

УДК 536.12:621.891

# **Моделювання та аналіз нестационарних теплових процесів унаслідок дії рухомих зон локального нагріву**

Іваник Є. Г., Сікора О. В., Остапчук Л. А.

informatyka@drohobych.net

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, кафедра інформатики та обчислювальної математики, вул. Стрийська 3, м. Дрогобич, 82100

Розглядається застосування апроксимаційного методу при моделюванні та аналізі нестационарних теплових процесів унаслідок дії рухомих зон локального нагріву на основі трьохмірних рівнянь математичної фізики. Послідовне застосування скінченного косинус-перетворення Фур'є, інтегрального перетворення Ганкеля по радіальній координаті і Лапласа по часу зводиться до розв'язку диференціального рівняння другого порядку. Проведено числовий аналіз кінетики теплових процесів на локальних ділянках при дії "гарячої плями" нагріву по поверхні півпростору.

Визначення і дослідження розвитку нестационарних просторових полів температури, зумовлених рухомими локально-концентрованими зонами нагріву є важливою задачею технологічної термомеханіки, що вивчає процеси зварювання, шліфування, наплавки, термічної різки, пайки, імпульсного зміцнення, тощо.

На даний час досить тяжко розраховувати на можливість точної математичної постановки і розв'язку проблеми усестороннього вивчення теплових явищ при різного роду технологічних процесах, оскільки це спряжено з труднощами, пов'язаними з рухомістю зон нагріву, а також видом теплових потоків, зумовлених особливостями нових сучасних технологій. Розглянемо алгоритм розрахунку перехідних процесів місцевого (локального) підвищення температури поверхні півбезмежного тіла при рівномірному русі по ньому кругової "гарячої плями" (ГП). Нехай джерело тепла в формі круга  $r^2 = x^2 + y^2 \leq a^2$  рухається зі сталою швидкістю  $V$  вздовж осі  $Ox$  поверхнею  $z = 0$  півбезмежного тіла. Припускається, що початок прямокутної декартової системи координат  $Oxyz$  розміщено в центрі цього круга. Інтенсивність теплового потоку змінюється відповідно до  $q(r) = q_0 q^*(r)$ , решта частина граничної поверхні теплоізолювана. Слід знайти просторово-часовий розподіл температурного поля у системі при тривалості дії ГП на протязі часу від 0 до  $t_s$ .

Для визначення нестационарного температурного поля в півпросторі  $z \geq 0$  маємо рівняння теплопровідності [1]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{V}{k} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

яке підстановкою

$$T = \Theta e^{-\frac{Vx}{2k}} \quad (2)$$

зводиться до такого вигляду

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} - \left(\frac{V}{2k}\right)^2 \Theta = \frac{1}{k} \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (3)$$

Перейшовши до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$  та поклавши  $\rho = r/a$ ,  $\varsigma = z/a$ ,  $Pe = Va/2k$ , замість рівнянь (1) та (3) приходимо до

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Theta - Pe^2 \Theta = \frac{a^2}{k} \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \quad (4)$$

Тоді математичну модель процесу локального підвищення температури в зоні ГП сформулюємо як крайову задачу для диференціального рівняння теплопровідності (4) при крайових умовах типу

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma} = \begin{cases} -\Lambda q^*(\rho) e^{Pe \rho \cos \varphi} H(t_s - t), & \rho \leq 1, \varsigma = 0, \\ 0, & \rho > 1, \varsigma = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\Lambda = \frac{\gamma f V P_m}{\pi a K};$$

$$\Theta(\rho, \varphi, \varsigma, t) = \Theta(\rho, \varphi + 2\pi, \varsigma, t); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=0} = \frac{\partial \Theta}{\partial \varsigma} \Big|_{\varphi=\pi}; \quad (7)$$

$$|\Theta(r, \varphi, z, t)| < \infty, \quad \Theta(r, \varphi, z, 0) = 0. \quad (8)$$

Послідовне застосування до рівняння (4) при врахуванні крайових умов (6)-(8), скінченного косинус-перетворення Фур'є по змінній  $\varphi$ , інтегрального перетворення Ганкеля по радіальній координаті і Лапласа по часу приводить до такого рівняння в просторі зображень:

$$\frac{d^2 \bar{\bar{\Theta}}}{d\varsigma^2} - \kappa^2 \bar{\bar{\Theta}} = 0, \quad (9)$$

