УДК 517.5

Про залежність між ростом цілої функції експоненціального типу і характером особливих точок її перетворення Бореля-Лапласа

Крутиголова Є. К.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Встановлено характер особливих точок функції, яка є перетворенням Бореля-Лапласа цілої функції, в залежності від вигляду цієї цілої функції.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ – ціла функція порядку $\rho = 1$, типу σ. Ріст цієї цілої функції по різних напрямах тісно пов'язаний з розміщенням особливих точок функції $\gamma(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{t^n}$. Цю функцію називають асоційованою за Борелем з цілою функцією $f(z)$, а відповідний ряд збігається при $|t| > \sigma$.

Нехай $\bar{D}$ – найменша замкнена опукла область, яка містить всі особливі точки функції $\gamma(t)$.

Ціла функція $f(z)$ виражається через асоційовану функцію $\gamma(t)$ за формулою [1]

$$f(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_C \gamma(t) e^{zt} dt, \qquad (1)$$

де C – замкнений контур, який містить всі особливі точки функції $\gamma(t)$. Відповідно асоційована функція $\gamma(t)$ виражається через цілу функцію $f(z)$ за формулою

$$\gamma(t) = \int\limits_0^{\infty} f(z) e^{-zt} dz. \qquad (2)$$

Причому інтегрування проходить по променю, який виходить з початку координат під кутом φ до додатної частини дійсної осі. Цей інтеграл збігається у півплощині $x\cos\varphi + y\sin\varphi = Re(ze^{-i\varphi}) > K(\varphi)$, де $K(\varphi)$ – опорна функція множини $\overline{D}$.

Цілі функції експоненціального типу та їхні асоційовані функції ефективно використовуються в теорії зображень аналітичних функцій рядами експонент.

Незважаючи на це, питання про характер особливих точок асоційованої функції і їх зв'язок з ростом цілої функції $f(z)$ вивчено недостатньо. Розглянемо спочатку випадок, коли асоційована функція має скінченне число особливих точок. Отже, нехай функція $\gamma(t)$ має $3 \leqslant p < \infty$ особливих точок $a_k\,(k = 1, ...p)$, причому точки a_k є вершинами опуклого многокутника $\overline{D}$, або лежать всередині цього многокутника.

Теорема 1. *Для того, щоб асоційована функція $\gamma(t)$ мала своїми особливостями скінченне число полюсів порядку $m \geqslant 1$ в точках $a_k\,(k = 1, ..., p)$, і не мала жодних інших особливостей, необхідно і достатньо, щоб відповідна їй ціла функція $f(z)$ мала вигляд $f(z) = P(z)\sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$, де $P(z)$ – многочлен степеня $m-1$.*

Доведення. При $m = 1$ справедливість твердження теореми є очевидною. Справді, якщо $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$, $3 \leqslant p < \infty$, a_k – вершини опуклого многокутника, або лежать всередині нього, то $\gamma(t) = \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} \sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z} e^{-zt} dz = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} e^{(a_k - t)z} dz = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k/(t - a_k)$, тобто функція $\gamma(t)$ має своїми особливостями лише скінченне число простих полюсів. Нехай, навпаки, функція $\gamma(t)$ має лише скінченне число простих полюсів у точках a_k. Розвиваючи функцію $\gamma(t)$ в ряд Лорана в околі кожного полюса a_k, матимемо $\gamma(t) = \frac{c_{-1}^{k}}{t - a_k} + \Psi_k^{(t)}$, $k = 1...p$, причому функції $\Psi_k^{(t)}$ – аналітичні в околах точок a_k. Отже, функцію $\gamma(t)$ можна подати у вигляді $\gamma(t) = \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{c_{-1}^{(k)}}{t - a_k} + \Psi(t)$, де функція $\Psi(z)$ – аналітична в області $D_1 \supset \bar{D}$, $\Psi(z) = \sum\limits_{k=1}^{p} \Psi_K(t)$.

