

УДК 517.5

Гіпотеза Рімана і повнота системи зсувів

Дільний В. М.

dilnyi@ukr.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Нехай $H^2_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$ – простір аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій, для яких $\|f\| := \sup_{|\varphi| < \pi/2} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 e^{-2\sigma r |\sin \varphi|} dr \right\}^{1/2} < +\infty$. Встановлено еквівалентність Гіпотези Рімана циклічності функції $(z - 1/2)/(z + 1/2)^2 \cdot \zeta(z + 1/2)$ у просторі $H^2_{\sigma}(\mathbb{C}_+)$.

У 1876 Б. Ріман поставив 5 задач про властивості ζ -функції. Чотири з них невдовзі були розв'язані, але задача про розміщення нетривіальних нулів ζ -функції, відома як Гіпотеза Рімана, є відкритою досі і вважається, після доведення теореми Ферма, однією з найцікавіших відкритих проблем сучасної математики.

Нагадаємо, що ζ -функція (Рімана) визначається рівністю

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$$

або

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

де добуток береться за всіма простими числами p . На останньому співвідношенні базуються зв'язки функції Рімана з теорією простих чисел. Б. Ріман показав також, що функція ζ має мероморфне продовження в $\mathbb{C}$ з єдиним простим полюсом в $s = 1$. Власне, Гіпотеза Рімана полягає у тому, що всі нетривіальні (недійсні) нулі функції розміщені на прямій $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Відомо багато тверджень, що є еквівалентними до цієї Гіпотези. Зокрема, шведський математик Б. Німан у 1950 р. [1] сформулював один з еквівалентів як теорему про повноту у деяких класах функцій.

Нехай $\rho_{\alpha}(u) = \{\frac{\alpha}{u}\} - \alpha \{\frac{1}{u}\}$, $0 < \alpha < 1$, і $u \in (0; 1) \setminus \{0\}$ – дробова частина дійсного числа, N – замикання лінійної оболонки у просторі $L^2(0, 1)$ системи функцій $\{\rho_{\alpha} : \alpha \in (0; 1)\}$.

Теорема Німана. *Стала на $(0; 1)$ функція $f = 1$ належить до N тоді і тільки тоді, коли справедливою є Гіпотеза Рімана.*

Нагадаємо, що простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$ називають клас аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій f , для яких

$$\|f\| := \sup_{x > 0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dy \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Функції з просторів $H^p(\mathbb{C}_+)$ мають [2] майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення f і

$f(iy) \in L^p(\mathbb{R})$. Функцію G називають зовнішньою для $H^p(\mathbb{C}_+)$, коли вона подається у вигляді

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(t + iz)(1 + t^2)} \ln |G(it)| dt \right\},$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, G \in L^p(\partial\mathbb{C}_+).$$

У 2000 р. Ж.-Ф. Бурноль показав [3], що Гіпотеза Рімана справедлива тоді і тільки тоді, коли функція $(z - 1/2)/(z + 1/2)^2 \cdot \zeta(z + 1/2)$ є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$. Наступне твердження дає повний опис зовнішніх у $H^2(\mathbb{C}_+)$ функцій (див. [4]). Назвемо функцію $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$, якщо система

$$\{G(z)e^{\tau z} : \tau \leq 0\} \quad (1)$$

є повною у просторі $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Теорема Берлінга-Лакса. *Нехай $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

- 1) функція G є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;
- 2) рівняння

$$\int_{-\infty}^0 f(u + \tau)g(u)dw = 0, \tau \leq 0, g \in L^2(-\infty; 0),$$

де

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(u)e^{uz} du,$$

має лише нульовий розв'язок у просторі $L^2(-\infty; 0)$;

- 3) система

$$\{g(u - \tau) : \tau \leq 0\},$$

де

$$g(u) = 0, u > 0,$$

є повною в просторі $L^2(-\infty; 0)$;

- 4) функція G не має нулів в $\mathbb{C}_+$,

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} = 0$$

і сингулярна гранична функція функції G є сталою;

- 5) функція G є зовнішньою для $H^2(\mathbb{C}_+)$;

Означення сингулярної граничної функції для простору наведемо пізніше у дещо загальнішому вигляді.