де

$$\bar{\bar{\Theta}}(\xi, n, z, s) = \int_0^\infty e^{-st} \bar{\bar{\Theta}}(\xi, n, z, t) dt, \quad (10)$$

$$\bar{\Theta}(\xi, n, z, t) = \int_0^\infty \rho \tilde{\Theta}(r, n, z, t) J_n(\xi \rho) d\rho, \quad (11)$$

$$\psi_n(\xi, Pe) = \xi J_{n+1}(\xi) I_n(Pe) + Pe J_n(\xi) I_{n+1}(Pe), \quad (18)$$

дає

$$\tilde{\Theta}(r, n, z, t) = \int_0^{2\pi} \Theta(r, \varphi, z, t) \cos n\varphi d\varphi, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \varsigma} = -\frac{2\pi\Lambda H(t_s - t)}{\xi^2 + Pe^2} \times \quad (19)$$

$$\varkappa^2 = \xi^2 + Pe^2 + \frac{a^2 s}{k}. \quad (13)$$

$$\times \sum_{j=1}^M q_j^* [\psi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j) - \psi_n(\xi \rho_{j-1}, Pe \rho_{j-1})], \quad \varsigma = 0.$$

Використавши представлення [1]

Остаточно, трансформанта по Лапласу рівності (19) згідно з (10) має вигляд:

$$e^{Pe \rho \cos \varphi} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} I_m(Pe \rho) \cos m\varphi, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\Theta}}}{\partial \varsigma} = -\frac{2\pi\Lambda (1 - e^{-st_s})}{s(\xi^2 + Pe^2)} + \quad (20)$$

причому індекс “штрих” тут і надалі означає, що перший доданок ряду (14) слід помножити на множник 1/2 і, застосовуючи до умови (5) скінчене косинус-перетворення Фур’є (12), отримуємо

$$+ \sum_{j=1}^M q_j^* [\psi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j) - \psi_n(\xi \rho_{j-1}, Pe \rho_{j-1})], \quad \varsigma = 0.$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \varsigma} = \begin{cases} -2\pi q_0 q^*(\rho) I_n(Pe \rho) H(t_s - t), & \rho \leq 1, \varsigma = 0, \\ 0, & \rho > 1, \varsigma = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Розв’язуючи рівняння (9) при умові (20) та умові зникання зображення температури, яка впливає з (8), знаходимо

Оскільки побудова точного розв’язку крайової задачі (4)–(8) при довільному законі  $q^*(r)$  зміни інтенсивності потужності рухомого теплового потоку складає значні математичні труднощі, використаємо апроксимацію функції  $q^*(r)$  при допомозі фінітних кусково-сталіх функцій виду

$$\bar{\bar{\Theta}}(\xi, n, z, s) = \frac{2\pi\Lambda (1 - e^{-st_s}) e^{-\varkappa \varsigma}}{s \varkappa (\xi^2 + Pe^2)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^M q_j^* [\psi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j) - \psi_n(\xi \rho_{j-1}, Pe \rho_{j-1})]. \quad (21)$$

Використавши інтеграл Дюгамеля [3] та враховуючи, що функція  $e^{-\varkappa \varsigma} / (s \varkappa)$ , де  $\varkappa$  дається формулою (13), має табличний оригінал по Лапласу [4]

$$q^*(\rho) = \sum_{j=1}^M q_j^* \varphi_j(\rho), \quad q_j^* = q^* \left( \frac{\rho_{j-1} + \rho_j}{2} \right),$$

$$\varphi_j(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \in [\rho_{j-1}, \rho_j], \\ 0, & \rho \notin [\rho_{j-1}, \rho_j], \end{cases} \quad (16)$$

де  $\rho_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) – точки рівномірної сітки розбиття відрізка  $[0, \rho]$ ;  $M$  – кількість точок розбиття.