Тому $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C (\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{c_{-1}^{(k)}}{t - a_k} + \Psi(t)) e^{zt} dt = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{-1}^{(k)} e^{a_k z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Psi(t) e^{zt} dt$, де C – замкнений контур, який містить многокутник $\bar{D}$ з вершинами в точках a_k, і контур C лежить в D_1, а отже, $\int\limits_C \Psi(t) e^{zt} dt = 0$.

Нехай тепер $f(z) = (\alpha z + \beta)\sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$, (α, β) – сталі числа, тоді $\gamma(t) = \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} \sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{(a_k - t)z} dz + \beta\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} \sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{(a_k - t)z} dz$.

Диференціюючи функцію $\gamma_1(t) = \int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} \sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{(a_k - t)z} dz$, одержимо

$$\gamma_1^{'}(t) = -\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} z\sum_{k=1}^{p} c_k e^{(a_k - t)z} dz.$$

Тобто $\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}} z\sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{(a_k-t)z}dz = -\gamma_1'(t) = \sum\limits_{k=1}^{p}\frac{c_k}{(t-a_k)^2}$. Отже, для цілої функції $f(z)=(\alpha z+\beta)\sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$ $(\alpha,\beta$ – сталі числа) асоційована функція $\gamma(t)$ має вигляд $\gamma(t)=\sum\limits_{k=1}^{p} c_k(\frac{\alpha}{(t-a_k)^2}+\frac{\beta}{t-a_k})$, тобто її особливі точки – полюси другого порядку в точках a_k.

Нехай, навпаки, функція $\gamma(t)$ має своїми особливостями лише полюси другого порядку в скінченному числі точок a_k $(k=1,...p)$, які розміщені у вершинах опуклого многокутника $\bar{D}$, або лежать всередині нього. Розвиваючи функцію $\gamma(t)$ в ряд Лорана в околах точок a_k, дістанемо

$$\gamma(t)=\sum_{k=1}^{p}(\frac{\alpha_k c_{-2}^{(k)}}{(t-a_k)^2}+\frac{\beta_k c_{-1}^{(k)}}{t-a_k})+\sum_{k=1}^{p}\psi_k(t),$$

де α_k, β_k –сталі числа, $c_{-i}^{(k)} (i=1,2)$ - коефіцієнти лоранівських розкладів функції $\gamma(t)$, $\sum\limits_{k=1}^{p}\psi_k(t)=\psi(t)$, $\psi_k(t)$ – аналітичні у вказаних околах точок a_k.

Тоді $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C(\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k c_{-2}^{(k)}}{(t-a_k)^2}+\frac{\beta_k c_{-1}^{(k)}}{(t-a_k)}+\psi_k(t))e^{zt}dz = \sum\limits_{k=1}^{p}(\alpha_k c_{-2}^{(k)}z+\beta_k c_{-1}^{(k)})e^{a_k z}$, бо $\int\limits_C\psi(t)e^{zt}dz=0$.

Аналогічними міркуваннями доводиться справедливість твердження теореми для випадку $m>2$.

Нехай $f(z)=P_m(z)\sum\limits_{k=1}^{p} c_k e^{a_k z}$, тоді

$$\gamma(t)=\int\limits_0^{\infty e^{i\gamma}}(a_0z^m+a_1z^{m-1}+...+a_m)\sum_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz.$$

Маємо

$$a_m\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}}\sum_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz=a_m\sum_{k=1}^{p}\frac{c_k}{t-a_k},$$

$$a_{m-1}\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}}z\sum_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz=$$

$$=a_{m-1}\sum_{k=1}^{p}(\frac{c_k^{(1)}}{(t-a_k)^2}+\frac{c_k^{(2)}}{t-a_k})$$

....

$$a_0\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi}}z^m\sum_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz=$$

$$=a_0\sum_{k=1}^{p}(\frac{c_k^{(1)}}{(t-a_k)^{m+1}}+...+\frac{c_k^{(m)}}{t-a_k}),$$

тоді

$$\gamma(t)=a_0\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k^{(1)}}{(t-a)^{m+1}}+$$

$$+a_1\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k^{(2)}}{(t-a_k)^m}+...+a_m\sum_{k=1}^{p}\frac{\alpha_k^{(m)}}{t-a_k},$$

тобто функція $\gamma(t)$ має полюси порядку $m+1$ в точках a_k і не має інших особливих точок.

