

**Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка**

Руслан Хаць

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В
ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ. Ч. 1.
ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
122 «Комп'ютерні науки», 073 «Менеджмент»,
014 «Середня освіта (Трудове навчання та технології)»,
015 «Професійна освіта (Транспорт)»

**Дрогобич
2025**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 30 квітня 2025 р.)

Рецензенти:

Дільний Володимир Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”;

Матурін Юрій Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск:

Галь Юрій Михайлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Хаць Р.В.

X 28 Вища математика в прикладах і задачах. Ч. 1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія : навч.-метод. пос. Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2025. 181 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни „Вища математика” для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 122 «Комп’ютерні науки», 073 «Менеджмент», 014 «Середня освіта (Трудове навчання та технології)», 015 «Професійна освіта (Транспорт)», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Він містить лекційний матеріал, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи, поточного та підсумкового контролю.

Бібліографія 45 назв

© Руслан Хаць, 2025

© Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2025

Зміст

Основні позначення.....	5
Передмова.....	7
Розділ 1. Лінійна алгебра.....	8
1.1. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.....	8
1.2. Системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.....	10
1.3. Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця.....	12
1.4. Ранг матриці.....	17
1.5. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими.....	20
1.6. Системи m лінійних рівнянь з n невідомими.....	22
1.7. Запитання для самоконтролю.....	25
1.8. Вправи і задачі.....	26
1.9. Індивідуальні завдання.....	35
Розділ 2. Векторна алгебра.....	45
2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами.....	45
2.2. Лінійна залежність векторів. Базис простору. Координати вектора в базисі.....	50
2.3. Системи координат.....	54
2.4. Вектори в системі координат.....	71
2.5. Скалярний добуток векторів.....	73
2.6. Векторний добуток векторів.....	76
2.7. Мішаний добуток векторів.....	79
2.8. Запитання для самоконтролю.....	82
2.9. Вправи і задачі.....	84
2.10. Індивідуальні завдання.....	89
Розділ 3. Аналітична геометрія.....	98
3.1. Рівняння кривої на площині.....	98
3.2. Рівняння прямої на площині.....	99
3.3. Кут між прямими.....	102
3.4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.....	106
3.5. Взаємне розміщення прямих.....	109
3.6. Криві другого порядку.....	110
3.7. Рівняння кола.....	111
3.8. Канонічне рівняння еліпса.....	114
3.9. Канонічне рівняння гіперболи.....	116
3.10. Канонічне рівняння параболи.....	119
3.11. Зведення ліній другого порядку до канонічного вигляду.....	121
3.12. Рівняння поверхні. Лінія у просторі.....	124
3.13. Загальне рівняння площини.....	126

3.14. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках. Рівняння площини паралельної заданим двом векторам, що проходить через задану точку.....	127
3.15. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.....	128
3.16. Рівняння прямої в просторі.....	129
3.17. Кут між прямими у просторі.....	133
3.18. Кут між прямою і площиною.....	135
3.19. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини...	137
3.20. Поверхні другого порядку. Загальне рівняння поверхні. Лінія у просторі.....	139
3.21. Рівняння поверхонь другого порядку.....	141
3.22. Зведення поверхні другого порядку до канонічного вигляду.....	147
3.23. Запитання для самоконтролю.....	149
3.24. Вправи і задачі.....	151
3.25. Індивідуальні завдання.....	165
Список використаних джерел.....	178

Основні позначення

1. $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел.
2. $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел.
3. $\mathbb{N}_0$ або $\mathbb{Z}_+$ – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4. $n; m$ – множина всіх цілих чисел x , які задовольняють нерівність $n \leq x \leq m$.
5. $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел.
6. $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел.
7. $\overline{\mathbb{R}}$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8. $\overline{\mathbb{R}}_0$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ ∞ ”.
9. $\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел.
10. $\emptyset$ – порожня множина.
11. $\forall$ – квантор загальності; $\exists$ – квантор існування.
12. $A \times B$ – декартовий (прямий) добуток множин A і B .
13. $\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – сума чисел.
14. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ – факторіал числа.
15. $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ – добуток чисел.
16. $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.
17. $(a; b)$ – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x < b$.
18. $[a; b]$ – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x \leq b$.
19. $(a; b]$ – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x \leq b$.
20. $[a; b)$ – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x < b$.
21. $\inf H$ – точна нижня межа множини H .
22. $\sup H$ – точна верхня межа множини H .

23. $\min H$ – найменший елемент множини H .
24. $\max H$ – найбільший елемент множини H .
25. $f: H_1 \rightarrow H_2$ – функція з множини H_1 в множину H_2 .
26. $D(f)$ – область визначення функції f .
27. $E(f)$ – множина значень функції f .
28. $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$ – графік функції f в множині $H_1 \times H_2$.
29. $x = \text{Re } z$ – дійсна частина комплексного числа $z = x + iy$.
30. $y = \text{Im } z$ – уявна частина комплексного числа $z = x + iy$.
31. $\arg z$ – головне значення аргументу комплексного числа z .
32. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ – матриця розмірності $m \times n$.
33. $\bar{M}_j^i$ – мінор елемента a_{ij} матриці.
34. $A_j = (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці.
35. $\mathbf{A}^{-1}$ – обернена матриця до матриці $\mathbf{A}$.
36. $\text{rang } \mathbf{A}$ – ранг матриці $\mathbf{A}$.
37. $[AB)$ – промінь з початком в точці A , який містить точку $B \neq A$.
38. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – вектор, який відповідає упорядкованій парі $(A; B)$ точок простору.
39. $|\vec{a}|$ – довжина (модуль) вектора $\vec{a}$.
40. $\varphi = \vec{a}\vec{b}$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
41. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
42. $\vec{a}_b$ – геометрична проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.
43. $d(A_1; A_2)$ – відстань між точками A_1 і A_2 .
44. $\vec{a} \times \vec{b}$ – векторний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
45. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ – мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.
46. $\blacktriangleright$ – кінець доведення.
47. $:=$ – рівне за означенням.

Передмова

Вища математика – це фундаментальна галузь математики, що охоплює широке коло теоретичних і прикладних аспектів, від яких залежить розвиток науки та техніки.

Пропонований навчально-методичний посібник призначений для студентів, які вивчають вищу математику, та містить елементи лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії. Опанування цих знань є необхідним для розуміння складних математичних концепцій і для застосування їх у різних галузях науки та інженерії.

Даний навчально-методичний посібник є доповненим та переробленим виданням посібника [3]. Кожен розділ посібника містить лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, поточного та підсумкового контролю, індивідуальні завдання та методичні рекомендації до їх виконання. Наведено опорні приклади та задачі із розв'язками за темами курсу. Основні означення та термінологія, які використовуються в цьому посібнику, є сталими та загальноприйнятими в подібній навчальній літературі [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 42-45].

Для студентів спеціальностей 122 «Комп'ютерні науки», 073 «Менеджмент», 014 «Середня освіта (Трудове навчання та технології)» та 015 «Професійна освіта (Транспорт)».

Розділ 1. Лінійна алгебра

1.1. Системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

Кожне рівняння з одним невідомим подається у вигляді

$$f(x) = \varphi(x),$$

де $f(x)$ і $\varphi(x)$ – відомі функції. Рівняння з одним невідомим поділяються на різні типи: лінійні, квадратні, кубічні, ірраціональні, логарифмічні, тригонометричні, трансцендентні і т.д..

Приклад 1. Рівняння $x^2 = 3x$ та $ax^2 + bx + c = 0$ є квадратними.

Приклад 2. Рівняння $\sin x = 2\cos^2 x$ є тригонометричним.

Приклад 3. Рівняння $2^x = 4^{x^2+1}$ є показниковим.

Приклад 4. Рівняння $\log_2(1+x) = 3$ є логарифмічним.

Найпростішим рівнянням з одним невідомим є лінійне рівняння
 $ax = b$.

Якщо $a \neq 0$, то таке рівняння має єдиний розв'язок $x = b/a$. Якщо $a = 0$, то таке рівняння має розв'язок тільки у випадку $b = 0$ і при цьому кожне число $x \in \mathbb{R}$ є його розв'язком. Якщо в наведених вище рівняннях символ “=” замінити одним зі символів “<”, “>”, “≥” і “≤”, то отримаємо нерівності відповідного типу.

Лінійним рівнянням з двома невідомими називається рівняння

$$a_1x + a_2y = b.$$

Якщо $b = 0$, то таке рівняння називається однорідним лінійним рівнянням з двома змінними. Якщо $|a_1| + |a_2| \neq 0$, то таке рівняння має нескінченну кількість розв'язків $(x; y)$. Якщо $|a_1| + |a_2| = 0$, то таке рівняння має розв'язок тільки у випадку $b = 0$ і при цьому розв'язком є кожна упорядкована пара $(x; y)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. Розв'язками рівняння $2x + 4y = 6$ є всі упорядковані пари $(x; y)$, де $x \in \mathbb{R}$ і $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$.

Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими подається у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

де x, y , – невідомі, a_{ij} , $i \in \overline{1; 2}; j \in \overline{1; 2}$, – коефіцієнти системи рівнянь, b_1, b_2 , – вільні члени, або праві частини системи рівнянь.

Число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] *визначником системи*. Якщо $\Delta \neq 0$, то система (1) для кожного $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ має єдиний розв'язок $(x; y)$, де

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Останні формули звуться *формулами Крамера* [1, 3, 16, 17, 19-24]. Якщо $\Delta = 0$ і $|\Delta_x| + |\Delta_y| \neq 0$, то система (1) розв'язків не має. Якщо ж $\Delta = 0$, $|\Delta_x| + |\Delta_y| = 0$, то система (1) має нескінченну кількість розв'язків.

Якщо $b_1 = b_2 = 0$, то система (1) матиме вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) називається *однорідною*. Вона завжди має нульовий розв'язок $(0; 0)$. Якщо $\Delta \neq 0$, то цей розв'язок єдиний. Якщо ж $\Delta = 0$, то система (2), крім нульового розв'язку, має нескінченну кількість інших розв'язків.

Нехай задано однорідну систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \end{cases} \quad (3)$$

з трьома невідомими x, y, z . Позначимо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Якщо $|\Delta_1| + |\Delta_2| + |\Delta_3| \neq 0$, то всі розв'язки системи (3) знаходяться за формулами $x = \Delta_1 t$, $y = -\Delta_2 t$, $z = \Delta_3 t$, де t – довільне число.

Приклад 6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 3 = 14.$

Приклад 7. $\Delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \beta \end{vmatrix} = \cos(\alpha + \beta).$

Приклад 8. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -5 \\ 81 & 7 \end{vmatrix} = 496, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 2 & 81 \end{vmatrix} = 217,$$

то за формулами Крамера отримуємо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 16, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 7.$$

Приклад 9. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Маємо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Тому $x = 0$, $y = t$, $z = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

1.2. Системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими подається у вигляді [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (1)$$

де x , y , z , – невідомі, a_{ij} , $i \in \overline{1; 3}$; $j \in \overline{1; 3}$, – коефіцієнти системи рівнянь, b_1 , b_2 , b_3 , – вільні члени.

Число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

називається *визначником системи*.

Якщо $\Delta \neq 0$, то система (1) для кожного $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ має єдиний

розв'язок $(x; y)$, де

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad (2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} a_{33} + a_{13} b_2 a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{22} a_{13} - a_{12} b_2 a_{33} - a_{32} b_1 a_{23},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} b_2 a_{33} + a_{13} a_{21} b_3 + a_{31} b_1 a_{23} - a_{31} b_2 a_{13} - a_{33} a_{21} b_1 - a_{11} b_3 a_{23},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} b_3 + b_1 a_{21} a_{32} + a_{31} a_{12} b_2 - b_1 a_{22} a_{31} - b_3 a_{21} a_{12} - a_{11} a_{32} b_2.$$

Формули (2) називаються *формулами Крамера* [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31].

Якщо $\Delta = 0$, $|\Delta_x| + |\Delta_y| + |\Delta_z| \neq 0$, то система (1) розв'язків не має. Якщо

ж $\Delta = 0$, $|\Delta_x| + |\Delta_y| + |\Delta_z| = 0$, то система (1) має нескінченну кількість розв'язків.

Однорідною системою трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими називається система вигляду [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, що система (3) завжди має нульовий розв'язок $(0; 0; 0)$. Якщо $\Delta \neq 0$, то цей розв'язок єдиний. Якщо ж $\Delta = 0$, то система (3) має нескінченну кількість ненульових розв'язків.

Подібно визначаються системи чотирьох рівнянь з чотирма невідомими і т.д.

Приклад 1.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-4) + 0 \cdot (-2) \cdot (-1) - (-4) \cdot 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-2) \cdot 5 - 4 \cdot 0 \cdot 3 = 23.$$

Приклад 2. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) = -22,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 \cdot (-8) + 4 \cdot 2 \cdot 1 - (-8) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 4 \cdot (-3) = -22,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-8) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - (-8) \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 6 \cdot (-3) = 22,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-8) + (-1) \cdot 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-8) = -66,$$

то за формулами Крамера отримуємо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 3.$$

1.3. Матриці. Дії над матрицями. Обернена матриця.

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} ,

$i \in \overline{1; m}; j \in \overline{1; n}$, вигляду [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} , $i \in \overline{1; m}$; $j \in \overline{1; n}$, називаються *елементами матриці*. Перший індекс елемента a_{ij} вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, на перетині яких міститься цей елемент. Коротко матриці позначають так: $\mathbf{A} = (a_{ij})$ або $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$. Матриця називається *квадратною*, якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців ($m = n$). Якщо $i = 1$, то отримуємо матрицю-рядок, а якщо $j = 1$, то маємо матрицю-стовпець. Матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю та позначається $\mathbf{O}$. Матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ і $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m,n}$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакову розмірність і всі їх відповідні елементи рівні між собою, тобто $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i \in \overline{1; m}$, $j \in \overline{1; n}$.

Сукупність елементів a_{11} , a_{22} , $a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворює *головну діагональ* матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$, а набір a_{n1} , $a_{(n-1)2}, \dots, a_{1n}$ – *побічну діагональ*. Матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ називається *симетричною* [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45], якщо $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратна матриця є *діагональною*, якщо всі її елементи, розташовані поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, тобто

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Окремі елементи головної діагоналі матриці $\mathbf{D}$ можуть бути нульовими. Якщо ж усі вони дорівнюють одиниці, то така матриця називається *одиничною*:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця є *трикутною*, якщо всі її елементи, розташовані з одного боку від головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Визначником n -го порядку, що відповідає матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$, називається число [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\Delta = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bar{M}_j^i$ – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} , а $\bar{M}_j^i$ – мінор елемента a_{ij} , тобто визначник $(n-1)$ -го порядку, який отримуємо шляхом викреслення з матриці i -го рядка та j -го стовпця. Якщо $\Delta \neq 0$, то матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ називається *невиродженою*. Якщо ж $\Delta = 0$, то матриця $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ *вироджена*.

Сумою матриць $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ і $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m,n}$ називається матриця $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Приклад 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -15.$$

Приклад 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -305.$$

Приклад 3. Якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ і $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+0 & -4+1 & 0+3 \\ 3+5 & 1+2 & -2-1 \\ -1-2 & 5+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 8 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$ на деяке число k називається така матриця $\mathbf{C}=k\mathbf{A}$, $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m,n}$, що $c_{ij}=ka_{ij}$.

Приклад 4. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $-3\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}$.

Добутком матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,p}$ на матрицю $\mathbf{B}=(b_{ij})_{p,n}$

називається така матриця $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$, $\mathbf{C}=(c_{ij})_{m,n}$, що $c_{ij}=\sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$, тобто

елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -го рядка матриці $\mathbf{A}$ на відповідні елементи j -го стовпця матриці $\mathbf{B}$. Взагалі кажучи, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Якщо $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то матриці $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ називаються комутативними [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Степенем $k \in \mathbb{N}_0$ матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})$ називається матриця $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ раз}}$, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$.

Приклад 5. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ і $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \\ (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 & (-3) \cdot (-2) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, $\mathbf{BA}=\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Приклад 6. Якщо $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + (-3) \cdot 4 & 6 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 & 6 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 \\ (-5) \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 & (-5) \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-5) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -3 & 18 \\ 8 & 5 & -17 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 7. Якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ і $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, то $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Приклад 8. Знайдемо $f(\mathbf{A})$, якщо:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Маємо $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + \mathbf{E}$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця другого порядку. Оскільки

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}, \\ 3\mathbf{A} &= 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то

$$f(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 18 & 35 \end{pmatrix}.$$

Оберненою до квадратної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n,n}$ називається матриця $\mathbf{A}^{-1}$ така, що $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Квадратна матриця $\mathbf{A}$ має обернену тоді й тільки тоді, коли матриця $\mathbf{A}$ є невинродженою.

Приклад 9. Оберненою до матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ буде матриця

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Приклад 10. Якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Приклад 11. Якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – невинроджена

матриця, то

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M_j^i}$, $i \in \overline{1; n}$; $j \in \overline{1; n}$.

Приклад 12. Якщо $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -22, A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7, A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7/22 & 1/22 & 3/22 \\ -3/22 & 9/22 & 5/22 \\ 5/22 & 7/22 & -1/22 \end{pmatrix}.$$

1.4. Ранг матриці. Розглянемо прямокутну матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мінором k -го порядку матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m,n}$ називають [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] визначник квадратної матриці,

елементами якої є елементи матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$, що розміщені на перетині вибраних довільно k рядків і k стовпців, причому $k \leq \min\{m;n\}$. При цьому, елементи матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$ є мінорами першого порядку. Рангом матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$ називається найбільший з порядків відмінних від нуля її мінорів і позначається $\text{rang } \mathbf{A}$. Базисним мінором (у матриці може бути кілька базисних мінорів) називається відмінний від нуля мінор матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$, порядок якого $r = \text{rang } \mathbf{A}$.

З означення випливають такі властивості рангу матриці: 1) ранг матриці дорівнює деякому додатному числу. Якщо матриця нульова, то її ранг дорівнює нулю; 2) $0 \leq \text{rang } \mathbf{A} \leq \min\{m;n\}$; 3) якщо квадратна матриця $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n,n}$ n -го порядку є невивродженою, то $\text{rang } \mathbf{A} = n$; 4) якщо $\text{rang } \mathbf{A} < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

Основними способами обчислення рангу матриці є метод обвідних мінорів і метод елементарних перетворень [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Метод обвідних мінорів для обчислення рангу матриці. Нехай у матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$ знайдено відмінний від нуля мінор k -го порядку. Далі розглядаються всі мінори $(k+1)$ -го порядку, які містять у собі (обводять) мінор k -го порядку. Якщо всі мінори $(k+1)$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k . Якщо ж, серед обвідних мінорів знайдеться ненульовий мінор $(k+1)$ -го порядку, то весь алгоритм повторюється знову.

Описаний спосіб знаходження рангу матриці не завжди ефективний, оскільки потрібно обчислювати велику кількість мінорів.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі операції: 1) перестановка місцями будь-яких двох рядків або стовпців; 2) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля; 3) викреслювання рядка (стовпця), який містить всі нульові елементи; 4) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число. Отже, елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Якщо $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \mathbf{B}$, то матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m,n}$ та $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m,n}$ називаються *еквівалентними*: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Метод елементарних перетворень для знаходження рангу матриці. Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень дану матрицю зводять до еквівалентної

матриці, ранг якої знаходиться значно простіше [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Приклад 1. Знайдемо ранг матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо всі мінори другого порядку. Маємо

$$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\text{rang } \mathbf{A} = 1$.

Приклад 2. Знайдемо ранг матриці

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Зведемо дану матрицю до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці, які виконуються над рядками. Маємо

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1-ий рядок ділимо на 3}} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{від 2; 3 рядків віднімаємо 1 рядок, помножений відповідно на -1; 1}} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 14/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2-ий рядок ділимо на 14/3}} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & -2/3 & 8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{від 1; 3 рядків віднімаємо 2 рядок, помножений відповідно на -1/3; -2/3}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 18/7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3-ий рядок ділимо на } 18/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{від 1; 2 рядків віднімаємо 3 рядок, помножений відповідно на } 2/7; -1/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\text{rang } \mathbf{A} = 3$.

1.5. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Система n лінійних рівнянь з n невідомими подається у вигляді

[illegible]

або в матричній формі $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи (1) називається *матриця-стовпець* $\mathbf{x}$, яка перетворює матричне рівняння $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ у тотожність. При цьому, якщо $\det \mathbf{A} \neq 0$, то *матричний розв'язок* цієї системи шукають за формулою $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, де $\mathbf{A}^{-1}$ – матриця, обернена до матриці $\mathbf{A}$. Знаходження матричного розв'язку називається *матричним способом* розв'язування системи (1).

Якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, то система (1) називається *однорідною*. Однорідна система (1) має нульові розв'язки у випадку, коли $\det \mathbf{A} \neq 0$, та має ненульові розв'язки лише тоді, коли $\det \mathbf{A} = 0$, тобто коли $\text{rang } \mathbf{A} < n$, де n – число невідомих.

Системи лінійних рівнянь можна розв'язувати також методом Гаусса, методом підстановки та іншими прийомами [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих. Він базується на наступних елементарних перетвореннях системи рівнянь: а) перестановка місцями двох рівнянь системи; б) множення

будь-якого рівняння системи на число, відмінне від нуля (множимо всі доданки і праву частину); в) додавання до елементів одного рівняння відповідні елементи іншого рівняння, помножені на деяке число; г) викреслення невизначеного рівняння.

Приклад 1. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Матричний метод. Запишемо систему рівнянь в матричному вигляді $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Тоді (див. приклад 12 пункту 1.3)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7/22 & 1/22 & 3/22 \\ -3/22 & 9/22 & 5/22 \\ 5/22 & 7/22 & -1/22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Метод Гаусса. Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці, які виконуються над рядками. Маємо

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{1-ий рядок} \\ \text{ділимо на 2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & 0,5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{від 2; 3 рядків віднімаємо 1 рядок,} \\ \text{помножений відповідно на } -1; 3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0,5 & 2,5 & 7 \\ 0 & 3,5 & -4,5 & -17 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{2-ий рядок ділимо на } 0,5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,5 & 0,5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 3,5 & -4,5 & -17 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{від 1; 3 рядків віднімаємо 2 рядок,} \\ \text{помножений відповідно на } -0,5; 3,5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array} \right)$$

від 1; 2 рядків віднімаємо 3 рядок,
помножений відповідно на 3; 5

$\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=12, \\ x+y-z-t=6, \\ x-y+z-t=4, \\ x-y-z+t=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z+t=12, \\ 2x+2y=18, \\ 2x-2t=10, \\ 2x-2y=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t=12, \\ 2x+2y=18, \\ 2x-2t=10, \\ 4x=24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+y+z+t=12, \\ 6+y=9, \\ 6-t=5, \\ x=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=3, \\ z=2, \\ t=1. \end{cases}$$

[illegible]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Система (1) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок. У протилежному випадку, система називається *несумісною*. Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того щоб система (1) була сумісною, необхідно й достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці: $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}}$.

Якщо $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = n$, де n – число невідомих, то з цієї теореми випливає, що система (1) сумісна і має єдиний розв'язок. Якщо ж $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = r < n$, то система (1) сумісна та має безліч розв'язків. У випадку $\text{rang } \mathbf{A} \neq \text{rang } \bar{\mathbf{A}}$, система (1) є несумісна.

Якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система (1) називається *однорідною*. Якщо $\text{rang } \mathbf{A} = r < n$, то будь-які $(n-r)$ лінійно незалежних розв'язків $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-r)}$ (дорівнює нулю тільки їх тривіальна лінійна комбінація) однорідної системи рівнянь утворюють її *фундаментальну систему* розв'язків. Тоді загальний розв'язок однорідної системи запишеться у вигляді [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_{n-r} x^{(n-r)},$$

де $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ – довільні сталі.

Нагадаємо, що *базисний мінор* матриці – це відмінний від нуля мінор, порядок якого рівний рангу матриці. Припустимо, що $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = r < n$. Для знаходження розв'язків системи (1) візьмемо r рівнянь, в яких коефіцієнти при невідомих утворюють базисний мінор, а інші рівняння відкинемо. Невідомі, коефіцієнти при яких утворюють базисний мінор, називають *базисними* і залишають зліва. Решта $n-r$ невідомих називають *вільними* і їх переносять в праві частини рівнянь. Надаючи довільних числових значень вільним невідомим, знаходимо відповідні значення основних невідомих.

Таким чином, загальний розв'язок системи (1) дорівнює сумі будь-якого *часткового розв'язку* x^* неоднорідної системи та *загального розв'язку* відповідної однорідної системи [1, 16, 17, 19-24, 26-31]:

$$x = x^* + c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_{n-r} x^{(n-r)}.$$

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ранги матриць $\mathbf{A}$ і $\bar{\mathbf{A}}$, виконуючи елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

З останнього перетворення випливає, що ранг основної матриці $\mathbf{A}$ дорівнює 2, а ранг розширеної матриці $\bar{\mathbf{A}}$ дорівнює 3. Тому $\text{rang } \mathbf{A} \neq \text{rang } \bar{\mathbf{A}}$. За теоремою Кронекера-Капеллі така система не має розв'язків (несумісна).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання.

За допомогою елементарних перетворень знайдемо одночасно ранги матриць $\mathbf{A}$ і $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -7 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } \bar{\mathbf{A}} = 4$. За теоремою Кронекера-Капеллі система має єдиний розв'язок. Отримана матриця є розширеною матрицею системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 6, \\ -x_3 + x_4 = -1, \\ -2x_4 = -2, \end{cases}$$

яка еквівалентна заданій системі рівнянь. Таким чином, розв'язком заданої системи рівнянь є $x_4 = 1$, $x_3 = 2$, $x_2 = -1$ і $x_1 = 1$.

1.7. Запитання для самоконтролю.

1. Як обчислюється визначник матриці другого та третього порядку?
2. Що таке визначник матриці n -порядку?
3. Як визначається мінор елемента визначника n -порядку?
4. Що розуміють під алгебраїчним доповненням елемента визначника n -порядку?
5. Які основні властивості мають визначники?
6. Як формулюється теорема Лапласа про розклад визначника за елементами кількох рядків або стовпців?
7. У чому полягає метод зведення матриці до трикутного вигляду для обчислення визначників?
8. Що таке матриця розмірності $m \times n$?
9. Які матриці називаються квадратними, нульовими, діагональними, одиничними та трикутними?
10. Як визначається сума та різниця двох матриць?
11. Що таке добуток числа на матрицю?
12. Як обчислюється добуток двох матриць?
13. Що називається цілим додатним степенем матриці?
14. Як визначається мінор матриці?
15. Що таке алгебраїчне доповнення мінора матриці?
16. Як визначається обернена матриця для заданої матриці?
17. Що таке ранг матриці?
18. Які методи використовуються для знаходження рангу матриці?
19. Який критерій існування оберненої матриці?
20. Як знайти обернену матрицю за допомогою формули?
21. Які перетворення матриць вважаються елементарними?
22. Що називають основною та розширеною матрицею системи рівнянь?
23. Який критерій сумісності системи рівнянь?
24. За яких умов система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, нескінченну кількість розв'язків або не має розв'язків?
25. Що таке однорідна система лінійних рівнянь?
26. Який критерій нетривіальності розв'язності однорідної системи рівнянь?
27. Що таке фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь?
28. Як записується загальний розв'язок системи лінійних рівнянь?
29. У чому суть матричного методу розв'язування невідроджених систем лінійних рівнянь?

30. Як застосовується правило Крамера для розв'язування невідроджених систем лінійних рівнянь?
31. У чому полягає метод Гаусса для розв'язування систем лінійних рівнянь?

1.8. Вправи і задачі.

1. Знайдіть визначники:

$$1. \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & a \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} \sin 2\varphi & 2\sin^2 \varphi - 1 \\ 2\cos^2 \varphi - 1 & \sin 2\varphi \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$12. \begin{vmatrix} 0 & \sin \beta & \operatorname{ctg} \beta \\ \sin \beta & 0 & \sin \beta \\ \operatorname{ctg} \beta & \sin \beta & 0 \end{vmatrix}.$$

$$13. \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$14. \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$15. \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$

$$16. \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

$$17. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$18. \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$19. \begin{vmatrix} x & \sqrt{3} & x+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & x+\sqrt{3} & x \\ x+\sqrt{3} & x & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} x & -x & x \\ x & -x & -x \\ x & x & -x \end{vmatrix}.$$

2. Знайдіть визначники матриць:

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$6. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$10. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$11. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$13. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$14. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$15. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$16. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$17. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$18. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$19. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$20. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчисліть:

$$1. 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} -5 & 8 & -4 \\ 6 & -7 & -5 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 31 & -17 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^3.$$

$$8. \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$9. \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$10. \begin{pmatrix} b & -a \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & \gamma \\ \beta & -\delta \end{pmatrix}.$$

$$11. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^7.$$

$$13. \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad 14. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$15. \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}. \quad 16. \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 10 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$17. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3. \quad 18. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n. \quad 19. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

$$20. \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 24 & -17 \\ 42 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 11 & -18 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Знайдіть $(2\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, якщо:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайдіть $f(\mathbf{A})$, якщо:

$$1. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

$$2. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 3x^2 - 4.$$

$$3. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

$$4. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = -x^2 - 2x + 7.$$

$$5. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 - 2x + 4.$$

$$6. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 5.$$

$$7. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 + 7x^2 - 10x - 5.$$

$$8. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = -x^2 + 3x + 5.$$

$$9. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

$$10. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^2 + 4x + 4.$$

$$11. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -3 \\ 6 & -2 & 7 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

$$12. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

6. Знайдіть матрицю, обернену до матриці $\mathbf{A}$:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Розв'яжіть матричні рівняння:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{x} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$5. \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$6. \mathbf{x} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$8. \mathbf{x} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \mathbf{x} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & -1 \\ 12 & 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$10. \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Обчисліть ранг матриці:

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$5. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$6. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$10. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & -6 & -5 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Розв'яжіть системи рівнянь:

$$1. \begin{cases} 3x + 3y = 12, \\ x - 2y = 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 5y = 5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x + 5y = 30, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + y = 25, \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 7x - 3y = 13, \\ x - 2y = 5. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x - 4y = -6, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0, \\ x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - 5y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} y - x = 5, \\ 5z - 4y = -30, \\ 10z - 4y = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x - y + z = a, \\ x + y - z = b, \\ y + z - x = c. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + y + z = a, \\ x - y + z = b, \\ x + y - z = c. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 5x + 8y - z = 7, \\ 2x - 3y + 2z = 9, \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x + y + z = 21, \\ x - 4y - 2z = -16, \\ -3x + 5y + 6z = 41. \end{cases}$$

10. Дослідіть на сумісність системи рівнянь і у випадку їх сумісності розв'яжіть:

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_3 + 7x_4 = -1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 7. \end{cases}$$

1.9. Індивідуальні завдання.