Тоді гранична умова (15) з врахуванням (16) матиме вигляд:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \varsigma} = \begin{cases} -2\pi\Lambda I_n(Pe \rho) \times \\ \times H(t_s - t) \sum_{j=1}^M q_j^* \varphi_j(\rho), & \rho \leq 1, \varsigma = 0, \\ 0, & \rho > 1, \varsigma = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Застосування до виразу (17) інтегрального перетворення Ганкеля (11) та врахування значення інтеграла [2]

$$\int_0^{\rho_j} \rho I_n(Pe \rho) J_n(\xi \rho) d\rho = \frac{\psi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j)}{\xi^2 + Pe^2},$$

$$L^{-1} \left( \frac{e^{-\varkappa \varsigma}}{s \varkappa} \right) = \frac{\Phi(\xi, \varsigma, Fo, Pe)}{2(\xi^2 + Pe^2)^{1/2}},$$

$$\Phi(\xi, \varsigma, Fo, Pe) = e^{-\varsigma \sqrt{\xi^2 + Pe^2}} \times$$

$$\times \operatorname{erfc} \left( \frac{\varsigma}{2\sqrt{Fo}} - \sqrt{Fo(\xi^2 + Pe^2)} \right) -$$

$$- e^{\varsigma \sqrt{\xi^2 + Pe^2}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\varsigma}{2\sqrt{Fo}} + \sqrt{Fo(\xi^2 + Pe^2)} \right), \quad (22)$$

з виразу (21) отримуємо

$$\bar{\bar{\bar{\Theta}}}(\xi, n, z, t) =$$

$$= \pi\Lambda \sum_{j=1}^M q_j^* [\varphi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j) - \varphi_n(\xi \rho_{j-1}, Pe \rho_{j-1})] \times$$

$$\times [\Phi(\xi, \varsigma, Fo, Pe) H(Fo) - \Phi(\xi, \varsigma, Fo - Fo_s, Pe) H(Fo - Fo_s)],$$

$$\varphi_n(\xi, Pe) = \frac{\psi_n(\xi, Pe)}{2(\xi^2 + Pe^2)^{3/2}}, \quad Fo_s = \frac{kt_s}{a^2}. \quad (23)$$

Після застосування до (23) формул обернених перетворень Ганкеля і косинус-перетворення Фур'є

$$\tilde{\Theta}(r, n, z, t) = \int_0^\infty \xi \bar{\Theta}(\xi, n, z, t) J_n(\xi \rho) d\xi,$$

$$\Theta(r, \varphi, z, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\Theta}(r, n, z, t) \cos n\varphi$$

знаходимо

$$\begin{aligned} \Theta(r, \varphi, z, t) = & \Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \times \\ & \times \int_0^\infty \xi \sum_{j=1}^M q_j^* [\varphi_n(\xi \rho_j, Pe \rho_j) - \varphi_n(\xi \rho_{j-1}, Pe \rho_{j-1})] \times \\ & \times [\Phi(\xi, \varsigma, Fo, Pe) H(Fo) - \Phi(\xi, \varsigma, Fo - Fo_s, Pe) \times \\ & \times H(Fo - Fo_s)] J_n(\xi \rho) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

З урахуванням заміни (2), температуру в півпросторі в околі ГП при перехідних процесах визначаємо за формулою

$$T(r, \varphi, z, t) = e^{-Pe \rho \cos \varphi} \Theta(r, \varphi, z, t), \quad (25)$$

де  $\Theta(r, \varphi, z, t)$  дається виразом (24).

Вважаючи, що потужність поверхневого джерела стала і рівна  $q = \gamma f V p_0$  з (24) отримуємо такий вираз для функції  $\Theta(r, \varphi, z, t)$

$$\begin{aligned} \Theta(r, \varphi, z, t) = & q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \times \\ & \times \int_0^\infty \xi \varphi_n(\xi, Pe) \Phi(\xi, \varsigma, Fo, Pe) J_n(\xi \rho) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Якщо джерело тепла нерухоме ( $Pe = 0$ ), то має місце осьова симетрія задачі і, отже, в формулі (26) слід обмежитись першим членом ряду ( $n = 0$ ). При цьому функції  $\psi_0$  (18) і  $\varphi_0$  (23) відповідно рівні  $\xi J_1(\xi)$  і  $\xi^{-3} \psi_0(\xi)$ . Тому

$$T(r, z, t) = \frac{\Lambda}{2} \int_0^\infty \xi^{-1} \Phi(\xi, \varsigma, Fo, 0) J_1(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi,$$

що повністю збігається з результатом роботи [5].

