УДК 517.5

Про інтерполяційні послідовності голоморфних в одиничному крузі функцій скінченного η-типу

Шепарович І. Б.

isheparovych@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,

кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Знайдено умови, за яких послідовність комплексних чисел $(\lambda_n) : 0 < |\lambda_n| \nearrow 1$, є інтерполяційною в класі голоморфних в одиничному крузі функцій скінченного η – типу.

Нехай η – додатна опукла відносно $\ln t$ на проміжку $[1; +\infty)$ функція така, що $\ln t = o(\eta(t))$ для $t \to +\infty$; (λ_n) – послідовність відмінних від нуля різних комплексних чисел таких, що $0 < |\lambda_n| \nearrow 1$;

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt; \quad N_\zeta(r) = \int_0^r \frac{n_\zeta(t) - 1}{t} dt,$$

де $n(t) = \sum\limits_{|\lambda_n| \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n), а $n_\zeta(t) = \sum\limits_{|z-\zeta| \leqslant t} 1$ – кількість членів (λ_n), які потрапили в круг $\{z : |z-\zeta| \leqslant t\}$. У статті [1] отримано деякі необхідні та достатні умови існування розв'язку інтерполяційної задачі

$$f(\lambda_n) = b_n \tag{1}$$

у класі голоморфних в одиничному крузі $D = \{z : |z| < 1\}$ функцій скінченного η-типу, тобто функцій, які задовольняють умову

$$(\exists A > 0)(\forall z \in D) : |f(z)| \leqslant exp\left(A\eta\left(\frac{A}{1-|z|}\right)\right)., \tag{2}$$

Зокрема, в [1] доведене таке твердження.

Теорема А. *Для того, щоб для кожної послідовності комплексних чисел (b_n) з властивістю*

$$(\exists A_1 > 0)(\forall n \in N) : |b_n| \leqslant exp\left(A_1\eta\left(\frac{A_1}{1-|\lambda_n|}\right)\right), \tag{3}$$

інтерполяційна задача (1) мала розв'язок в класі (2), необхідно, щоб виконувалася умови:

$$(\exists A_2 > 0)(\forall r \in (0;1)) : N(r) \leqslant A_2\eta\left(\frac{A_2}{1-r}\right), \tag{4}$$

$$(\exists A_3 > 0)(\forall \delta \in (0;1))(\forall n) :$$
$$N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) \leqslant A_3\eta\left(\frac{A_3}{1-|\lambda_n|}\right), \tag{5}$$

а досить, щоб існувала голоморфна в D функція L з класу (2), яка має прості нулі в точках λ_n, для якої виконується

$$(\exists A_4 > 0)(\forall n \in N) :$$
$$ln\,|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n))| \geqslant -A_4\eta\left(\frac{A_4}{1-|\lambda_n|}\right).$$

У 1970 р. В. Бек [2] адаптував конструкцію Дж. Майлза [3] до одиничного кругу. З його результатів випливає таке твердження

Теорема Б. *Для кожної послідовності (λ_n), що задовольняє умову*

$$(\exists A_2 > 0)(\forall r \in (0;1)) : N(r) \leqslant A_2(1-r)^3\eta\left(\frac{A_2}{1-r}\right), \tag{6}$$

існує голоморфна в одиничному крузі функція $\widetilde{L}$ скінченного η-типу з послідовністю нулів $(\widetilde{\lambda}_n)$, для якої (λ_n) є підпослідовністю.

Використовуючи це твердження, теорему А можна посилити.

Теорема 1. *Якщо послідовність (λ_n) задовольняє умову (6), то для того, щоб інтерполяційна задача (1) мала розв'язок в класі (2) для кожної послідовності комплексних чисел (b_n) з властивістю (3), необхідно і досить, щоб виконувалася умова (5).*

Доведення. Необхідність умови (5) доведено в [1]. Доведемо достатність. Нехай $(\widetilde{\lambda}_n)$ – послідовність, побудована Беком (див. [2]) з послідовності (λ_n) , що задовольняє умову (6), і нехай

$$\widetilde{N}_{\lambda_n}(\tau) = \int_0^\tau \frac{\widetilde{n}_{\lambda_n}(t) - 1}{t} dt,$$