1. Обчисліть визначник 4-го порядку двома способами: а) розкладанням за елементами рядка або стовпця; б) зведенням до трикутного вигляду:

$$1. \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ -5 & 11 & -1 & 7 \\ 6 & 7 & -9 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ -4 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 20 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 14 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 23 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 20 & -8 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} -4 & 5 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 9 & 2 & -1 & 3 \\ -7 & 3 & 10 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & -20 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \\ 30 & 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$7. \begin{vmatrix} 12 & 0 & 4 & 21 \\ -4 & 2 & 6 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -8 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 & 20 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 40 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{l}
9. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 & -10 \\ 0 & 15 & 1 & 3 \\ 9 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
11. \begin{vmatrix} 12 & 11 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -18 & 31 \\ -3 & -6 & 12 & 2 \end{vmatrix} \\
13. \begin{vmatrix} 4 & -11 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 6 & 10 \\ 5 & 80 & -1 & 0 \\ -31 & -6 & 12 & 2 \end{vmatrix} \\
15. \begin{vmatrix} 34 & 1 & -1 & 9 \\ -40 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 10 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 18 & 2 \end{vmatrix} \\
17. \begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 & 17 \\ 40 & 2 & 1 & 10 \\ 16 & 6 & -18 & 3 \\ 3 & -61 & 19 & 0 \end{vmatrix} \\
19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \\ -8 & -7 & 3 & 4 \\ 9 & -8 & 7 & 1 \\ 10 & 11 & 12 & -13 \end{vmatrix} \\
21. \begin{vmatrix} 19 & -10 & 1 & 6 \\ 42 & 2 & 8 & 10 \\ -8 & 60 & -8 & 3 \\ -4 & 9 & -16 & 5 \end{vmatrix} \\
10. \begin{vmatrix} 13 & -7 & 2 & 11 \\ -4 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -20 & -1 & 13 \\ 15 & 8 & 1 & -7 \end{vmatrix} \\
12. \begin{vmatrix} 1 & 10 & 9 & 2 \\ -6 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -21 & -10 & 3 \\ 8 & 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\
14. \begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 & 9 \\ -6 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -71 & -2 & 3 \\ -90 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
16. \begin{vmatrix} 8 & 20 & 9 & 12 \\ -6 & 4 & -4 & -3 \\ 1 & -55 & -1 & 3 \\ 100 & -14 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
18. \begin{vmatrix} 18 & -6 & 19 & 2 \\ -16 & 1 & 5 & 4 \\ 11 & -71 & 10 & 3 \\ 81 & 0 & 61 & 7 \end{vmatrix} \\
20. \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 & 16 \\ -15 & 7 & 5 & -4 \\ 14 & -9 & 10 & 13 \\ 18 & 0 & 61 & 19 \end{vmatrix} \\
22. \begin{vmatrix} 8 & -5 & 11 & 20 \\ -7 & 12 & 50 & 0 \\ 11 & -71 & 10 & 3 \\ 19 & 30 & 1 & -2 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 33 \\ -1 & 1 & -17 & 3 \\ 5 & -9 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & -80 & 10 & 2 \\ 42 & 0 & 8 & 10 \\ -3 & 60 & -8 & 3 \\ -77 & 0 & -16 & 15 \end{vmatrix}.$$

$$27. \begin{vmatrix} 101 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 8 & 10 \\ -3 & 8 & -8 & 3 \\ -7 & 10 & -16 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$29. \begin{vmatrix} 11 & 7 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 99 \\ -3 & -7 & 9 & 3 \\ 55 & 4 & -1 & 15 \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 1 & 25 & 11 & -5 \\ -7 & 12 & 50 & 0 \\ 1 & -7 & 6 & 3 \\ 55 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$26. \begin{vmatrix} 18 & -7 & 1 & 0 \\ -7 & 12 & 50 & 0 \\ 9 & -1 & 10 & 13 \\ 19 & -30 & 1 & -22 \end{vmatrix}.$$

$$28. \begin{vmatrix} 19 & -7 & 1 & 6 \\ -7 & -12 & 0 & 40 \\ 1 & -5 & 10 & 3 \\ 11 & -30 & 1 & -20 \end{vmatrix}.$$

$$30. \begin{vmatrix} 8 & -7 & 1 & 100 \\ 37 & -5 & 67 & 0 \\ -1 & -1 & 88 & 13 \\ 1 & -30 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Задано матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ і $\mathbf{C}$. Знайдіть: а) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; б) $\mathbf{A}^{-1}$; в) $(3\mathbf{A} - 2\mathbf{B})^2$; г) $f(\mathbf{A})$, якщо $f(x) = -5x^2 + 6x - 3$; д) $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$; е) $(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C}$:

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 7 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 10 & -2 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$4. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$5. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & -14 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -10 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$8. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$9. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 21 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 13 & 0 & 8 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 20 \\ 6 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 8 & -1 \\ 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$11. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 20 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$12. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -2 \\ 1 & 20 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & 10 \\ -2 & -14 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 8 & 3 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$13. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 0 \\ 13 & 1 & 8 \\ -20 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 23 \\ -1 & 1 & 10 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

$$14. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -40 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 1 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$15. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 30 \\ 18 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 3 & 23 \\ 1 & 1 & 10 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$16. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 3 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$17. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 34 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 1 \\ -2 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 4 & 7 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$18. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 24 \\ 1 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 23 \\ -1 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -8 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$19. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 16 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 19 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$20. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -2 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$21. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ -6 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$23. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

$$24. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -10 & 4 & 7 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$25. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -20 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$26. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$27. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 3 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

$$28. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$29. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$30. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть системи рівнянь: а) за правилом Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса.

$$1. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x + y - z = -5. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 3x + 2y + z = 6. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
7. \begin{cases} 2x - y + 2z = 3, \\ x + y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases} & 8. \begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases} \\
9. \begin{cases} 2x - y + 3z = -4, \\ x + 3y - z = 11, \\ x - 2y + 2z = -7. \end{cases} & 10. \begin{cases} x + y - z = 36, \\ x + z - y = 13, \\ y + z - x = 7. \end{cases} \\
11. \begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 3, \\ x - 2y - 3z = 8. \end{cases} & 12. \begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y + z = 4. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases} & 14. \begin{cases} x + y + z = 36, \\ 2x - 3z = -17, \\ 6x - 5z = 7. \end{cases} \\
15. \begin{cases} 3x - y + 2z = 5, \\ 2x - y - z = 2, \\ 4x - 2y - 2z = -3. \end{cases} & 16. \begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 2y + z = 2, \\ x - 3y + 4z = -1. \end{cases} \\
17. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases} & 18. \begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 5x - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases} & 20. \begin{cases} 3x + 2y - z = -3, \\ 2x - y + 2z = 11, \\ -x + 3y + z = 0. \end{cases} \\
21. \begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 2y = -5. \end{cases} & 22. \begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x + y - z = -5. \end{cases} \\
23. \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y + 3z = 5, \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases} & 24. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}
\end{array}$$

$$25. \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ -4x - y + 3z = -3. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0, \\ x + y - 2y = -7, \\ x - 2y + 3z = 3. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y + 3y = 5, \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть сумісність систем рівнянь і, у випадку сумісності, розв'яжіть їх:

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
11. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases} & 12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases} \\
13. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases} & 14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 5, \\ 9x_1 - x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases} \\
15. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases} & 16. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} \\
17. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + 11x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 - 4x_5 = 4, \\ 6x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases} & 18. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 7, \\ x_1 + 10x_2 - 9x_3 + 2x_4 - 6x_5 = -3, \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 7, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 9x_4 - 2x_5 = 5, \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 3. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 4, \\ 9x_1 + 11x_2 - 5x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 7, \\ x_1 - 8x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 8x_3 - 9x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 8. \end{cases} & 20. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 6x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 9x_4 + x_5 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_1 - 9x_2 + x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 3. \end{cases} \\
21. \begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 12x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 3, \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 + 12x_4 = 4. \end{cases} & 22. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 9, \\ x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}
\end{array}$$

$$23. \begin{cases} 11x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -6, \\ 4x_1 + x_2 - 9x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 10x_3 + x_4 = 9, \\ 10x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 9x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -8, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + 16x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 15x_3 + x_4 - 5x_5 = 8, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 7x_5 = -6, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ -6x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x_1 - 10x_2 + x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 8, \\ 9x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 - 6x_5 = 3, \\ -5x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 9x_4 - 2x_5 = -5, \\ -3x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 3. \end{cases}$$

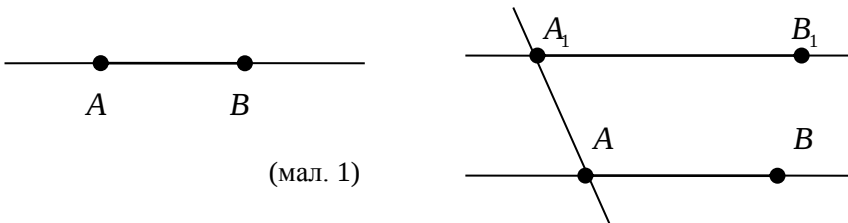
$$29. \begin{cases} -2x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 9x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = -6, \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 - 9x_4 - 4x_5 = 1, \\ x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 7. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 + 7x_4 - x_5 = -4, \\ 10x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

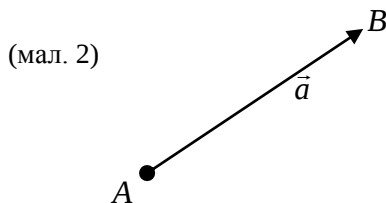
Розділ 2. Векторна алгебра

2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами. *Простір* елементарної геометрії визначається аксіоматично. Елементами простору є *точки*. Підмножини простору з певними властивостями називаються *фігурами*. Пряма, відрізок, круг, коло, площина є прикладами фігур. При аксіоматичному означенні простору елементарної геометрії будується простір прямої, який позначається через $\mathbb{R}^1$, простір площини, який позначається через $\mathbb{R}^2$, власне трьохвимірний простір, який позначається через $\mathbb{R}^3$. Будь-який з цих просторів ми позначаємо через $\mathbb{R}^n$ або H . При цьому показується також, що кожному відрізку можна приписати певну довжину, кожній фігурі на площині – певну площу, кожній фігурі в просторі – певний об'єм. Встановлюється також взаємно однозначна відповідність між точками прямої і всіма дійсними числами.

Кожна точка A прямої ділить пряму на дві півпрямі, які називаються *променями*. Таким чином, променем з початком в точці A називається сукупність точок прямої, які лежать по один бік від точки A . Два промені, які лежать на одній прямій називаються *співнапрямленими*, якщо один з них містить інший. Два промені, які лежать на деякій площині називаються *співнапрямленими*, якщо вони лежать в одній півплощині, на які ділить площину пряма, що з'єднує їх початки. Промінь з початком в точці A , який містить точку $B \neq A$ позначають через $[AB)$.

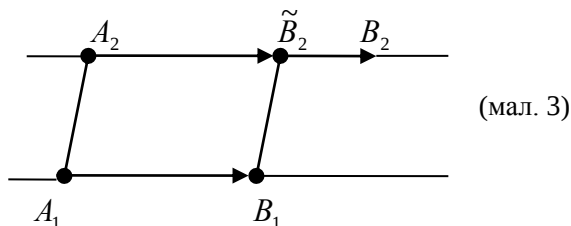


Кожній упорядкованій парі $(A; B)$ точок простору можна поставити у відповідність *вектор* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Точка A називається *початком* вектора, а точка B – його *кінцем*. Вектор зображається у вигляді *напрявленого відрізка*. Довжиною, модулем або *нормою* вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

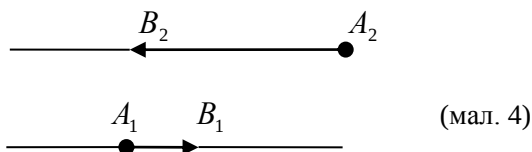


Довжина вектора позначається одним із символів: $|\vec{a}|$ або $\|\vec{a}\|$.

Вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називаються *колінеарними*, якщо відрізки A_1B_1 і A_2B_2 є паралельними. Два вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ та $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називаються *співнапрямленими*, якщо промені $[A_1B_1)$ і $[A_2B_2)$ є співнапрямленими. Іншими словами, два вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називаються співнапрямленими, якщо існує паралельне перенесення $P: H \rightarrow H$ в просторі H , яке переводить точку A_1 в точку A_2 і точку B_1 в точку $\tilde{B}_2$ таке, що точка A_1 не лежить між точками B_2 і $\tilde{B}_2$. Вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ зображені на малюнку 3 є співнапрямленими.



Два вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називаються *протилежно напрямленими*, якщо вони є колінеарними і не є співнапрямленими. Вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ зображені на малюнку 4 є протилежно напрямленими [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].



Два вектори $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакові довжини і є співнапрямленими. Таким чином, при розгляді векторів завжди можна вважати, що його початок або кінець знаходиться в наперед заданій точці, чим і часто користуються на практиці.

Зауваження 1. Сформульоване вище означення вектора є не зовсім строгим. Насправді, упорядковану пару $(A; B)$ точок простору називають напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$. Два напрямлені відрізки називають еквівалентними, якщо вони мають однакові довжини і є співнапрямленими. Це відношення ділить всі напрямлені відрізки на попарно неперетинні класи. Кожний такий клас еквівалентності називається вектором або вільним вектором. Кожний вектор $\vec{a}$, тобто клас еквівалентності, однозначно визначається одним із своїх представників, тобто напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$, і цей факт записують так: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Зауваження 2. Крім вільних векторів в технічних науках використовують і інші вектори. Ковзний вектор визначають так само як і вільний тільки в означенні еквівалентності напрямлених відрізків додатково вимагають, щоб вони лежали на одній прямій. До поняття зв'язаного вектора ми приходимо додатково вимагаючи при означенні еквівалентності напрямлених відрізків, щоб вони мали однаковий початок. Прикладом зв'язних векторів є вектори сил у фізиці.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називають нульовим і позначають через $\vec{0}$, якщо його довжина дорівнює нулеві, тобто якщо $A=B$. Таким чином, $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$. Вектор $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називається *протилежним* до вектора $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, якщо ці вектори мають однакову довжину і є протилежно напрямленими. Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}_1$ позначається через $-\vec{a}_1$. Таким чином, $-\vec{a}_1 = \overrightarrow{B_1A_1}$, якщо $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$. Вважають, що нульовий вектор є колінеарним і співнапрямленим з будь-яким вектором.

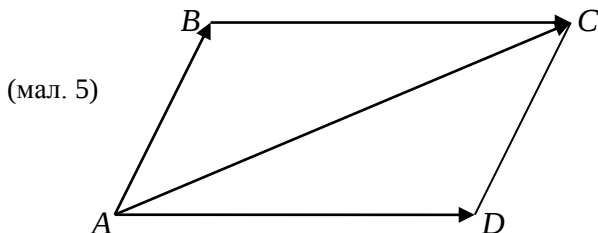
Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, який є [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]: а) нульовим вектором, якщо $\lambda = 0$; б) вектором співнапрямленим з вектором $\vec{a}$ з довжиною $|\lambda||\vec{a}|$, якщо $\lambda > 0$; в) вектором протилежно напрямленим з вектором $\vec{a}$ і довжиною $|\lambda||\vec{a}|$, якщо $\lambda < 0$.

Теорема 1. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується: $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

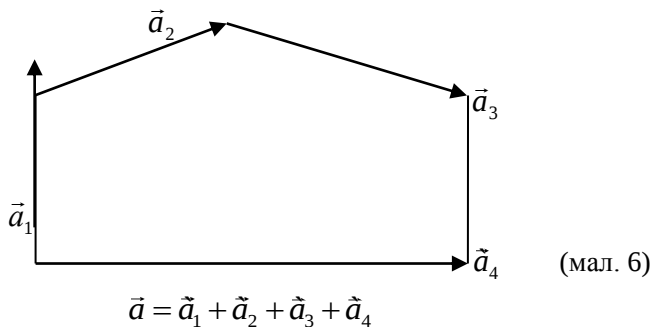
Ця теорема випливає безпосередньо із означення.

Сумою векторів $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ та $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ називається вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

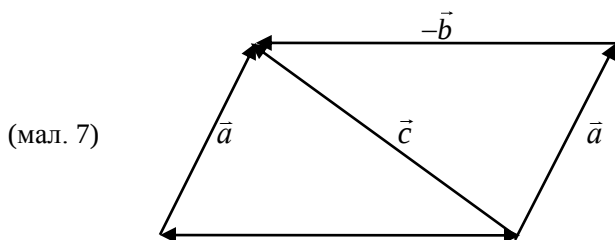
Геометрично вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ додаються за *правилом паралелограма*, як зображено на мал. 5. При цьому сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ також є вектор $\overrightarrow{AC}$, бо вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ є рівними.



Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ – довільні вектори, то щоб їх додати потрібно їх розмістити так, щоб кінець першого був початком другого, кінець другого був початком третього і т.д. Тоді сумою таких векторів є вектор $\vec{a}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}_1$, а кінець з кінцем вектора $\vec{a}_n$. На мал. 6 геометрично зображено вектор $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$.



Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Щоб побудувати різницю двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ потрібно їх початки розмістити в одній точці.



Тоді вектор з початком в кінці вектора $\vec{b}$ і кінцем в кінці вектора $\vec{a}$ буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (див. мал. 7). Із означення випливає, що для того щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$ потрібно до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$.

Одиничним вектором або ортом називається вектор $\vec{e}$, довжина якого дорівнює одиниці. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{a} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$ називається ортом вектора $\vec{a}$ [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 2. Кожний вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ можна подати у вигляді $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$, де $\vec{a} = \vec{a} / |\vec{a}|$ – одиничний вектор.

Доведення. Справді, вектори $\vec{a}$ і $|\vec{a}| \vec{e}$ є співнапрямленими. Крім цього довжини векторів $\vec{a}$ і $|\vec{a}| \vec{e}$ є однаковими. Тому ці вектори рівні. ►

Теорема 3. Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і дійсних чисел λ_1 , λ_2 і λ виконуються:

$$1^0 \text{ (асоціативність додавання) } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$2^0 \text{ (асоціативність множення на число) } \lambda_1 (\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{a};$$

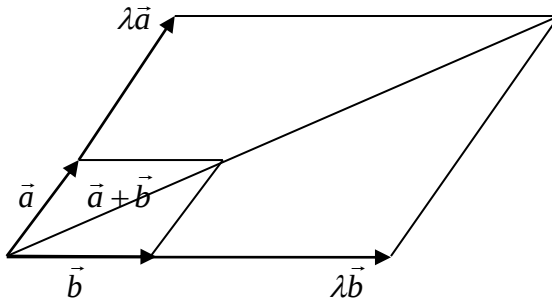
$$3^0 \text{ (асоціативність множення на число) } \lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b},$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a};$$

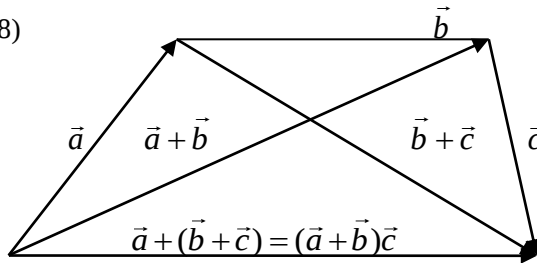
$$4^0 \text{ (існування протилежного вектора) } \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0};$$

$$5^0 \text{ (властивість нульового вектора) } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \text{ для будь-якого вектора } \vec{a}.$$

Доведення. Властивості 1^0 і 3^0 встановлено (див. мал. 8), а інші випливають безпосередньо із означення.



(мал. 8)



2.2. Лінійна залежність векторів. Базис простору. Координати вектора в базисі. Векторним простором називається упорядкована трійка $(\vec{H}; +; \cdot)$ непорожньої множини $\vec{H}$, операції „+” додавання $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \in \vec{H}$ її елементів $\vec{a}_i \in \vec{H}$, операції „ $\cdot$ ” множення $\lambda \vec{a} \in \vec{H}$ елементів на число λ така, що [1, 3, 16, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]:

- 1) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3 = \vec{a}_1 + (\vec{a}_2 + \vec{a}_3) \in \vec{H}$ для будь-яких $\vec{a}_i \in \vec{H}$;
- 2) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_1$ для будь-яких $\vec{a}_i \in \vec{H}$;
- 3) існує такий вектор $\vec{0}$ (нуль-вектор), що $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$;
- 4) для кожного вектора $\vec{a}$ існує такий вектор $-\vec{a}$ (протилежний вектор), що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 5) для будь-яких чисел λ_1, λ_2 і будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується $\lambda_1(\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1 \lambda_2) \vec{a}$, $(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{a}$;

б) для будь-яких векторів $\vec{a} \in \vec{H}$ і $\vec{b} \in \vec{H}$ та будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Сукупність векторів

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \quad (1)$$

простору $\vec{H}$ називається *лінійно залежною*, якщо існують сталі c_i , серед яких не всі є рівні нулеві такі, що [1, 3, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_k\vec{e}_k = \vec{0}. \quad (2)$$

Сукупність векторів (1) називається *лінійно незалежною*, якщо вона не є лінійно залежною. Іншими словами можна сказати, що сукупність векторів (1) називається *лінійно незалежною*, якщо із (2) випливає, що всі числа c_i дорівнюють нулю. Простір $\vec{H}$ називається *скінченновимірним*, якщо в ньому існує скінченна кількість лінійно незалежних векторів. Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору $\vec{H}$ називається *розмірністю простору $\vec{H}$* .

Теорема 1. Нехай $n \in \mathbb{N}$ – розмірність простору $\vec{H}$ і

$$\{\vec{e}_i : i \in \overline{1; n}\} \quad (3)$$

– множина із n лінійно незалежних векторів простору $\vec{H}$. Тоді для кожного вектора $\vec{x} \in \vec{H}$ знайдеться єдиний упорядкований набір $x = (x_1, \dots, x_n)$ із n дійсних чисел, для якого

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n. \quad (4)$$

Доведення. Вектори $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ є лінійно залежними. Тому існують сталі $c_0, c_1, \dots, c_n$, для яких

$$c_0\vec{x} + c_1\vec{e}_1 + \dots + c_n\vec{e}_n = \vec{0}. \quad (5)$$

При цьому $c_0 \neq 0$, бо інакше система (3) була б лінійно залежною. Із (5) отримуємо

$$x = -\frac{c_1}{c_0}\vec{e}_1 - \dots - \frac{c_n}{c_0}\vec{e}_n,$$

звідки випливає (4). Якщо знайдеться упорядкований набір $\tilde{x} = (\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$ із n дійсних чисел, для якого

$$\vec{x} = \tilde{x}_1\vec{e}_1 + \dots + \tilde{x}_n\vec{e}_n,$$

то

$$\vec{0} = (x_1 - \tilde{x}_2)\vec{e}_1 + \dots + (x_n - \tilde{x}_n)\vec{e}_n.$$

Оскільки система векторів (3) є лінійно незалежною, то звідси отримуємо, що $x_1 - \tilde{x}_2, \dots, x_n - \tilde{x}_n = 0$, тобто $x = \tilde{x}$ і тому теорему доведено. ►

*Базисом простору $\vec{H}$ розмірності $n \in \mathbb{N}$ називається [3, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] такий упорядкований набір $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ із n векторів, що кожний елемент $\vec{x}$ простору єдиним чином подається у вигляді $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. З теореми 1 випливає, що будь-яка множина із n лінійно незалежних векторів такого простору $\vec{H}$ є його базисом. Якщо система (3) є базисом простору, то упорядкований набір $x = (x_1, \dots, x_n)$ із n дійсних чисел називається *координатами вектора x в базисі (3)* і цей факт записують так*

$$\vec{x} = (x_1; \dots; x_n) \text{ або } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Із сказаного випливає, що множина всіх векторів прямої є векторним простором, множина всіх векторів площини є векторним простором, множина всіх векторів простору є векторним простором.

Наслідок 1. Для будь-яких векторів $\vec{x}$ та $\vec{e} \neq \vec{0}$ простору $\vec{\mathbb{R}}^1$ знайдеться єдине число x таке, що $\vec{x} = x\vec{e}$.

Наслідок 2. Будь-які два вектори на прямій є лінійно залежними.

Наслідок 3. Будь-які два вектори на прямій є колінеарними.

Наслідок 4. Простір $\vec{\mathbb{R}}^1$ є одновимірним.

Будь-який вектор $\vec{e} \neq \vec{0}$ прямої називається *базисом простору $\vec{\mathbb{R}}^1$* , а число x , для якого виконується $\vec{x} = x\vec{e}$ – координатою вектора $\vec{x}$ в базисі $\{\vec{e}\}$, і цей факт записують так $\vec{x} = (x)$.

Наслідок 5. Вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ площини є лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли вони не є колінеарними.

Наслідок 6. Будь-які три вектори на площині є лінійно залежними.

Наслідок 7. Простір $\vec{\mathbb{R}}^2$ є двовимірним.

Наслідок 8. Будь-яка система $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ із двох лінійно незалежних векторів площини є базисом простору $\vec{\mathbb{R}}^2$.

Наслідок 9. Для будь-яких не колінеарних векторів $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ та будь-якого вектора $\vec{x}$ площини існує єдина упорядкована пара чисел $(x_1; x_2)$ така, що $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$.

Якщо $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ – базис простору $\mathbb{R}^2$, то упорядкований пара дійсних чисел $(x_1; x_2)$, для якої виконується $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, називається координатами вектора $\vec{x}$ в цьому базисі і цей факт записують так: $\vec{x} = (x_1; x_2)$.

Наслідок 10. Будь-які чотири вектори площини є лінійно залежними.

Вектори $\vec{a}_i, i \in \overline{1, m}$, називаються компланарними [1, 3, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45], якщо вони розташовані в одній площині або на паралельних площинах. Вектори, які не є компланарними називаються некопланарними.

Наслідок 11. Три вектори є лінійно залежними тоді і тільки тоді, коли вони є компланарними.

Наслідок 12. Простір $\mathbb{R}^3$ є тривимірним.

Наслідок 13. Будь-які три некопланарні вектори є базисами простору $\mathbb{R}^3$.

Наслідок 14. Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – три некопланарні вектори простору, то для кожного вектора $\vec{x}$ знайдеться єдиний упорядкований набір $x = (x_1; x_2; x_3)$ трьох дійсних чисел такий, що $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Якщо $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – базис простору $\mathbb{R}^3$, то упорядкований набір $x = (x_1; x_2; x_3)$ трьох дійсних чисел, для яких справедливе зображення $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, називається координатами вектора $\vec{x}$ в цьому базисі і цей факт записують так: $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

Приклад 1. Знайдемо розклад вектора $\vec{a} = (9; 4)$ за базисними векторами $\vec{p} = (2; -3)$ і $\vec{q} = (1; 2)$. Маємо $\vec{a} = \alpha_1\vec{p} + \alpha_2\vec{q}$, тобто $(9; 4) = \alpha_1(2; -3) + \alpha_2(1; 2)$. Звідси отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = 9, \\ -3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 4. \end{cases}$$

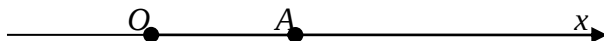
Розв'язуючи цю систему знаходимо $\alpha_1 = 2$ і $\alpha_2 = 5$. Отже, $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

Приклад 2. Розкладемо вектор $\vec{x} = (2; 5; 0)$ за базисом $\vec{p} = (1; 2; -1)$, $\vec{q} = (3; 6; 1)$ і $\vec{r} = (3; 9; 3)$. Маємо $\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$, тобто $\alpha_1(1; 2; -1) + \alpha_2(3; 6; 1) + \alpha_3(3; 9; 3) = (2; 5; 0)$. Звідси отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2, \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 5, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

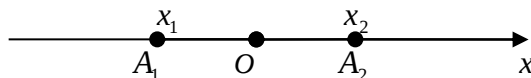
Розв'язавши систему, знайдемо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ і $\alpha_3 = 1/3$. Таким чином, шуканий розклад має вигляд $\vec{x} = 1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{1}{3} \cdot \vec{r}$.

2.3. Системи координат. Систему координат на прямій вводять так [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]. Беруть довільну точку O прямої і називають її початком координат. Ця точка O ділить пряму на два промені, початком яких вона є. Один із цих променів називають додатним і цей факт відмічають стрілкою. Далі точці A ставиться у відповідність число x , яке дорівнює довжині відрізка OA , якщо точка A лежить на додатному промені.



Точці A ставиться у відповідність число x , яке дорівнює довжині відрізка OA , помножений на „-1”, якщо точка лежить на від’ємному промені. Це число x називається *координатою точки A* у вибраній системі координат і цей факт записують так: $A(x)$. Пряма разом з введеною на ній системою координат називається *віссю*. Відстань $d(A_1; A_2)$ між точками $A_1(x_1)$ і $A_2(x_2)$ прямої знаходиться за формулою

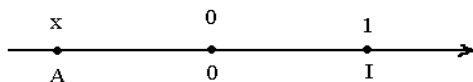
$$d(A_1; A_2) = |x_2 - x_1|.$$



Нехай $\mathbb{R}^1$ – пряма елементарної геометрії, $\vec{\mathbb{R}}^1$ – сукупність векторів $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, утворених точками площини $\mathbb{R}^1$.

Афінна система координат на прямій $\mathbb{R}^1$ – це упорядкована пара $(O; \vec{e})$ довільної точки O прямої $\mathbb{R}^1$ і довільного вектора $\vec{e} \neq \vec{0}$

простору $\mathbb{R}^1$ [1, 3, 16, 17, 34-36, 38, 39, 45]. На практиці афінну систему координат на прямій зображають у вигляді прямої з відміченою точкою O – початку координат та вектора вектора $\vec{e}$ з початком в точці O .



Таку пряму називають *віссю* і позначають через OX . Якщо $\vec{e}$ – одиничний вектор, то афінну систему координат на прямій зображають так само як і декартову. При цьому напрям стрілки осі збігається з напрямом одиничного вектора $\vec{e} = \vec{i}$. Щоб знайти координату x точки A прямої $\mathbb{R}^1$ в афінній системі координат $(O; \vec{e})$ потрібно знайти таке число x , що $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}$. Якщо $\vec{e} = \vec{i}$ – одиничний вектор, то можна сказати, що $x = OA$, якщо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\vec{e}$ є співнапрямленими і $x = -OA$, якщо ці вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\vec{e}$ є протилежно напрямленими. Якщо x – координата точки A прямої, то цей факт записують так $A(x)$. Хоч і з теоретичного боку “афінна система координат” і “декартова система координат” є різними поняттями, проте якщо $\vec{e} = \vec{i}$ – одиничний вектор, то на практиці вони не відрізняються, оскільки зображаються однаково і кожна точка прямої у відповідних декартовій та афінній системах координат має однакові координати.

На прямій $\mathbb{R}^1$ можна ввести різні системи координат [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Якщо точки A_1 та A_2 прямої $\mathbb{R}^1$ в афінній системі координат $(O; \vec{e})$ мають координати x_1 і x_2 відповідно, то координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ в базі $\vec{e}$ дорівнюють різниці координат точок A_2 і A_1 , тобто $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1)\vec{e}$.

Доведення. Справді,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = x_2\vec{e} - x_1\vec{e} = (x_2 - x_1)\vec{e}. \blacktriangleright$$

На прямій $\mathbb{R}^1$ можна ввести різні системи координат.

Теорема 2. Нехай $OX = \{O; \vec{e}\}$ і $O'X' = \{O'; \vec{e}'\}$ – дві системи координат на прямій $\mathbb{R}^1$ з однаковим базисним вектором $\vec{e}$; x і x' – координати точки A прямої $\mathbb{R}^1$ в системах координат OX та $O'X'$ відповідно і a – координата точки O' в системі OX . Тоді $x' = x - a$.

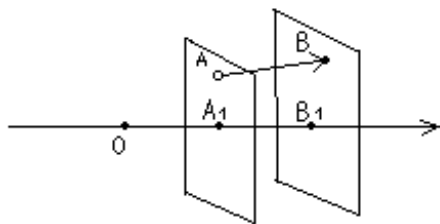
Доведення. Оскільки $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} = a\vec{e} + x'\vec{e} = (a + x')\vec{e}$, то $x = a + x'$, звідси випливає потрібне. ►

Теорема 3. Нехай $OX = \{O; \vec{e}\}$ і $OX' = \{O; -\vec{e}\}$ – дві системи координат на прямій $\mathbb{R}^1$ з однаковим початком координат, x і x' – координати точки A прямої $\mathbb{R}^1$ в системах координат OX та OX' відповідно. Тоді $x' = -x$.

