

УДК 517.5

Про необхідні умови повноти систем експонент з вагою

Винницький Б. В., Шаповаловський О. В.

shap.ov@mail.ru

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
кафедра матаналізу, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Отримано нові необхідні умови повноти систем експонент $\left\{ \exp \left(-\alpha |t|^{p(|t|)} - it\lambda_n \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ в просторі $L^2(-\infty; +\infty)$.

Питання про повноту $\left\{ \exp \left(-\alpha |t|^p - it\lambda_n \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ системи в просторі $L^2(-\infty; +\infty)$ розглядали Б. Факсен [1], Р. Залік [2, 3], А.М. Седлецкий [4].

Нехай (λ_n) – послідовність різних додатних чисел, таких що $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$, $p(t)$ – уточнений порядок, тобто така диференційовна на $[0; +\infty)$ функція, для якої $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} tp'(t) \ln t = 0$. Далі вважаємо, що $p > 1$. Тоді функція $\eta(t) = t^{p(t)-1}$ є зростаючою при $t \geq t_0$. Нехай $q(t) = 1 + (\ln \eta^{-1}(t))/\ln t$, де $\eta^{-1}(t)$ – функція, обернена до $\eta(t)$. Тоді $q(t)$ – уточнений порядок, $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} tq'(t) \ln t = 0$ і $1/p + 1/q = 1$. Крім цього, $\eta^{-1}(t) = t^{q(t)-1}$. Через $K_1, K_2(\varepsilon)$ і т.д. позначаємо додатні сталі.

Нашою метою є доведення такого твердження.

Теорема 1. Якщо $\alpha > 0$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ і

$$\Delta_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{q(\lambda_n)}} < \frac{(p\alpha)^{1-q}}{\pi q} \left(\sin \frac{\pi}{2q} \right)^q, \quad (1)$$

то система

$$\left\{ \exp \left(-\alpha |t|^{p(|t|)} - it\lambda_n \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

не є повною в просторі $L^2(-\infty; +\infty)$.

У випадку $p(t) \equiv p$ дана теорема доведена А.М. Седлецким [4]. Наше доведення подібне до доведення наведеного в [4], але ми не можемо використати, як в [4] результат К.І. Бабенка [5], оскільки він встановлений для $p(t) \equiv p$. Крім того, нам також знадобляться наступні дві лема, отримані в [4].

Лема 1. Нехай $q > 1$ – ціле число, $1/p + 1/q = 1$, $h(\theta) = -\cos q\theta$, коли q – парне число, якщо ж q – непарне число, то нехай $h(\theta)$ – π -періодична функція, визначена умовами

$$h(\theta) = \begin{cases} -\cos q\theta, & 0 \leq \theta < 3\pi/2q, \\ |\cos q\theta|, & 3\pi/2q \leq \theta \leq \pi/2, \end{cases}$$

$h(\pi/2 + \theta) = h(\pi/2 - \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Тоді функція $h(\theta)$ є тригонометрично q -опуклою і $|\sin q\theta| + h(\theta)tg(\pi/2p) \leq (\sin(\pi/2q))^{-q} |\sin \theta|^q$, $0 \leq \theta < 2\pi$, а також для будь-якого $\gamma_0 > 0$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що коли $0 \leq \theta < 2\pi$, то

$$|\sin q\theta| + h(\theta)tg(\pi/2p) + \varepsilon \leq$$

$$\leq (1 + \gamma_0)(\sin(\pi/2q))^{-q} |\sin \theta|^q, \theta \in (0; 2\pi).$$

Лема 2. Нехай $q > 1$ – не ціле число, m_0 – натуральне число, підібране так, щоб

$$2 < 1/q + q/m_0 < 4, \quad (3)$$

$H^*(\theta)$ – π/m_0 -періодична функція, визначена на проміжку $[0; \pi/m_0]$ рівністю $H^*(\theta) = \cos(q\theta - \pi q/2m_0)/\sin(\pi q/2m_0)$, $h(\theta)$ – π/m_0 -періодична функція, визначена на проміжку $[0; \pi/2m_0]$ умовами

$$h(\theta) = - \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{m_0} \right) \right) / \left(\sin \frac{\pi}{2q} \sin \frac{\pi q}{2m_0} \right) \right) \times \\ \times \cos q\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2m_0},$$

$$h \left(\frac{\pi}{2m_0} + \theta \right) = h \left(\frac{\pi}{2m_0} - \theta \right), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2m_0}.$$

Тоді $h(\theta)$ є тригонометрично q -опуклою функцією,

$$H^*(\theta) + h(\theta) \leq (\sin(\pi/2q))^{-q} |\sin \theta|^q, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

і для будь-якого $\gamma_0 > 0$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$H^*(\theta) + h(\theta) + \varepsilon \leq (1 + \gamma_0)(\sin(\pi/2q))^{-q} |\sin \theta|^q, \\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

У [4] показано, що число m_0 , яке задовольняє умову (3), існує.