де $\widetilde{n}_{\lambda_n}(t)$ – кількість членів послідовності $(\widetilde{\lambda}_n)$ в крузі $|z - \lambda_n| \leqslant t$. За теоремою Б, існує голоморфна в одиничному крузі функція $\widetilde{L}$ з класу (2) з послідовністю нулів $(\widetilde{\lambda}_n)$, для якої(λ_n) є підпослідовністю. Через (λ_n^*) позначимо послідовність таку, що $\{\lambda_n^*\} = \{\widetilde{\lambda}_n\} \backslash \{\lambda_n\}$, $n_{\lambda_n}^*(t)$ – кількість членів послідовності (λ_n^*) в крузі $\{z : |z - \lambda_n| \leqslant t\}$. За побудовою всі члени послідовності (λ_n^*) лежать на колах $\partial U(0; R_{N-1})$ $(N \geqslant 2,\ R_N = 1 - \frac{1}{2^N})$ і відстань між тими λ_n^*, що лежать на колі $\partial U(0; R_{N-1})$, більша за $\frac{(1-R_N)\pi}{2p}$, де $p = n(R_{N+1}) - n(R_N)$. Тому кількість точок λ_n^*, які лежать на дузі кола $\partial U(0; R_{N-1})$ в крузі $\{z : |z - \lambda_n| \leqslant t\}$, не перевищує $\frac{2\pi tp}{|\lambda_n|\pi(1-R_N)}$. Таким чином, якщо $|\lambda_n| - t \leqslant R_{N-1} < |\lambda_n| + t < R_N$, то

$$n_{\lambda_n}^*(t) \leqslant \frac{2tn(3/4 + R_{N-1}/4)}{|\lambda_n|(1-R_{N-1})/2} \leqslant \left(\frac{4tn\left(\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}\right)}{|\lambda_n|(1-|\lambda_n|-t)}\right).$$

Тому

$$\tilde{N}_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) = \int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)} \frac{\tilde{n}_{\lambda_n}(t)-1}{t} dt =$$

$$= \int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)} \frac{n_{\lambda_n}(t)-1}{t} dt + \int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)} \frac{n^*_{\lambda_n}(t)}{t} dt \leqslant$$

$$\leqslant N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) +$$

$$+4\int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)} \frac{tn\left(\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}\right)\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}}{t|\lambda_n|(1-|\lambda_n|-t)\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}} dt \leqslant$$

$$\leqslant N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) + 4\frac{3+|\lambda_n|+\delta(1-|\lambda_n|)}{|\lambda_n|(1-\delta)(1-|\lambda_n|)}\times$$

$$\times\int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)} \frac{n\left(\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}\right)}{\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}} d\left(\frac{3+|\lambda_n|+t}{4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) + \frac{40/(1-\delta)}{1-|\lambda_n|}\times$$

$$\times N\left(\frac{3+|\lambda_n|+\delta(1-|\lambda_n|)}{4}\right) \leqslant$$

$$\leqslant A_3\eta\left(\frac{A_3}{1-|\lambda_n|}\right) + \frac{40/(1-\delta)}{1-|\lambda_n|}\times$$

$$\times\left(1-\frac{3+|\lambda_n|+\delta(1-|\lambda_n|)}{4}\right)^3$$

$$\eta\left(\frac{A}{1-\frac{3+|\lambda_n|+\delta(1-|\lambda_n|)}{4}}\right) =$$

$$= A_3\eta\left(\frac{A_3}{1-|\lambda_n|}\right) + \frac{5}{8}(1-|\lambda_n|)^2(1-\delta)^2\times$$

$$\times\eta\left(\frac{4A/(1-\delta)}{1-|\lambda_n|}\right) \leqslant A_5\eta\left(\frac{A_5}{1-|\lambda_n|}\right).$$

Звідси та з рівності

$$ln\left|(1-|\lambda_n|)\tilde{L}(\lambda_n))\right| =$$

$$= -\tilde{N}_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) + O\left(\eta\left(\frac{A}{1-|\lambda_n|}\right)\right), \quad n\to\infty$$

(доведення див. в [1]) випливає, що якщо виконуються умови (5) і (6), то існує голоморфна в одиничному крузі функція $\widetilde{L}$ скінченного η-типу, для якої

$$(\exists A_4>0)(\forall n\in N):$$

$$ln\left|(1-|\lambda_n|)\tilde{L}(\lambda_n)\right| \geqslant -A_4\eta\left(\frac{A_4}{1-|\lambda_n|}\right).$$

Очевидно, що функція

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n\tilde{L}(z)}{(z-\lambda_n)\tilde{L}'(\lambda_n)}\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\overline{\lambda_n}z}\right)^{s_n}$$

де (s_n) – послідовність натуральних чисел, вибрана певним чином, є розв'язком інтерполяційної задачі (1). Доведемо, що вона є функцією скінченного η-типу.