Доведення. Справді $\overrightarrow{OA} = x\vec{e} = (-x)(-\vec{e})$, тобто $x' = -x$, що і потрібно було довести. ►

Кутом між векторами $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ і $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$ називається кут $\varphi \in [0; \pi]$, на який потрібно повернути один з цих векторів навколо його початку, щоб отриманий таким чином вектор став співнапрямленим з другим. Напрямленим кутом між векторами $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ та $\vec{a}_2 = \overrightarrow{A_2B_2}$, називається кут φ_{12} , на який потрібно повернути перший вектор $\vec{a}_1$ навколо його початку, що він став співнапрямленим з вектором $\vec{a}_2$. Напрямлений кут визначається неоднозначно. Точніше кажучи він визначається з точністю до доданка $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Цей кут позначають так $\varphi_{12} = \vec{a}_1 \vec{a}_2$. Отже, $\varphi_{12} = -\varphi_{21}$. Кутом між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ називається той із напрямних кутів між ними, який належить проміжку $[0; \pi]$. Кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ позначаємо так: $\varphi = \vec{a}_1 \vec{a}_2$. Отже, $\vec{a}_1 \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \vec{a}_1$ і $\varphi_{12} = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

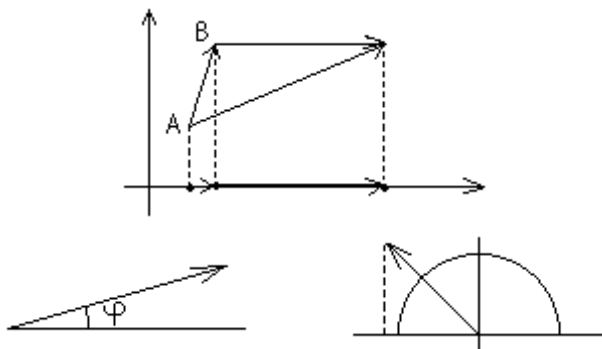
Нехай l – вісь, напрям якої заданий одиничним вектором $\vec{e}_1 = \vec{l}$.



Проекцію відрізка AB на вісь l називається відрізок A_1B_1 осі, який утворюється при перетині з віссю площин, що проходять через точки A та B перпендикулярно до осі. Геометричною проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь l називається вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, для якого відрізок A_1B_1 є проекцією на цю вісь відрізка AB , причому точка A_1 є проекцією точки

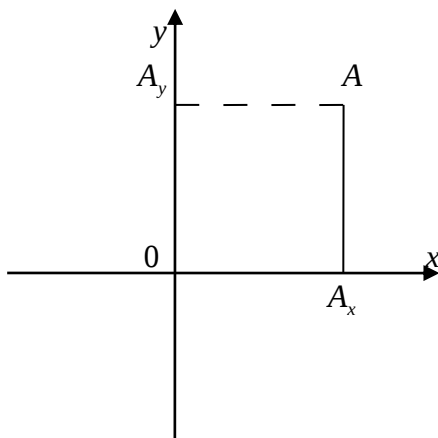
A , а точка B_1 – проекцією точки B . *Алгебраїчною проекцією* вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь l називають координату α_1 вектора $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ в базисі $(\vec{e}_1)$ простору $\vec{l}$, тобто $\alpha_1 = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектори $\vec{e}_1 = \vec{l}$ та $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ є співнаправленими і $\alpha_1 = -|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вказані вектори протилежно напрямлені. Зрозуміло, що $\alpha_1 = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi_{12}$, де φ_{12} – напрямлений кут між векторами $\vec{e}_1 = \vec{l}$ та $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. *Кутом φ між віссю l і вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ називається напрямлений кут між векторами $\vec{e}_1 = \vec{l}$ та $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.*

Безпосередньо із означень випливає, що *алгебраїчна проекція вектора* на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус напрямного кута між вектором та віссю. *Геометрична проекція вектора* на вісь дорівнює добутку алгебраїчної проекції і вектора $\vec{e}_1 = \vec{l}$. Проекція (геометрична та алгебраїчна) суми векторів дорівнює сумі проекцій.



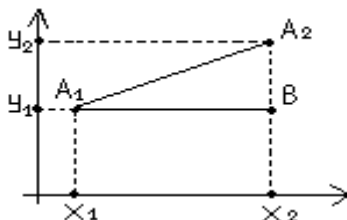
Прямокутна декартова система координат на площині вводиться так [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]. Беруться дві взаємно перпендикулярні осі з початком в одній точці O – початку координат. Одна з них називається віссю абсцис і позначається через OX , а друга – віссю ординат і позначається через OY . Кожній точці A площини ставиться у відповідність упорядкована пара чисел $(x; y)$, де x – координата на осі OX точки A_x , яка є ортогональною проекцією точки A на вісь OX , а y – координата на осі OY точки A_y , яка є ортогональною проекцією точки A на вісь OY . Ця упорядкована пара чисел $(x; y)$ називаються координатами точки A (відповідно абсцисою

та ординатою) у вибраній системі координат і цей факт записують так: $A(x; y)$. Іншими словами, можна сказати, що для знаходження координат точки A потрібно провести через неї прямі паралельні осям координат, знайти точки A_x та A_y перетину цих прямих з осями OX та OY відповідно та знайти координати x і y цих точок в системах координат OX та OY , відповідно. Для побудови точки $A(x; y)$ з координатами $(x; y)$ потрібно через точки $A_x(x)$ та $A_y(y)$ осей OX та OY відповідно провести прямі паралельні осям OY та OX . Тоді точка A – це точка перетину цих прямих. Цю систему координат позначають так: XOY .



Теорема 4. Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ введено прямокутну декартову систему координат. Тоді відстань $d(A_1; A_2)$ між точками $A_1(x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$ і $A_2(x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$ знаходиться за формулою

$$d(A_1; A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Доведення. Проведемо через точки A_1 та A_2 прямі, паралельні осям OX та OY відповідно. Нехай B – точка їх перетину. Оскільки $A_1B = |x_2 - x_1|$ і $A_2B = |y_2 - y_1|$, то за теоремою Піфагора

$$d(A_1; A_2) = \sqrt{A_1B^2 + A_2B^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Приклад 1. Якщо $A_1(1; -2)$ і $A_2(2; 1)$, то

$$d(A_1; A_2) = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}.$$

Теорема 5. Нехай $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ та $\{\vec{e}'_1; \vec{e}'_2\}$ – два базиси простору $\mathbb{R}^2$ і

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2. \end{cases} \quad (1)$$

Тоді

$$\Delta := \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Навпаки, якщо $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ – базис простору $\mathbb{R}^2$ і виконується умова (2), то система $\{\vec{e}'_1; \vec{e}'_2\}$, визначена рівностями (1), є базисом простору $\mathbb{R}^2$.

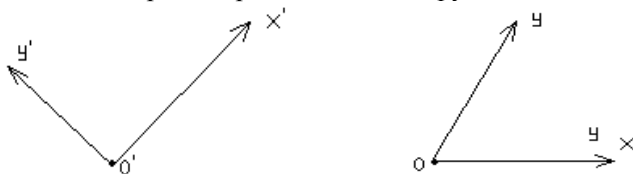
Доведення. Якщо (2) не виконується, то $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0$. Серед чисел α_{11} та α_{21} принаймні одне не дорівнює нулеві, бо вектори $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$ є лінійно незалежними. Аналогічне можна сказати про числа α_{12} та α_{22} . Нехай, наприклад, $\alpha_{11} \neq 0$ і $\alpha_{12} \neq 0$. Тоді $\alpha_{12}\vec{e}'_1 - \alpha_{11}\vec{e}'_2 = (\alpha_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\alpha_{22})\vec{e}_2 = \vec{0}$. Отже, вектори $\vec{e}'_1$ та $\vec{e}'_2$ є лінійно залежними. Маємо суперечність, яка і доводить першу частину теореми. Припустимо, що (2) виконується, а вектори $\vec{e}'_1$ та $\vec{e}'_2$ є лінійно залежними. Тоді існують числа c_1 та c_2 , для яких $|c_1| + |c_2| \neq 0$ і $c_1\vec{e}'_1 + c_2\vec{e}'_2 = \vec{0}$. Тому $(c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12})\vec{e}_1 + (c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22})\vec{e}_2 = \vec{0}$. Отже, система

$$\begin{cases} c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} = 0, \\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} = 0, \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок. Таким чином, $\Delta = 0$. Цією суперечністю завершується доведення теореми. ►

Два базиси $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ та $\{\vec{e}'_1; \vec{e}'_2\}$ простору $\mathbb{R}^2$ називаються *еквівалентними* [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 38, 39, 45], якщо визначник Δ , визначений формулою (2), є додатним. Всі базиси простору $\mathbb{R}^2$ можна поділити на два взаємно неперетинні класи. Для цього потрібно взяти два

таких базиси, для яких $\Delta < 0$. До першого класу відійдуть всі базиси еквівалентні першому, а до другого – всі еквівалентні другому. Площина називається *орієнтовною*, якщо в ній вибрано базис. Цей базис називається *орієнтацією площини*. Дві орієнтації називають однаковими, якщо для відповідних базисів $\Delta > 0$. Можливі дві орієнтації. Одну з них називають додатньою або правою, а другу – від'ємною або лівою. Як правило за додатну або праву беруть ту, для якої першим вектором є вектор $\vec{e}_1 = \vec{i}$, а другим $\vec{e}_2 = \vec{j}$ і вектор $\vec{e}_2$ отримується із вектора $\vec{e}_1 = \vec{i}$ шляхом повороту на кут $\pi/2$ проти ходу годинникової стрілки. Таким чином, орієнтувати площину означає вибрати в ній базис і вказати, який із базисних векторів є першим, а який – другим.



Теорема 6 (про перехід до нової системи координат на площині). Нехай на площині задано дві довільні афінні системи координат XOY і $X'O'Y'$, які породжені базисами $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ та $(\vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$ відповідно. Нечай, далі, $(x; y)$ – координати точки A в системі координат XOY , $(x'; y')$ координати цієї точки в системі $X'O'Y'$, $(b_1; b_2)$ – координати точки O' в XOY і

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2, \quad (3)$$

тобто $(\alpha_{11}; \alpha_{21})$ – координати вектора $\vec{e}'_1$ в базисі $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, а $(\alpha_{12}; \alpha_{22})$ – координати вектора $\vec{e}'_2$ в цьому ж базисі. Тоді

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + b_1, \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b_2. \end{cases} \quad (4)$$

Доведення. Маємо $\vec{OO'} = (b_1; b_2)$, $\vec{O'A} = (x'; y')$, $\vec{OA} = (x; y)$. Але $\vec{OA} = \vec{OO'} + \vec{O'A}$. Тоді $x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2) + y'(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2) + b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$. Тому $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + b_1)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b_2)\vec{e}_2$. Два вектори є рівними тоді і тільки тоді, коли рівними є їхні координати. Тому із останньої рівності отримуємо (4). ►

Формули (3) називаються *формулами переходу до нової системи координат* на площині [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31]. Матриця $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$

називається *матрицею переходу* і її визначник $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Теорема 7 (про поворот і паралельне перенесення системи координат). Нехай на площині $\mathbb{R}^2$ задано дві прямокутні декартові системи координат XOY і $X'O'Y'$, які породжені ортонормованими базисами $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ та $(\vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$, причому $\vec{e}_1; \vec{e}'_1 = \vec{e}_2; \vec{e}'_2 = \alpha$ (напрямлений кут) і $(b_1; b_2)$ – координати точки O' в XOY . Тоді

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + b_1, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b_2. \end{cases} \quad (5)$$

Доведення. Нехай $\vec{e}'_1 = \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{21} \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = \alpha_{12} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2$.

Маємо $\alpha_{11} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}'_1| |\vec{e}_1| \cos \vec{e}'_1 \vec{e}_1 = \cos \alpha$,

$$\alpha_{21} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}'_1| |\vec{e}_2| \cos \vec{e}'_1 \vec{e}_2 = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \alpha,$$

$$\alpha_{12} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}'_2| |\vec{e}_1| \cos \vec{e}'_2 \vec{e}_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha,$$

$$\alpha_{22} = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}'_2| |\vec{e}_2| \cos \vec{e}'_2 \vec{e}_2 = \cos \alpha.$$

Тому формули (5) випливають з теореми 6. ►

Зауваження 1. У випадку, коли $O' = O$, тобто коли $b_1 = b_2 = 0$ репер $(O'; \vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$ отримується із репера $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ поворотом на кут α відносно початку координат. В цьому випадку формули (5) приймають вигляд

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Зауваження 2. У випадку, коли $\alpha = 0$ репер $(O'; \vec{e}'_1; \vec{e}'_2)$ отримується із репера $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ паралельним перенесенням на $\vec{b}_1 = (b_1; b_2)$. В цьому випадку формули (5) приймають вигляд

$$\begin{cases} x = x' + b_1, \\ y = y' + b_2. \end{cases}$$

Зауваження 3. Розглянемо ще випадок, коли $\vec{e}_1\vec{e}'_1 = \alpha$, а $\vec{e}_2\vec{e}'_2 = \alpha + \pi$. Це той випадок, коли здійснюється поворот системи координат на кут α , а потім зміна напрямку другого вектора на протилежний. В такому випадку формули переходу до нової системи координат приймають вигляд

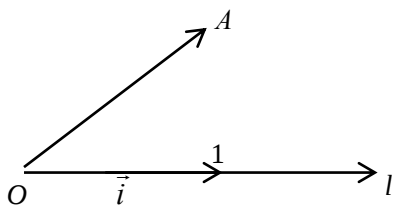
$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + b_1, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b_2. \end{cases}$$

Зауваження 4. Матриця $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається

ортогональною, якщо $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$. Визначник такої матриці дорівнює ± 1 . Вище в цьому параграфі матриці були ортогональними, причому лише в зауваженні 3 ми маємо, що $\Delta = -1$.

Репером або афінним репером на площині називають [1, 3, 26-31, 34-36] упорядковану трійку точок (O, A, B) . Точка O називається вершиною репера. Два репера (O, A, B) і (O', A', B') називаються рівними, якщо $O = O'$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA}$. Репер називається ортонормованим, якщо $\angle OAB = \pi/2$ і $OA = OB = 1$. Репер слід уявляти як упорядковану пару векторів $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$ і $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, які мають спільний початок. Репери (O, A, B) і (O', A', B') називають однаково орієнтовними, якщо базиси $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ і $(\overrightarrow{O'A'}; \overrightarrow{O'B'})$ є однаково орієнтовними.

Декартова прямокутна система координат дає можливість кожній точці поставити у відповідність упорядкований набір чисел і цим самим звести вивчення фігур до вивчення функцій. Проте, інколи буває корисним точкам площини ставити у відповідність упорядковану пару чисел іншим чином. Візьмемо на площині промінь з початком в точці O , напрям якого збігається з напрямом одиничного вектора $\vec{i}$. Цей промінь називається *полярною віссю*, а точка O – *полюсом*. Кожній точці A поставимо у відповідність пару чисел $(\varphi; \rho)$, де $\varphi \in \mathbb{R}$ – напрямлений кут між вектором $\vec{i}$ і $\overrightarrow{OA}$, а ρ – довжина вектора $\overrightarrow{OA}$, тобто відстань точки A від точки O [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

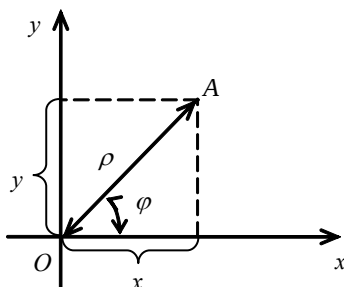


Пара чисел $(\varphi; \rho)$ називаються *полярними координатами* точки A . Точці O не приписується жодного значення φ (інколи зручно вважати, що кожне число $\varphi \in \mathbb{R}$ є першою полярною координатою точки O). Кожна інша точка площини має нескінченну кількість перших полярних координат, які відрізняються на доданок $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо за полярну вісь взяти додатний промінь осі абсцис, то декартові координати $(x; y)$ і полярні $(\varphi; \rho)$ пов'язані формулами [1, 3, 19-24, 26-31, 34-36, 38]

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

При цьому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а φ знаходиться із рівностей $\sin \varphi = y / \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = x / \sqrt{x^2 + y^2}$.

Зауваження 5. В полярних координатах ρ – це відстань і тому $\rho \geq 0$. Інколи при розгляді полярних координат вважають, що парі $(\varphi; \rho)$, $\rho < 0$, відповідає точка, симетрична точці $(\varphi; |\rho|)$ відносно точки O .



Приклад 2. Знайдемо полярні координати точки $A(2; 2)$. Маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ і $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Звідси $\varphi = \pi/4$ або $\varphi = 5\pi/4$. Але

$y=2>0$ і $x=2>0$. Тому $\varphi=\pi/4$ і у полярних координатах точка $A(\pi/4; 2\sqrt{2})$.

Сукупність всіх векторів $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, утворених точками A та B простору H , називається *приєднаним векторним простором* простору H . Простір H , розглядуваний разом з його *приєднаним простором* $\vec{H}$, називається афінним простором. Отже, афінний простір – це упорядкована пара $(H; \vec{H})$ простору H і його приєданого простору $\vec{H}$. Точніше кажучи, *афінним простором* називається така упорядкована пара $(H; \vec{H})$ непорожньої множини H , елементи якої називаються точками і позначаються великими латинськими літерами $A, B, \dots$, та векторного простору $\vec{H}$, елементи якого називаються векторами, що кожним двом точкам A та B множини H поставлено у відповідність вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ так, що [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]:

- 1) для будь-якої точки $B \in H$ і кожного вектора $\vec{a}$ із $\vec{H}$ знайдеться така точка $A \in H$, що $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$;
- 2) для будь-яких точок A, A_2, A_3 із H виконується $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}$.

Афінною системою координат простору $\mathbb{R}^2$ називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 34-36, 38, 39, 45] сукупність $(O; \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\})$ довільної точки O простору $\mathbb{R}^2$, яка називається початком координат, і базису $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ приєданого простору $\mathbb{R}^2$. *Координатами* довільної точки $A \in \mathbb{R}^2$ в цій системі координат називається упорядкований набір $(x; y)$ із двох дійсних чисел, для яких $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, тобто координати точки $A \in \mathbb{R}^2$ – це координати вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисі (1). Якщо $(x; y)$ – координати точки $A \in \mathbb{R}^2$, то цей факт записують так: $A(x; y)$.

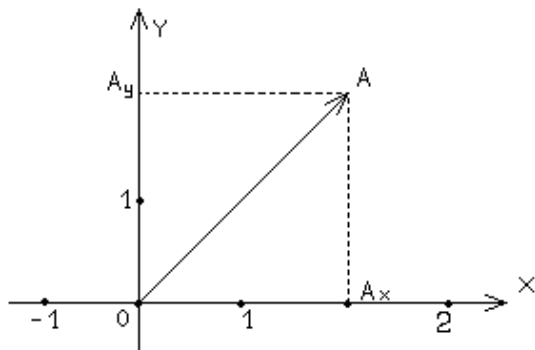
Теорема 8. *Координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ в базисі $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ дорівнюють різниці координат точок A_2 і A_1 у відповідній афінній системі координат.*

Доведення. Справді, якщо $A_1(x_1; y_1)$ і $A_2(x_2; y_2)$, то

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2) - (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2.$$

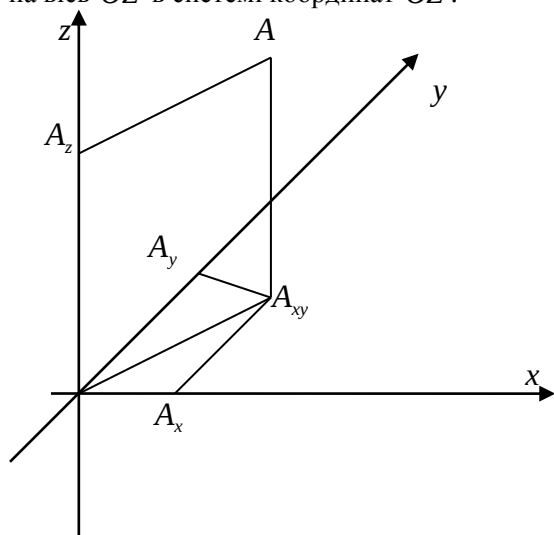
На практиці афінну систему координат на площині зображають у вигляді двох прямих OX та OY , які перетинаються в точці O – початку координат, та векторів $\vec{e}_1$ та $\vec{e}_2$, які їм відповідно належать і мають

спільний початок в точці O та кінці в точках I_1 та I_2 відповідно. Таку систему координат позначають як правило символом XOY . Прямі OX та OY називають осями абсцис та ординат відповідно. Система координат XOY на площині породжує дві афінні системи OX та OY на цих прямих. При цьому довжини відрізків OI_1 та OI_2 відіграють роль одиниці масштабу на них.



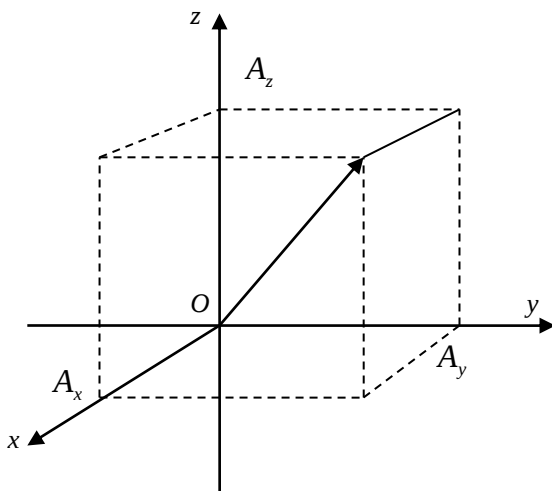
Координати точки A в цій системі координат – це координати вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисі $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$. Щоб знайти координати $(x; y)$ точки A , потрібно провести через точку A прямі, паралельні осям OX та OY , і знайти точки A_x та A_y їх перетину з цими осями. Тоді x – це координата точки A_x в системі координат OX , а y – це координата точки A_y в системі координат OY . Для побудови точки A з координатами $(x; y)$ потрібно через точку A_x осі OX з координатою x провести пряму паралельно осі OY , через точку A_y осі OY з координатою y провести пряму паралельно осі OX . Тоді A – це точка перетину цих прямих. Якщо довжини кожного вектора системи $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ дорівнюють одиниці і ці вектори попарно перпендикулярні, то афінна система координат називається прямокутною афінною системою координат. Далі, якщо не вказано на інше розглядаємо тільки такі системи координат. Хоч і з теоретичного боку “афінна система координат” і “декартова система координат” є різними поняттями, проте якщо $\vec{e}_1 = \vec{i}$ та $\vec{e}_2 = \vec{j}$ одиничні вектори, то на практиці вони не відрізняються, оскільки зображаються однаково і кожна точка прямої у відповідних декартовій та афінній системах координат має однакові координати. Афінну систему координат інколи називають загальною декартовою системою координат.

Прямокутна декартова система координат у просторі вводиться так [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]. Беруться три взаємноперпендикулярні осі, які перетинаються в одній точці O – початку координат. Одну з них називають віссю абсцис і позначають через OX , другу – віссю ординат і позначають через OY , а третю – віссю аплікат і позначають через OZ . Кожній точці A простору ставиться у відповідність упорядкований набір $(x; y; z)$ із трьох дійсних чисел, де $(x; y)$ – координати точки A_{xy} , тобто проекції точки A на площину OXY , в системі координат XOY , а z – координата точки, яка є проекцією точки A на вісь OZ в системі координат OZ .



Іншими словами можна сказати, що для знаходження координат $(x; y; z)$ точки $A \in \mathbb{R}^3$, потрібно провести через точку A площини, паралельні площинам (їх називають координатними) OXY , OZX та OYZ , і знайти точки A_x , A_y , A_z їх перетину з осями координат OX , OY та OZ , відповідно. Тоді x – це координата точки A_x в системі координат OX , y – це координата точки A_y в системі координат OY , а z – це координата точки A_z в системі координат OZ . Ця упорядкована трійка $(x; y; z)$ називається координатами точки A (відповідно абсцисою, ординатою та аплікатою) у вибраній системі координат і цей факт записують так: $A(x; y; z)$. Для побудови точки A з координатами

$(x; y; z)$ потрібно через точку A_x осі OX з координатою x провести площину паралельну координатній площині OYZ , через точку A_y осі OY з координатою y провести площину паралельну координатній площині OZX і через точку A_z осі OZ з координатою z провести площину паралельну координатній площині OXY . Тоді A – це точка перетину цих площин. Цю систему координат позначають так $OXYZ$. Координатні площини OXY , OZX та OYZ , ділять простір на вісім октантів. Нумерація цих октантів проводиться згідно з наведеною нижче таблицею [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].



Октанти									
		1	2	3	4	5	6	7	8
знаки	x	+	–	–	+	+	–	–	+
	y	+	+	–	–	+	+	–	–
	z	+	+	+	+	–	–	–	–

Теорема 9. Відстань між двома точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$ знаходиться за формулою

$$d(A_1; A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

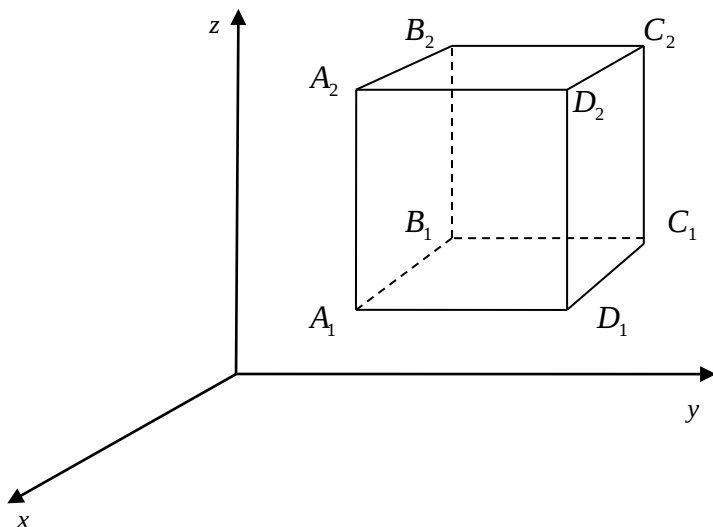
Доведення. За теоремою Піфагора

$$d(A_1; A_2) = |A_1 A_2| = \sqrt{A_1 C_1^2 + C_1 A_2^2},$$

$$A_1 C_1^2 = \sqrt{A_1 D_1^2 + D_1 C_1^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

отримуємо $C_1 A_2 = |z_2 - z_1|$. Тому

$$d(A_1; A_2) = \sqrt{A_1 C_1^2 + C_1 A_2^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$



Теорема 10 (про координати середини відрізка). Нехай $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді координати точки $A_0(x_0; y_0; z_0)$, яка є серединою відрізка $A_1 A_2$, знаходяться за формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Доведення. Справді, $\overrightarrow{A_1 A_2} = 2\overrightarrow{A_1 A_0}$. Але

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \quad \overrightarrow{A_1 A_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1).$$

Тому $x_2 - x_1 = 2(x_0 - x_1)$, $y_2 - y_1 = 2(y_0 - y_1)$, $z_2 - z_1 = 2(z_0 - z_1)$, звідки отримуємо потрібні формули. ►

Приклад 3. Відомі вершини трикутника $A_1A_2A_3$: $A_1(3;2;-5)$, $A_2(1;-4;3)$ і $A_3(-3;0;1)$. Знайдемо середини його сторін. Нехай точки $M_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $M_1 = (\tilde{x}_0; \tilde{y}_0; \tilde{z}_0)$ і $M_2 = (\hat{x}_0; \hat{y}_0; \hat{z}_0)$ – середини сторін A_1A_2 , A_2A_3 та A_1A_3 відповідно. Тоді

$$x_0 = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y_0 = \frac{2-4}{2} = -1, \quad z_0 = \frac{-5+3}{2} = -1 \quad \text{і} \quad M_0 = (2; -1; -1).$$

Аналогічно знаходимо, що $M_1 = (-1_0; -2; 2)$ і $M_2 = (0; 1; -2)$.

Кажуть, що точка $A_0(x_0; y_0; z_0)$ ділить відрізок A_1A_2 у відношенні λ , якщо $\overrightarrow{A_1A_0} = \lambda \overrightarrow{A_0A_2}$.

Теорема 11 (про поділ відрізка в заданому відношенні). Нехай $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді координати точки $A_0(x_0; y_0; z_0)$, яка ділить відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda \neq -1$ знаходяться за формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Доведення. Оскільки $\overrightarrow{A_1A_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$ і $\overrightarrow{A_0A_2} = (x_2 - x_0; y_2 - y_0; z_2 - z_0)$, то

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0), \quad y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0), \quad z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0).$$

Звідси отримуємо потрібні рівності. ►

Приклад 4. Відомо, що точка $A_0(2; 2; 4)$ ділить відрізок A_1A_2 у відношенні $\lambda = 1/3$. Знайдемо координати точки A_2 , якщо $A_1(-2; 4; 0)$. Нехай $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді

$$2 = \frac{-2 + x_2/3}{1 + 1/3}, \quad 2 = \frac{4 + y_2/3}{1 + 1/3}, \quad 4 = \frac{0 + z_2/3}{1 + 1/3}.$$

Звідси $x_2 = 14$, $y_2 = -4$ і $z_2 = 16$. Отже, $A_2(14; -4; 16)$.

Теорема 12 (про перехід до нової системи координат у просторі). Нехай у просторі задано дві системи координат $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$, які породжені базисами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ та $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ відповідно. Нехай $(b_1; b_2; b_3)$ – координати точки O' в $OXYZ$ і

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3,$$

тобто $(\alpha_{11}; \alpha_{21}; \alpha_{31})$, $(\alpha_{12}; \alpha_{22}; \alpha_{32})$ і $(\alpha_{13}; \alpha_{32}; \alpha_{33})$ – це координати векторів $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, $\vec{e}'_3$ в базисі $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ відповідно. Тоді координати $(x; y; z)$ і $(x'; y'; z')$ довільної точки в системах координат $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$ відповідно пов'язані формулами

$$x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + b_1$$

$$y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + b_2,$$

$$z = \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + b_3.$$

Доведення цієї теореми таке ж, як і для аналогічної теореми на площині.

Нехай в просторі задано дві системи координат $OXYZ$ та $O'X'Y'Z'$, породжені базисами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ та $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$, відповідно.

Теорема 13. Нехай $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ та $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ – два базиси простору і

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3.$$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

Простір називається *орієнтованим* [1, 3, 16, 17, 19-24, 38, 39, 45], якщо в ньому вибрано базис і вказано порядок базисних векторів. Дві орієнтації називаються *однаковими*, якщо для них визначник Δ , визначений формулою (6), є додатним. В просторі можливі дві орієнтації. Одну з них називають додатною або правою, а другу – від'ємною або лівою. Якщо орієнтація простору задана базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то для зміни орієнтації досить в просторі взяти базис $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ для якого $\Delta < 0$. Можна наприклад, взяти $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$. За додатну орієнтацію

простору беруть таку, яка визначається правилом правої руки. Великий палець направлений в напрямі першого вектора $\vec{e}_1 = \vec{i}$ (в напрямі осі OX), вказівний в напрямі другого вектора $\vec{e}_2 = \vec{j}$, тоді середній палець буде направлений в напрямі третього вектора $\vec{e}_3 = \vec{k}$. Відповідно до орієнтації простору називають орієнтацію системи координат та базисів. Надалі вважаємо, що в просторі завжди вибрана права система координат.

2.4. Вектори в системі координат.

Теорема 1. Нехай на прямій вибрано декартову систему координат з одиничним вектором $\vec{e}_1 = \vec{i}$. Якщо $a = x\vec{i}$, $\vec{a}_1 = x_1\vec{i}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i}$, $\varphi = \vec{a}_1\vec{a}_2$, то

$$1) |\vec{a}| = |x|;$$

$$2) \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i};$$

$$3) \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2;$$

4) $\cos \varphi = \pm 1$, причому знак „+” береться у випадку співнапрявленості векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, а знак „-” береться у випадку протилежного напрямлення векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$.