Доведення теореми 1. Потрібно показати, що існує функція $v \neq 0$, $v \in L^2(-\infty; +\infty)$, для якої виконується

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp(-\alpha |t|^{p(|t|)} - it\lambda_n) dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n(t)}{tq(t)} = \Delta_q.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли q – ціле. Нехай $F(z) = G(z)f(z)$, де функція $G(z)$ має нулі в точках λ_n і індикатор $h_G(\theta) = \pi \Delta_q |\sin(q\theta)|$. Така функція існує [6] і має вигляд

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2q}}{\lambda_n^{2q}} \right),$$

і для неї справедлива оцінка

$$|G(z)| \leq \frac{K_1(\varepsilon)}{1+|z|^2} \exp \left\{ (\pi \Delta_q |\sin(q\theta)| + \varepsilon/2) |z|^{q(|z|)} \right\}. \quad (4)$$

Нехай $h(\theta)$ – функція з лема 1. Вона є 2π -періодичною і тригонометрично q -опуклою. Те ж саме можна сказати про функцію $h_0(\theta) = \pi \Delta_q \operatorname{tg}(\pi/(2p)) h(\theta)$, оскільки множник при $h(\theta)$ є додатним. Отже, [7, 8], існує ціла функція $f(z)$ з індикатором $h_0(\theta)$ при уточненому порядку $q(t)$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ одержуємо

$$|f(z)| \leq K_2(\varepsilon) \times \exp \left\{ \left(\pi \Delta_q \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2p} \right) h(\theta) + \varepsilon/2 \right) |z|^{q(|z|)} \right\}. \quad (5)$$

З (4) і (5) при $0 \leq |\theta| \leq \pi$ для функції $F(z) = G(z)f(z)$ отримуємо оцінку

$$|F(z)| \leq \frac{K_3(\varepsilon)}{1+|z|^2} \exp \left\{ (\pi \Delta_q |\sin(q\theta)| + \pi \Delta_q \operatorname{tg}(\pi/(2p)) h(\theta) + \varepsilon) |z|^{q(|z|)} \right\}.$$

Враховуючи лему 1, для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ маємо

$$|F(z)| \leq \frac{K_3(\varepsilon)}{1+|z|^2} \times \exp \left\{ \left(\pi \Delta_q (\sin(\pi/2q))^{-q} |\sin \theta|^q + \varepsilon \right) |z|^{q(|z|)} \right\}. \quad (6)$$

Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується

$$|F(z)| \leq \frac{K_3(\varepsilon)}{1+|z|^2} \times \exp \left\{ (\Delta_q + \varepsilon) \pi (\sin(\pi/2q))^{-q} |y|^{q(|y|)} \right\}. \quad (7)$$

Згідно з лемою 1 функція $h(\theta)$ є неперервною і від'ємною при $0 \leq |\theta| \leq 3\pi/(2q)$. Тому за деякого $\gamma_0^* > 0$ для всіх θ , $0 \leq |\theta| \leq 3\pi/(4q)$, виконується

$$|f(z)| \leq \exp \left\{ -\gamma_0^* |z|^{q(|z|)} \right\}. \quad (8)$$

Візьмемо $\varepsilon_1 > 0$ настільки малим, щоб $\gamma_1 = \gamma_0^* - \varepsilon_1 > 0$. Тоді, для такого $\varepsilon_1 > 0$ можна підібрати δ , $0 < \delta < 3\pi/(4q)$ настільки малим, що при $z = r \exp(i\theta)$ і $|\theta| \leq \delta$

$$|G(z)| \leq \frac{K(\varepsilon_1)}{1+|z|^2} \exp \left\{ \varepsilon_1 |z|^{q(|z|)} \right\},$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad z = r \exp(i\theta), \quad |\theta| \leq \delta.$$

Тоді

$$|F(z)| \leq \frac{K(\varepsilon_1)}{1+|z|^2} \exp \left\{ (\varepsilon_1 - \gamma_0^*) |z|^{q(|z|)} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{K(\varepsilon_1)}{1+|z|^2} \exp \left\{ -\gamma_1 |y|^{q(|y|)} \right\}.$$