На основі останньої теореми можна одержати твердження, формулювання якого в літературі у наведеному вигляді нам знайти не вдалося.

Теорема 1. *Наступні умови еквівалентні:*

- 1) справедлива Гіпотеза Рімана;
- 2) функція $\frac{z-1/2}{(z+1/2)^2}\zeta(z+1/2)$ – є зовнішньою для $H^2(\mathbb{C}_+)$;
- 3) рівняння

$$\int_{-\infty}^0 f(u+\tau) (g_{\zeta}^+(u) - g_{\zeta}^-(u)) du = 0, \tau \leq 0 \quad (2)$$

де g_{ζ}^+ – кутові граничні значення на дійсній осі функції g_{ζ} з півплощини $\{w : \text{Im} w > 0\}$, g_{ζ}^- – кутові граничні значення на дійсній осі функції g_{ζ} з півплощини $\{w : \text{Im} w < 0\}$,

$$g_{\zeta}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x-1/2}{(x+1/2)^2} \zeta(x+1/2) e^{-xw} dx$$

має лише нульовий розв'язок в просторі $L^2(-\infty; 0)$;

- 4) рівняння (2) не має розв'язків виду $f(w) = e^{zw}, 0 < \text{Re} z < 1/2$;
- 5) функція $\frac{x-1/2}{(x+1/2)^2} \zeta(x+1/2)$ є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$;
- 6) система функцій $\{g_{\zeta}(w-\tau : \tau \leq 0)\}$ є повною у просторі $E_*^2[D_0]$;

В останній умові через $E_*^2[D_{\sigma}]$, $\sigma \geq 0$, позначено простір аналітичних у зовнішності півсмути $D_{\sigma}^* = \{z : |\text{Im} z| > \sigma \vee \text{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$\|f\| = \sup \left\{ \int_{\gamma} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ , що містяться в D_{σ}^* і є паралельними одній із сторін ∂D_{σ}^* .

Еквівалентність умов 1) та 2) встановив Ж.-Ф. Бурноль, еквівалентність умов 3), 5), 6) та умови 2) випливає з теореми Берлінга-Лакса, а еквівалентність 3) і 4) – з такої леми.

Лема 1. Функція $f(u) = e^{\lambda u}, \lambda \in \mathbb{C}_+$ тоді і тільки тоді є розв'язком рівняння (2), коли λ є нулем функції

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\partial D_0} g(w) e^{zw} dw = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^0 (g^+(u) - g^-(u)) e^{zu} du. \end{aligned} \quad (3)$$

Функція $f(u) = u^{m-1} e^{\lambda u}, m \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}_+$, є розв'язком рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли в т.л функція (3) має нуль порядку $k \geq m$.

Доведення. Нехай $\lambda \in \mathbb{C}_+$ і функція $f(u) = e^{\lambda u}$ є розв'язком рівняння (2), тоді

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda(u+\tau)} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0,$$

тобто

$$e^{\lambda \tau} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0,$$

з чого маємо $G(\lambda) = 0$. Отже, λ є нулем функції (3).

Навпаки, нехай $G(\lambda) = 0, \lambda \in \mathbb{C}_+$, тоді

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda u} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0.$$

Помноживши останню рівність на $e^{\lambda \tau}$, маємо

$$\int_{-\infty}^0 e^{\lambda(u+\tau)} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0.$$

Отже, функція $f(u) = e^{\lambda u}$ є розв'язком рівняння (2).

Нехай функція (3) в т. л має нуль порядку $k \geq m$, тоді

$$\alpha \int_{-\infty}^0 u^s (g^+(u) - g^-(u)) e^{zu} du = 0,$$

$$\alpha \in \mathbb{C}_+, 0 \leq s \leq m-1, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\beta \int_{-\infty}^0 \tau^{\nu} (g^+(u) - g^-(u)) e^{\lambda \nu} du = 0,$$

$$\beta \in \mathbb{C}_+, 0 \leq \nu \leq +\infty, \nu \leq 0,$$

тому, враховуючи формулу бінома Ньютона, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^0 (u+\tau)^{m-1} e^{\lambda(u+\tau)} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0, \tau \leq 0.$$

Навпаки, якщо функція $u^2 e^{\lambda u}$ (обмежимося випадком $m = 3$, бо інші розглядаються подібно) є розв'язком рівняння (2), то

$$\int_{-\infty}^0 (u+\tau)^2 e^{\lambda(u+\tau)} (g^+(u) - g^-(u)) du = 0.$$

Тому $G''(\lambda) + 2\tau G'(\lambda) + \tau^2 G(\lambda) = 0$. Оскільки $\tau \leq 0$ довільне, то звідси послідовно отримуємо $G''(\lambda) = 0, G'(\lambda) = 0$ і $G(\lambda) = 0$.