Відзначимо, що в усталеному стані нагріву, коли  $t \rightarrow \infty$  ( $Fo \rightarrow \infty$ ) і  $\varsigma = 0$  функція  $\Phi$  (22) рівна 2 і температура поверхні при  $\varsigma = 0$  буде визначатися виразом:

$$T(r, \varphi) = 2\Lambda \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\varphi \int_0^\infty \xi \varphi_n(\xi, Pe) J_n(\xi \rho) d\xi. \quad (27)$$

З формули (27) при  $Pe = 0$  випливає, що

$$T(r) = \Lambda \int_0^\infty \xi^{-1} J_1(\xi) J_0(\xi \rho) d\xi. \quad (28)$$

Інтеграл типу Вебера-Шафхейтліна у правій частині виразу (28) відобразимо з допомогою гіпергеометричної функції  ${}_2F_1$  та еліптичного інтегралу другого роду  $E$  [6]

$$T(r) = \begin{cases} \Lambda \frac{2}{\pi} E(\rho), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \frac{\Lambda}{2\rho} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{\rho^2}\right), & \rho > 1. \end{cases} \quad (29)$$

Значення стаціонарної температури (29) при  $\rho \leq 1$  збігається з результатом М.В. Коровчинського [7]. Максимальне значення цієї температури досягається в центрі нерухомої ГП і дорівнює

$$T_{\max} = q_0. \quad (30)$$

Одержані залежності (25)–(29) використані при проведенні числового аналізу кінетики теплових процесів на локальних ділянках при дії ГП нагріву по поверхні півпростору.

На рис.1 показано переріз ізотермічних поверхонь поздовжньою площиною  $Oxz$ , яка проходить через вісь руху джерела, а на рис.2 – поперечною площиною  $Oyz$ , що перетинає джерело нагріву.

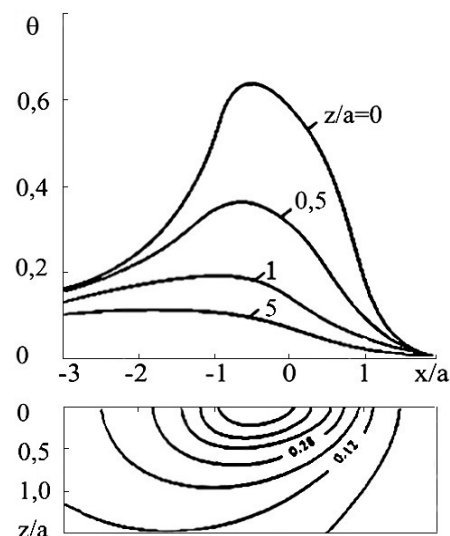


Рис.1.

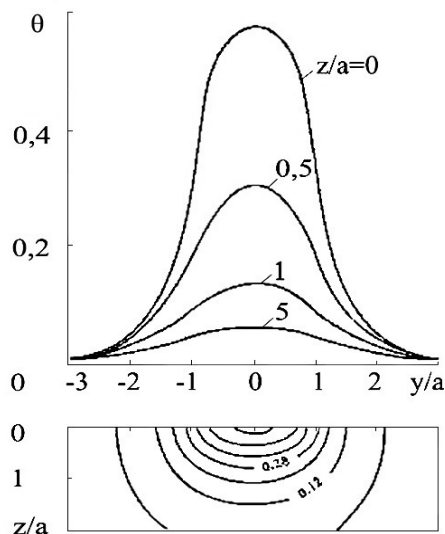


Рис.2.

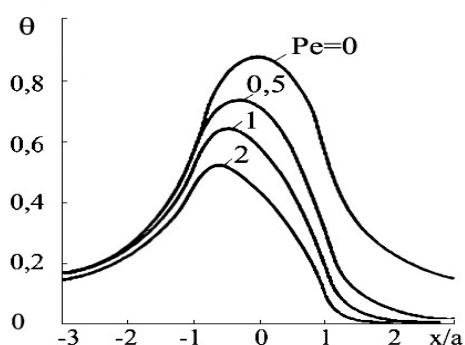


Рис.3.

Тут же відображені криві розподілу температури по осях координат  $Ox$  і  $Oy$  відповідно при чотирьох різних значеннях  $z/a$  віддалі від поверхні нагріву. Графіки побудовано шляхом обчислень за отриманими залежностями (27) (усталений стан нагріву) при  $Pe = 1$ . Безрозмірну температуру визначимо як  $\theta = T/\Lambda$ , де величина  $\Lambda$  дається у відповідності до (5). Видно, що ізотермічні поверхні – це замкнуті поверхні обертання відносно осі  $Ox$ , різко стиснуті в області перед джерелом нагріву. Найближче розміщені до джерела ізотерми на рис.1 та рис.2 мають форму півовалів, витягнутих вздовж джерела і сплюснутих в напрямку осі  $Oz$ . У міру віддалення від джерела форма ізотерм наближається до кругової. Найбільші значення температур та їхніх градієнтів спостерігаються на поверхні тертя в області, в якій розміщено джерело.