А це означає, що оцінка (6) є справедливою, якщо $|\theta| \leq \delta$. Аналогічно показується справедливість цієї оцінки в кутах $\pi - \delta < |\theta| \leq \pi$. При $\delta < |\theta| \leq \pi - \delta$ справедливість (6) випливає з (5), оскільки $t^{q(t)} = t^{ql(t)}$, де $l(t)$ – повільно зростаюча функція, і, отже,

$$|z|^{q(|z|)} = \left| \frac{y}{\sin \theta} \right|^q l \left(\left| \frac{y}{\sin \theta} \right| \right) \leq \leq (1 + o(1)) \frac{|y|^{q(|y|)}}{|\sin \theta|^q}, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Тому (6) справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$. Нехай

$$v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{iy-\infty}^{iy+\infty} F(z) \exp(itz) dz.$$

Із (6) випливає, що цей інтеграл від $y \in \mathbb{R}$ не залежить. Тому

$$v_0(t) e^{ty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) \exp(itx) dx, \quad (9)$$

тобто функцію $v_0(t) e^{ty}$ при фіксованому $y \in \mathbb{R}$ можна розглядати як перетворення Фур'є функції $F(x + iy)$. Отже,

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(t) \exp(ty - itx) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(t) \exp(-itz) dt. \quad (10)$$

Очевидно, що $v_0 \in L^2(-\infty; +\infty)$. Переконаємось, що і $v \in L^2(-\infty; +\infty)$, де $v(t) = v_0(t) \exp(\alpha |t|^{p(|t|)})$. З (7) і (9) для всіх $t \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ маємо

$$|v_0(t)| \leq K_4(\varepsilon) \times \exp \left\{ (\Delta_q + \varepsilon) \pi (\sin(\pi/2q))^{-q} |y|^{q(|y|)} - ty \right\}.$$

Тоді для всіх $t \in \mathbb{R}$ і всіх $y \in \mathbb{R}$

$$|v(t)| \leq K_4(\varepsilon) \times \exp \left\{ (\Delta_q + \varepsilon) \pi (\sin(\pi/2q))^{-q} |y|^{q(|y|)} - ty + \alpha |t|^{p(|t|)} \right\}. \quad (11)$$

Покажемо, що $v \in L^2(0; +\infty)$. Завдяки (1) можна вибрати $\delta_* > 0$ так, щоб

$$\Delta_q < \frac{(p\alpha)^{1-q}}{\pi q} \left(\sin \frac{\pi}{2q} \right)^q (1 - \delta_*). \quad (12)$$

Візьмемо в (11) $y = \alpha p \eta(t)$. Тоді, враховуючи, що $\eta(t) = t^{p(t)-1}$ і $\eta^{-1}(t) = t^{q(t)-1}$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $t \geq t_0(\varepsilon)$ виконується $\eta^{-1}(ct) \leq c^{q-1}(1+\varepsilon)\eta^{-1}(t)$, маємо

$$y^{q(y)} = (\alpha p \eta(t))^{(\alpha p \eta(t))} = \alpha p \eta(t) \eta^{-1}(\alpha p \eta(t)) \leq (\alpha p)^q (1+\varepsilon) t \eta(t) = (\alpha p)^q (1+\varepsilon) t^{p(t)}, \quad t \geq t_0(\varepsilon).$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ так, щоб $(1+\varepsilon)(1-\delta_*) + \varepsilon \chi < 1$, де $\chi = \pi \left(\sin \frac{\pi}{2q} \right)^{-q} (p\alpha)^{q-1} p(1+\varepsilon)(p-1)^{-1}$. Тоді

$$|v(t)| \leq K_4(\varepsilon) \exp \left\{ (\Delta_q + \varepsilon) \pi (\sin(\pi/2q))^{-q} (\alpha p)^q \times \right. \\ \left. \times (1+\varepsilon) t^{p(t)} - \alpha p t^{p(t)} + \alpha t^{p(t)} \right\} \leq \\ \leq K_4(\varepsilon) \exp \left\{ \alpha t^{p(t)} \left(\Delta_q \pi (\sin(\pi/2q))^{-q} (\alpha p)^{q-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times p(1+\varepsilon) - p + 1 + \varepsilon(p-1)\chi \right) \right\}.$$

Враховуючи (12) і рівність $1/p + 1/q = 1$, знаходимо

$$|v(t)| \leq K_4(\varepsilon) \exp \left(\alpha t^{p(t)} \times \right. \\ \left. \times \left((1-\delta_*) (1+\varepsilon) \frac{p}{q} - p + 1 + \varepsilon(p-1)\chi \right) \right) \leq \\ \leq K_4(\varepsilon) \exp \left(\alpha t^{p(t)} ((1-\delta_*) (1+\varepsilon) + \varepsilon \chi - 1) \times \right. \\ \left. \times (p-1) \right).$$