Доведення. Ця теорема випливає безпосередньо із означень, якщо врахувати, що $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = 1$. ►

Теорема 2. Нехай на площині задано прямокутну декартову систему координат породжену одиничними векторами $\vec{e}_1 = \vec{i}$ та $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ і $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ – два ненульові вектори, а $\varphi = \vec{a}_1\vec{a}_2$. Тоді

$$1) \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2;$$

$$2) \vec{a}_1^2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = x_1^2 + y_1^2;$$

$$3) |\vec{a}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2};$$

$$4) \cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}};$$

$$5) x_1 = \vec{a}_1 \cdot \vec{i}, y_1 = \vec{a}_1 \cdot \vec{j};$$

$$6) \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}.$$

Доведення. Оскільки $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, то $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + x_2 y_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} = x_1 x_2 + y_1 y_2$, і перше твердження доведено, а інші випливають безпосередньо із першого та відповідних означень. ►

Приклад 1. Нехай $\vec{a}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{a}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$ і $\varphi = \angle \vec{a}_1 \vec{a}_2$. Тоді $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -4$, $|\vec{a}_1| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, $|\vec{a}_2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ і $\cos \varphi = -4 / \sqrt{65}$.

Теорема 3. Нехай на площині задано декартову систему координат породжену одиничними векторами $\vec{e}_1 = \vec{i}$ та $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{a}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ і $\vec{a}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ – два ненульові вектори, а $\varphi = \angle \vec{a}_1 \vec{a}_2$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

- 1) вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ є колінеарними;
- 2) існує таке число τ , що $\vec{a}_2 = \tau \vec{a}_1$;
- 3) існує таке число τ , що $x_2 = \tau x_1$ і $y_2 = \tau y_1$;
- 4) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ (координати пропорційні);
- 5) $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$;
- 6) $\cos \varphi = \pm 1$.

Доведення. Ця теорема впливає безпосередньо із означень. ►

Приклад 2. Вектори $\vec{a}_1 = \vec{i} + 3\vec{j}$ та $\vec{a}_2 = 4\vec{i} + 12\vec{j}$ є колінеарними, бо їх координати пропорційні: $\frac{4}{1} = \frac{12}{3}$. При цьому $\vec{a}_2 = 4\vec{a}_1$.

Теорема 4. Нехай на площині задано декартову систему координат породжену одиничними векторами $\vec{e}_1 = \vec{i}$ та $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{a}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ і $\vec{a}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$ – два ненульові вектори, а $\varphi = \angle \vec{a}_1 \vec{a}_2$. Тоді наступні умови є еквівалентні: 1) вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ є ортогональними; 2) $\cos \varphi = 0$; 3) $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Доведення. Ця теорема впливає безпосередньо із означень та формули для знаходження косинуса кута між векторами. ►

Приклад 3. Вектори $\vec{a}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$ та $\vec{a}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$ є ортогональними, бо виконується умова їх перпендикулярності: $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$.

Напрямними кутами вектора $\vec{a}$ на площині називаються кути $\alpha = \alpha_1$ і $\beta = \alpha_2$ утворені вектором $\vec{a}$ з векторами $\vec{e}_1 = \vec{i}$ та $\vec{e}_2 = \vec{j}$ відповідно. Косинуси цих векторів називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 5. Для будь-якого вектора $\vec{a} \neq 0$ площини виконується

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Доведення. Маємо

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тому

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Нехай $\vec{a} = (3; 4)$. Тоді $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ і $\cos \alpha = 3/5$ та $\cos \beta = 4/5$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$.

2.5. Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, яке позначається також символами $(\vec{a}; \vec{b})$ та $\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$ і визначається рівністю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

де $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Теорема 1 (про властивості скалярного добутку). Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} = 0$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ для всіх $\vec{a}$;
- 3) (комутативність скалярного добутку) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 4) (асоціативність відносно множення на число λ)

$$\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b};$$

- 5) (дистрибутивність відносно додавання)

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$$

$$6) \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \text{ для всіх } \vec{a}.$$

Доведення. Перші чотири властивості випливають із означень. Доведемо п'яту. Нехай $\vec{a}_c$ – геометрична проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{c}$. Тоді $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c}_{\vec{a}+\vec{b}} \cdot \vec{c} = (\vec{c}_{\vec{a}} + \vec{c}_{\vec{b}}) \cdot \vec{c}$. ►

Вектор $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називається скалярним квадратом векторів і позначається через $\vec{a}^2$. Отже, $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

Приклад 1. Нехай $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ і $\varphi = \angle \vec{a}\vec{b} = \pi/3$. Тоді

$$\begin{aligned} (2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) &= 2\vec{a}^2 + 8\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}\vec{a} - 12\vec{b}^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 12|\vec{b}|^2 = -144. \end{aligned}$$

Приклад 2. Якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \angle \vec{a}\vec{b} = \pi/3$, $\vec{c} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$, то

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(4\vec{a} + 5\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{a}^2 + 40\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2} = 2\sqrt{39}.$$

Нехай $OXYZ$ – прямокутна декартова система координат у просторі породжена одиничними векторами $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$ та $\vec{e}_3 = \vec{k}$.

Теорема 2. Нехай $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ – два вектори, а $\varphi = \angle \vec{a}_1\vec{a}_2$. Тоді:

$$1. \vec{a}_1\vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

$$2. \vec{a}_1^2 = \vec{a}_1\vec{a}_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2;$$

$$3. |\vec{a}_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$4. \cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$$5. x_1 = \vec{a}_1\vec{i}, y_1 = \vec{a}_1\vec{j}, z_1 = \vec{a}_1\vec{k};$$

$$6. \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Доведення. Оскільки $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$, то

$$\begin{aligned} \vec{a}_1\vec{a}_2 &= x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + \\ &+ y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Отже, перше твердження доведено, а інші випливають із першого та відповідних означень. ►

Приклад 3. Нехай $\vec{a}_1 = (3; -5; 8)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; -4)$ і $\varphi = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Тоді

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 8^2} = 7\sqrt{2}, \quad |\vec{a}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 = 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + 8 \cdot (-4) = -40, \quad \cos \varphi = -20 / 21,$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (2; -4; 4), \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (4; -6; 12),$$

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6 \quad \text{і} \quad |\vec{a}_1 - \vec{a}_2| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = 14.$$

Напрямними кутами вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ в просторі називаються кути $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{i})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{j})$ і $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{k})$, утворені вектором $\vec{a}$ з векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ відповідно. Косинуси цих кутів називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$.

Теорема 3. Для будь-якого вектора $\vec{a} \neq 0$ простору виконується

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

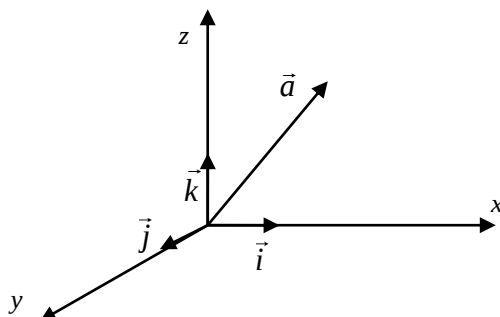
Доведення. Маємо

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Тому

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1. \quad \blacktriangleright$$



Приклад 4. Обчислимо кути, які вектор $\vec{a} = (6; -2; 3)$ утворює з осями координат. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$, то $\alpha = \arccos(6/7)$, $\beta = \arccos(-2/7)$ і $\gamma = \arccos(3/7)$.

Теорема 4 (про умови колінеарності двох векторів у просторі). Нехай $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ – два ненульові вектори, а $\varphi = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Тоді наступні умови є еквівалентними:

- 1) вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ є колінеарними;
- 2) існує таке число τ , що $\vec{a}_2 = \tau\vec{a}_1$;
- 3) існує таке число τ , що $x_2 = x_1\tau, y_2 = y_1\tau, z_2 = z_1\tau$;
- 4) $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ (координати пропорційні);
- 5) $x_1y_2 - y_1x_2 = 0, x_1z_2 - x_2z_1 = 0$;
- 6) $\cos \varphi = \pm 1$.

Приклад 5. Нехай $\vec{a} = (1; -2; 5)$ і $\vec{b} = (3; -1; 0)$. Тоді вектори $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{b} - 2\vec{a}$ є колінеарними, бо $\vec{c} = (-2; -6; 20)$, $\vec{d} = (1; 3; -10)$ і $\frac{-2}{1} = \frac{-6}{3} = \frac{20}{-10} = -2$.

Теорема 5 (про умови перпендикулярності двох векторів у просторі). Нехай $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ і $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ – два ненульові вектори, а $\varphi = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Тоді наступні умови є еквівалентними: 1. вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ є ортогональними; 2. $\cos \varphi = 0$; 3. $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

Приклад 6. Вектори $\vec{a}_1 = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$ і $\vec{a}_2 = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ є ортогональними, бо $3 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 + 7 \cdot (-1) = 0$.

2.6. Векторний добуток векторів. Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ в додатно орієнтованому просторі називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] такий перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, що $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin \varphi$, де вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{a} \times \vec{b}$ утворюють праву (додатну) трійку і $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Теорема 1 (про властивості векторного добутку). Для будь-яких векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ та числа t виконується:

$$1^*. \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = -(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1);$$

$$2^*. (t\vec{a}_1) \times \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \times (t\vec{a}_2) = t(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2);$$

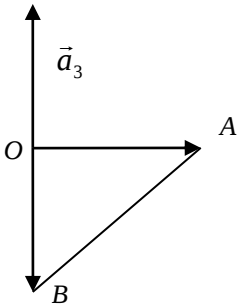
$$3^*. \vec{a}_3 \times (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{a}_3 \times \vec{a}_1 + \vec{a}_3 \times \vec{a}_2;$$

$$4^*. (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_3 + \vec{a}_2 \times \vec{a}_3;$$

$$5^*. \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

якщо $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$.

Доведення. Властивості 1*, 2* випливають безпосередньо із означень, а властивість 5* є наслідком 1*-4*. Тому досить довести властивість 4* (властивість 3* доводиться аналогічно). Згідно з властивістю 2* можна вважати, що $|\vec{a}_3| = 1$ і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ не є компланарними. Зведемо розглядувані вектори до спільного початку O . Нехай P – площина, яка проходить через точку O перпендикулярно до вектора $\vec{a}_3$. Розглянемо трикутник OAB , для якого $\overrightarrow{OA} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Проекцією цього трикутника на площину P буде деякий трикутник OA_1B_1 . Повернемо навколо точки O цей трикутник на кут $\pi/2$ за ходом годинникової стрілки.



Якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}_3$ отримаємо трикутник OA_2B_2 . Нехай $\varphi_{1,3}$ – кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_3$. Тоді $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_3$, бо за побудовою трійка $(\vec{a}_1; \vec{a}_3; \overrightarrow{OA_2})$ є правою і $|\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_1}| \cos(\varphi - \pi/2) = \vec{a}_1 \sin \varphi_{1,3} = |\vec{a}_1| |\vec{a}_3| \sin \varphi_{1,3}$. Аналогічно $\overrightarrow{OB_2} = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ і $\overrightarrow{A_2B_2} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_3$. Але $\overrightarrow{A_2B_2} =$

$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2}$. Звідси отримуємо 4* і теорему доведено. ►

Приклад 1. Якщо $|\vec{a}_1| = 6$, $|\vec{a}_2| = 5$ і $\varphi = \vec{a}_1 \vec{a}_2 = \pi / 6$, то $|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = |\vec{a}_1| |\vec{a}_2| \sin \varphi = 15$.

Приклад 2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$ і $\varphi = \vec{p} \vec{q} = \pi / 6$.

Маємо

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (\vec{p} + \vec{q}) \times (2\vec{p} + \vec{q}) = 2(\vec{p} \times \vec{p}) + (\vec{p} \times \vec{q}) + 2(\vec{q} \times \vec{p}) + (\vec{q} \times \vec{q}) = \\ &= 2 \cdot 0 + (\vec{p} \times \vec{q}) - 2(\vec{p} \times \vec{q}) + 0 = -(\vec{p} \times \vec{q}). \end{aligned}$$

Тоді $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{p} \times \vec{q}| = |\vec{p}| |\vec{q}| \sin \varphi = 1$ (кв. од).

Приклад 3. Нехай $\vec{a}_1 = (3; -1; -2)$ і $\vec{a}_2 = (1; 2; -1)$. Знайдемо $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ та $(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_2$. Маємо $2\vec{a}_1 = (6; -2; -4)$ і $2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (7; 0; -5)$. Тому

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k},$$

$$(2\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k}.$$

Теорема 2 (про знаходження площі трикутника). Площа $S_{\Delta A_1 A_2 A_3}$ трикутника $A_1 A_2 A_3$, для якого $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$ і $A_3(x_3; y_3; z_3)$, знаходяться за кожною з формул

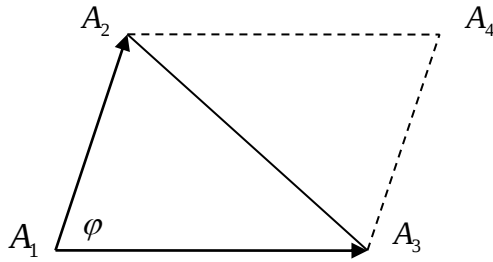
$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3}|,$$

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

Доведення. За відомою формулою $S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = |\overrightarrow{A_1 A_2}| |\overrightarrow{A_1 A_3}| \sin \varphi$.

Окрім того, $\overrightarrow{A_1 A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$,

$\overrightarrow{A_1 A_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Звідси і означення векторного добутку випливає потрібне твердження. ►



Наслідок 1. Якщо трикутник $A_1A_2A_3$ лежить в площині OXY , то

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наслідок 2 (про знаходження площі паралелограма). Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма побудованого на цих векторах:

$$S_{A_1A_2A_3A_4} = 2 \cdot S_{\Delta A_1A_2A_3} = \left| \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} \right|.$$

Приклад 4. Знайдемо площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (4; 3; 7)$ і $\vec{b} = (1; 2; 5)$ як на сторонах. Маємо

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 13\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Тому $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-13)^2 + 5^2} = \sqrt{195}$ (кв. од).

2.7. Мішаний добуток векторів. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] число $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$.

Теорема 1. Мішаний добуток векторів $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ та $\vec{a}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ знаходиться за формулою

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

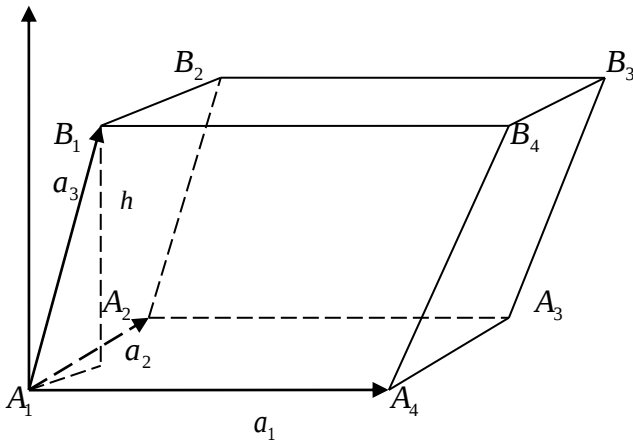
Доведення. Оскільки

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

то застосовуючи формулу для знаходження скалярного добутку векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ приходимо до потрібної рівності. ►

Теорема 2. Якщо Q – паралелепіпед побудований на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$, то об'єм цього паралелепіпеда знаходиться за формулою $V_Q = \pm(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$, причому тут беремо знак „+”, якщо $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ – права трійка і береться знак „–”, якщо $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ – ліва трійка.

Доведення. У першому випадку $V_Q = S_{A_1A_2A_3A_4} \cdot h = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| |\vec{a}_3| \cos \theta = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$, де $\theta = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \vec{a}_3$. Таким чином переходимо до потрібної формули. В другому випадку, якщо $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ – права трійка, і $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = -(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{a}_3$, знову отримуємо потрібну формулу. ►



Теорема 3 (про знаходження об'єму тетраедра). Об'єм V тетраїда $A_1A_2A_3A_4$, в якому A_i , $i \in \overline{1;4}$, мають координати $(x_i; y_i; z_i)$, знаходиться за формулою

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай Q – паралелепіпед побудований на векторах $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ та $\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)$. Тоді

$$V = \frac{1}{6} V_Q = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}|,$$

звідки випливає потрібне. ►

Приклад 1. Якщо $\vec{a}_1 = (1; -1; 3)$, $\vec{a}_2 = (-2; 2; 1)$ і $\vec{a}_3 = (3; -2; 5)$, то

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7.$$

Приклад 2. Знайдемо об'єм тетраїда $A_1A_2A_3A_4$, якщо $A_1 = (1; 1; 1)$, $A_2 = (4; 4; 4)$, $A_3 = (3; 5; 5)$ і $A_4 = (2; 4; 7)$. Маємо $\overrightarrow{A_1A_2} = (3; 3; 3)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (2; 4; 4)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (1; 3; 6)$. Тоді

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ (куб. од).}$$

Теорема 4. Для будь-яких векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ виконується $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = -(\vec{a}_2 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{a}_3 = -(\vec{a}_3 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_1 = -(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_2$.

Доведення. Ця теорема випливає безпосередньо з властивостей скалярного та векторного добутків.

Теорема 5. Для того щоб вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ були компланарними, необхідно й достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулеві.

Доведення. Справді, якщо вектори компланарні, то один з цих векторів є лінійною комбінацією інших двох. Нехай, наприклад, $\vec{a}_3 = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$. Тоді

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot c_1 \vec{a}_1 + (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot c_2 \vec{a}_2 = 0,$$

оскільки вектори $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ та $\vec{a}_1$, а також вектори $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ та $\vec{a}_2$, є ортогональними. Навпаки, якщо мішаний добуток дорівнює нулеві, то об'єм вимірюваного паралелепіпеда дорівнює нулеві. Отже, ці вектори лежать в одній площині, тому є компланарними. ►

Зауваження 1. Правильніше другу частину теореми 2 доводити так. Якщо мішаний добуток дорівнює нулю, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, рядки визначника лінійно залежні, а це означає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є лінійно залежними. Отже вони компланарні.

Приклад 3. Вектори $\vec{a}_1 = (2; -1; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; -3)$ і $\vec{a}_3 = (3; -4; 7)$ є компланарними, оскільки

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

2.8. Запитання для самоконтролю.

1. Що називається простором?
2. Що називається променем?
3. Що називається вектором?
4. Що називається довжиною (нормою) вектора?
5. Які вектори називаються колінеарними, співнапрямленими, вільними, рівними, компланарними?
6. Які операції над векторами називаються лінійними?
7. Дайте означення добутку вектора на число.
8. Що називається сумою (ріницею) двох векторів?
9. Наведіть властивості операцій над векторами.
10. Сформулюйте означення афінної системи координат на прямій.
11. Запишіть формули переходу до нової системи координат на прямій.
12. Що називається кутом між векторами.
13. Сформулюйте означення проекції вектора на вісь.

14. Що називається скалярним добутком двох векторів?
15. Перелічіть основні властивості скалярного добутку.
16. Як розкласти вектор за двома неколінеарними векторами?
17. Як розкласти вектор за трьома некомпланарними векторами.
18. Сформулюйте означення векторного простору.
19. Сформулюйте означення лінійно незалежних векторів у просторі.
20. Сформулюйте означення лінійно залежних векторів у просторі.
21. Дайте означення базису простору.
22. Як знайти координати вектора в базисі простору?
23. Наведіть операції над векторами в координатах на прямій.
24. Сформулюйте властивості операцій над векторами в декартових координатах на площині.
25. Сформулюйте умови колінеарності векторів на площині, заданих в координатах.
26. Сформулюйте умови перпендикулярності векторів на площині, заданих в координатах.
27. Сформулюйте означення напрямних косинусів вектора на площині.
28. Як вводиться прямокутна декартова система координат на прямій?
29. Як вводиться прямокутна декартова система координат на площині?
30. Запишіть формули переходу до нової системи координат на площині.
31. Запишіть формули для повороту і паралельного перенесення системи координат.
32. Які два базиси називаються еквівалентними?
33. Що називається репером на площині?
34. Що називається полярною системою координат?
35. Як вводиться прямокутна декартова система координат у просторі?
36. Сформулюйте означення скалярного добутку на довільному векторному просторі.
37. Сформулюйте означення евклідового простору.
38. Опишіть операції над векторами в координатах у просторі.
39. Як записується скалярний добуток векторів через їх координати в декартовій системі?
40. Чому дорівнює кут між двома ненульовими векторами?
41. Сформулюйте означення напрямних косинусів вектора в просторі.
42. Сформулюйте умови колінеарності двох векторів у просторі.
43. Сформулюйте умови перпендикулярності двох векторів у просторі.
44. Як знаходяться координати точки, що є серединою відрізка?
45. Запишіть формули для знаходження координат точки, що ділить відрізок в заданому відношенні.
46. Запишіть формули переходу до нової системи координат у просторі.
47. Сформулюйте означення орієнтованого простору.

48. Що таке векторний добуток двох векторів?
49. Яке геометричне тлумачення модуля векторного добутку двох неколінеарних векторів?
50. Які основні властивості має векторний добуток?
51. Яка формула використовується для обчислення векторного добутку векторів, заданих координатами?
52. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
53. Яке геометричне тлумачення модуля мішаного добутку трьох некомпланарних векторів?
54. Що розуміють під мішаним добутком трьох векторів?
55. Сформулюйте необхідні та достатні умови компланарності трьох векторів?
56. Яка формула використовується для обчислення мішаного добутку трьох векторів через їх координати у декартовій системі координат?
57. Дайте означення афінного простору.
58. Що називається афінною системою координат на площині?

2.9. Вправи і задачі.

1. Знайдіть координати середини відрізка AB :
 1. $A(1;3)$, $B(-3;3)$.
 2. $A(-1;2)$, $B(-2;4)$.
 3. $A(1;2;3)$, $B(-2;1;3)$.
 4. $A(-4;2;-3)$, $B(2;0;3)$.
2. Знайдіть довжину відрізка AB , кінці якого лежать на осях координат, а середина знаходиться у точці $D(-5;12)$.
3. Знайдіть координати точки B відрізка AB , якщо $A(2;3;-1)$ і його середина знаходиться у точці $C(1;1;1)$.
4. На осі абсцис знайдіть точку рівновіддалену від точок $A(1;2;3)$ і $B(-2;1;3)$.
5. Знайдіть модуль вектора $\overline{AB}$:
 1. $A(0;1)$, $B(2;4)$.
 2. $A(2;2)$, $B(7;14)$.
 3. $A(0;1;0)$, $B(2;0;4)$.
 4. $A(-2;-3)$, $B(4;-6)$.
 5. $A(0;1;0)$, $B(2;0;4)$.

6. $A(1;2;-1)$, $B(7;1;4)$.

7. $A(2;3)$, $B(4;6)$.

8. $A(1;-2;-1)$, $B(1;1;-1)$.

9. $A(-2;1;-1)$, $B(-2;1;1)$.

10. $A(1;-2;-1)$, $B(1;1;-1)$.

6. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{AB}$ та $-\overrightarrow{BC}$:

1. $A(0;1)$, $B(2;3)$, $C(5;3)$.

2. $A(2;2)$, $B(1;4)$, $C(2;4)$.

3. $A(-1;-1)$, $B(-2;-2)$, $C(-3;-2)$.

4. $A(-2;1)$, $B(-1;2)$, $C(2;4)$.

5. $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(4;2)$.

7. Знайдіть розклад векторів $-4\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ за векторами $\vec{i}$ та $\vec{j}$:

1. $\vec{a} = (0;1)$, $\vec{b} = (2;4)$.

2. $\vec{a} = (2;2)$, $\vec{b} = (7;14)$.

3. $\vec{a} = (2;3)$, $\vec{b} = (4;6)$.

4. $\vec{a} = (-2;-3)$, $\vec{b} = (4;-6)$.

5. $\vec{a} = (1;0)$, $\vec{b} = (2;0)$.

6. $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (1;4)$.

7. $\vec{a} = (0;1)$, $\vec{b} = (2;0)$.

8. $\vec{a} = (1;-1)$, $\vec{b} = (1;1)$.

9. $\vec{a} = (-2;-1)$, $\vec{b} = (-2;2)$.

10. $\vec{a} = (-2;-3)$, $\vec{b} = (1;-1)$.

8. Знайдіть розклад векторів $5\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $-\vec{a} + \vec{b}$ за векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$:

1. $\vec{a} = (0;1;0)$, $\vec{b} = (1;0;-4)$.

2. $\vec{a} = (1;2;-1)$, $\vec{b} = (7;1;4)$.

3. $\vec{a} = (0;-1;0)$, $\vec{b} = (2;0;4)$.

$$4. \vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (1; 1; -1).$$

$$5. \vec{a} = (-2; 1; -1), \vec{b} = (-2; 1; 1).$$

$$6. \vec{a} = (-1; 2; -1), \vec{b} = (1; -1; 1).$$

9. Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $-\vec{b}$ та $2\vec{a}$:

$$1. \vec{a} = (0; 1), \vec{b} = (2; 4).$$

$$2. \vec{a} = (2; 2), \vec{b} = (7; 14).$$

$$3. \vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (4; 6).$$

$$4. \vec{a} = (-2; -3), \vec{b} = (4; -6).$$

$$5. \vec{a} = (0; 1; 0), \vec{b} = (2; 0; 4).$$

$$6. \vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (7; 1; 4).$$

$$7. \vec{a} = (0; 1; 0), \vec{b} = (2; 0; 4).$$

$$8. \vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (1; 1; -1).$$

$$9. \vec{a} = (-2; 1; -1), \vec{b} = (-2; 1; 1).$$

10. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кут між ними:

$$1. \vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (3; -2).$$

$$2. \vec{a} = (2; 2), \vec{b} = (3; 3).$$

$$3. \vec{a} = (2; 2), \vec{b} = (-3; -3).$$

$$4. \vec{a} = (-2; -2), \vec{b} = (5; 5).$$

$$5. \vec{a} = (0; 1; 0), \vec{b} = (2; 0; 4).$$

$$6. \vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (7; 1; 4).$$

$$7. \vec{a} = (0; 1; 0), \vec{b} = (2; 0; 4).$$

$$8. \vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (1; 1; -1).$$

$$9. \vec{a} = (-2; 1; -1), \vec{b} = (-2; 1; 1).$$

$$10. \vec{a} = (1; -2; -1), \vec{b} = (1; 1; -1).$$

$$11. \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

11. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$1. A(2; -2; 3), B(1; -1; 2), C(4; -4; 5).$$

2. $A(0; -2; 6)$, $B(-12; -2; -3)$, $C(-9; -2; -6)$.
3. $A(2; 3; -1)$, $B(4; 5; -2)$, $C(3; 1; 1)$.
4. $A(-1; 2; -2)$, $B(3; 4; -5)$, $C(1; 1; 0)$.
5. $A(-2; -2; 0)$, $B(1; -2; 4)$, $C(5; -2; 1)$.
6. $A(3; 3; -1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(4; 4; -1)$.
7. $A(-1; -7; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(4; 3; 1)$.
8. $A(2; -2; 6)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; -6; 10)$.
9. $A(0; 1; 0)$, $B(3; 1; 4)$, $C(4; 1; 3)$.
10. $A(3; 2; 0)$, $B(1; 4; -1)$, $C(4; 0; 2)$.

12. Знайдіть таке $\lambda \in \mathbb{R}$, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є: а) колінеарними; б) співнапрямленими:

1. $\vec{a} = (\lambda; 1)$, $\vec{b} = (1; 2)$.
2. $\vec{a} = (\lambda; 6)$, $\vec{b} = (1; 4)$.
3. $\vec{a} = (\lambda; 2)$, $\vec{b} = (2; 1)$.
4. $\vec{a} = (-2; -2)$, $\vec{b} = (\lambda; 5)$.
5. $\vec{a} = (0; 1; \lambda)$, $\vec{b} = (2; \lambda; 4)$.
6. $\vec{a} = (1; \lambda; -1)$, $\vec{b} = (\lambda; 1; 4)$.
7. $\vec{a} = (0; \lambda; 0)$, $\vec{b} = (2; 0; \lambda)$.
8. $\vec{a} = (\lambda; 1; 3)$, $\vec{b} = (\lambda; \lambda; -2)$.
9. $\vec{a} = (\lambda; -2; 1)$, $\vec{b} = (\lambda; \lambda; -3)$.
10. $\vec{a} = (\lambda; 3; 4)$, $\vec{b} = (\lambda; \lambda; -1)$.

13. Знайдіть другу координату вектора $\vec{b}$, колінеарного до вектора $\vec{a} = (2; 1; 3)$ і такого, що $\vec{a}\vec{b} = 14$.

14. Знайдіть третю координату вектора $\vec{b}$, колінеарного до вектора $\vec{a} = (1; 2; 2)$, якщо $|\vec{b}| = 3$ і він утворює тупий кут з вектором $\vec{k}$.

15. Знайдіть величину зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C , якщо $A(4; 1; -3)$, $B(6; 5; -1)$ і $C(3; 2; 4)$.

16. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо $A(1; -2)$, $B(3; 2)$ і $C(6; 4)$.

17. Знайдіть площу квадрата, стороною якого є менша діагональ паралелограма побудованого на векторах $\vec{a} = (1; 2)$ і $\vec{b} = (10; -5)$, що виходять з однієї точки.

18. Знайдіть $|\vec{a} - \vec{b}|^2$, якщо кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює 60° , $|\vec{a}| = 9$ і $|\vec{b}| = 5$.

19. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|^2$, якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є перпендикулярними, $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 12$.

20. З'ясуйте, чи вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ є колінеарними?

1. $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (1; 0; -1)$, $\vec{p} = 3\vec{a} + 6\vec{b}$, $\vec{q} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

2. $\vec{a} = (2; 0; 1)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$, $\vec{p} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

3. $\vec{a} = (-2; 2; 1)$, $\vec{b} = (-1; -2; 2)$, $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

4. $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1; 1)$, $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

5. $\vec{a} = (2; 5; 1)$, $\vec{b} = (5; 0; 2)$, $\vec{p} = -\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

6. $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (1; 3; -1)$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

7. $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 0)$, $\vec{p} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{q} = -3\vec{a} + \vec{b}$.

8. $\vec{a} = (1; 3; -1)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$, $\vec{p} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$.

9. $\vec{a} = (-1; -2; 2)$, $\vec{b} = (1; 0; 2)$, $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{q} = -2\vec{a} - 6\vec{b}$.

10. $\vec{a} = (1; 3; 2)$, $\vec{b} = (1; -2; 6)$, $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = -6\vec{a} + 6\vec{b}$.

21. З'ясуйте, чи вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є компланарними?

1. $\vec{a} = (3; -2; -1)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (2; 1; 2)$.

2. $\vec{a} = (0; -1; -1)$, $\vec{b} = (0; 2; 2)$, $\vec{c} = (0; 3; 3)$.

3. $\vec{a} = (1; 3; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 1)$.

4. $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (5; 5; 5)$, $\vec{c} = (0; -1; -2)$.

5. $\vec{a} = (0; 6; 1)$, $\vec{b} = (0; 2; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

6. $\vec{a} = (4; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (5; 5; 5)$.

7. $\vec{a} = (2; 5; 0)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

$$8. \vec{a} = (1; 0; -1), \vec{b} = (-2; -1; 0), \vec{c} = (3; 1; -1).$$

$$9. \vec{a} = (4; 3; 1), \vec{b} = \{5; 1; 2\}, \vec{c} = (2; 1; -1).$$

$$10. \vec{a} = (-2; 4; 3), \vec{b} = (4; 7; 5), \vec{c} = (2; 0; -1).$$

$$11. \vec{a} = (2; 5; 8), \vec{b} = (1; -3; -7), \vec{c} = (0; 5; 10).$$

$$12. \vec{a} = (1; 5; 1), \vec{b} = (1; 7; 1), \vec{c} = (2; 2; 1).$$

22. Знайдіть мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$1. \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

$$2. \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 7\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 21\vec{k}.$$

$$3. \vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = 7\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.$$

$$4. \vec{a} = -7\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$5. \vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$6. \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

$$7. \vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}, \vec{c} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

$$8. \vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}, \vec{c} = -12\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}.$$

$$9. \vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{k}, \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$$

$$10. \vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}, \vec{b} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 8\vec{k}.$$

$$11. \vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{c} = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 3\vec{k}.$$

2.10. Індивідуальні завдання.