Розподіл стаціонарної поверхневої температури по осях  $Ox$  і  $Oy$  у залежності від швидкості переміщення ГП показано на рис.3 та рис.4.

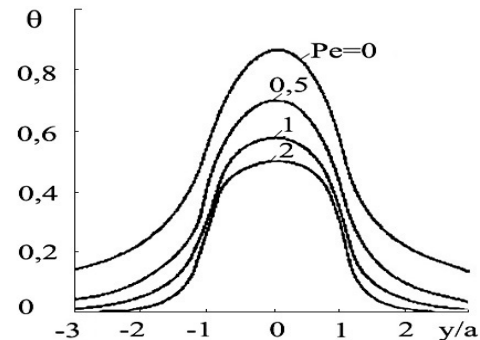


Рис.4.

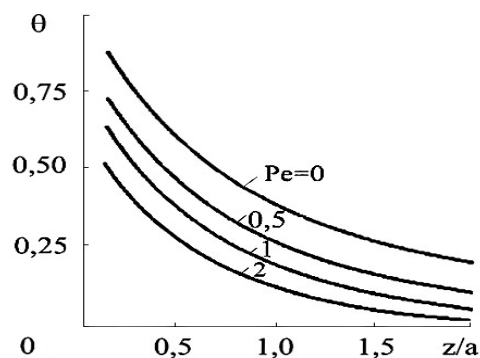


Рис.5.

На цих графіках криві побудовано для чотирьох різних значень критерію Пекле.

Характерною особливістю наведених тут кривих є те, що швидкість переміщення ГП майже не впливає на розподіл усталеної температури по осі  $Ox$  в області за джерелом. У зоні нагрівання і спереду її збільшення швидкості руху ГП приводить до пониження температури і збільшення її градієнта.

На рис.5 показано криві залежності глибини, на якій досягається максимальна стаціонарна температура, від швидкості переміщення ГП. Криві побудовано при тих же значеннях критерія Пекле, що і на рис. 3.

Чим вища швидкість, тим нижче розміщуються криві максимальних температур і тим самим на меншій глибині температурний вплив рухомого джерела є практично не відчутним. Глибина граничного розповсюдження максимального значення температури є найбільшою при нерухомій ГП і зменшується при збільшенні швидкості руху джерела нагріву. Максимальне значення  $\theta$  прямує до 1 при  $Pe = 0$  на граничній поверхні, як і має бути відповідно до формули (30).

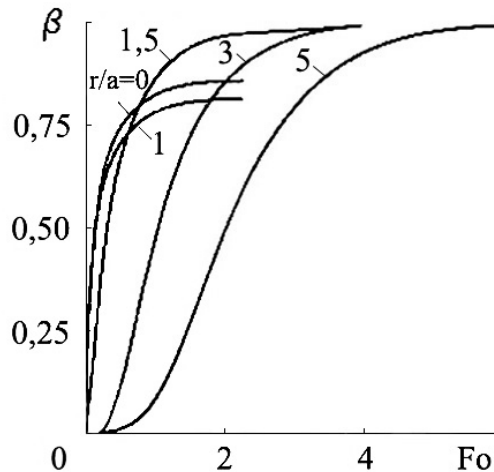


Рис.6.

Процес теплонасичення при нагріві рухомих джерелом тепла, згідно з фундаментальними працями М.М. Рикаліна [8], полягає в тому, що температура підвищується від початкового до температури граничного (усталеного) стану. Коефіцієнт теплонасичення  $\beta$  визначимо як відношення температури, що дається виразом (25) фіксованого елемента поверхні  $z = 0$  в розглядуваний момент часу до стаціонарної температури (27) (у випадку шару скінченної товщини це значення дається формулою (36)). Перехідні процеси, які характеризуються зміною коефіцієнта теплонасичення  $\beta$  в точках поверхні нагріву з декількома різними значеннями радіальної координати  $\rho = r/a$  показано на рис.6. Проведені дослідження показали, що в області нагріву  $\rho \leq 1$  температура майже миттєво досягає значення рівного 87 % від температури в стаціонарному стані. Дальше підвищення температури в цій області відбувається дуже повільно. В зонах, близьких до джерела ( $1 \leq \rho \leq 3$ ), одночасно з нагрівом починається зростання температури, далі швидкість її підвищення загальмовується і температура виділеної зони асимптотично наближається до усталеної ( $\beta \rightarrow 1$ ). У віддалених зонах ( $\rho > 3$ ) помітне зростання температури починається тим пізніше, чим далі вона розміщується від джерела нагріву. Слід відзначити, що найбільш пізніше усталений стан нагріву настає при нерухомому джерелі. При збільшенні швидкості переміщення ГП відбувається більш швидко досягнення стаціонарного стану.