Лему доведено.

Б. Винницький розглянув [5] простір $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій f , для яких

$$\|G\| := \sup_{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 e^{-2r\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/2},$$

$$\|G\| < +\infty.$$

Функції з просторів $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ мають м. с. на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення f і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. А. Седлецкий показав [6], що для випадку $\sigma = 0$ простір $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ збігається з простором Гарді $H^p(\mathbb{C}_+)$. Сингулярна гранична функція h функції $G \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ існує [11], [12] і визначається з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \rightarrow 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(x+iy)| dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(iy)| dy.$$

Назвемо функцію $G \in H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$ циклічною у просторі $H_\sigma^p(\mathbb{C}_+)$, якщо система (1) є повною в цьому просторі. В [7], [8] встановлено таке твердження.

Теорема А. Нехай $G \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$, $\sigma > 0$, $G \neq 0$.

Тоді наступні умови еквівалентні:

- 1) функція G є циклічною для H_σ^2 ;
- 2) функція G не має нулів в $\mathbb{C}_+$, її сингулярна гранична функція є сталою і виконується умова

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) = -\infty.$$

Лема 2. Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H^2(\mathbb{C}_+)$, то вона є циклічною в $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$.

Доведення. Якщо G – циклічна в $H^2(\mathbb{C}_+)$, то за теоремою Берлінга-Лакса вона є зовнішньою в $H^2(\mathbb{C}_+)$, тобто не має нулів в $\mathbb{C}_+$, її сингулярна гранична функція є сталою та

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} = 0.$$

Очевидно, $G \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$. Тому для доведення леми за теоремою А досить показати, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt - \frac{\sigma}{\pi} \ln r \right) = -\infty.$$

для кожного $\sigma > 0$. Це випливає з нерівності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt < +\infty.$$

Справді,

$$\begin{aligned} & \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln |G(it)| dt \leq \\ & \leq \int_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) \ln^+ |G(it)| dt \leq \\ & \leq \int_{1 < |t| \leq r} \frac{1}{t^2} \ln^+ |G(it)| dt < +\infty, \end{aligned}$$

де $\ln^+ t = \begin{cases} \ln t, & t > 1 \\ 0, & t \leq 1. \end{cases}$ Оскільки $\frac{1}{t^2} \leq \frac{2}{t^2+1}$, $t \geq 1$, то досить показати, що

$$\int_{1 < |t| \leq r} \frac{\ln^+ |G(it)|}{1+t^2} dt < +\infty,$$

А оскільки $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$, то [2] маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln^+ |G(it)|}{1+t^2} dt < +\infty,$$

Лему доведено.

Лема 3. Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ є циклічною в $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ для деякого $\sigma > 0$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} = 0$, то G є циклічною в $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$.

Справді, оскільки G є циклічною в $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$, то за теоремою А вона не має нулів в $\mathbb{C}_+$ і її сингулярна гранична функція є сталою. Тому, враховуючи умови цієї леми і теорему Берлінга-Лакса, маємо потрібне.

Наслідок. Якщо $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |G(x)|}{x} = 0$, то G є циклічною одночасно в $H^2(\mathbb{C}_+)$ та $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ для кожного $\sigma > 0$.

Ми можемо довести наступне твердження.

