

УДК 517.5

Асимптотика логарифмічної похідної та логарифму канонічного добутку нульового роду

Хаць Р. В.

khats@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Одержано нові асимптотичні формули для логарифмічної похідної та логарифму канонічного добутку нульового роду з додатними нулями за умови регулярного зростання лічильної функції нулів.

Нехай $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_n \nearrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ і

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \quad (1)$$

— канонічний добуток нульового роду. Надалі вважаємо функцію

$$\log L(z) = \int_0^z \frac{L'(\zeta)}{L(\zeta)} d\zeta, \quad L(0) = 1,$$

визначеною в $\mathbb{C} \setminus [\lambda_1, +\infty)$. Відомо [1], що якщо послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

де $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, 1)$, то для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{o(r^\rho)}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Крім цього, (див. [1–3]) для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$ співвідношення

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty,$$

виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (2). Зауважимо, що за умови (2), для канонічного добутку (1) справджується (див. [4])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin \pi\rho} e^{-i\rho\pi} e^{i(\rho-1)\varphi} r^{\rho-1} + o(r^{\rho-1}),$$

$$r \rightarrow +\infty,$$

рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$.

У ряді праць (див., наприклад, [5–8]) вивчались тонші асимптотики цілої функції (1). Так з результатів статті [5] випливає, зокрема, що асимптотична формула

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + o(r^{\rho_1}),$$

$$r \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3)$$

де $\rho_1 \in (0, \rho)$, є справедливою зовні деякої виняткової C_0 -множини (означення див. [1–2]). У [6]

знайдено необхідні і достатні умови на нулі цілої функції (1), за яких для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^{\rho_2}),$$

$$U \not\subset re^{i\varphi} \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де U — виняткова множина в $\mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів. Крім цього, в [7] отримано критерій на нулі канонічного добутку (1), за якого на деяких колах $\{z : |z| = r_k\}$ рівномірно за $\varphi \in [0, 2\pi]$ виконується

$$\log |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta r_k^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + O(1), \quad r_k \rightarrow +\infty.$$

Проте задача про знаходження достатніх умов на поведінку нулів канонічного добутку (1), за яких асимптотичні співвідношення (3) і (4) виконуються рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$, залишається відкритою. Ця проблема є актуальною і для отримання рівномірних асимптотичних оцінок логарифмічної похідної канонічного добутку нульового роду.

Метою статті є доведення таких тверджень, які доповнюють результати, отримані в [5–8].

Теорема 1. Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, 1)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$q(t) \stackrel{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^\rho = o(t^{\rho_1}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Теорема 2. Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, 1)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (5). Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin \pi\rho} e^{-i\rho\pi} e^{i(\rho-1)\varphi} r^{\rho-1} + \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin^2(\varphi/2)},$$

$$r \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Через $c_1, c_2, c_3, \dots$ будемо позначати деякі додатні сталі.

Доведення теореми 1. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Маємо [1–3]

$$\log L(re^{i\varphi}) = -z \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t(t-z)} dt.$$

Оцінимо модуль виразу

$$\begin{aligned} S &= \log L(re^{i\varphi}) + re^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho dt}{t(t - re^{i\varphi})} = \\ &= -z \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho}{t(t-z)} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи (5), отримуємо ($|q(t)| \leq c_1 t^{\rho_1}$, $t \in [0, +\infty)$)

$$\begin{aligned} |S| &\leq r \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{t|t - re^{i\varphi}|} dt \leq \\ &\leq c_1 r \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-1}}{|t - re^{i\varphi}|} dt = J(r, \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Покладемо $t = ur$. Тоді, використовуючи нерівність $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (u^2 + 1) \min\{1 - \cos \varphi, 1\}$, одержимо

$$\begin{aligned} J(r, \varphi) &= c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-1}}{|u - e^{i\varphi}|} du = \\ &= c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-1}}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}} du \leq \\ &\leq c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-1}}{\sqrt{(u^2 + 1) \min\{1 - \cos \varphi, 1\}}} du \leq \\ &\leq \frac{c_2 r^{\rho_1}}{\sin(\varphi/2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

До того ж, [1, 3])

$$\begin{aligned} \Delta r e^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^\rho dt}{t(t - re^{i\varphi})} &= \Delta r^\rho e^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-1} du}{u - e^{i\varphi}} = \\ &= -\frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi - \pi)}. \end{aligned}$$

Звідси і з (8)–(10) випливає (6). Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. За умов теореми 1, маємо

$$\begin{aligned} \log |L(re^{i\varphi})| &= \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + \\ &+ \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

Бібліографія

- [1] Levin B.Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, Vol. 150. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1996. – 248 p.
- [2] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

$$\begin{aligned} \arg L(re^{i\varphi}) &= \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \sin \rho(\varphi - \pi) + \\ &+ \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Доведення теореми 2. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Маємо ([4, с. 64])

$$\frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} = - \int_0^{+\infty} \frac{n(t) dt}{(z - t)^2}.$$

Оцінимо модуль виразу

$$\begin{aligned} P &= \frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} + \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho dt}{(re^{i\varphi} - t)^2} = \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho}{(z - t)^2} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

За умови (5), подібно як при доведенні теореми 1, одержимо ($|q(t)| \leq c_1 t^{\rho_1}$, $t \in [0, +\infty)$)

$$\begin{aligned} |P| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{|re^{i\varphi} - t|^2} dt \leq c_1 \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1} dt}{|re^{i\varphi} - t|^2} = \\ &= c_1 r^{\rho_1-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1} du}{|e^{i\varphi} - u|^2} = \\ &= c_1 r^{\rho_1-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1}}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du \leq \frac{c_3 r^{\rho_1-1}}{\sin^2(\varphi/2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

До того ж, ([4, с. 64])

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho dt}{(re^{i\varphi} - t)^2} &= \Delta r^{\rho-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^\rho du}{(e^{i\varphi} - u)^2} = \\ &= -\frac{\pi \Delta \rho}{\sin \pi \rho} e^{-i\rho\pi} e^{i(\rho-1)\varphi} r^{\rho-1}. \end{aligned}$$

Звідси і з (11), (12) отримуємо (7). Теорему 2 доведено.

Наслідок 2. За умов теореми 2, маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} &= \frac{\pi \Delta \rho}{\sin \pi \rho} r^{\rho-1} \cos((\rho-1)\varphi - \rho\pi) + \\ &+ \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin^2(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \\ \operatorname{Im} \frac{L'(re^{i\varphi})}{L(re^{i\varphi})} &= \frac{\pi \Delta \rho}{\sin \pi \rho} r^{\rho-1} \sin((\rho-1)\varphi - \rho\pi) + \\ &+ \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin^2(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$.

- [3] Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
- [4] Гольдберг А.А., Коренков Н.Е. Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – 21, № 3. – С. 63–79.
- [5] Агранович П.З., Логвиненко В.Н. Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей // Сиб. мат. журн. – 1985. – 26, № 5. – С. 3–19.
- [6] Винницький Б.В., Хаць Р.В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Матем. студії. – 2004. – 21, № 2. – С. 140–150.
- [7] Vynnyts'kyi B.V., Khats' R.V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one // Матем. студії. – 2003. – 9, № 1. – С. 97–105.
- [8] Хаць Р.В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку // Матем. студії. – 2004. – 22, № 1. – С. 105–110.