1. Нехай $|\vec{m}| = k$, $|\vec{n}| = l$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \varphi$, $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$ і $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$.

Знайдіть: а) $(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})(\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$; б) $|\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}|$; в) $\text{пр}_{\vec{b}}(\nu\vec{a} + \tau\vec{b})$; г)

$\cos(\vec{a}, \tau\vec{b})$:

$$1. \alpha = -5, \beta = -4, \gamma = 3, \delta = 6, k = 3, l = 5, \varphi = 5\pi/3, \lambda = -2, \mu = 1/3, \nu = 1, \tau = 2.$$

$$2. \alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 4, \delta = -1, k = 1, l = 3, \varphi = \pi, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = -2, \tau = 4.$$

$$3. \alpha = 5, \beta = -2, \gamma = -3, \delta = -1, k = 4, l = 5, \varphi = 4\pi/3, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -1, \tau = 5.$$

4. $\alpha=5, \beta=2, \gamma=-6, \delta=-4, k=3, l=2, \varphi=5\pi/3, \lambda=-1, \mu=1/2, \nu=2, \tau=3.$
5. $\alpha=3, \beta=-2, \gamma=-4, \delta=5, k=2, l=3, \varphi=\pi/3, \lambda=2, \mu=-3, \nu=5, \tau=1.$
6. $\alpha=2, \beta=-5, \gamma=-3, \delta=4, k=2, l=4, \varphi=2\pi/3, \lambda=3, \mu=-4, \nu=2, \tau=3.$
7. $\alpha=3, \beta=2, \gamma=-4, \delta=-2, k=2, l=5, \varphi=4\pi/3, \lambda=1, \mu=-3, \nu=0, \tau=-1/2.$
8. $\alpha=5, \beta=2, \gamma=1, \delta=-4, k=3, l=2, \varphi=\pi, \lambda=1, \mu=-2, \nu=3, \tau=-4.$
9. $\alpha=-3, \beta=-2, \gamma=1, \delta=5, k=3, l=6, \varphi=4\pi/3, \lambda=-1, \mu=2, \nu=1, \tau=1.$
10. $\alpha=5, \beta=-3, \gamma=4, \delta=2, k=4, l=1, \varphi=5\pi/3, \lambda=2, \mu=-1/2, \nu=3, \tau=0.$
11. $\alpha=-2, \beta=3, \gamma=3, \delta=-6, k=6, l=3, \varphi=5\pi/3, \lambda=3, \mu=-1/3, \nu=1, \tau=2.$
12. $\alpha=-2, \beta=6, \gamma=5, \delta=9, k=5, l=2, \varphi=2\pi/3, \lambda=7, \mu=-5, \nu=-1, \tau=7.$
13. $\alpha=2, \beta=7, \gamma=-5, \delta=5, k=3, l=2, \varphi=4\pi/3, \lambda=-7, \mu=-1, \nu=1, \tau=-4.$
14. $\alpha=2, \beta=-4, \gamma=3, \delta=6, k=2, l=3, \varphi=\pi/3, \lambda=3, \mu=1/3, \nu=1, \tau=2.$
15. $\alpha=6, \beta=-1, \gamma=-5, \delta=-1, k=4, l=3, \varphi=\pi/6, \lambda=3, \mu=1/2, \nu=1, \tau=-2.$
16. $\alpha=-2, \beta=3, \gamma=3, \delta=-6, k=8, l=4, \varphi=3\pi/2, \lambda=8, \mu=-1/4, \nu=1, \tau=1.$
17. $\alpha=-1, \beta=-3, \gamma=2, \delta=7, k=9, l=10, \varphi=4\pi/3, \lambda=3, \mu=-1/6, \nu=1, \tau=2.$
18. $\alpha=7, \beta=-6, \gamma=5, \delta=4, k=8, l=5, \varphi=5\pi/3, \lambda=9, \mu=-6, \nu=-1, \tau=2.$
19. $\alpha=1, \beta=-3, \gamma=3, \delta=-6, k=3, l=5, \varphi=2\pi/3, \lambda=3, \mu=1/4, \nu=1, \tau=-5.$
20. $\alpha=-8, \beta=3, \gamma=-5, \delta=-6, k=8, l=5, \varphi=4\pi/3, \lambda=3, \mu=-5, \nu=1, \tau=2.$

21. $\alpha=5, \beta=-4, \gamma=-5, \delta=2, k=7, l=2, \varphi=\pi/3, \lambda=3, \mu=2, \nu=-4, \tau=3$.
22. $\alpha=4, \beta=3, \gamma=3, \delta=-6, k=13, l=6, \varphi=2\pi/3, \lambda=8, \mu=3, \nu=1, \tau=-6$.
23. $\alpha=2, \beta=3, \gamma=1, \delta=7, k=2, l=4, \varphi=\pi/2, \lambda=2, \mu=-1/3, \nu=1, \tau=2$.
24. $\alpha=-2, \beta=3, \gamma=3, \delta=-6, k=3, l=15, \varphi=\pi/3, \lambda=-3, \mu=6, \nu=12, \tau=-5$.
25. $\alpha=-6, \beta=3, \gamma=3, \delta=-6, k=4, l=2, \varphi=\pi/4, \lambda=3, \mu=9, \nu=-3, \tau=2$.
26. $\alpha=-5, \beta=-6, \gamma=3, \delta=9, k=9, l=3, \varphi=2\pi/3, \lambda=-5, \mu=-1, \nu=-1, \tau=2$.
27. $\alpha=9, \beta=2, \gamma=8, \delta=-6, k=6, l=3, \varphi=\pi, \lambda=3, \mu=1/4, \nu=1/2, \tau=1$.
28. $\alpha=-1, \beta=3, \gamma=-2, \delta=1, k=4, l=3, \varphi=5\pi/3, \lambda=3, \mu=5, \nu=1, \tau=2$.
29. $\alpha=4, \beta=-7, \gamma=8, \delta=-1, k=6, l=3, \varphi=2\pi/3, \lambda=3, \mu=-3, \nu=-6, \tau=1$.
30. $\alpha=2, \beta=1, \gamma=10, \delta=5, k=5, l=8, \varphi=5\pi/3, \lambda=3, \mu=-1/3, \nu=1, \tau=2$.

2. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ($\varphi = \overrightarrow{p, q}$ – кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$):

1. $\vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$.
3. $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$.
4. $\vec{a} = 3\vec{p} - 5\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{5\pi}{6}$.
5. $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 6, \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

$$6. \vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$7. \vec{a} = 2\vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$8. \vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 4, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$9. \vec{a} = 4\vec{p} - 4\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$10. \vec{a} = \vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$11. \vec{a} = \vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$12. \vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = \sqrt{3}, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$13. \vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$14. \vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = \sqrt{3}, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$15. \vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$16. \vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 5, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$17. \vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = -\vec{p} + 4\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

$$18. \vec{a} = \vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

$$19. \vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - 8\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

$$20. \vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 4\vec{p} - 5\vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

21. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 6\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
22. $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.
23. $\vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 7\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.
24. $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.
25. $\vec{a} = \vec{p} - 5\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 6\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
26. $\vec{a} = \vec{p} - 7\vec{q}$, $\vec{b} = 7\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
27. $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = -2\vec{p} - 6\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
28. $\vec{a} = -5\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 8\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.
29. $\vec{a} = -2\vec{p} - 5\vec{q}$, $\vec{b} = 8\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 4$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.
30. $\vec{a} = 10\vec{p} + 5\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 10\vec{q}$, $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

3. Задані координати точок A, B і C . Визначте: 1) довжину вектора $\vec{a}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a} \times \vec{b}$; 5) мішаний добуток векторів $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$; 6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$?; 7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$; 8) проекцію вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$; 9) координати точки $M(x; y; z)$, яка ділить відрізок l у відношенні λ .

1. $A(1; 1; -2), B(4; -3; 0), C(5; 1; -4)$, $\vec{a} = -5\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{AB}$, $\vec{d} = \vec{AC}$, $l = AC$, $\lambda = 2/3$.
2. $A(4; -3; 5), B(-7; 2; 8), C(7; -9; 2)$, $\vec{a} = 2\vec{AB} - 7\vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{AC}$, $\vec{c} = \vec{AB}$, $\vec{d} = \vec{BC}$, $l = AC$, $\lambda = 5/8$.

3. $A(2; -3; 8), B(-5; 3; 5), C(-7; -9; 7), \quad \vec{a} = 6\vec{AB} - 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = BC, \lambda = 4/7.$
4. $A(-2; -3; 5), B(-7; 3; 8), C(5; -9; 7), \quad \vec{a} = 2\vec{AB} - 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = BC, \lambda = 5/7.$
5. $A(0; 1; -3), B(3; 5; 7), C(-4; 3; 9), \quad \vec{a} = \vec{AB} - 2\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}, l = BC, \lambda = 1/2.$
6. $A(6; -5; 2), B(-4; 3; -1), C(2; -9; 8), \quad \vec{a} = 9\vec{AB} - 8\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{AC}, l = BC, \lambda = 3/7.$
7. $A(-6; 2; 5), B(6; 1; -5), C(7; -1; 8), \quad \vec{a} = -3\vec{AB} + 5\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{BA}, \vec{d} = \vec{AC}, l = AC, \lambda = 2/3.$
8. $A(4; 6; 7), B(6; -3; 1), C(9; -7; 7), \quad \vec{a} = 2\vec{AB} - 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AC, \lambda = 4/3.$
9. $A(-2; 7; 7), B(5; 3; -1), C(-5; -9; 7), \quad \vec{a} = 9\vec{AB} - 7\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = BC, \lambda = 3/4.$
10. $A(2; -7; 5), B(-5; 3; 1), C(-8; 9; 3), \quad \vec{a} = 5\vec{AB} - 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AC, \lambda = 5/4.$
11. $A(9; -7; 7), B(-5; 3; 1), C(3; -9; 7), \quad \vec{a} = 5\vec{AB} - 4\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AB},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AB, \lambda = 3/7.$
12. $A(-5; -7; 3), B(-3; 3; 1), C(5; -9; 7), \quad \vec{a} = 9\vec{AB} + 8\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AC, \lambda = 3/5.$
13. $A(0; 2; 11), B(3; 6; -4), C(4; 4; 12), \quad \vec{a} = 2\vec{AB} - 7\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AB},$
 $\vec{c} = \vec{AC}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AB, \lambda = 4/3.$
14. $A(4; 1; 12), B(7; 5; -4), C(8; -3; 2), \quad \vec{a} = -2\vec{AB} + 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = BC, \lambda = 7/2.$
15. $A(6; -3; 7), B(-5; 6; 1), C(-3; -9; 7), \quad \vec{a} = 4\vec{AB} - 3\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = BC, \lambda = 1/2.$
16. $A(2; -5; 7), B(-3; 3; 1), C(-4; -9; 7), \quad \vec{a} = 9\vec{AB} - 7\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC},$
 $\vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AC, \lambda = 9/7.$

17. $A(4; -3; 13), B(7; 1; 8), C(8; -10; 5), \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{CB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 8/5.$
18. $A(4; -5; -7), B(7; -3; 1), C(1; -9; 7), \quad \vec{a} = 5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = CB, \lambda = 5/4.$
19. $A(2; -5; 9), B(-7; 3; 4), C(1; -9; 9), \quad \vec{a} = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AC}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AB, \lambda = 5/8.$
20. $A(2; -3; 5), B(-5; 3; 8), C(7; -9; 7), \quad \vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = BC, \lambda = 3/7.$
21. $A(2; 6; 12), B(5; 11; 6), C(3; -3; 14), \quad \vec{a} = -5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 1/2.$
22. $A(8; 7; 7), B(-5; 3; 5), C(6; -9; 2), \quad \vec{a} = 6\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AB, \lambda = 3/8.$
23. $A(0; -13; 9), B(12; 8; -4), C(10; -6; 7), \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AB},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{CB}, \vec{d} = \overrightarrow{CA}, l = BC, \lambda = 7/4.$
24. $A(2; 7; 7), B(-5; 3; -1), C(2; -9; 7), \quad \vec{a} = 7\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 13/7.$
25. $A(4; -7; 7), B(-5; 3; 1), C(9; -9; 7), \quad \vec{a} = 9\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 5/7.$
26. $A(-6; -2; 9), B(6; 7; 12), C(4; -7; 15), \quad \vec{a} = \overrightarrow{AB} + 10\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AB, \lambda = 15/4.$
27. $A(2; 5; -7), B(-8; 3; 5), C(7; -9; 7), \quad \vec{a} = 8\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 9/5.$
28. $A(-8; -4; 15), B(4; 5; 13), C(2; -9; 18), \quad \vec{a} = 6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AB, \lambda = 4/9.$
29. $A(3; -3; 5), B(-5; -3; 8), C(4; -9; 9), \quad \vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{BC}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC},$
 $\vec{c} = \overrightarrow{AB}, \vec{d} = \overrightarrow{BC}, l = AC, \lambda = 3/8.$

$$30. A(4; -3; 5), B(-7; 2; 8), C(7; -9; 2), \quad \vec{a} = 2\vec{AB} - 7\vec{BC}, \quad \vec{b} = \vec{AC}, \\ \vec{c} = \vec{AB}, \vec{d} = \vec{BC}, l = AC, \lambda = 5/8.$$

4. Перевірте, чи вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ утворюють базис. Напишіть розклад вектора $\vec{x}$ за цим базисом:

1. $\vec{x} = (-2; 0; 9)$, $\vec{p} = (0; -1; 2)$, $\vec{q} = (1; 0; -1)$, $\vec{r} = (-1; 2; 4)$.
2. $\vec{x} = (5; -12; -1)$, $\vec{p} = (1; -3; 0)$, $\vec{q} = (1; -1; 1)$, $\vec{r} = (0; -1; 2)$.
3. $\vec{x} = (0; 2; 4)$, $\vec{p} = (3; 1; -1)$, $\vec{q} = (0; -3; 1)$, $\vec{r} = (1; 1; 1)$.
4. $\vec{x} = (-1; 5; 5)$, $\vec{p} = (2; 1; 1)$, $\vec{q} = (-2; 0; -3)$, $\vec{r} = (-1; 2; 1)$.
5. $\vec{x} = (-1; -2; 3)$, $\vec{p} = (2; 0; 1)$, $\vec{q} = (1; 2; -1)$, $\vec{r} = (0; 4; -1)$.
6. $\vec{x} = (-5; 2; -1)$, $\vec{p} = (-1; 1; 0)$, $\vec{q} = (2; -1; 3)$, $\vec{r} = (1; 0; 1)$.
7. $\vec{x} = (1; -5; 7)$, $\vec{p} = (0; -1; 1)$, $\vec{q} = (2; 0; 1)$, $\vec{r} = (3; -1; 0)$.
8. $\vec{x} = (5; 1; 4)$, $\vec{p} = (2; 0; 2)$, $\vec{q} = (0; -1; 1)$, $\vec{r} = (3; -1; 4)$.
9. $\vec{x} = (1; 1; -1)$, $\vec{p} = (1; 1; 0)$, $\vec{q} = (-1; 0; 1)$, $\vec{r} = (-1; 0; 2)$.
10. $\vec{x} = (-3; 7; 4)$, $\vec{p} = (-2; 2; 1)$, $\vec{q} = (2; 0; 1)$, $\vec{r} = (1; 1; 1)$.
11. $\vec{x} = (7; 23; 4)$, $\vec{p} = (5; 4; 1)$, $\vec{q} = (-3; 5; 2)$, $\vec{r} = (2; -1; 3)$.
12. $\vec{x} = (-19; -5; -4)$, $\vec{p} = (0; 2; -3)$, $\vec{q} = (-5; -4; 0)$, $\vec{r} = (4; -3; -2)$.
13. $\vec{x} = (15; 6; -17)$, $\vec{p} = (6; 1; -3)$, $\vec{q} = (-3; 2; 1)$, $\vec{r} = (-1; -3; 4)$.
14. $\vec{x} = (-2; 17; 5)$, $\vec{p} = (1; 3; 6)$, $\vec{q} = (-3; 4; -5)$, $\vec{r} = (1; -7; 2)$.
15. $\vec{x} = (6; 20; -3)$, $\vec{p} = (-1; 4; 3)$, $\vec{q} = (3; 2; -4)$, $\vec{r} = (-2; -7; 1)$.
16. $\vec{x} = (1; -4; 2)$, $\vec{p} = (-2; 1; 1)$, $\vec{q} = (1; 5; 0)$, $\vec{r} = (2; 0; 4)$.
17. $\vec{x} = (8; 9; 4)$, $\vec{p} = (1; 0; 1)$, $\vec{q} = (0; -2; 1)$, $\vec{r} = (1; 3; 0)$.
18. $\vec{x} = (-2; 4; 7)$, $\vec{p} = (0; 1; 2)$, $\vec{q} = (1; 0; 1)$, $\vec{r} = (-1; 2; 4)$.
19. $\vec{x} = (2; 1; 3)$, $\vec{p} = (1; 2; 3)$, $\vec{q} = (-1; 3; 2)$, $\vec{r} = (0; 1; 2)$.
20. $\vec{x} = (6; 12; -1)$, $\vec{p} = (1; 3; 0)$, $\vec{q} = (2; -1; 1)$, $\vec{r} = (0; -1; 2)$.
21. $\vec{x} = (-9; 5; 5)$, $\vec{p} = (4; 1; 1)$, $\vec{q} = (2; 0; -3)$, $\vec{r} = (-1; 2; 1)$.
22. $\vec{x} = (34; 5; -26)$, $\vec{p} = (2; 1; 0)$, $\vec{q} = (4; 3; -3)$, $\vec{r} = (-6; 5; 7)$.

23. $\vec{x} = (6; 10; 17)$, $\vec{p} = (1; 2; 3)$, $\vec{q} = (-1; 3; 2)$, $\vec{r} = (7; -3; 5)$.
24. $\vec{x} = (1; -13; -13)$, $\vec{p} = (4; 7; 8)$, $\vec{q} = (9; 1; 3)$, $\vec{r} = (2; -4; 1)$.
25. $\vec{x} = (7; 4; 11)$, $\vec{p} = (8; 2; 3)$, $\vec{q} = (4; 6; 10)$, $\vec{r} = (3; -2; 1)$.
26. $\vec{x} = (19; 30; 7)$, $\vec{p} = (10; 3; 1)$, $\vec{q} = (1; 4; 2)$, $\vec{r} = (3; 9; 2)$.
27. $\vec{x} = (24; 20; 6)$, $\vec{p} = (2; 4; 1)$, $\vec{q} = (1; 3; 6)$, $\vec{r} = (5; 3; 1)$.
28. $\vec{x} = (7; 32; 14)$, $\vec{p} = (1; 7; 3)$, $\vec{q} = (3; 4; 2)$, $\vec{r} = (4; 8; 5)$.
29. $\vec{x} = (14; 18; 6)$, $\vec{p} = (1; -2; 3)$, $\vec{q} = (4; 7; 2)$, $\vec{r} = (6; 4; 2)$.
30. $\vec{x} = (21; 18; 33)$, $\vec{p} = (1; 4; 3)$, $\vec{q} = (6; 8; 5)$, $\vec{r} = (3; 1; 4)$.

Розділ 3. Аналітична геометрія

3.1. Рівняння кривої на площині. В різних розділах математики в терміни „крива”, „лінія” вкладають різний зміст. В аналітичній геометрії під *кривою* або *лінією* розуміють множину точок $M(x; y)$ площини, координати яких є розв’язками рівняння

$$F(x; y) = 0, \quad (1)$$

де $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – відома функція двох змінних. Якщо деяка множина точок площини складається із тих і тільки тих точок, координати яких є розв’язками рівняння (1), то кажуть, що рівняння (1) є рівнянням цієї множини точок. В аналітичній геометрії вивчаються в основному лінії першого порядку і лінії другого порядку. *Лінією першого порядку* називається така множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax + By + C = 0, \quad (2)$$

де A, B, C – сталі. Як побачимо далі, лініями першого порядку є прямі і тільки вони. *Лініями другого порядку* називаються [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] такі множини точок площини, координати яких є розв’язками рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + Ax + By + C = 0, \quad (3)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, A, B, C$ – сталі. Кожне із рівнянь (1)-(3) називається рівнянням відповідної лінії. Функцію F можна задати в різних формах. Відповідно рівняння (1)-(3) можна замінити різними еквівалентними співвідношеннями. Наприклад, знайшовши із рівняння (1) y , ми можемо записати рівняння лінії у вигляді

$$y = f(x). \quad (4)$$

Рівняння (1) інколи називають неявним рівнянням лінії, а рівняння (4) явним. Ще один спосіб задання лінії є параметричний

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \end{cases} \quad t \in \Delta, \quad (5)$$

де $\gamma_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – відомі функції, а $\Delta \subset \mathbb{R}$ – деякий проміжок. Знайшовши із рівняння системи (5) параметр t і підставивши його в друге, ми прийдемо до рівняння (4).

Приклад 1. Пряму $y = 2x + 3$ можна задати параметрично

$$\begin{cases} x = t / 2, \\ y = t + 3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Параболу $y = x^2$ можна задати параметрично

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Приклад 3. Коло $x^2 + y^2 = 1$ можна задати параметрично

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0; 2\pi). \end{cases}$$

3.2. Рівняння прямої на площині. Напрямним вектором прямої називають будь-який вектор $\vec{n}$ паралельний прямій. Як правило за $\vec{n}$ беруть одиничний вектор [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Рівняння прямої, яка є паралельною вектору $\vec{n} = (n_1; n_2)$ і проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд (параметричне рівняння прямої, рівняння прямої із заданим напрямним вектором)

$$\begin{cases} x - x_0 = n_1 t \\ y - y_0 = n_2 t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

тобто

$$n_1(y - y_0) = n_2(x - x_0),$$

або

$$\frac{x - x_0}{n_1} = \frac{y - y_0}{n_2}.$$

Навпаки, кожна система (1) задає пряму, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і є паралельною вектору $\vec{n} = (n_1; n_2)$.

Доведення. Точка $M(x; y)$ належить заданій прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ і $\vec{n} = (n_1; n_2)$ є колінеарними. Звідси і з умови колінеарності векторів випливає потрібне. ►

Наслідок 1. Рівняння будь-якої прямої на площині можна записати у вигляді (1).

Теорема 2. Рівняння прямої, що проходить через задані дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ має вигляд

$$\begin{cases} x - x_1 = t(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

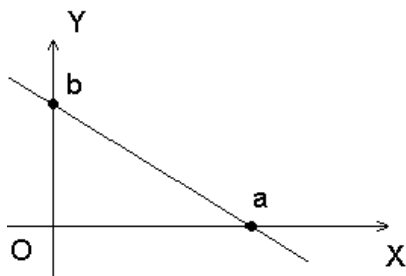
тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Доведення. Для отримання цієї теореми досить в теоремі 1 взяти $M_0 = M_1$ і $\vec{n} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. ►

Наслідок 2. Рівняння прямої, яка перетинає вісь OX в точці з абсцисою a , а вісь OY в точці з ординатою b , має вигляд (рівняння прямої у відрізках)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3)$$



Кутовим коефіцієнтом прямої називається тангенс кута φ утвореного прямою і віссю (прямою) OX .

Теорема 3. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k , подається у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (4)$$

Доведення. Для отримання цієї теореми із теореми 1 досить зауважити, що $\operatorname{tg} \varphi = n_2 / n_1$. ►

Наслідок 3. Рівняння кожної прямої, яка має кутовий коефіцієнт k подається у вигляді (рівняння прямої із заданим коефіцієнтом)

$$y = kx + b. \quad (5)$$

Наслідок 4. Рівняння прямої, яка проходить через початок координат, і має кутовий коефіцієнт k подається у вигляді $y = kx$.

Нормальним вектором прямої називається будь-який вектор $\vec{N} = (A; B)$ перпендикулярний до прямої. Як правило за $\vec{N}$ беруть одиничний вектор [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 4. Рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і є перпендикулярною до вектора $\vec{N} = (A; B)$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Навпаки, рівняння (6), в якому $|A| + |B| \neq 0$, є рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ і є перпендикулярною до вектора $\vec{N} = (A; B)$.

Доведення. Точка $M(x; y)$ належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ є ортогональними. Звідси і умови ортогональності векторів впливає твердження теореми. ►

Сукупність всіх прямих, які проходять через задану точку $(x_0; y_0)$ називають *в'язкою прямих*. Із сказаного вище випливає, що рівняння кожної прямої в'язки має вигляд (6).

Теорема 5. Рівняння кожної прямої перпендикулярної вектору $\vec{N} = (A; B)$ має вигляд (загальне рівняння прямої)

$$Ax + By + C = 0. \quad (7)$$

Навпаки, кожне рівняння (7), в якому $|A| + |B| \neq 0$, є рівнянням прямої, перпендикулярної до вектора $\vec{N} = (A; B)$.

Доведення. Нехай l – пряма, яка є перпендикулярною до вектора $\vec{N} = (A; B)$, а $M(x; y)$ і $M_0(x_0; y_0)$ – дві її точки. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ є ортогональними. Тому виконується (6), а із (6) отримуємо (7). Навпаки, якщо $(x; y)$ і $(x_0; y_0)$ – розв'язки рівняння (7), то виконується (7) і

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \quad (8)$$

Віднявши почленно рівняння (7) і (8), отримуємо рівняння (6) еквівалентне рівнянню (7), а рівняння (6) задає пряму перпендикулярну вектору $\vec{N} = (A; B)$. ►

Наслідок 5. Рівняння будь-якої прямої можна записати у вигляді (7), де $|A| + |B| \neq 0$.

Рівняння (7) називається *загальним рівнянням прямої*.

Приклад 1. Дано рівняння прямої $2x + 3y - 5 = 0$. З'ясувати, чи точки $A(1; 1)$, $B(5; 0)$ і $C(0; 5/3)$ належать цій прямій. Скласти рівняння заданої прямої з кутовим коефіцієнтом 1 у відрізках на осях.

Розв'язання. Спочатку перевіримо, чи знаходяться точки A , B , C на заданій прямій. Для цього, підставимо їх координати в рівняння прямої:

$$A: 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 5 = 0, B: 2 \cdot 5 - 3 \cdot 0 - 5 \neq 0, C: 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{5}{3} + 5 = 0.$$

Отже, точка B не належить прямій, тоді як точки A і C знаходяться на прямій. Рівняння даної прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Поділивши початкове рівняння прямої почленно на вільний член 5, одержимо шукане рівняння у відрізках на осях:

$$\frac{x}{5/2} + \frac{y}{5/3} = 1.$$

Приклад 2. Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;1)$ і $B(5;0)$. Маємо

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-1}{0-1}, \quad -1(x-1) = 4(y-1), \quad -x-4y+5=0.$$

3.3. Кут між прямими.

Теорема 1. Якщо l та $\bar{l}$ – дві прямі, задані відповідно, напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2)$, тобто рівняннями

$$\begin{cases} x - x_0 = n_1 t, \\ y - y_0 = n_2 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x - \tilde{x}_0 = \tilde{n}_1 t, \\ y - \tilde{y}_0 = \tilde{n}_2 t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

а θ – один із кутів між цими прямими, то

$$\cos \theta = \pm \frac{n_1 \tilde{n}_1 + n_2 \tilde{n}_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \sqrt{\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2}}.$$

Доведення. Нехай $\varphi = \vec{n} \vec{\tilde{n}}$. Тоді $\theta = \varphi$ або $\theta = \pi - \varphi$. Тому $\cos \theta = \pm \cos \varphi$. Звідси і формул для знаходження кута між векторами отримаємо потрібну формулу. ►

Теорема 2. Дві прямі l та $\bar{l}$, які задані відповідно напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2)$, є паралельними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна із наступних умов:

- 1) вектори $\vec{n}$ і $\vec{\tilde{n}}$ є колінеарними;
- 2) існує таке число τ , що $\vec{\tilde{n}} = \tau \vec{n}$;
- 3) існує таке число τ , що $\tilde{n}_1 = \tau n_1$ і $\tilde{n}_2 = \tau n_2$;
- 4) $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1}$;
- 5) $n_1 \tilde{n}_2 - \tilde{n}_1 n_2 = 0$;

$$6) \cos \theta = \pm 1;$$

7) їх кутові коефіцієнти рівні.

Теорема 3. Нехай l_1 і $\tilde{l}$ – дві прямі, задані напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2)$ та $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2)$. Тоді наступні умови є еквівалентними

1) прямі l_1 і l_2 є перпендикулярні;

2) вектор $\vec{n}$ і $\vec{\tilde{n}}$ є перпендикулярні;

$$3) \cos \theta = 0;$$

$$4) n_1 \tilde{n}_1 + n_2 \tilde{n}_2 = 0;$$

$$5) \frac{n_1}{n_2} = -\frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1};$$

6) добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1 , якщо ці кутові коефіцієнти є скінченними.

Останні дві теореми безпосередньо випливають із теореми 1 та умов колінеарності та перпендикулярності векторів. ►

Наслідок 1. Рівняння прямої, паралельної прямій $y = kx + b$, має вигляд $y = kx + b_1$.

Наслідок 2. Рівняння прямої, перпендикулярної прямій $y = kx + b$ має вигляд $y = -\frac{1}{k}x + b_1$, якщо $k \neq 0$ і має вигляд $x = c_0$, якщо $k = 0$.

Наслідок 3. Нехай l_1 і $\tilde{l}$ – дві прямі, задані напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2)$ та $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2)$. Тоді

$$\sin \theta = \pm \frac{n_1 \tilde{n}_2 - \tilde{n}_1 n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \sqrt{\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \pm \frac{n_1 \tilde{n}_2 - \tilde{n}_1 n_2}{n_1 \tilde{n}_1 + n_2 \tilde{n}_2}.$$

Для отримання цього потрібно скористатись формулами $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$, $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 38, 39, 45].

Наслідок 4. Якщо прямі l і $\tilde{l}$ задані рівняннями $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, то

$$\cos \theta = \pm \frac{1 + k_1 k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin \theta = \pm \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2} \sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

причому остання формула справедлива, якщо ці прямі не є перпендикулярними, тобто, якщо $k_1 k_2 \neq \pm 1$.

Теорема 4. Якщо прямі l і $\bar{l}$ задані відповідно нормальними векторами $\vec{N} = (A; B)$ і $\vec{\tilde{N}} = (\tilde{A}; \tilde{B})$, тобто мають рівняння

$$Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C} = 0, \quad (2)$$

і θ – один із кутів між ними, то

$$\cos \theta = \pm \frac{A\tilde{A} + B\tilde{B}}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2}}.$$

Доведення. Кут θ між цими прямими дорівнює куту φ між нормальними векторами або $\theta = \pi - \varphi$. Звідси і формул для знаходження кута між векторами випливає твердження теореми. ►

Теорема 5. Дві прямі l і $\bar{l}$, задані нормальними векторами $\vec{N} = (A; B)$ і $\vec{\tilde{N}} = (\tilde{A}; \tilde{B})$ відповідно, є паралельними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна із наступних умов:

1) $\cos \theta = \pm 1$;

2) вектори $\vec{N}$ і $\vec{\tilde{N}}$ є колінеарними;

3) існує таке число τ , що $\tilde{A} = \tau A$ і $\tilde{B} = \tau B$;

4) $\tilde{A}B - A\tilde{B} = 0$;

5) $\frac{\tilde{A}}{A} = \frac{\tilde{B}}{B}$;

6) їхні кутові коефіцієнти є рівними.

Доведення. Ця теорема випливає із теореми 4 і умов колінеарності векторів. ►

Теорема 6. Дві прямі l і $\bar{l}$, задані нормальними векторами $\vec{N} = (A; B)$ і $\vec{\tilde{N}} = (\tilde{A}; \tilde{B})$ відповідно, є перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна із наступних умов:

1) вектори $\vec{N}$ і $\vec{\tilde{N}}$ є перпендикулярними;

2) $\cos \theta = 0$;

3) $A\tilde{A} + B\tilde{B} = 0$;

4) добуток їх кутових коефіцієнтів дорівнює -1 , якщо ці кутові коефіцієнти є скінченними.