Теорема 2. Наступні умови еквівалентні:

- 1) справедлива Гіпотеза Рімана;
- б) функція $\frac{z-\frac{1}{2}}{(z+\frac{1}{2})^2} \zeta(z+\frac{1}{2})$ є циклічною в $H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$ хоча б для одного $\sigma > 0$;
- 7) рівняння

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau) g_\zeta(w) dw = 0, \tau \leq 0,$$

де функція g_ζ визначається в умові 3), має лише нульовий розв'язок $f \in E^2[D_\sigma]$ хоча б для одного $\sigma > 0$;

8) рівняння (1) не має розв'язків виду $f(w) = e^{zw}$, $0 < \operatorname{Re} w < 1/2$;

9) система $\{g_\zeta(w-\tau : \tau \leq 0)\}$ є повною у просторі $E_*^2[D_\sigma]$.

Доведення. За теоремою 1 умова 1) еквівалентна умові 5) теореми 1. А за теоремою Берлінга-Лакса маємо, що функція $\frac{z-\frac{1}{2}}{(z+\frac{1}{2})^2} \zeta(z+\frac{1}{2})$ не має

нулів в $\mathbb{C}_+$, її сингулярна гранична функція є сталою і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{x-1/2}{(x+1/2)^2} \zeta(x+1/2) \right|}{x} = 0.$$

Тоді з наслідку випливає еквівалентність умов 1) і 6) теореми 2. Еквівалентність умови 6) теореми 2 умовам 7), 8) і 9) встановлена в [9].

Приклад. Існують функції $f \in E^2[D_\sigma]$ та $g \in E_*^2[D_\sigma]$, що виконується рівність

$$\int_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)dw = 0, \tau \leq 0,$$

але $f(w+\tau) \notin E^2[D_\sigma]$, $f(w+\tau) \notin E_*^2[D_\sigma]$. Справді, розглянемо функцію

$$G(z) = \frac{1 - \cos \sigma z}{z} \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+),$$

тоді

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \sigma x}{x} e^{-wx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{w^2} \right), \operatorname{Re} \sigma > 0,$$

(див. [10]). Очевидно, що $z_1 = (2\pi)/\sigma$ – нуль функції G . Особливими точками функції $g \in w_{1,2} \pm i\sigma$ і $w_3 = 0$. Функція $f(w) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}w} \in E^2[D_\sigma]$ є розв'язком рівняння згортки (див. [9]). Але якщо $w = u$, $u > 0$, то

$$f(u)g(u) = e^{\frac{2\pi}{\sigma}u} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{u^2} \right) \sim$$

$$\sim e^{\frac{2\pi}{\sigma}u} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma^2}{u^2} = c \frac{e^{c_1 u}}{u^2} \rightarrow \infty,$$

при $u \rightarrow \infty$. Тому $f(u)g(u) \notin L^1(0; +\infty)$, а отже, $f(w)g(w) \notin E_*^1[D_\sigma]$ для жодного $\sigma > 0$. Функція g також не є цілою, тому не може виконуватися умова $f(w)g(w) \in E^1[D_\sigma]$.

Цей приклад показує труднощі, які виникають при спробі довести Гіпотезу Рімана за допомогою умови 7) теореми 2.

Бібліографія

- [1] Nyman B., "On some groups and semigroups of translations", Thesis, Uppsala, 1950.
- [2] Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . – М.: Наука, 1984. – 368 с.
- [3] Burnol J.-F. An adelic causality problem related to abelian L-functions // J. Number Theory. – 2001. – 87. P. 432–428.
- [4] Никольский Н.К. Лекции об операторе сдвига. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
- [5] Винницький Б.В. О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 5. – С. 484–500.
- [6] Седлецкий А.М. Эквивалентное определение пространств в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сборн. – 1975. – 96, № 1. – С. 75–82.
- [7] Винницький Б.В., Дильный В.М. Об обобщении теоремы Берлинга-Лакса // Мат. заметки – 2006. – 79, № 3. – С. 362–268.
- [8] Дильный В.М. Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Доп. НАН України. Матем. – 2008. – № 11. – С. 7–10.
- [9] Винницький Б.В. Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних у півплощині // Матем. студ. – 1997. – 7, №1. – С. 41–52.
- [10] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – 6-е изд. – М.: Наука, 1986. – 172 с.
- [11] Fedorov M.A., Grishin A.F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane // Math. Physics, Anal. and Geom. – 1998. – 1. – P. 223–271.
- [12] Винницький Б.В., Дильный В.М. Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Matematychni Studii – 2001. – 16, № 1. – С. 61–70.