Проводилося також дослідження перехідних процесів охолодження тіла після “відключення” поверхневого джерела тепла в деякий момент часу  $t_s$ . Температурне поле  $T_s$  в процесі охолодження після закінчення нагріву визначалося методом джерел [9] шляхом накладення поля додатного джерела, що діє на проміжку часу від 0 до  $t$  на поле від’ємного джерела, яке діє від 0 до  $t - t_s$  таким чином:

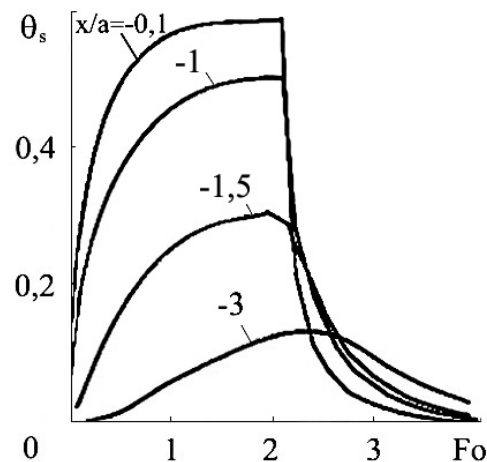


Рис.7.

$$T_s(r, \varphi, z, t) = T(r, \varphi, z, t)H(t) - T(r, \varphi, z, t - t_s)H(t - t_s),$$

де просторовий розподіл температурного поля  $T$  визначається формулою (26), причому у випадку півпростору функція  $\Theta$  дається формулою (25), а у випадку шару – (3.32). Зміна безрозмірної поверхневої температури  $\theta_s = T_s/q_0$  елементів поверхні на осі нагріву в процесі вирівнювання температури після закінчення нагріву тривалістю  $Fo_s = 2$  показано на рис.7.

У точках поверхні, найбільш близьких до джерела, де температура в момент закінчення нагріву близька до граничної, починається інтенсивне її зменшення відразу в момент завершення дії джерела нагріву (криві зі значеннями  $x/a = 0,1$  та  $x/a = 1$ ). У більш віддалених зонах, стан яких далекий від граничного, температура упродовж деякого часу по закінченню нагрівання продовжує зростати за рахунок перерозподілу тепла по тілу, проходить через свій максимум і далі починає спадати. При цьому температура в ділянках тіла, розміщених на різних відстанях від джерела, має тенденцію до вирівнювання.

Отже, проведені числові дослідження показали:

найбільший вплив на температуру та її градієнти спостерігається на поверхні тертя в околі кругової області нагріву  $0 \leq \rho \leq 1,5$ ;

в області нагріву і спереду її збільшення швидкості переміщення ГП приводить до пониження температури та збільшення її градієнтів, а в області позаду джерела швидкість не впливає на розподіл температури;

зі збільшенням швидкості тривалість перехідного процесу локального нагрівання скорочується;

після припинення нагріву найбільш різко охолоджується область  $0 \leq \rho \leq 1$ , яку займає ГП, але перехідний процес від усталеного стану до повного охолодження тут найменш тривалий.

**Бібліографія**

- [1] Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
- [2] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марычев О.М. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
- [3] Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 598 с.
- [4] Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Наука, 1965. – 468 с.
- [5] Yevtushenko A.A., Ivanyk E.G., Sykora O.V. The transitive temperature processes in local friction contact // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1995. – 38, № 13. – P. 2395–2401.
- [6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1986. – 1108 с.
- [7] Коровчинский М.В. Локальный термический контакт при квазистационарном тепловыделении в процессе трения // Теория трения и износа. – М.: Наука, 1965. – С. 73–140.
- [8] Рыкалин Н.Н. Пространственное распределение температуры при дуговой сварке. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1941. – 56 с.
- [9] Рыкалин Н.Н. Тепловые основы сварки. Ч. 1. Процессы распространения тепла при дуговой сварке. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 272 с.