Нехай, навпаки, функція $\gamma(t)$ має скінченне число особливих точок – полюсів порядку $m+1$ в точках a_k і не має інших особливих точок. Тоді лоранівські розклади функції $\gamma(t)$ в околах точок a_k мають вигляд

$$\gamma(t)=\frac{c_{-(m+1)}^{(k)}}{(t-a_k)^{m+1}}+\frac{c_{-m}^{(k)}}{(t-a_k)^m}+...+\frac{c_{-1}^{(k)}}{t-a_k}+\Psi_k^{(t)},$$

$$k=1,...p,$$

$$\gamma(t)=\sum_{k=1}^{p}(\frac{c_{-(m+1)}^{(k)}}{(t-a_k)^{m+1}}+...+\frac{c_{-1}^{(k)}}{t-a_k})+\Psi(t),$$

де $\Psi(t)=\sum\limits_{k=1}^{p}\varphi_k(t)$ - функція аналітична в області $D_1\supset D$.

Отже,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c(\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{-(m+1)}^{(k)}}{(t-a_k)^{m+1}}+...+\frac{a_{-1}^{(k)}}{t-a_k}+\Psi(t))\times$$

$$\times e^{zt}dz=P_m(z)\sum_{k=1}^{p}c_k e^{a_k z}.$$

Теорема доведена.

Особлива точка $z=\alpha$ називається алгебраїчно-логарифмічною точкою функції $\gamma(t)$, якщо в околі точки $z=\alpha$ функцію $\gamma(t)$ можна подати у вигляді суми скінченного числа функцій вигляду $(z-\alpha)^p\ln(t-\alpha)^k\varphi(t)$, p – комплексне число, k – ціле невід'ємне число, $\varphi(\alpha)\neq 0$.

Нехай спочатку ціла функція $f(z)$ має вигляд $f(z)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}c_k e^{a_k z}}{z}$ (вважаємо, що $\sum\limits_{k=1}^{p}c_k=0$, наприклад, такою є функція $f(z)=\frac{\sin z\cdot\cos z}{z}$), тоді $\gamma(t)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz}{z}$.

Оскільки $\gamma_1(t)=-\int\limits_0^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{p}c_k e^{(a_k-t)z}dz = -\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{c_k}{t-a_k}$, то $\gamma(t)=\sum\limits_{k=1}^{p}c_k\ln(t-a_k)$, тобто асоційована функція у цьому випадку має скінченне число логарифмічних полюсів у точках a_k. Навпаки, якщо функція $\gamma(t)$ має скінченне число логарифмічних полюсів в точках a_k і не має інших особливих точок, то інтегруючи частинами одержимо, що

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c e^{zt}\sum_{k=1}^{p}c_k\ln(t-a_k)dt=-\sum_{k=1}^{p}\frac{c_ke^{a_kz}}{z}.$$

Аналогічними міркуваннями переконуємось, що якщо $f(z)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{p}c_ke^{a_kz}}{z^m}$, то $\gamma(t)=\sum\limits_{k=1}^{p}c_k(t-a_k)^{m-1}\ln(t-a_k)$ і навпаки, тому має місце наступна теорема.

Теорема 2 . *Для того, щоб асоційована функція $\gamma(t)$ мала скінченне число алгебраїчно-логарифмічних особливостей вигляду $(t-a_k)^{m-1}\ln(t-a_k)$ в точках a_k (a_k – вершини опуклого многокутника $\overline{D}$, або лежать всередині нього) необхідно і достатньо, щоб відповідна їй ціла функція $f(z)$ мала вигляд $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{c_ke^{a_kz}}{z^m}$.*

У монографії [1] побудовано спеціальні нескінченні добутки $Q(z)$, для яких встановлено оцінки

$$A|P(z)|<|Q(z)|<B|P(z)|, \tag{3}$$

де A,B – сталі числа, $P(z)$ – експоненціальний поліном. Функція $Q(z)$ є цілою функцією експоненціального типу і має таку ж індикаторну діаграму, що й експоненціальний поліном $P(z)$. З теорем 1 і 2 випливає, що асоційована функція до цілої функції $Q(z)$ має своїми особливостями теж скінченне число простих полюсів.