Доведення. Ця теорема випливає із теореми 4 і умов перпендикулярності векторів. ►

Наслідок 5. Рівняння кожної прямої паралельної прямій $Ax + By + C = 0$, можна записати у вигляді $Ax + By + \tilde{C} = 0$.

Наслідок 6. Рівняння кожної прямої, перпендикулярної до прямої $Ax + By + C = 0$, можна записати у вигляді $Bx - Ay + \tilde{C} = 0$.

Теорема 7. Якщо θ – кут між прямими l і $\bar{l}$, які задані відповідно рівняннями

$$\begin{cases} x - x_0 = n_1 t \\ y - y_0 = n_2 t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

і

$$Ax + By + C = 0,$$

то

$$\sin \theta = \pm \frac{An_1 + An_2}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Доведення. Нехай $\varphi = \vec{n} \vec{N}$. Тоді $\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \pm 2\pi k$ або

$$\theta = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \pm 2\pi k, \quad \text{де } k \in \mathbb{R}. \text{ Тому}$$

$$\sin \theta = \pm \cos \varphi = \pm \frac{An_1 + Bn_2}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 8. Прямі l і $\bar{l}$, задані відповідно напрямним вектором $\vec{n} = (n_1; n_2)$ і нормальним вектором $\vec{N} = (A; B)$, є паралельними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна із наступних умов:

- 1) вектори $\vec{n}$ і $\vec{N}$ є перпендикулярними;
- 2) $\sin \theta = 0$;
- 3) $An_1 + Bn_2 = 0$.

Доведення. Ця теорема випливає із попередньої теореми і умов перпендикулярності векторів. ►

Теорема 9. Прямі l і $\bar{l}$, задані відповідно напрямним вектором $\vec{n} = (n_1; n_2)$ і нормальним вектором $\vec{N} = (A; B)$, є перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна із наступних умов:

- 1) вектори $\vec{n}$ і $\vec{N}$ є паралельними;

$$2) \sin \theta = \pm 1;$$

$$3) An_2 - Bn_1 = 0;$$

$$4) \frac{A}{n_1} = \frac{B}{n_2}.$$

Доведення. Ця теорема випливає із теореми 7 і умов колінеарності векторів. ►

Приклад 1. Прямі $2x+3y-1=0$ і $4x+6y+1=0$ є паралельними, бо $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Прямі $-x+2y+5=0$ і $2x+y-4=0$ є перпендикулярним, бо $(-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$.

3.4. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої. Рівняння

$$A_0x + B_0y - p = 0 \quad (1)$$

називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] *нормальним рівнянням* прямої, якщо $p \geq 0$ і

$$A_0^2 + B_0^2 = 1. \quad (2)$$

Теорема 1. Рівняння

$$Ax + By + C = 0 \quad (3)$$

кожної прямої рівносильне кожному нормальну рівнянню.

Доведення. Справді, помножимо обидві частини рівняння (3) на

$$\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

де перед коренем береться знак „-“, якщо $C \geq 0$ і береться знак „+“, якщо $C < 0$. Нехай

$$A_0 = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad B_0 = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тоді отримаємо нормальне рівняння (1). ►

Теорема 2. Якщо рівняння (1) є нормальним рівнянням прямої l_0 , то $\vec{N} = (A_0; B_0) = (\cos \alpha; \cos \beta)$ одиничний нормальний вектор прямої, а p – відстань від точки $O(0;0)$ до цієї прямої.

Доведення. Справді вектор $\vec{N} = (A_0; B_0)$ є нормальним і $|\vec{N}| = 1$.

Тому $\vec{N} = (\cos \alpha; \cos \beta)$. Рівняння прямої OP перпендикулярної до прямої (1) має вигляд.

$$B_0x - A_0y = 0.$$

Для знаходження координат $(x; y)$ точки P маємо систему

$$\begin{cases} B_0x - A_0y = 0, \\ A_0x + B_0y - p = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо, що

$$x = pA_0, \quad y = pB_0.$$

Тому

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2} = p\sqrt{A_0^2 + B_0^2} = p,$$

що і потрібно було довести. ►

Теорема 3. Відстань d_0 від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої l_0 , яка має нормальне рівняння (1), знаходиться за формулою

$$d_0 = |A_0x_0 + B_0y_0 - p|.$$

Доведення. Через точку M_0 проведемо пряму $\bar{l}_0$ паралельну прямій l_0 . Ця пряма має нормальне рівняння

$$A_0x + B_0y - (p \pm d_0) = 0, \quad (4)$$

де береться знак „+”, якщо точки M_0 і O лежать по один бік від l_0 і береться знак „-” в протилежному випадку. Точка M_0 лежить на прямій l_0 . Тому її координати $(x_0; y_0)$ є розв’язками рівняння (4), тобто

$$A_0x_0 + B_0y_0 - (p \pm d_0) = 0,$$

звідси отримаємо потрібну формулу. ►

Приклад 1. Нехай $A(-1; 2)$, $B(5; -1)$ і $C(-4; -5)$ – координати вершин трикутника ABC : Знайти:

- 1) довжину сторони AB ;
- 2) рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти;
- 3) рівняння медіани AE ;
- 4) внутрішній кут B трикутника ABC ;
- 5) рівняння і довжину висоти CD ;
- 6) рівняння прямої EF , яка проходить через точку E паралельно до сторони AB , а також точку M перетину цієї прямої з висотою CD .

Розв’язання. 1. Маємо $|AB| = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

2. Рівняння сторони AB :

$$\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-2}{-1-2}; \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{-3}; \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1};$$

$$2y - 4 = -x - 1; \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Зведемо знайдене рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом. Маємо $2y = -x + 3$ або $y = -0,5x + 1,5$. Отже, $k_{AB} = -1/2$.

Аналогічно, складемо рівняння прямої BC і знайдемо її кутовий коефіцієнт:

$$\frac{x-5}{-4-5} = \frac{y+1}{-5+1}; \quad \frac{x-5}{-9} = \frac{y+1}{-4}; \quad -9y - 9 = -4x + 20;$$

$$4x - 9y - 29 = 0; \quad k_{BC} = \frac{4}{9}.$$

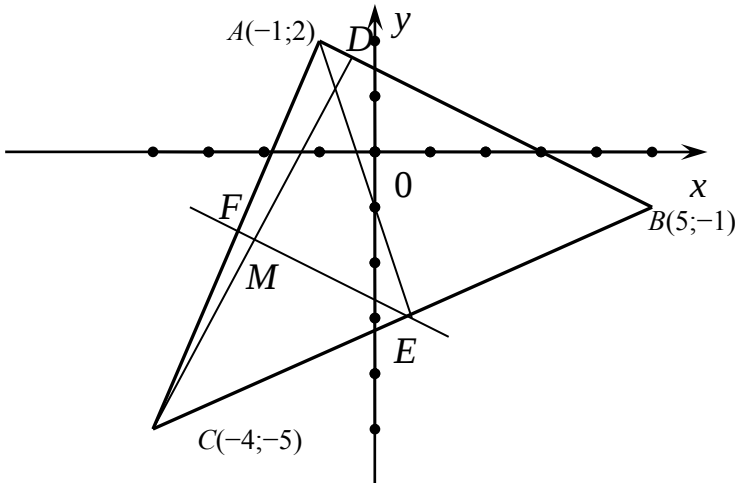
3. Знайдемо спочатку координати середини відрізка BC :

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}; \quad y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1-5}{2} = -3.$$

Тепер запишемо рівняння медіани AE :

$$\frac{x+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{y-2}{-3-2}; \quad -5(x+1) = \frac{3}{2}(y-2);$$

$$3(y-2) = -10(x+1); \quad 10x + 3y + 4 = 0.$$



(мал. 1)

4. Внутрішній кут $\angle B$ трикутника ABC обчислимо за формулою

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB} k_{BC}}.$$

Використовуючи кутові коефіцієнти прямих AB і BC , знаходимо:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1,21; \quad \angle B = 0,88 \text{ рад.}$$

5. Рівняння висоти CD можна скласти як рівняння прямої, що проходить через точку C з кутовим коефіцієнтом k_{CD} . Оскільки $AB \perp CD$, то $k_{CD} = -1/k_{AB} = 2$. Отже, рівняння висоти CD має вигляд $y+5=2(x+4)$ або $2x-y+3=0$.

Довжину висоти знайдемо як відстань від точки C до прямої AB :

$$|CD| = \frac{|-4+2(-5)-3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

6. Шукана пряма EF паралельна до AB , тому $k_{EF} = k_{AB} = -1/2$. Використовуючи (4), отримаємо рівняння прямої EF :

$$y+3 = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right); \quad 2y+6 = -x+\frac{1}{2}; \quad 2x+4y+11=0.$$

Координати точки M знайдемо як розв'язок системи рівнянь EF і CD :

$$\begin{cases} 2x+4y+11=0, \\ 2x-y+3=0. \end{cases}$$

Звідси $x = -2,3; y = -1,6$. Отже, $M(-2,3; -1,6)$.

3.5. Взаємне розміщення прямих. Дві прямі на площині можуть: а) перетинатися в одній точці; б) збігатися (тоді точок перетину є нескінченна кількість); в) бути паралельні і не збігатися (тоді точок перетину нема). Для дослідження цього питання потрібно скласти відповідну систему рівнянь [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Дві прямі

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1, \tag{1}$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2, \tag{2}$$

перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Прямі (1) і (2) збігаються тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad \Delta_y := a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0, \tag{4}$$

тобто коли

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Прямі (1) і (2) є паралельними і не збігаються тоді і тільки тоді, коли $\Delta = 0$ і $\Delta_y \neq 0$.

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}. \quad (5)$$

Доведення. Справді (3) виконується тоді і тільки тоді, коли система рівнянь (1) і (2) має єдиний розв'язок, (4) виконується тоді і тільки тоді, коли система рівнянь (1) і (2) має нескінчену кількість розв'язків, а умова (5) виконується тоді і тільки тоді, коли ця система не має розв'язків. ►

Якщо ми можемо дослідити систему розміщень трьох прямих на площині, то ми повинні дослідити систему із трьох рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3, \end{cases}$$

а також систему із кожних двох з цих рівнянь. Тут доцільно скористатися теоремою про існування розв'язку систем рівнянь. Аналогічно можна досліджувати взаємне розміщення будь-якої кількості прямих на площині [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Приклад 1. Знайти точку перетину прямих $x + 2y = 1$ і $2x + y = 3$.

Розв'язання. Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

то

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, $A\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ – точка перетину заданих прямих.

3.6. Криві другого порядку. Кривою другого порядку називається множина всіх тих точок $M(x; y)$ площини, координати $(x; y)$ яких є розв'язками рівняння [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + Ax + By + C = 0, \quad (1)$$

де $a_{11}, a_{12}, a_{22}, A, B$, та C – деякі сталі. Рівняння (1) може задавати коло, еліпс, параболу, площину, пару паралельних прямих, точку, порожню множину, пару прямих, які перетинаються.

Приклад 1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ – коло з центром в $A(a;b)$ і радіусом R .

Приклад 2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння еліпса.

Приклад 3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи.

Приклад 4. $y^2 = 2px$ – канонічне рівняння параболи.

Приклад 5. $(x-y)^2 = 1$ – пара паралельних прямих.

Приклад 6. $(x-1)(y+x+1) = 0$ – пара прямих, які перетинаються.

Приклад 7. $x^2 + y^2 = 0$ – точка (пара уявних прямих, які перетинаються).

Приклад 8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + 1 = 0$ – порожня множина (уявний еліпс).

Нехай $a_{21} := a_{12}$ і $\delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Крива (1) називається

еліптичного, гіперболічного та параболічного типів, якщо відповідно $\delta > 0$, $\delta < 0$ і $\delta = 0$.

Приклад 9. Оскільки $\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -13 < 0$, то крива

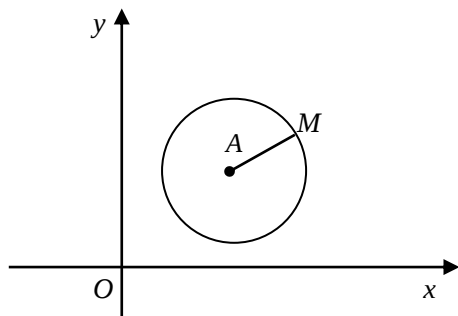
$3x^2 + 2xy - 4y^2 + x + 5y - 1 = 0$ є кривою гіперболічного типу.

3.7. Рівняння кола. Колом називають множину всіх тих точок площини, відстань яких до заданої точки A є величина стала. При цьому точка A називається центром кола [1, 3, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Якщо в прямокутній декартовій системі координат $ХОУ$ центр кола (точка A) має координати $(a;b)$ і R – радіус кола, то

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (1)$$

– рівняння кола. Навпаки множина всіх точок площини, координати $(x; y)$ яких є розв'язками рівняння (1) є колом з центром в точці $A(a; b)$ і радіуса R .



Доведення. Точка $M(x; y)$ належить колу тоді і тільки тоді, коли $AM = R$, тобто $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$. Оскільки $R > 0$, то останнє рівняння рівносильне рівнянню (1). ►

Наслідок 1. Рівняння верхнього півкола має вигляд $y = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$ і $y = b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$ – рівняння нижнього півкола.

Наслідок 2. Рівняння

$$\begin{cases} x - a = R \cos t, \\ y - b = R \sin t, \quad t \in [0; 2\pi), \end{cases}$$

є параметричним рівнянням кола.

Наслідок 3. Рівняння $\rho = R$ є рівнянням кола $x^2 + y^2 = R^2$ в полярній системі координат.

Наслідок 4. Рівняння другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

є рівнянням кола тоді і тільки тоді, коли

$$a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22} \neq 0, \quad \frac{C - (A/2a_{11})^2 - (B/2a_{22})^2}{a_{11}} < 0. \quad (3)$$

Доведення. Справді, якщо (2) є рівнянням кола, то за теоремою 1 його можна подати у еквівалентному вигляді

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Необхідність випливає з теореми 1. ►

Попередні викладки дають можливість сформулювати інше означення кола. Колом називають таку множину точок площини, яка в

даній прямокутній декартовій системі координат XOY задається рівнянням (1). При такому означенні кола точка $A(a;b)$ називається його *центром*, а число R , яке входить в праву частину рівняння (1), – його *радіусом*.

Приклад 1. Складіть рівняння кола, яке проходить через точку $M(3;-5)$ і має центр в точці $O(-1;0)$.

Розв’язання. Знайдемо радіус кола, підставивши координати точок $O(-1;0)$ і $M(3;-5)$ в загальне рівняння кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Маємо $R^2 = (3+1)^2 + (-5)^2 = 41$. Отже, $(x+1)^2 + y^2 = 41$ – шукане рівняння кола.

Приклад 2. Написати рівняння кола, яке проходить через точки $A(0;1)$, $B(2;0)$ і $C(3;-1)$.

Розв’язання. Підставимо координати заданих точок в загальне рівняння кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (0-a)^2 + (1-b)^2 = R^2, \\ (2-a)^2 + (0-b)^2 = R^2, \\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 1 - 2b + b^2 = R^2, \\ 4 - 4a + a^2 + b^2 = R^2, \\ 10 - 6a + a^2 + 2b + b^2 = R^2. \end{cases}$$

Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо $3 + 2b - 4a = 0$ або $a = \frac{b}{2} + \frac{3}{4}$. Тепер підставимо знайдене значення a в перше і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} a^2 + (1-b)^2 = R^2, \\ (3-a)^2 + (-1-b)^2 = R^2, \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 + (1-b)^2 = \left(\frac{9}{4} - \frac{b}{2}\right)^2 + (-1-b)^2, \quad b = -\frac{9}{2}.$$

Звідси $a = \frac{b}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{9}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$. Тому $R^2 = 4 - 4a + a^2 + b^2 = \frac{130}{4}$. Отже, шукане рівняння кола

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{130}{4}.$$

Приклад 3. Написати рівняння прямої, яка з’єднує центри двох кіл $x^2 + y^2 + x = 0$ і $2x^2 + 2y^2 - y = 0$.

Розв’язання. Знайдемо спочатку координати центрів цих двох кіл, виділивши повні квадрати. Маємо $(x+1/2)^2 + y^2 = 1/4$ і $x^2 + (y-1/4)^2 = 1/16$. Тому, координати центра першого кола

$O_1(-1/2; 0)$, а другого – $O_2(0; 1/4)$. Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки O_1 і O_2 :

$$\frac{y-0}{1/4-0} = \frac{x+1/2}{0+1/2}, \quad \frac{y}{1/4} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right), \quad y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}.$$

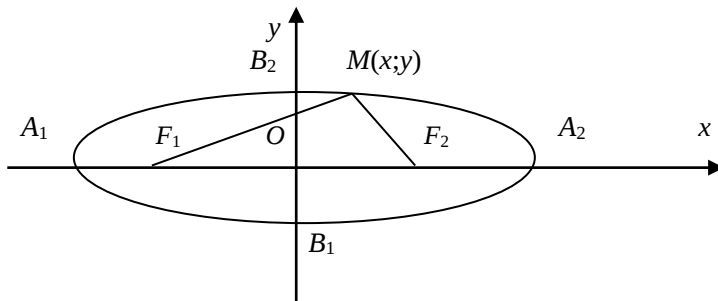
Отже, $2x - 4y + 1 = 0$ – шукане рівняння центрів двох кіл.

3.8. Канонічне рівняння еліпса. Еліпсом називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множина всіх тих точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох даних точок F_1 і F_2 є сталою. Ці точки F_1 і F_2 називаються *фокусами еліпса*. Середина відрізка F_1F_2 називається *центром еліпса*. Позначимо її через O . Пряму F_1F_2 візьмемо за вісь OX , а пряму, яка проходить через точку O перпендикулярно до осі OX , візьмемо за вісь OY . Нехай $F_1F_2 = 2c$, суму відстаней довільної точки $M(x; y)$ еліпса до точок F_1 і F_2 позначимо через $2a$. Нехай $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Тоді $a \geq c$ і $b \leq a$.

Теорема 1. У вибраній системі координат рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

є рівнянням еліпса, яке називають канонічним.



Доведення. Згідно з означенням точка $M(x; y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, тобто коли

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{2}$$

Тому, перенісши другий доданок лівої частини останньої рівності в праву, після піднесення до квадрату отримуємо

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{a^2 - cx}{a}, \quad x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2), \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

тобто координати кожної точки $M(x; y)$ еліпса є розв'язком рівняння (1). Навпаки, якщо, упорядкована пара є розв'язком рівняння (1), то сума відстаней точки $M(x; y)$ до точок $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ дорівнює $2a$, тобто виконується (2), бо $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ або $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, і тому рівняння (1) є рівнянням еліпса. ►

Відрізки $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно *великою* та *малою віссями* еліпса, а відрізки $OB_2 = b$ та $OA_2 = a$ – відповідно *великою* та *малою півосями*. Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$ та $B_2(0; b)$ називаються *вершинами еліпса*. Відрізки $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ називаються *фокальними радіусами* точки M . При цьому, $r_1 = a + \varepsilon x$ і $r_2 = a - \varepsilon x$. Число $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1$ називають *ексцентриситетом еліпса*.

Директрисами еліпса називаються прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, якщо $a > b$. Якщо ж $b > a$, то директриси еліпса мають вигляд $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ [19-24, 26-31, 34-36].

Рівняння еліпса в параметричній формі має вигляд

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi). \quad (3)$$

Доведення теореми 1 показує, що означення еліпса можна сформулювати і так. *Еліпсом* називається така множина точок площини, яка в деякій прямокутній декартовій системі координат XOY має рівняння $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, де $0 < b \leq a \leq +\infty$. При прийнятті такого означення точки $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ називаються *фокусами еліпса*, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Відповідно модифікуються інші означення. Таким чином, означення еліпса можна сформулювати як в координатній так і в безкоординатній формах. Це ж стосується і інших кривих другого порядку [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Приклад 1. Для еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ знайти координати вершин, фокусів, рівняння директрис та ексцентриситет.

Розв'язання. Маємо $a^2 = 36$ і $b^2 = 16$. Тоді $A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$, $B_1(0;-4)$ і $B_2(0;4)$ – вершини еліпса. Оскільки $c = \sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$, то $F_1(-2\sqrt{5};0)$ і $F_2(2\sqrt{5};0)$ – фокуси еліпса. Ексцентриситет еліпса дорівнює $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Прямі $x = \pm \frac{18}{\sqrt{5}}$ є

директрисами еліпса.

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо $\varepsilon = 7/8$ і $A_2(8;0)$.

Розв'язання. Маємо $a = 8$. Оскільки $\varepsilon = c/a$ і $c^2 = a^2 - b^2$, то $c = a\varepsilon = 7$, $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 49 = 15$. Тому, шукане рівняння еліпса: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{15} = 1$.

Приклад 3. Дано еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Через точку $A(1;1)$ провести хорду еліпса, яка поділяється в цій точці навпіл.

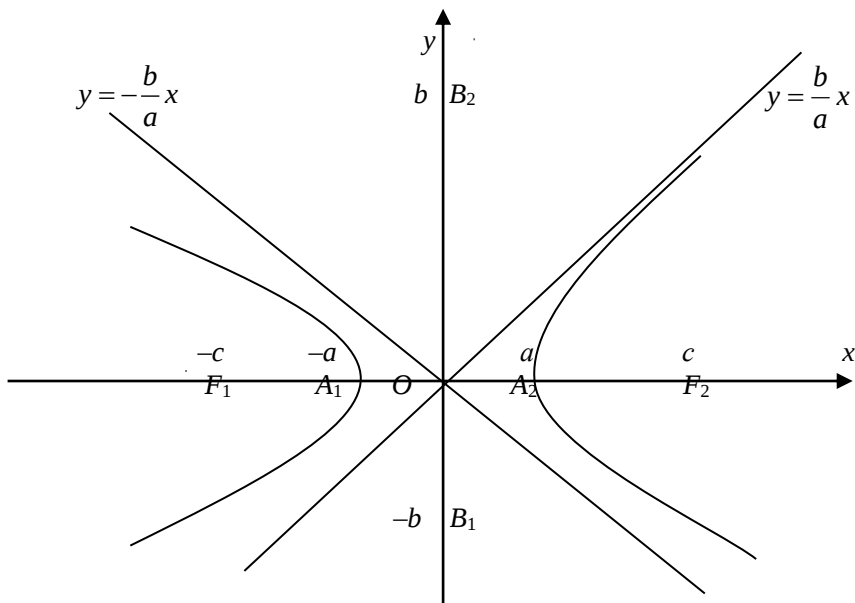
Розв'язання. Рівняння хорди, яка проходить через точку $A(1;1)$, як рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y-1=k(x-1)$. Отримаємо рівняння всіх хорд еліпса, що проходять через точку A . Тепер, знайдемо точки перетину цієї прямої з еліпсом, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y-1=k(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (16+25k^2)x^2 + 50k(1-k)x + 25(1-k)^2 - 400 = 0, \\ y = kx + 1 - k. \end{cases}$$

Координати точок перетину $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ хорди з еліпсом мають задовольняти умови: $x_1 + x_2 = 2$, $y_1 + y_2 = 2$. Звідси і з теореми Вієта, отримаємо $50(k-1)k = 2(16+25k^2)$, звідки $k = -16/25$. Отже, шукане рівняння хорди має вигляд: $16x + 25y - 41 = 0$.

3.9. Канонічне рівняння гіперболи. Гіперболою називають [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множину всіх тих точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох даних точок F_1 та F_2

є сталою. Ці точки F_1 та F_2 називаються *фокусами гіперболи*. Середина відрізка F_1F_2 називають *центром гіперболи*. Позначимо її через O . Пряму F_1F_2 візьмемо за вісь OX , а пряму, яка проходить через точку O і є перпендикулярною до осі OX , візьмемо за вісь OY . Нехай $F_1F_2 = 2c$ і модуль різниці відстаней точки $M(x; y)$ гіперболи до точок F_1 та F_2 позначимо через $2a$. Нехай $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Тоді $a \leq b$ і $a \leq c$. Точки $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$ називаються *вершинами гіперболи*. Точки $B_1(0; -b)$ та $B_2(0; b)$ – *уявними вершинами гіперболи*. Вісь OY називається уявною віссю симетрії. Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називають *асимптотами гіперболи*. Якщо $M(x; y)$ – довільна точка гіперболи, то відрізки $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ називаються *фокальними радіусами* точки M . Фокальні радіуси точок правої гілки гіперболи знаходяться за формулами $r_1 = a + \varepsilon x$ і $r_2 = -a + \varepsilon x$, а фокальні радіуси точок лівої гілки шукають за формулами $r_1 = -a - \varepsilon x$ і $r_2 = a - \varepsilon x$.



Теорема 1. У вибраній системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Доведення. Точка $M(x; y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли $\|F_1M\| - \|F_2M\| = 2a$, тобто коли

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a, \quad (2)$$

звідки випливає (1). Навпаки, якщо точка $(x; y)$ є розв'язком рівняння (1),

то $y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ і тому виконується (2). Таким чином, точка $M(x; y)$ є точкою гіперболи. Отже, рівняння (1) є рівнянням гіперболи. ►

Рівняння гіперболи, симетричної відносно осей координат з фокусами на уявній осі OY має канонічний вигляд

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Дві гіперболи, задані рівняннями (1) і (3) у вибраній системі координат, називаються *спряженими*. Число $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1$ називають

ексцентриситетом гіперболи. Директрисою гіперболи називають [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 45] таку пряму, яка є перпендикулярною до її осі і проходить на відстані a/ε від центру гіперболи. Гіпербола, що задана рівнянням (1), має дві директриси, які у вибраній системі координат мають рівняння $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. Якщо гіпербола задається рівнянням (3), то

директриси мають рівняння $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

Приклад 1. Записати рівняння гіперболи, якщо: 1) відстань між фокусами дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 4; 2) рівняння директрис $x = \pm 2\sqrt{3}$, а кут між асимптотами є прямим; 3) ексцентриситет дорівнює $\varepsilon = \sqrt{5}$, а уявна піввісь $b = 4$; 4) асимптоти задано рівняннями $y = \pm \frac{4}{3}x$ і гіпербола проходить через точку $M(3;1)$.

Розв'язання. 1) Маємо $2c = 6$ і $4 = \frac{2a}{\varepsilon}$. Звідси $c = 3$ і $a = 2\varepsilon$.

Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $b^2 = c^2 - a^2$, то $\frac{a}{2} = \frac{3}{a}$, $a^2 = 6$ і $b^2 = 9 - 6 = 3$. Отже,

шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$.

2) З рівнянь директрис маємо $\frac{a}{\varepsilon} = 2\sqrt{3}$. Оскільки кут між

асимптотами прямий, то $a = b$. З урахуванням формули $b/a = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ маємо $\varepsilon = \sqrt{2}$ і $a = b = 2\sqrt{6}$. Отже, шукане рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

3) Оскільки $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, то $\frac{4}{a} = \sqrt{5 - 1} = 2$, звідки $a = 2$. Отже,

шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$.

4) Оскільки точка M належить гіперболі, то $\frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$. З рівняння

асимптот гіперболи випливає, що $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ або $b = \frac{4}{3}a$. Тому

$$\frac{9}{a^2} - \frac{9}{16a^2} = 1, \quad a^2 = \frac{135}{16}, \quad b^2 = \frac{135}{9}.$$

Отже, шукане рівняння гіперболи: $\frac{16x^2}{135} - \frac{9y^2}{135} = 1$.

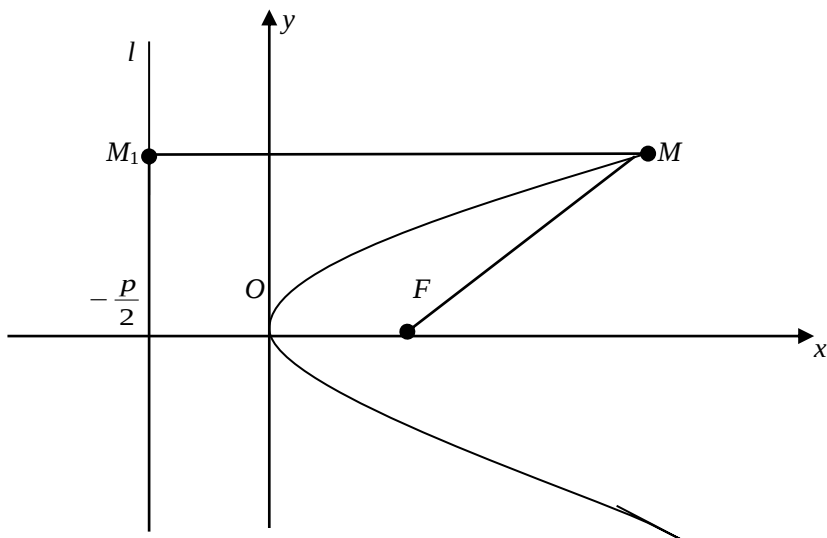
3.10. Канонічне рівняння параболи. Параболою називають [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множину всіх тих точок площини, для кожної з яких відстань до фіксованої точки F площини дорівнює відстані до деякої прямої l . Ця точка F називається *фокусом параболи*, а пряма l *директрисою параболи*. Позначимо через O точку, яка є серединою перпендикуляра опущеного з фокуса на директрису. Візьмемо за вісь OX пряму, яка проходить через фокус перпендикулярно до директриси, а за вісь OY – пряму, яка проходить через точку O перпендикулярно до осі OX . Нехай p – відстань від фокуса до директриси. У вибраній системі координат рівняння директриси має вигляд $x = -p/2$.

Теорема 1. У вибраній системі координат XOY рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px, \quad (1)$$

яке називається канонічним.

Парабола може також задаватись [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] канонічними рівняннями $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ і $x^2 = -2py$.



Доведення. Точка $M(x; y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли $|FM| = |MM_1|$, тобто коли $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, звідки випливає (1). Навпаки, якщо упорядкована пара $(x; y)$ є розв'язком рівняння останнього рівняння, то відстань точки $M(x; y)$ до точки $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ дорівнює відстані точки M до прямої $y = -\frac{p}{2}$. Тому рівняння (1) є рівнянням параболи. ►

Приклад 1. Знайти умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання. Парабола і пряма будуть дотикатися одна до одної, якщо система рівнянь матиме єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y^2 = 2px. \end{cases}$$

Звідси, отримуємо рівняння $y^2 - \frac{2p}{k}y + \frac{2pb}{k} = 0$, яке має єдиний розв'язок, якщо $D=0$. Тому

$$\frac{p^2}{k^2} - \frac{2pb}{k} = 0 \Rightarrow p(p - 2bk) = 0.$$

Оскільки $p \neq 0$, то $p = 2bk$ є умовою дотику прямої і параболі.

Приклад 2. Рівняння $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ визначає параболу, бо $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

3.11. Зведення ліній другого порядку до канонічного вигляду.