Але $(1-\delta_*) (1+\varepsilon) + \varepsilon \chi - 1 < 0$, тому

$$|v(t)| \leq K_4(\varepsilon) \exp \left(\xi_* t^{p(t)} \right), \quad t \geq 0, \quad \xi_* < 0.$$

Таким чином, $v \in L^2(0; +\infty)$. Аналогічно, взявши в (11) $y = -\alpha p \eta(|t|)$, одержуємо, що

$$|v(t)| \leq K_4(\varepsilon) \exp \left(\xi_* |t|^{p(|t|)} \right), \quad t \leq 0, \quad \xi_* < 0.$$

Унаслідок цього, приходимо до висновку, що $v \in L^2(-\infty; +\infty)$, і з (10) одержуємо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp(-\alpha |t|^{p(|t|)} - it\lambda_n) dt = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(t) \exp(-it\lambda_n) dt = \sqrt{2\pi} F(\lambda_n) = 0,$$

і тому система (2) не є повною в $L^2(-\infty; +\infty)$.

Нехай тепер q – неціле. Підберемо таке натуральне m_0 , щоб виконувалась умова (3). Подібно, як і в [4], покладемо $M = \{\mu_n\} = \bigcup_{k=0}^{2m_0-1} \Lambda e^{i \frac{k\pi}{m_0}}$, де $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$, $\lambda_n > 0$. Як і в [4], множина $\{\mu_n\}$ має кутову щільність при уточненому порядку $q(t)$, а індикатор цілої функції

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n} \right) \exp \left(\sum_{k=1}^{p_0} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\mu_n} \right)^k \right),$$

$$\rho_0 = [q],$$

має вигляд

$$h_G(\theta) = \frac{\pi \Delta_q}{\sin \left(\frac{\pi q}{2m_0} \right)} \cos \left(q \left(\theta - \frac{\pi}{2m_0} \right) \right),$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{m_0},$$

а на решту значень θ продовжується $\left(\frac{\pi}{m_0} \right)$ - періодично (завдяки симетрії коренів). В позначеннях леми 2 $h_G(\theta) = \pi \Delta_q H^*(\theta)$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$|G(z)| \leq \frac{K_5(\varepsilon)}{1+|z|^2} \exp \left\{ \left(\pi \Delta_q H^*(\theta) + \frac{\varepsilon}{2} \right) |z|^{q(|z|)} \right\},$$

$$z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}.$$

Нехай $h(\theta)$ – функція з леми 2. Вона є 2π -періодичною і тригонометрично q -опуклою. Те ж саме можна сказати про функцію $\pi \Delta_q h(\theta)$, оскільки множник при $h(\theta)$ є додатним. Отже [9], існує ціла функція $f(z)$ з індикатором $\pi \Delta_q h(\theta)$ при уточненому порядку $q(r)$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ одержуємо

$$|f(z)| \leq K_6(\varepsilon) \times \\ \times \exp \left(\left(\pi \Delta_q h(\theta) + \frac{\varepsilon}{2} \right) |z|^{q(|z|)} \right).$$

Отже, для функції $F(z) = f(z)G(z)$, яка перетворюється в 0 в точках λ_n , отримуємо оцінку

$$|F(z)| \leq \frac{K_7(\varepsilon)}{1+|z|^2} \times \quad (13)$$

$$\times \exp \left\{ \left(\pi \Delta_q H^*(\theta) + \pi \Delta_q h(\theta) + \varepsilon \right) r^{q(r)} \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Згідно з лемою 2, функція $H^*(\theta) + h(\theta)$ – неперервною і від'ємною [4], якщо $|\theta| < \delta_4$ і $\pi - \delta_4 < |\theta| \leq \pi$. Тому, як і раніше, при деякому $\gamma_2 > 0$ для всіх θ , $|\theta| < \delta_4$, виконується

$$|F(z)| \leq \frac{K_7(\varepsilon)}{1+|z|^2} \exp \left(-\gamma_2 |z|^{q(|z|)} \right) \leq \\ \leq \frac{K_7(\varepsilon)}{1+|z|^2} \exp \left(-\gamma_2 |y|^{q(|y|)} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

А це означає, що оцінка (7) справедлива при $|\theta| < \delta_4$. Аналогічно показується справедливості цієї оцінки в кутах $\pi - \delta_4 < |\theta| \leq \pi$. Тому, з (13), як і раніше, отримуємо (7). Отже, як і у випадку цілого q , приходимо до висновку, що система (1) не є повною. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай $\alpha > 0$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Тоді, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^{q(\lambda_n)}} > \frac{(p\alpha)^{1-q}}{\pi q} \left(\sin \frac{\pi}{2q} \right)^q, \quad (14)$$

то система (2) є повною в $L^2(-\infty; +\infty)$.