Справді, якщо б асоційована функція $\gamma_Q(t)$ мала своїми особливостями полюси порядку $m>1$, то функція $Q(z)$ мала б такий же ріст, як функція $P_{m-1}(z)\sum\limits_{k=1}^{p}c_ke^{a_kz}$, а якщо б функція $\gamma_Q(z)$ мала своїми особливостями лише скінченне число алгебраїчно-логарифмічних особливостей, то функція $Q(z)$ мала б такий же ріст, як функція $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{c_ke^{a_kz}}{z^m}$. В обох випадках оцінка (3) не може мати місця.

Нехай

$$Q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{p}(1-\frac{z}{\frac{(2n-1)\pi i}{(a_{k+1}-a_k)}}), \tag{4}$$

де $3\leqslant p<\infty$, a_k – вершини опуклого многокутника.

Аналогічно, як у [1] переконаємось, що індикаторною діаграмою функції $Q(z)$ є опуклий p-кутник з вершинами в точках a_k. Маємо

$$Q(z)=\prod_{k=1}^{p}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{\frac{(2n-1)\pi i}{(a_{k+1}-a_k)}})=\prod_{k=1}^{p}Q_k(z),$$

де

$$Q_k(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{\frac{(2n-1)\pi i}{a_{k+1}-a_k}}).$$

Тоді

$$Q(z)\cdot Q(-z)=\prod_{k=1}^{p}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{(\frac{(2n-1)\pi i}{(a_{k+1}-a_k)})^2})=$$

$$=\prod_{k=1}^{p}\cos z\frac{a_{k+1}-a_k}{2i}=\prod_{k=1}^{p}Q_k(z)Q_k(-z).$$

Оскільки

$$Q_k(z)Q_k(-z)=\cos z\frac{a_{k+1}-a_k}{2i}=$$

$$=\cos^2 z\frac{a_{k+1}-a_k}{4i}-\sin^2 z\frac{a_{k+1}-a_k}{2i}=$$

$$=(\cos z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i})+\sin z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i}))\times$$

$$\times(\cos z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i})+\sin(-z)(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i})),$$

то

$$Q_k(z)=\cos z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i})+\sin z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i}).$$

А отже

$$Q(z)=\prod_{k=1}^{p}(\cos z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i})+ \tag{5}$$

$$+\sin z(\frac{a_{k+1}-a_k}{4i}))\sum_{k=1}^{4p^2}c_ke^{\alpha_kz},$$

де c_k – сталі числа.

Тоді

$$\gamma_Q(z)=\int\limits_0^{\infty}\sum_{k=1}^{4p^2}c_ke^{(\alpha_k-t)z}dz=\sum_{k=1}^{4p^2}\frac{c_k}{t-\alpha_k},$$

тобто справедлива.

Теорема 3. *Нескінченний добуток (4) можна подати у вигляді експоненціального полінома (5), а відповідна йому асоційована функція $\gamma_a(z)$ має своїми особливостями лише скінченне число простих полюсів.*

Розглянемо тепер випадок, коли асоційована функція має нескінченне число особливих точок. Побудуємо функцію $F(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ze^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}}$. Частинна сума ряду $F_m(z)=\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ze^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}}$ – це експоненціальний поліном, а індикаторною діаграмою функції $F_m(z)$є правильний многокутник, вписаний в коло $|z|=1$ з вершинами в точках $a_{n,k}=e^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}$, $k=1,...,n$, $n=1,...,m$.

Асоційована функція для функції для функції $F_m(z)$ має прості полюси в точках $a_{n,k}$. Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} F_m(z) = F(z)$, то індикаторною діаграмою функції $F(z)$ є круг $|z| \leqslant 1$, а асоційована функція до функції $F(z)$ має вигляд $\gamma_F(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{t-e^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}}$, тобто функція $\gamma_F(t)$ має нескінченну множину простих полюсів в точках $e^{\frac{(2k-1)\pi i}{n}}$, $k = 1, ..., n$, $n = 1, 2....$

Бібліографія

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 534 с.