Кожне рівняння другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

афінною заміною [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + b_1, \\ y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + b_2, \end{cases}$$

можна привести до канонічного вигляду, тобто в системі координат $X'O'Y'$ воно буде мати один із виглядів, які вказані вище. Іншими словами, можна вибрати ортонормований базис

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

і точку $O'(b'_1; b'_2)$ таку, що в системі координат $X'O'Y'$, породженій цим базисом, крива задана рівнянням (1), буде мати канонічне рівняння. Для знаходження чисел α_{ij} та b_i потрібно скласти характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

де $a_{21} := a_{12}$, і знайти його корені

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Далі потрібно розв'язати кожную із систем

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda_1 x, \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda_1 y, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda_2 x, \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda_2 y, \end{cases} \quad (3)$$

і знайти такі її два розв'язки $(x; y) = (\alpha_{11}; \alpha_{21})$ та $(x; y) = (\alpha_{12}; \alpha_{22})$, що вектори $\vec{e}'_1 = (\alpha_{11}; \alpha_{21})$, $\vec{e}'_2 = (\alpha_{12}; \alpha_{22})$ будуть утворювати ортонормований базис. Робимо далі заміну

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}y_1, \\ y = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}y_1. \end{cases} \quad (4)$$

Тоді рівняння (1) перепишеться так

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0. \quad (5)$$

Можливі такі основні випадки. 1. Числа $\lambda_1 \neq 0$ і $\lambda_2 \neq 0$ мають однаковий знак (еліптичний тип). Тоді виділивши повні квадрати, перепишемо рівняння (5) у вигляді

$$\lambda_1 (x_1 - q_1)^2 + \lambda_2 (y_1 - q_2)^2 = d_1.$$

Нарешті зробивши заміну

$$\begin{cases} x_1 = x' + q_1, \\ y_1 = y' + q_2, \end{cases} \quad (6)$$

отримаємо рівняння

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d_1, \quad (7)$$

яке тільки позначеннями сталих відрізняється від рівняння еліпса. Правда, можливі тут ще два вироджені підвипадки: а) $d_1 = 0$ (тоді рівняння (7) задає точку); б) $d_1 < 0$ (тоді рівняння (7) задає порожню множину (уявний еліпс)). Крім цього, бачимо, що $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ тільки у випадку коли $a_{12} = 0$ і числа a_{11} та a_{22} мають однаковий знак. Ці дві умови є необхідними для того, щоб рівняння (1) було рівнянням деякого кола. 2. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (гіперболічний тип). В цьому випадку цими ж міркуваннями, що і в попередньому випадку приходимо до рівняння

$$\lambda_1 x'^2 - \lambda_2 y'^2 = d_1, \quad (8)$$

яке тільки позначеннями сталих відрізняється від канонічного рівняння гіперболи. Правда, можливий тут вироджений випадок: а) $d_1 = 0$ (тоді рівняння (8) задає пару прямих, які перетинаються). 3. $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 \neq 0$

(параболічний тип). Тоді при аналогічних замінах приходимо до рівняння (5) і воно приймає вигляд:

$$\lambda_2 y_1^2 + B_1 y_1 + A_1 x_1 + C_1 = 0.$$

Після перепозначень і виділення повного квадрата останнє рівняння переписується так:

$$\lambda_2 (y_1 - q_2)^2 + A_1 x_1 + C_2 = 0. \quad (9)$$

Якщо $A_1 \neq 0$, то останнє рівняння можна переписати так

$$\lambda_2 (y_1 - q_2)^2 + A_1 (x_1 - q_1) = 0,$$

яке заміною (6) приводиться до рівняння

$$\lambda_2 y'^2 + A_1 x' = 0, \quad (10)$$

яке тільки позначеннями сталих відрізняється від канонічного рівняння параболи. Якщо ж $A_1 = C_2 = 0$, то заміною (6), де тепер q_1 – довільне число, приходимо до рівняння $\lambda_2 y'^2 = 0$, яке можна розглядати як рівняння двох прямих, які співпали. Якщо $A_1 = 0$ і $C_2 \neq 0$ то така ж заміна дає рівняння $\lambda_2 y'^2 + C_2 = 0$, яке задає дві паралельні прямі, якщо λ_2 і C_2 мають різні знаки, і задає порожню множину (пара уявних паралельних прямих), якщо λ_2 і C_2 мають однакові знаки.

Приклад 1. Визначити тип кривої другого порядку $x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by + 4 = 0$ при різних значеннях параметрів a і b .

Розв'язання. Обчислимо визначники δ і Δ , які визначають тип кривої другого порядку $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, де $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Маємо

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 9,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & a & \frac{b}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{b}{2} & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{4}a - \frac{1}{4}(b-9)^2 - \frac{63}{4}.$$

1) Якщо $a > 9$, то маємо еліпс; якщо $7a - (b-9)^2 - 63 > 0$ – уявний, а при $7a - (b-9)^2 - 63 < 0$ – дійсний. Якщо ж $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, то еліпс вироджується в уявні прямі.

2) Нехай $a = 9$. Тоді маємо криву параболічного типу $\Delta = -\frac{1}{4}(b-9)^2$. Якщо $b \neq 9$, то ця крива є параболою; якщо ж $a = b = 9$, то рівняння параболі розпадається на пару паралельних прямих $x + 3y + 4 = 0$ і $x + 3y - 1 = 0$.

3) Якщо $a < 9$, то отримуємо гіперболу. Якщо ж $a = \frac{1}{7}(b-9)^2 + 9$, то гіпербола розпадається на пару прямих.

3.12. Рівняння поверхні. Лінія у просторі. В термін “поверхня” в різних розділах математики вкладають різний зміст. В аналітичній геометрії під *поверхнею* розуміють множину точок простору, координати яких є розв’язками рівняння

$$F(x; y; z) = 0, \quad (1)$$

де $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – відома функція трьох змінних. Рівняння (1) називається *рівнянням поверхні* [1, 3, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] або неявним рівнянням поверхні. Якщо деяка множина точок визначена як множина точок, координати яких є розв’язками рівняння (1), то кажуть, що рівняння (1) є рівнянням цієї множини. Інколи рівняння (1) вдається розв’язати відносно z , тобто записати в еквівалентній формі:

$$z = f(x; y), \quad (2)$$

де $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – відома функція трьох змінних. Рівняння (2) інколи називають явним рівнянням поверхні. Рівняння поверхні інколи можна задати в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), \end{cases} \quad (u; v) \in \Delta, \quad (3)$$

де Δ – деяка множина із $\mathbb{R}^2$. Знайдемо із одного рівняння u і підставимо його в друге, а потім з другого знайдемо v і підставимо у перше. Тоді ми отримаємо рівняння (1). В аналітичній геометрії вивчають в основному поверхні першого порядку та поверхні другого порядку. *Поверхнею першого порядку* називається така поверхня, яка задається рівнянням [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C і D – відомі сталі. В даному випадку

$$F(x; y; z) = Ax + By + Cz + D.$$

Далі побачимо, що поверхнями першого порядку є площини і тільки вони. *Поверхнею другого порядку* називають множину таких точок простору, які є розв'язками рівняння [1, 3, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + Ax + By + Cz + D = 0,$$

де a_{ij} , A, B, C і D – сталі, причому

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{23}| + |a_{13}| + |a_{33}| \neq 0.$$

Лінією у просторі називають таку множину точок, яка належить двом поверхням. Іншими словами, *лінія у просторі* – це така множина точок, координати яких є розв'язками системи

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0, \end{cases}$$

де $F_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ і $F_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – відомі функції трьох змінних. Функції F_j можна задати різними способами. Відповідно і лінії можна задати різними способами. Наприклад, лінію у просторі можна задати параметрично, системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in \Delta, \end{cases}$$

де $\gamma_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – відомі функції однієї змінної, а $\Delta \subset \mathbb{R}$. Лінію можна задати параметрично за допомогою більшої кількості параметрів. Наприклад,

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), \\ x = \eta_4(t; s), \\ y = \eta_5(t; s), \\ z = \eta_6(t; s), \end{cases}$$

де $(t; s) \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ і $(u; v) \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$.

3.13. Загальне рівняння площини. Нормальним вектором площини називається будь-який вектор перпендикулярний до цієї площини [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Теорема 1. Кожне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

в якому $|A| + |B| + |C| \neq 0$, є рівнянням площини перпендикулярної вектору $\vec{N} = (A; B; C)$. Навпаки, рівняння кожної площини, перпендикулярної вектору $\vec{N} = (A; B; C)$ можна записати у вигляді (1).

Доведення. Оскільки $|A| + |B| + |C| \neq 0$, то рівняння (1) має нескінченну кількість розв'язків. Нехай $(x_0; y_0; z_0)$ – довільний розв'язок рівняння (1). Тоді

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (2)$$

Тому рівняння (1) є рівносильне рівності

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3)$$

Останнє рівняння можна переписати так $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$, де M_0 – точка, яка має координати $(x_0; y_0; z_0)$. Бачимо, що координати точки $M(x; y; z)$ є розв'язками рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{N}$ є перпендикулярними. ►

Наслідок 1. Рівняння будь-якої площини можна записати у вигляді (3). Рівняння (3) є рівнянням площини тоді і тільки тоді, коли $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

Рівняння (1) називають загальним рівнянням площини.

Приклад 1. Записати рівняння площин, що проходять: 1) через точку $(1; -2; 3)$ паралельно площині Oxz ; 2) через точку $(-1; -3; 4)$ і вісь Oz ; 3) через точки $(0; 2; 4)$ і $(5; -1; 2)$ паралельно осі Ox .

Розв'язання. 1) Рівняння шуканої площини $By + D = 0$ або $y = -\frac{D}{B}$. Точка $(1; -2; 3)$ лежить у площині, тобто задовольняє останнє рівняння: $-2 = -D/B$, звідки $y = -2$ або $y + 2 = 0$.

2) Рівняння шуканої площини має вигляд $Ax + By = 0$ або $x + \frac{B}{A}y = 0$.

Підставивши координати точки $(-1; -3; 4)$ у це рівняння, одержимо

$-1 + \frac{B}{A} = 0$, $\frac{B}{A} = 1$. Тому $x + y = 0$ – рівняння шуканої площини.

3) Рівняння площини, паралельної осі Ox , має вигляд $Bu + Cz + D = 0$. Оскільки площина проходить через точки $(0; 2; 4)$ і $(5; -1; 2)$, то отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2B + 4C + D = 0 \\ -B + 2C + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B + 4C = -D \\ -B + 2C = -D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{B}{C} = -\frac{2}{3}, \\ \frac{D}{C} = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд $-\frac{2}{3}y + z - \frac{8}{3} = 0$ або $-2y + 3z - 8 = 0$.

3.14. Рівняння площини, що проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках. Рівняння площини паралельної заданим двом векторам, що проходить через задану точку.

Теорема 1. Рівняння площини, яка проходить через точки $M_i(x_i; y_i; z_i)$, $i \in \{1; 2; 3\}$, можна подати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Доведення. Підставимо точки $(x_i; y_i; z_i)$ в загальне рівняння площини і отримаємо систему

$$\begin{cases} A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \\ A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \end{cases}$$

Знайшовши із цієї системи A, B і C прийдемо до шуканого рівняння. Рівняння (1) отримаємо також із компланарності векторів $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ та $\overrightarrow{M_2M_3}$. Внаслідок цього їх мішаний добуток дорівнює нулеві, а це рівносильне (1). ►

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(-2; 1; 3)$ і $M_3(0; 4; 1)$.

Розв'язання. Згідно з (1), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ -2-1 & 1-0 & 3+1 \\ 0-1 & 4-0 & 1+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2(x-1) - 4y - 12(z+1) + z + 1 - 16(x-1) + 6y = 0,$$

$$-14x + 2y - 11z + 2 = 0.$$

Теорема 2. Рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ та $M_3(0; 0; c)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$ і $c \neq 0$, подається у вигляді

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (2)$$

Приклад 2. Рівняння площини $-14x + 2y - 11z + 2 = 0$ у відрізках, які вона відтинає на осях, матиме вигляд:

$$-14x + 2y - 11z = -2, \quad 7x - y + \frac{11}{2}z = 1, \quad \frac{x}{1/7} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2/11} = 1.$$

Теорема 3. Якщо $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2; \tilde{n}_3)$ – два неколінеарні вектори, то рівняння площини, яка паралельна їм і проходить через точку $(x_0; y_0; z_0)$, має вигляд

$$\begin{vmatrix} n_1 & \tilde{n}_1 & x - x_0 \\ n_2 & \tilde{n}_2 & y - y_0 \\ n_3 & \tilde{n}_3 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і $M(x; y; z)$ – дві точки. Вони належать площині тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{n}$, $\vec{\tilde{n}}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ є компланарними. Звідси та умов компланарності векторів отримуємо потрібне рівняння. ►

3.15. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин.

Теорема 1. Нехай Q і $\tilde{Q}$ – дві площини, задані рівняннями

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

і

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0 \quad (2)$$

відповідно, а θ – один з кутів між ними. Тоді

$$\cos \theta = \pm \frac{A\tilde{A} + B\tilde{B} + C\tilde{C}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 + \tilde{C}^2}}. \quad (3)$$

Доведення. Кут θ дорівнює куту φ між нормальними векторами $\vec{N} = (A; B; C)$ і $\vec{\tilde{N}} = (\tilde{A}; \tilde{B}; \tilde{C})$ або $\theta = \pi - \varphi$. Звідси і формули для знаходження кута між векторами отримуємо потрібну формулу. ►

Приклад 1. Через точку $A(2; -6; 3)$ провести дві площини, одна з яких проходить через вісь Ox , а друга — через вісь Oy . Знайти кут між цими площинами.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через вісь Ox : $B_1y + C_1z = 0$, а рівняння площини, яка проходить через вісь Oy : $A_2x + C_2z = 0$. Оскільки дві площини проходять точку $A(2; -6; 8)$, то $-3y + 4z = 0$, $x + 4z = 0$. З формули (3) одержимо

$$\cos \theta = \pm \frac{16}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1+16}} = \pm \frac{16}{5\sqrt{17}}.$$

Теорема 2. Площини $Ax + By + Cz + D = 0$ і $\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0$ є паралельними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з наступних умов:

- 1) $\cos \theta = \pm 1$ (θ — один з кутів між площинами);
- 2) вектори $\vec{N}$ і $\vec{\tilde{N}}$ є колінеарними;
- 3) існує таке $\tau \in \mathbb{R}$, що $\tilde{A} = \tau A$, $\tilde{B} = \tau B$ і $\tilde{C} = \tau C$;
- 4) $\frac{\tilde{A}}{A} = \frac{\tilde{B}}{B} = \frac{\tilde{C}}{C}$;
- 5) $A\tilde{B} - \tilde{A}B = 0$ і $A\tilde{C} - \tilde{A}C = 0$.

Теорема 3. Площини $Ax + By + Cz + D = 0$ і $\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0$ є перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з наступних умов:

- 1) вектори $\vec{N}$ і $\vec{\tilde{N}}$ є перпендикулярними;
- 2) $\cos \theta = 0$ (θ — один з кутів між площинами);
- 3) $A\tilde{A} + B\tilde{B} + C\tilde{C} = 0$.

Приклад 2. Площини $2x - 4y + z - 7 = 0$ і $4x - 8y + 2z - 3 = 0$ є паралельними, бо $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

3.16. Рівняння прямої в просторі.

Теорема 1. Рівняння прямої, яка паралельна вектору $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ і проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$\begin{cases} x - x_0 = n_1 t, \\ y - y_0 = n_2 t, \\ z - z_0 = n_3 t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

тобто

$$\frac{x - x_0}{n_1} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{n_3}. \quad (1)$$

Доведення цієї теореми таке ж як її аналога для площини. ►

Теорема 2. Рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ має вигляд

$$\begin{cases} x - x_1 = (x_2 - x_1)t, \\ y - y_1 = (y_2 - y_1)t, \\ z - z_1 = (z_2 - z_1)t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

тобто

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2)$$

Доведення цієї теореми таке ж як її аналога для площини.

Теорема 3. Множина точок M , координати $(x; y; z)$ яких є розв'язками системи

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}z + \tilde{D} = 0, \end{cases}$$

є прямою або порожньою множиною. В першому випадку напрямним вектором згадуваної прямої є

$$\vec{N} \times \vec{\tilde{N}} = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C & A \\ \tilde{C} & \tilde{A} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A & B \\ \tilde{A} & \tilde{B} \end{vmatrix} \right),$$

і, отже, пряма L має рівняння $(M_0(x_0; y_0; z_0) \in L)$

$$\begin{cases} x - x_0 = \begin{vmatrix} B & C \\ \tilde{B} & \tilde{C} \end{vmatrix} t, \\ y - y_0 = \begin{vmatrix} C & A \\ \tilde{C} & \tilde{A} \end{vmatrix} t, \\ z - z_0 = \begin{vmatrix} A & B \\ \tilde{A} & \tilde{B} \end{vmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

Доведення. Справді, дві площини або перетинаються по прямій або не мають спільних внутрішніх точок. Пряма перетину є перпендикулярною до кожного з векторів $\vec{N}$ та $\vec{\tilde{N}}$, і тому є паралельною до $\vec{N} \times \vec{\tilde{N}}$. ►

Приклад 1. Знайти канонічне рівняння прямої L :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 10 = 0, \\ 2x + y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо точку $M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$. Нехай, наприклад $x = 0$. Тоді задана система приймає вигляд

$$\begin{cases} 2y + z - 10 = 0, \\ y - z - 5 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що $y = 5$, $z = 0$ і $M_0(0; 5; 0) \in L$. Отже, згідно з (3), рівняння шуканої прямої L має вигляд:

$$\begin{cases} x - 0 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} t, \\ y - 5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} t, \\ z - 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-5}.$$

Приклад 2. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1; 2; -1)$ відносно прямої:

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{4}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо проєкцію точки M на пряму L . Для цього, складемо рівняння площини P такої, що $P \perp L$ і $M \in P$.

Оскільки $\vec{n}_P = \vec{s}_L = (3; -2; 4)$, то $P: 3(x-1) - 2(y-2) + 4(z+1) = 0$ або $P: 3x - 2y + 4z + 5 = 0$. Знайдемо точку N перетину прямої L та площини P , яка буде проєкцією точки M на пряму L . Маємо

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{4} = t, \\ 3x-2y+4z+5=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3t+2, \\ y=-2t-1, \\ z=4t+3, \\ 3x-2y+4z+5=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$3(3t+2)-2(-2t-1)+4(4t+3)+5=0 \Rightarrow 29t=-25, t=-25/29.$$

Тому

$$x = -\frac{75}{29} + 2 = -\frac{17}{29}, y = \frac{50}{29} - 1 = \frac{21}{29}, z = -\frac{100}{29} + 3 = -\frac{13}{29}.$$

Точка $N\left(-\frac{17}{29}; \frac{21}{29}; -\frac{13}{29}\right)$ – проекція точки M на пряму L . Отже,

$$x_{M'} = 2x_N - x_M = -\frac{34}{29} - 1 = -\frac{63}{29},$$

$$y_{M'} = 2y_N - y_M = \frac{42}{29} - 2 = -\frac{16}{29}, z_{M'} = 2z_N - z_M = -\frac{26}{29} + 1 = \frac{3}{29}.$$

Таким чином, $M'\left(-\frac{63}{29}; -\frac{16}{29}; \frac{3}{29}\right)$ – точка, симетрична точці M відносно прямої L .

Приклад 3. Знайти точку M' , симетричну точці $M(1; 2; -3)$ відносно площини $P: 2x + y - z + 3 = 0$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо проекцію точки M на площину P . Знайдемо рівняння перпендикуляра $L \perp P$, опущеного з точки $M \in L$ на площину P . Нормальний вектор $\vec{n}_P = \vec{s}_L = (2; 1; -1)$ площини можна взяти за напрямний вектор прямої L . Маємо рівняння перпендикуляра:

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$$

Знайдемо тепер точку перетину прямої L з площиною P . Для цього, перейдемо до параметричного рівняння:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1} = t, x=2t+1, y=t+2, z=-t-3.$$

Підставивши знайдені значення в рівняння площини $2(2t+1)+t+2+t+3+3=0$, отримаємо $t=-5/3$. Тому $x=-7/3, y=1/3, z=-4/3$ і $M_0(-7/3; 1/3; -4/3)$ – проекція точки M на площину P . Отже,

$$x_{M'} = 2x_{M_0} - x_M = -\frac{14}{3} - 1 = -\frac{17}{3}, \quad y_{M'} = 2y_{M_0} - y_M = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3},$$

$$z_{M'} = 2z_{M_0} - z_M = -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, $M' \left(-\frac{17}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3} \right)$ – точка, симетрична точці M відносно площини P .

3.17. Кут між прямими у просторі.

Теорема 1. Якщо l і $\tilde{l}$ – дві прямі у просторі задані напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2; \tilde{n}_3)$, тобто рівняннями

$$\begin{cases} x - x_0 = n_1 t, \\ y - y_0 = n_2 t, \\ z - z_0 = n_3 t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

і

$$\begin{cases} x - \tilde{x}_0 = \tilde{n}_1 t \\ y - \tilde{y}_0 = \tilde{n}_2 t \\ z - \tilde{z}_0 = \tilde{n}_3 t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

відповідно, а θ – один з кутів між ними, то

$$\cos \theta = \pm \frac{n_1 \tilde{n}_1 + n_2 \tilde{n}_2 + n_3 \tilde{n}_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \sqrt{\tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2 + \tilde{n}_3^2}}.$$

Доведення цієї теореми таке ж як і її аналога для площини.

Теорема 2. Прямі l і $\tilde{l}$, задані відповідно напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2; \tilde{n}_3)$, є паралельними тоді і тільки тоді, коли колінеарними є вектори $\vec{n}$ і $\vec{\tilde{n}}$, тобто коли виконується принаймні одна з наступних умов: 1) $\cos \theta = \pm 1$; 2) $\frac{\tilde{n}_1}{n_1} = \frac{\tilde{n}_2}{n_2} = \frac{\tilde{n}_3}{n_3}$; 3) існує таке $\tau \in \mathbb{R}$, що $\tilde{n}_1 = n_1 \tau$, $\tilde{n}_2 = n_2 \tau$, $\tilde{n}_3 = n_3 \tau$; 4) $\tilde{n}_1 n_2 - n_1 \tilde{n}_2 = 0$, $\tilde{n}_2 n_3 - n_2 \tilde{n}_3 = 0$.

Теорема 3. Прямі l і $\tilde{l}$, задані відповідно напрямними векторами $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$ і $\vec{\tilde{n}} = (\tilde{n}_1; \tilde{n}_2; \tilde{n}_3)$, є перпендикулярними тоді і тільки тоді, коли ортогональними є вектори $\vec{n}$ і $\vec{\tilde{n}}$, тобто коли

виконується принаймні одна з наступних умов: 1) $\cos\theta=0$; 2) $n_1\tilde{n}_1+n_2\tilde{n}_2+n_3\tilde{n}_3=0$.

Приклад 1. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через точку $O(0;0;0)$ і перпендикулярна до прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-4}{-1}.$$

Розв'язання. Оскільки пряма лежить у площині Oxz , то її напрямний вектор перпендикулярний до осі Oy , тобто $\vec{s}=(n_1;0;n_3)$. З умови перпендикулярності прямих випливає, що $2n_1-n_3=0$. Тому $n_1=1$, $n_3=2$. Отже, шукане рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2}.$$

Для того щоб знайти умови перетину двох прямих, які задані напрямними векторами $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ і $\vec{\tilde{n}}=(\tilde{n}_1;\tilde{n}_2;\tilde{n}_3)$, потрібно дослідити систему [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]:

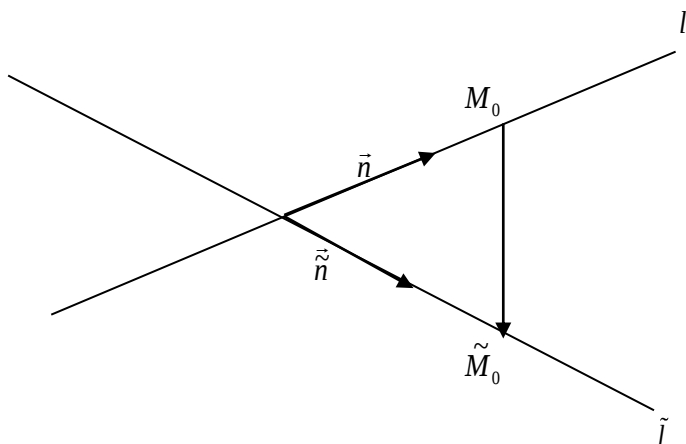
$$\begin{cases} x-x_0=tn_1, \\ y-y_0=t n_2, \\ z-z_0=t n_3, \\ x-\tilde{x}_0=t\tilde{n}_1, \\ y-\tilde{y}_0=t\tilde{n}_2, \\ z-\tilde{z}_0=t\tilde{n}_3. \end{cases}$$

В результаті отримаємо наступне твердження.

Теорема 4. Для того щоб прямі l і $\tilde{l}$, задані напрямними векторами $\vec{n}=(n_1;n_2;n_3)$ і $\vec{\tilde{n}}=(\tilde{n}_1;\tilde{n}_2;\tilde{n}_3)$, перетинались, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}_0-x_0 & \tilde{y}_0-y_0 & \tilde{z}_0-z_0 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \tilde{n}_1 & \tilde{n}_2 & \tilde{n}_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Справді, прямі l і $\tilde{l}$ перетинаються тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{n}$, $\vec{\tilde{n}}$ і $\overrightarrow{M_0\tilde{M}_0}$, де $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і $\tilde{M}_0(\tilde{x}_0;\tilde{y}_0;\tilde{z}_0)$, є компланарними, а ці вектори є компланарними тоді й тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулеві.



Приклад 2. Знайти кут між прямими:

$$L_1: \frac{x+5}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{2}, \quad L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{3}.$$

Розв'язання. Маємо $\vec{n} = (-1; 3; 2)$, $\vec{\tilde{n}} = (2; -1; 3)$ і

$$\cos \theta = \pm \frac{-2 - 3 + 6}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{4+1+9}} = \pm \frac{1}{14}.$$

3.18. Кут між прямою і площиною.

Теорема 1. Нехай пряма l задана напрямним вектором $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$, тобто рівнянням

$$\frac{x-x_0}{n_1} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{n_3} \quad (1)$$

а площина Q нормальним вектором $\vec{N} = (A; B; C)$, тобто

$$Ax + By + Cz = 0, \quad (2)$$

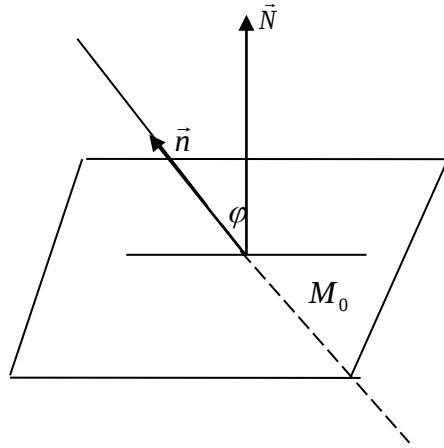
і ψ – один з кутів між цією площиною та прямою l . Тоді

$$\sin \psi = \frac{|An_1 + Bn_2 + Cn_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Доведення. Справді, $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ або $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$, де $\varphi = \angle \vec{n} \vec{N}$.

Тому

$$\cos \varphi = \pm \frac{An_1 + Bn_2 + Cn_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \blacktriangleright$$



Наслідок 1. Пряма (1) і площина (2) є паралельними тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

- 1) $\sin \psi = 0$;
- 2) $An_1 + Bn_2 + Cn_3 = 0$.

Наслідок 2. Пряма (1) і площина (2) є перпендикулярними тоді і тільки, коли виконується одна із наступних умов:

- 1) вектори $\vec{n}$ і $\vec{N}$ є колінеарними;
- 2) $\sin \psi = \pm 1$;
- 3) $\frac{A}{n_1} = \frac{B}{n_2} = \frac{C}{n_3}$;
- 4) існує таке число $\tau \in \mathbb{R}$, що $A = \tau n_1$, $B = \tau n_2$ і $C = \tau n_3$;
- 5) $An_2 - Bn_1 = 0$, $An_3 - Cn_1 = 0$.

Приклад 1. Знайти кут між прямою L і площиною P :

$$L: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-6}{-3}, \quad P: x-2y+3z+4=0.$$

Розв'язання. Маємо $\vec{s}_L = (2; 6; -3)$, $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$ і

$$\sin \psi = \frac{|2-12-9|}{\sqrt{4+36+9}\sqrt{1+4+9}} = \frac{19}{7\sqrt{14}}.$$

3.19. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Рівняння

$$A_0x + B_0y + C_0z - p = 0 \quad (1)$$

називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] нормальним рівнянням площини, якщо $p \geq 0$ і $\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2} = 1$.

Теорема 1. Кожне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

можна записати в нормальній формі.

Доведення. Справді, домножимо обидві частини рівняння (2) на

$$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де перед коренем береться знак “+”, якщо $D < 0$ і береться знак “–”, якщо $D \geq 0$. Нехай

$$A_0 = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad B_0 = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$C_0 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad -p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Тоді отримаємо нормальне рівняння площини (1). ►

Теорема 2. Якщо (1) є нормальним рівнянням площини, то $\vec{N} = (A_0; B_0; C_0) = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ – її одиничний нормальний вектор і p – відстань від початку координат до площини.

Доведення. Справді, напишемо рівняння прямої OP , де $P(x; y; z)$ – точка площини. Оскільки вектори $\vec{OP}$ і $\vec{N}$ – колінеарні, то вектор $\vec{N}$ є напрямним вектором цієї прямої. Отже, рівняння прямої OP має вигляд

$$\begin{cases} x = A_0t, \\ y = B_0t, \\ z = C_0t. \end{cases}$$

Тому для знаходження координат точки P маємо систему

$$\begin{cases} A_0x + B_0y + C_0z - p = 0, \\ x = A_0t, \\ y = B_0t, \\ z = C_0t, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$t = \frac{p}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}.$$

Отже,

$$x = \frac{A_0 p}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}, \quad y = \frac{B_0 p}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2},$$

$$z = \frac{C_0 p}{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}.$$

Тому $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{p}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + C_0^2}} = p. \blacktriangleright$

Приклад 1. Рівняння площини $x - 2y + z - 4 = 0$ в нормальній формі приймає вигляд $\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z - \frac{4}{\sqrt{6}} = 0$, бо згідно з (1), маємо

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad B_0 = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-2}{\sqrt{6}},$$

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad -p = \frac{-4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{-4}{\sqrt{6}}.$$

Теорема 3. Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини Q_0 , яка має нормальне рівняння $A_0x + B_0y + C_0z - p = 0$, знаходиться за формулою

$$d = |A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z - p|. \quad (3)$$

Доведення цієї теореми аналогічне її аналога для прямих.

Приклад 2. Знайти відстань від точки $M(2; 3; 4)$ до прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{5}.$$

Розв'язання. Для знаходження відстані скористаємось формулою

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Точка $M_0(1; 2; 0)$ лежить на даній прямій і $\overrightarrow{M_0M} = (1; 1; 4)$. Отже,

$$\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \quad |\overrightarrow{M_0M} \times \vec{s}| = \sqrt{59},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{38}, \quad d = \sqrt{\frac{59}{38}}.$$

Приклад 3. Обчислити відстань між прямими

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1} \quad i \quad L_2: \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{5}.$$

Розв'язання. Відстань між двома прямими обчислимо як відстань від прямої L_1 до площини α , яка паралельна цій прямій і проходить через пряму L_2 . Оскільки $M_2(4; -1; 2) \in L_2$, то $M_2 \in \alpha$. За нормальний вектор площини α візьмемо вектор:

$$\vec{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -13\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Тоді, рівняння площини α має вигляд

$$-13(x-4) - 7(y+1) + 5(z-2) = 0, \quad -13x - 7y + 5z + 35 = 0.$$

Відстань від точки $M_1(3; 2; -1) \in L_1$ до площини α знайдемо за формулою (3):

$$d = \frac{|-13 \cdot 3 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 35|}{\sqrt{169 + 49 + 25}} = \frac{23}{9\sqrt{3}}.$$

3.20. Поверхні другого порядку. Загальне рівняння поверхні.

Лінія у просторі. В аналітичній геометрії важливе місце займають поверхні другого порядку. Деякі з них, наприклад, куля, циліндр, конус, вивчались ще в елементарній геометрії. Проте в аналітичній геометрії їх розглядають з більш ширшої точки зору, що дає можливість робити певні узагальнення [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].

Під циліндричними і конічними поверхнями розуміють широкий клас поверхонь, утворених рухом прямої. В основному всі поверхні другого порядку можна утворити рухом прямої або рухом лінії другого порядку. Найпростішими формами руху є обертання і паралельне перенесення. Більшість поверхонь другого порядку можна дістати обертанням лінії другого порядку навколо осі і рівномірним стисненням

або розтягненням отриманої поверхні обертання в певному напрямі. До таких поверхонь належать еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїди, еліптичний параболоїд. Сама назва поверхонь свідчить про їх походження. Тільки гіперболічний параболоїд не можна утворити паралельним перенесенням. Кожна поверхня другого порядку має свої властивості.