Доведення теореми 2. Припустимо супротивне, тобто що система (2) не є повною в $L^2(-\infty; +\infty)$. Тоді знайдеться функція $v \in L^2(-\infty; +\infty)$, $v \neq 0$, така, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp(-\alpha |t|^{p(|t|)} - it\lambda_n) dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp(-\alpha |t|^{p(|t|)} - itz) dt, \quad z = x + iy.$$

Функція f є цілою, $f \neq 0$ і $f(\lambda_n) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\text{Im} z = y \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \exp(-2\alpha |t|^{p(|t|)} + 2ty) dt \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^0 \exp(-2\alpha |t|^{p(|t|)}) dt \leq K_8 < +\infty \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} & |f(z)| \leq \|v\| \times \\ & \times \left(\int_0^{+\infty} \exp(-2\alpha |t|^{p(|t|)} + 2t(y - ix)) dt + K_8 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \|v\| \left(\sup_{t \geq 0} \left(\exp(-2\alpha |t|^{p(|t|)} + 2t(y + 1)) \right) \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{+\infty} \exp(-2t) dt + K_8 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Останній супремум досягається при $t = \eta^{-1}(y/(\alpha(p + o(1))))$, $y \rightarrow +\infty$. Тому з (15) отримуємо

$$|f(z)| \leq \|v\| \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2} \exp \left(y \eta^{-1}(y) \frac{1 + o(1)}{q(\alpha p)^{1/(p-1)}} \right) + K_8 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq K_9 \exp \left(\frac{(p-1)y \eta^{-1}(y)}{\alpha^{1/(p-1)} p^{p/(p-1)}} (1 + o(1)) \right),$$

$$y \rightarrow +\infty.$$

Оцінку $f(z)$ при $y < 0$ отримуємо аналогічно. Тому, рівномірно за $x \in \mathbb{R}$

$$|f(z)| \leq K_{10} \exp \left(\frac{(p-1)|y| \eta^{-1}(|y|)}{\alpha^{1/(p-1)} p^{p/(p-1)}} (1 + o(1)) \right),$$

$$|y| \rightarrow +\infty,$$

звідки, враховуючи рівність $\eta^{-1}(t) = t^{q(t)-1}$, отримуємо

$$|f(z)| \leq K_{10} \exp \left(\frac{(p-1)|y|^{q(|y|)}}{\alpha^{1/(p-1)} p^{p/(p-1)}} (1 + o(1)) \right), \quad (16)$$

$$|y| \rightarrow +\infty.$$

У [10] доведено, що коли ціла функція f має нулі в точках λ_n , виконуються умови (14) і (16), то $f(z) \equiv 0$. Отже, $v \neq 0$. Тому маємо суперечність, чим і завершується доведення теореми 2.

Бібліографія

- [1] Faxen B. On approximation by translates and related problems in function theory // Ark. Math. – 1981. – 19, №2. – P. 271–289.
- [2] Zalik R. On approximation by shifts and a theorem of Wiener // Trans. Amer. Math. Soc. – 1978. – 243. – P. 299–308.
- [3] Zalik R. On some gap theorems and the closure of translates // Notic. Amer. Math. Soc. – 1978. – 25, №2. – P. A–314.
- [4] Седлецкий А.М. Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ // Мат. сб. – 1984. – 123, №1. – С. 92–107.
- [5] Бабенко К.И. Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций // Труды Моск. матем. об-ва. – 1956. – №5. – С. 523–542.
- [6] Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.
- [7] Бойчук В.С. Простое построение целой функции с заданным индикатором относительно заданного целого уточненного порядка // Функ. анализ и его прилож. – 1988. – Вып. 5. – С. 136–138.
- [8] Логвиненко В.Н. Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке // Функ. анализ и его прилож. – 1972. – 6, №4. – С. 87–88.
- [9] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
- [10] Винницький Б.В., Шаповаловський О.В. Про одну теорему єдності для цілих функцій, пов'язану з повнотою систем експонент з вагою на осі // Математичні Студії. – 2005. – 23, №2. – С. 161–168.