27.