З умов, накладених на η, випливає, що існує [4] ціла функція ψ така, що

$$\ln M_\psi(t) = (1+o(1))c_0\eta(c_0t), \quad t\to+\infty,$$

$$c_0 \geqslant 4(A_2+A_4+A_1).$$

Оскільки

$$\mu_\psi(t) \leqslant M_\psi(t) \leqslant (1+1/\varepsilon)\,\mu_\psi((1+\varepsilon)t), \quad \varepsilon>0,$$

де $\mu_\psi(t) = \max\{|\psi_n|t^n\}$ і $\psi_n = \psi^{(n)}(0)/n!$, то

$$\mu_\psi(t) \leqslant \exp(2c_0\eta(c_0t)),$$

$$\mu_\psi(t) \geqslant \exp(c_0/4\eta(c_0t/2)), \quad t\geqslant t_0. \qquad (8)$$

Виберемо послідовність (s_n) так, щоб

$$\chi_{s_n}(\hat{\psi}) \leqslant \frac{1}{1-|\lambda_n|} < \chi_{s_n+1}(\hat{\psi}),$$

де $\hat{\psi}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\hat{\psi}_n z^n$ – мажоранта Ньютона функції ψ, $\chi_n(\hat{\psi}) = |\hat{\psi}_{n-1}/\hat{\psi}_n|$. Тоді [5] ,

$$\mu_\psi\left((1-|\lambda_n|)^{-1}\right) = \hat{\psi}_{s_n}(1-|\lambda_n|)^{-s_n}, \quad \mu_\psi(t) \geqslant \hat{\psi}_{s_n}t^{s_n}. \qquad (9)$$

Отже, з умов (3), (6) – (9) та співвідношення

$$\max_{|z|=r}\left|\frac{\tilde{L}(z)}{z-\lambda_n}\right| \leqslant \frac{c}{1-r}M_{\tilde{L}}\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

випливає, що

$$|f(z)| \leqslant \frac{c}{1-r}M_{\tilde{L}}\left(\frac{r+1}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{|(1-|\lambda_n|)\tilde{L}'(\lambda_n)|}\frac{\hat{\psi}_{s_n}\cdot(2/(1-r))^{s_n}}{\hat{\psi}_{s_n}\cdot(1-|\lambda_n|)^{-s_n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{1-r}\exp\left(A\eta\left(\frac{2A}{1-r}\right)+2c_0\eta\left(\frac{2c_0}{1-r}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(A_1\eta\left(\frac{A_1}{1-|\lambda_n|}\right)+A_4\eta\left(\frac{A_4}{1-|\lambda_n|}\right)+\right.$$

$$\left.-\frac{c_0}{4}\eta\left(\frac{c_0/2}{1-|\lambda_n|}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(A_6\eta\left(\frac{A_6}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-A_2\eta\left(\frac{2A_2}{1-|\lambda_n|}\right)\right)$$

$$\leqslant \exp\left(A_6\eta\left(\frac{A_6}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n),$$

бо $n \leqslant n(|\lambda_n|) \leqslant 2(1-|\lambda_n|)^{-1}N((1+|\lambda_n|)/2)$. Отже, f задовольняє умову (2). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Для того, щоб інтерполяційна задача (1) мала розв'язок в класі (2) для будь-якої послідовності комплексних чисел (b_n) з властивістю (3), необхідно, щоб виконувалася умови (4), (5), а досить, щоб виконувалася умови (6) і (5).*

Доведення. Ця теорема випливає безпосередньо з теореми А та теореми 1.

Бібліоґрафія

[1] Винницький Б.В., Шепарович І.Б. Інтерполяційні послідовності аналітичних в одиничному крузі функцій скінченного η-типу // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, № 3. – С. 425–430.

[2] Beck W. Efficient quotient representations of meromorphic functions in the disc. Thesis. University of Illinois (Urbana-Champaign), 1970.

[3] Miles J. Quotient representations of meromorphic functions. J. d'Analese Math., XXV (1972). – P. 371–388.

[4] Clunie J. On integral functions having prescribed asymptotic grows. I // Can. J. Math. – 1965. – 17, № 3. – P. 396–404.

[5] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2 т. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 432 с.

[6] Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Выща школа, 1988. – 196 с.