В термін “поверхня” в різних розділах математики вкладають різний зміст. В аналітичній геометрії під *поверхнею* розуміють [1, 3, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множину точок простору, координати яких є розв’язками рівняння

$$F(x; y; z) = 0, \quad (1)$$

де $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – відома функція трьох змінних. Рівняння (1) називається *рівнянням поверхні* або неявним рівнянням поверхні. Якщо деяка множина точок визначена як множина точок, координати яких є розв’язками рівняння (1), то кажуть, що рівняння (1) є рівнянням цієї множини. Інколи рівняння (1) вдається розв’язати відносно z , тобто записати в еквівалентній формі:

$$z = f(x; y), \quad (2)$$

де $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – відома функція трьох змінних. Рівняння (2) інколи називають явним рівнянням поверхні. Рівняння поверхні інколи можна задати в параметричній формі [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), \end{cases} \quad (u; v) \in \Delta, \quad (3)$$

де Δ – деяка множина із $\mathbb{R}^2$. Знайдемо із одного рівняння u і підставимо його в друге, а потім з другого знайдемо v і підставимо у перше. Тоді ми отримаємо рівняння (1). В аналітичній геометрії вивчають в основному поверхні першого порядку та поверхні другого порядку. *Поверхнею першого порядку* називається така поверхня, яка задається рівнянням [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4)$$

де A, B, C і D – відомі сталі. В даному випадку $F(x; y; z) = Ax + By + Cz + D$. Далі побачимо, що поверхнями першого порядку є площини і тільки вони. Поверхнею другого порядку називають множину таких точок простору, які є розв’язками рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5)$$

де a_{ij} , A, B, C і D – сталі, причому

$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{23}| + |a_{13}| + |a_{33}| \neq 0.$$

Лінією у просторі називають таку множину точок, яка належить двом поверхням. Іншими словами, лінія у просторі – це така множина точок, координати яких є розв'язками системи [3, 26-31, 34-36, 39, 45]

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $F_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ і $F_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – відомі функції трьох змінних. Функції F_j можна задати різними способами. Відповідно і лінії можна задати різними способами. Наприклад, лінію у просторі можна задати параметрично, системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in \Delta, \end{cases} \quad (2)$$

де $\gamma_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – відомі функції однієї змінної, а $\Delta \subset \mathbb{R}$. Лінію можна задати параметрично за допомогою більшої кількості параметрів. Наприклад,

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), \\ x = \eta_4(t; s), \\ y = \eta_5(t; s), \\ z = \eta_6(t; s), \end{cases} \quad (3)$$

де $(t; s) \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ і $(u; v) \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$.

3.21. Рівняння поверхонь другого порядку. Рівняння виду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

де

$$|a_{11}| + |a_{22}| + |a_{33}| + |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{23}| \neq 0, \quad (2)$$

називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] *рівнянням другого порядку з трьома змінними*. У випадку, коли умова (2) не виконується, рівняння (1) стає рівнянням першого порядку $Ax + By + Cz + D = 0$, яке є рівнянням площини, якщо $|A| + |B| + |C| \neq 0$, або задає порожню множину,

якщо остання умова не виконується. Множина всіх точок простору, координати $(x; y; z)$ яких задовольняють рівняння (1) називається *поверхнею другого порядку*. Рівняння (1) задає такі поверхні [3, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]:

1. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. Еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

3. Однопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4. Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

5. Еліптичний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

6. Гіперболічний параболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

7. Конус другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

8. Циліндрична поверхня другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

9. Пара паралельних площин $(x + y + z)^2 = 1$.

10. Пара площин, що перетинаються $y^2 - x^2 = 0$.

11. Площина $x^2 = 0$.

12. Пряма (наприклад, $x^2 + y^2 = 0$).

13. Одна точка (наприклад, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$).

14. Порожня множина (наприклад, $x^2 + y^2 + z^2 = -1$).

1. Сфера. *Сферою* називається така множина точок простору, відстань яких до фіксованої точки $\tilde{O}$, яка називається центром сфери, є величина стала.

Теорема 1. *Якщо у вибраній прямокутній декартовій системі координат $XOYZ$ точка $\tilde{O}$ має координати a, b, c і R – радіус сфери, то $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ є рівнянням сфери.*

Доведення. Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка сфери. За умовою $|\tilde{OM}| = R$, тобто $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$. Звідси випливає шукане рівняння сфери. ►

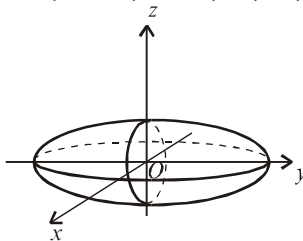
Із теореми 1 випливає [1, 3, 26-31, 17, 34-36, 45], що означення сфери можна сформулювати по-іншому. Сферою називається така множина точок простору, яка в деякій прямокутній декартовій системі координат має рівняння

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

2. Еліпсоїд. *Еліпсоїдом* називається така множина точок простору, яка в деякій прямокутній декартовій системі координат має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Якщо виконується одна з умов $a = b$ або $a = c$, то при обертанні еліпса навколо одної з осей утворюється еліпсоїд, який називається еліпсоїдом обертання [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].



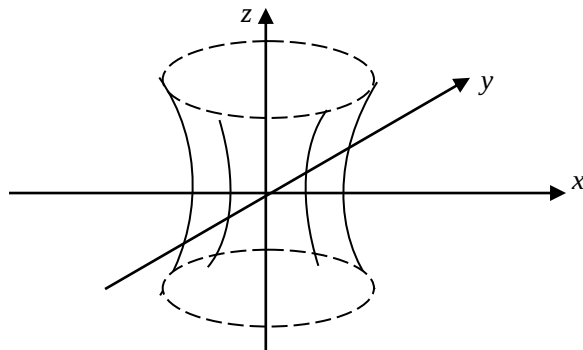
Наприклад, еліпсоїдом обертання є поверхня $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Якщо рівняння другого порядку задає еліпсоїд, то необхідно, щоб $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$. У випадку $a = b = c$, еліпсоїд перетворюється в сферу.

3. Однопорожнинний гіперболоїд. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається множина точок простору $(x; y; z)$, координати

яких в деякій прямокутній декартовій системі координат задовольняють рівняння [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

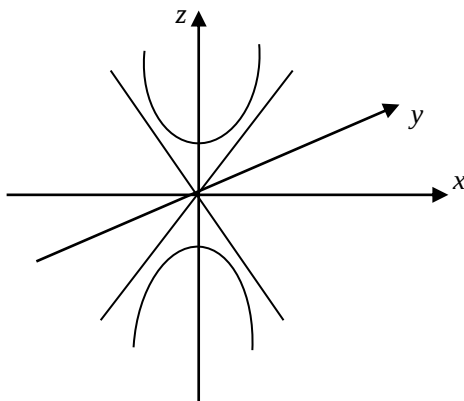
Якщо ж $a = b$, то однопорожнинний гіперболоїд називається однопорожнинним гіперболоїдом обертання. Ця назва пов'язана з тим, що він утворюється внаслідок обертання гіперболи відносно її уявної осі симетрії.



4. Двупорожнинний гіперболоїд. *Двупорожнинним гіперболоїдом* називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множина всіх точок $(x; y; z)$ простору, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат є розв'язками рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

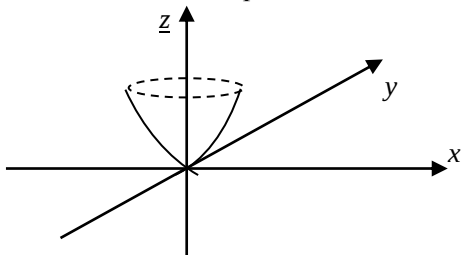
Якщо $a = b$, то двупорожнинний гіперболоїд називають двупорожнинним гіперболоїдом обертання. Ця назва пов'язана з тим, що така поверхня утворюється шляхом обертання гіперболи навколо її осі симетрії.



5. Параболоїд. *Параболоїдом* або *еліптичним параболоїдом* називається така множина всіх точок $(x; y; z)$ простору, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат є розв'язками рівняння

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

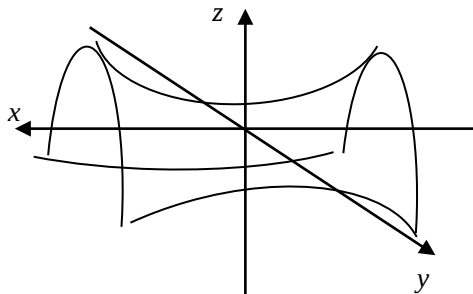
Якщо $p = q$, то параболоїд називається параболоїдом обертання. Ця назва пов'язана з тим, що така поверхня утворюється шляхом обертання параболу відносно її осі симетрії.



6. Гіперболічний параболоїд. *Гіперболічним параболоїдом* називається множина всіх точок $(x; y; z)$ простору, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат є розв'язками рівняння

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

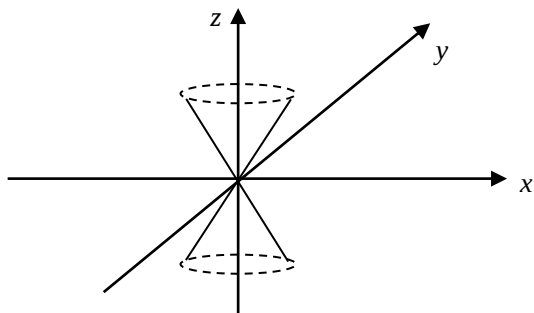
Гіперболічний параболоїд утворюється внаслідок руху параболу $x^2 = 2zp$ вздовж параболу $-y^2 = 2zq$ так, що вершина прямої рухається по іншій прямій. Гіперболічний параболоїд утворюється шляхом перерізу площини з площинами, які паралельні координатним площинам. Гіперболічний параболоїд має форму сідла [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45].



7. Конус другого порядку. *Конусом другого порядку* називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множина всіх точок $(x; y; z)$ простору, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат є розв'язками рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Якщо $a = b = c$, то конус називається круговим.

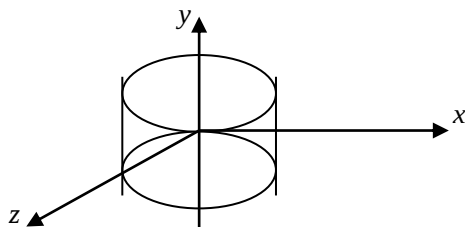


Про форму конуса можна дізнатись, розглядаючи його перетин з площинами, які паралельні координатним осям. *Конічною поверхнею* називають таку фігуру, яка утворена всіма прямими, які проходять через задану точку O і з'єднують точки двох кривих, розміщених в паралельних площинах.

8. Циліндрична поверхня другого порядку. *Циліндром другого порядку* називається [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45] множина всіх точок $(x; y; z)$ простору, координати яких в деякій прямокутній декартовій системі координат є розв'язками рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Якщо $a = b$, то циліндр називається круговим.



Циліндричною поверхнею називають таку множину точок простору, яка утворена прямими, перпендикулярними до деякої кривої на площині. Ці прямі називаються твірними циліндричної поверхні.

Рівняння другого порядку можуть задавати також множину площин, а саме, дві паралельні площини або дві площини, які перетинаються. Другий випадок можливий тоді, коли рівняння поверхні другого порядку можна переписати у вигляді $(Ax + By + Cz)^2 = D$.

Приклад 1. Знайти проекцію на площину Oxy ($z = 0$) лінію

перетину еліпсоїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} + z^2 = 1$ і площини $x + 5z - 5 = 0$.

Розв'язання. Виключивши z з рівняння еліпсоїда за допомогою рівняння площини, отримаємо рівняння еліпса $2x^2 + 5y^2 - 10x = 0$ або

$$\frac{(x - 5/2)^2}{25/4} + \frac{y^2}{5/2} = 1.$$

Тому проекцією буде еліпс.

3.22. Зведення поверхні другого порядку до канонічного вигляду. Канонічним рівнянням другого порядку називається рівняння вигляду [1, 3, 16, 17, 19-24, 26-31, 34-36, 38, 39, 45]

$$d_{11}x_1^2 + d_{22}y_1^2 + d_{33}z_1^2 = d_1, \quad (1)$$

де d_1, d_{ii} – сталі. Можна вибрати прямокутну декартову систему координат так, що рівняння поверхні

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

буде мати насамперед заданий вигляд (1). Є декілька методів.

Метод 1. Складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

де $a_{31} := a_{13}, a_{21} := a_{12}$. Знаходимо його корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та розв'язуємо кожну систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \lambda_i x, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \lambda_i y, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \lambda_i z, \end{cases}$$

для кожного $i \in \{1; 2; 3\}$. Нехай

$$(x; y; z) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \end{pmatrix}, (x; y; z) = \begin{pmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{23} \end{pmatrix}, (x; y; z) = \begin{pmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{33} \end{pmatrix},$$

ненульові розв'язки цих систем, яким відповідають λ_1 , λ_2 та λ_3 , відповідно. Далі робимо заміну

$$\begin{cases} x = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}y_1 + \lambda_{13}z_1, \\ y = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}y_1 + \lambda_{23}z_1, \\ z = \lambda_{31}x_1 + \lambda_{32}y_1 + \lambda_{33}z_1. \end{cases} \quad (4)$$

Тоді рівняння (2) перепишеться так

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}y_1^2 + b_{33}z_1^2 + A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0.$$

Далі виділяємо повні квадрати і запишемо останнє рівняння у вигляді

$$b_{11}(x_1 - q_1)^2 + b_{22}(y_1 - q_2)^2 + b_{33}(z_1 - q_3)^2 = d.$$

Знову зробивши заміну

$$\begin{cases} x_1 = x' + q_1, \\ y_1 = y' + q_2, \\ z_1 = z' + q_3. \end{cases} \quad (5)$$

отримаємо рівняння (1), а рівняння (1) легко звести до рівняння (2) і навпаки. Таким чином, за визначник потрібно вибрати вектори:

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \end{pmatrix}, \vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{23} \end{pmatrix}, \vec{e}'_3 = \begin{pmatrix} \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \\ \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Причому їх можна підібрати так, щоб $|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = |\vec{e}'_3| = 1$. Ці вектори будуть попарно ортогональними. Якщо за початок координат вибрати ще таку точку O' , яка в $OXYZ$ має координати $(b_1; b_2; b_3)$, а x_1, y_1, z_1 в системі (4) приймають вигляд

$$\begin{cases} x = \lambda_{11}x' + \lambda_{12}y' + \lambda_{13}z', \\ y = \lambda_{21}x' + \lambda_{22}y' + \lambda_{23}z', \\ z = \lambda_{31}x' + \lambda_{32}y' + \lambda_{33}z', \end{cases}$$

то в такій системі координат рівняння (2) приймає вигляд (1). Зазначимо, що

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_{11}q_1 + \lambda_{12}q_2 + \lambda_{13}q_3, \\ b_2 = \lambda_{21}q_1 + \lambda_{22}q_2 + \lambda_{23}q_3, \\ b_3 = \lambda_{31}q_1 + \lambda_{32}q_2 + \lambda_{33}q_3. \end{cases}$$

Метод 2. Штучний метод. В даному випадку саме рівняння підказує, яку заміну треба зробити.

3.23. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення кривої (лінії) на площині.
2. Запишіть рівняння ліній першого (другого) порядку.
3. Сформулюйте означення напрямного вектору прямої.
4. Як записати рівняння прямої, якщо задано її напрямний вектор?
5. Складіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
6. Яка форма рівняння прямої у відрізках на координатних осях?
7. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
8. Як записати рівняння прямої, що проходить через задану точку та має кутовий коефіцієнт?
9. Яке рівняння прямої відповідає заданому кутовому коефіцієнту?
10. Сформулюйте означення нормального вектору прямої.
11. Який вигляд має рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора?
12. Що називається в'язкою прямих?
13. Запишіть загальне рівняння прямої на площині.
14. Як знайти кут між двома прямими? Запишіть відповідні формули.
15. Які умови паралельності двох прямих на площині, якщо вони задані напрямними векторами?
16. Які умови перпендикулярності двох прямих на площині, якщо вони задані напрямними векторами?
17. Які умови паралельності двох прямих на площині, якщо вони задані нормальними векторами?
18. Які умови перпендикулярності двох прямих на площині, якщо вони задані нормальними векторами?
19. Які умови паралельності двох прямих на площині, якщо одна з них задана напрямним вектором, а інша – нормальним?
20. Які умови перпендикулярності двох прямих на площині, якщо одна з них задана напрямним вектором, а інша – нормальним?
21. Запишіть нормальне рівняння прямої.
22. Запишіть формулу для знаходження відстані від прямої до точки на площині.
23. Сформулюйте умови взаємного розміщення прямих на площині.
24. Сформулюйте означення кривої другого порядку.

25. Дайте означення кола.
26. Запишіть загальне рівняння кола.
27. Запишіть рівняння кола в параметричній формі.
28. Дайте означення еліпса.
29. Складіть канонічне рівняння еліпса.
30. Що називають вершинами еліпса?
31. Що називають великою та малою віссями еліпса?
32. Що називають фокусами еліпса?
33. Сформулюйте означення ексцентриситету еліпса.
34. Сформулюйте означення директрис еліпса.
35. Запишіть рівняння директрис еліпса.
36. Запишіть рівняння еліпса в параметричній формі.
37. Дайте означення гіперболи.
38. Який вигляд канонічне рівняння гіперболи?
39. Що називають вершинами гіперболи?
40. Що називають осями гіперболи?
41. Що називають фокусами гіперболи?
42. Сформулюйте означення ексцентриситету гіперболи.
43. Що називають фокальними радіусами точок гіперболи?
44. Запишіть формули для знаходження фокальних радіусів.
45. Сформулюйте означення директрис гіперболи.
46. Запишіть рівняння асимптот гіперболи.
47. Дайте означення параболи.
48. Який вигляд має канонічне рівняння параболи?
49. Що називають віссю параболи?
50. Що називають фокусом параболи?
51. Запишіть рівняння директриси параболи.
52. Опишіть спосіб зведення ліній другого порядку до канонічного вигляду.
53. Сформулюйте означення поверхні в просторі.
54. Запишіть рівняння поверхонь першого (другого) порядку.
55. Сформулюйте означення лінії у просторі.
56. Сформулюйте означення нормального вектору площини.
57. Яке загальне рівняння площини?
58. Як записати рівняння площини, що проходить через три задані точки?
59. Запишіть рівняння площини у відрізках на осях.
60. Яка формула використовується для обчислення кута між двома площинами?
61. Як записати рівняння площини, що проходить через задану точку та паралельна двом заданим векторам?
62. За яких умов дві площини паралельні?

63. За яких умов дві площини перпендикулярні?
64. Запишіть рівняння прямої, яка паралельна заданому вектору і проходить через задану точку.
65. Складіть рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
66. Запишіть рівняння прямої як перетин двох площин у просторі.
67. Запишіть формулу для знаходження кута між двома прямими у просторі.
68. Сформулюйте означення напрямного вектору прямої у просторі.
69. За яких умов дві прямі паралельні у просторі?
70. За яких умов дві прямі перпендикулярні у просторі?
71. За яких умов дві прямі перетинаються у просторі?
72. Запишіть формулу для знаходження кута між прямою і площиною.
73. За яких умов пряма і площина є паралельними?
74. За яких умов пряма і площина є перпендикулярними?
75. Запишіть нормальне рівняння площини.
76. Запишіть формулу для знаходження відстані від точки до площини.
77. Сформулюйте означення поверхні.
78. Сформулюйте означення лінії у просторі.
79. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
80. Які поверхні може задавати загальне рівняння поверхні другого порядку?
81. Що таке сфера як геометрична поверхня?
82. Яке означення еліпсоїда?
83. Що називають однопорожнинним гіперболоїдом?
84. Як описується двопорожнинний гіперболоїд?
85. Що таке еліптичний параболоїд?
86. Яка геометрична характеристика гіперболічного параболоїда?
87. Що являє собою конус другого порядку?
88. Що називають циліндром другого порядку?
89. Сформулюйте означення поверхні обертання?
90. Як звести поверхню другого порядку до канонічного вигляду?

3.24. Вправи і задачі.

1. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точки A і B :
 1. $A(4;0)$, $B(0;4)$.
 2. $A(-2;1)$, $B(3;4)$.
2. Знайдіть координати точок перетину прямих, заданих вказаними рівняннями:
 1. $4x - 5y = 2$, $2x + 7y = 3$.
 2. $x - y = 1$, $2x + y = 1$.

3. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A і має кутовий коефіцієнт k :

1. $A(4;1), k=3$.

2. $A(1;2), k=2$.

4. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку A і є паралельною прямій l , заданої вказаним рівнянням:

1. $A(4;0), y=2x$.

2. $A(1;1), x+y=2$.

5. На прямій $2x-3y+27=0$ знайдіть точку A рівновіддалену від точок $B(-1;-2)$ і $C(6;5)$.

6. Знайдіть відстань від точки M до вказаної прямої:

1. $M(4;0), y=2x$.

2. $M(1;1), x+y=2$.

3. $M(0;0), 12x-5y+39=0$.

4. $M(4;3), 3x+4y-10=0$.

5. $M(2;1), x+3y-10=0$.

6. $M(1;0), -x+4y+5=0$.

7. $M(1;2), 3x-y-8=0$.

7. Побудуйте пряму, що відтинає на осі Oy відрізок $b=3$ і утворює з віссю Ox кути: 1) 45° , 2) 135° . Напишіть рівняння цих прямих.

8. Побудуйте пряму, що відтинає на осі Oy відрізок $b=-3$ і утворює з віссю Ox кути: 1) 60° , 2) 120° . Напишіть рівняння цих прямих.

9. Побудуйте пряму, що проходить через початок координат і утворює з віссю Ox кути: 1) 45° , 2) 60° , 3) 90° , 4) 120° , 5) 135° . Напишіть рівняння цих прямих.

10. Побудуйте пряму, яка проходить через початок координат і точку $A(-2;3)$ та напишіть її рівняння.

11. Знайдіть параметри k і b , для кожної з прямих:

1) $2x-3y=6$; 2) $2x+3y=0$; 3) $y=-3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

12. Побудуйте прямі:

1) $3x+4y=12$, 2) $3x-4y=0$, 3) $2x-5=0$, 4) $2y+5=0$.

13. Знайдіть параметри k і b прямої, яка проходить через точку $A(2;3)$ і утворює з віссю Ox кут 45^0 . Напишіть рівняння цієї прямої.
14. Зведіть до вигляду у відрізках на осях, рівняння наступних прямих:
 1) $2x - 3y = 6$, 2) $3x - 2y + 4 = 0$.
15. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4;3)$ і відтинає від координатного кута трикутник площею 3.
16. Прямі $y = -2$ і $y = 4$ перетинають пряму $3x - 4y - 5 = 0$ відповідно у точках A і B . Побудуйте вектор $\overline{AB}$, знайдіть його довжину і проекцію на осі координат.
17. З'ясуйте, чи точки $A(3;5)$, $B(2;7)$, $C(-1;-3)$ і $D(-2;-6)$ лежать на прямій $y = 2x - 1$, чи «нижче» або «вище» цієї прямої?
18. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівності:
- 1) $y < 2 - x$, $x > -2$, $y > -2$;
 - 2) $y > 2 - x$, $x < 4$, $y < 0$;
 - 3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$, $y \geq x + 2$, $x \geq -4$;
 - 4) $x - 2 < y < 0$, $x > 0$;
 - 5) $-2 \leq y \leq x \leq 2$;
 - 6) $2 < 2x + y < 8$, $x > 0$, $y > 0$.
19. Побудуйте прямі, задані параметрами: 1) $b = -2$, $\varphi = 60^0$ і 2) $b = -2$, $\varphi = 120^0$, та напишіть їх рівняння.
20. Рівнобічна трапеція з основами 8 і 2 має гострий кут 45^0 . Складіть рівняння сторін трапеції, прийнявши за вісь Ox більшу основу, а за вісь Oy – вісь симетрії трапеції.
21. Знайдіть рівняння сторін ромба з діагоналями 10 і 6, взявши більшу діагональ за вісь Ox , а меншу – за вісь Oy .
22. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4;6)$ і відтинає від осей координат трикутник площею 6.
23. Прямі $x = -1$ і $x = 3$ перетинають пряму $y = 2x + 1$ в точках A і B . Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$ і його проекції на осі координат.
24. Знайдіть кут між прямими:

- 1) $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x + 1$;

2) $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$;

3) $2x + y = 0$, $y = 3x - 4$;

4) $3x + 2y = 0$, $3x + 4y + 9 = 0$;

5) $3x - 4y = 6$, $8x + 6y = 11$;

6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

25. Серед прямих $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ вкажіть паралельні та перпендикулярні.

26. Напишіть рівняння пучка прямих, які проходять через точку $A(2;3)$. Виберіть з пучка прямі, які утворюють з віссю Ox кути: 1) 45° , 2) 60° , 3) 135° , 4) 0° і побудуйте їх.

27. Дано точку $A(-2;5)$ і пряму $2x - y = 0$. Складіть рівняння пучка прямих, які проходять через точку A і виберіть з пучка: 1) пряму, паралельну даній; 2) пряму, перпендикулярну даній.

28. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(9;2)$ і перпендикулярна до прямої $y = 3x + 7$.

29. В точках перетину прямої $2x - 5y - 10 = 0$ з осями координат, проведені перпендикуляри до цієї прямої. Напишіть їх рівняння.

30. У трикутнику з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;6)$ і $C(4;2)$ проведені висота BD і медіана BE . Напишіть рівняння сторони AC , медіани BE і висоти BD .

31. Знайдіть внутрішні кути трикутника, сторони якого задані рівняннями: $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$ і $x - 4y - 6 = 0$.

32. Напишіть рівняння пучка прямих, які проходять через початок координат і утворюють кут 45° з прямою $x + 2y = 4$.

33. Напишіть рівняння пучка прямих, які проходять через точку $A(-1;1)$ і утворюють кут 45° з прямою $2x + 3y = 6$.

34. Знайдіть вершини і кути трикутника, сторони якого задані рівняннями: $x + 3y = 0$, $x = 3$ і $x - 2y + 3 = 0$.

35. Дано трикутник з вершинами $A(-2;0)$, $B(2;-5)$ і $C(5;0)$. Напишіть рівняння прямих, які містять сторони трикутника, медіану AE , висоту AD і знайдіть довжину медіани AE .

36. Напишіть рівняння прямих, які містять сторони трикутника і знайдіть кути трикутника з вершинами $A(0;7)$, $B(6;-1)$ і $C(2;1)$.

37. Пряма $2x - y + 8 = 0$ перетинає осі координат Ox і Oy в точках A і B , відповідно. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 3 : 1$. Напишіть рівняння перпендикуляра, проведеного з точки M до прямої AB .
38. Побудуйте трикутник, сторони якого задані рівняннями $x + y = 4$, $3x - y = 0$, $x - 3y - 8 = 0$. Знайдіть кути і площу цього трикутника.
39. Знайдіть точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника, вершини якого $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ і $C(5; 0)$.
40. Зведіть до нормального виду рівняння прямих:
1) $3x - 4y - 20 = 0$, 2) $x + y + 3 = 0$, 3) $y = kx + b$.
41. Побудуйте пряму, якщо довжина нормалі $p = 2$, а кут β нахилу її до осі Ox дорівнює: 1) 45° , 2) 135° , 3) 225° , 4) 315° . Напишіть рівняння цих прямих.
42. Знайдіть відстань від точок $A(4; 3)$, $B(2; 1)$ і $C(1; 0)$ до прямої $3x + 4y - 10 = 0$. Побудуйте точки і пряму.
43. Знайдіть відстань від початку координат до прямої $12x - 5y + 39 = 0$.
44. Доведіть, що прямі $2x - 3y = 6$ і $4x - 6y = 25$ паралельні, та знайдіть відстань між ними.
45. Напишіть рівняння геометричного місця точок, віддалених від прямої $4x - 3y = 0$ на відстанні $d = 4$.
46. Складіть рівняння прямої, яка віддалена від точки $A(4; -2)$ на відстані $d = 4$ і паралельна прямій $8x - 15y = 0$.
47. Знайдіть рівняння бісектрис кутів між прямими: 1) $2x + 3y = 10$ і $3x + 2y = 10$; 2) $3x + 4y = 12$ і $y = 0$.
48. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -2)$ та точку N , що є перетином прямих $2x + y + 6 = 0$ і $3x + 5y - 15 = 0$.
49. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M перетину прямих $5x - y + 10 = 0$ і $8x + 4y + 9 = 0$, паралельно прямій $x + 3y = 0$.
50. Знайдіть довжину висоти BD в трикутнику з вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$ і $C(3; 2)$.
51. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 4)$ на відстані $d = 2$ від початку координат.
52. Перевірте, чи точки $A(-4; -3)$, $B(-5; 0)$, $C(5; 6)$ і $D(1; 0)$ є вершинами трапеції, та знайдіть її висоту.

53. Через початок координат проведена пряма рівновіддалена від точок $A(2;2)$ і $B(4;0)$. Знайдіть рівняння цієї прямої і задану відстань.
54. Напишіть рівняння геометричного місця точок, віддалених від прямої $x+2y-5=0$ на відстані $\sqrt{5}$.
55. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку M перетину прямих $2x-3y+5=0$ і $3x+y-7=0$, перпендикулярно прямій $y=2x$.
56. Через початок координат проведіть пряму, яка утворює з прямими $x+y=a$ і $x=0$ трикутник площею a^2 .
57. Дано точки $A(-4;0)$ і $B(0;6)$. Через середину відрізка AB проведіть пряму, яка відтинає на осі Ox відрізок, вдвічі більший, ніж на осі Oy .
58. Знайдіть кути і площу трикутника, утвореного прямими $y=2x$, $y=-2x$ і $y=x+b$.
59. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо дано рівняння його сторін: $AB: x-3y+3=0$, $AC: x+3y+3=0$ і основу $D(-1;3)$ висоти AD .
60. Дано рівняння $3x+y=0$ і $x-3y=0$ бічних сторін рівнобедреного трикутника та точку $M(0;5)$ на його основі. Знайдіть периметр і площу трикутника.
61. У трикутнику ABC дано рівняння сторони $AB: 3x+2y=12$, рівняння висоти $BM: x+2y=4$ і рівняння висоти $AM: 4x+y=6$, де M – точка перетину висот. Напишіть рівняння сторін AC, BC і висоти CM .
62. Дві сторони паралелограма задані рівняннями $y=x-2$ і $5y=x+6$, а діагоналі перетинаються в початку координат. Напишіть рівняння двох інших сторін і його діагоналей.
63. Дано трикутник з вершинами $A(0;-4)$, $B(3;0)$ і $C(0;6)$. Знайдіть відстань від вершини C до бісектриси кута A .
64. Знайдіть вершини прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо дано вершину прямого кута $C(3;-1)$ і рівняння гіпотенузи $3x-y+2=0$.
65. Дано дві вершини трикутника $A(-4;3)$ і $B(4;-1)$ і точку перетину висот $M(3;3)$. Знайдіть третю вершину C .
66. Визначте координати вершин ромба, якщо дано рівняння двох його сторін $x+2y=4$ і $x+2y=10$, та рівняння одної з діагоналей $y=x+2$.
67. Складіть рівняння сторін трикутника ABC , якщо відомо точку $A(0;1)$ і рівняння висот $BM: x+y=4$ і $CM: y=2x$, де M – точка перетину висот.

68. Запишіть рівняння кола з центром в точці O і радіусом R :

1. $O(1; -1)$, $R = \sqrt{26}$.

2. $O(0; -4)$, $R = 1$.

69. Запишіть рівняння кола, яке проходить через точку A і його центр знаходиться у точці O :

1. $A(1; -1)$, $O(0; 3)$.

2. $A(-1; 1)$, $O(2; 0)$.

70. Знайдіть радіус і центр кола:

1. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$.

2. $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 5 = 0$.

3. $x^2 + y^2 + x = 0$.

4. $2x^2 + 2y^2 - y = 0$.

5. $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 17 = 0$.

6. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

71. Побудуйте еліпс і знайдіть його усі характеристики:

1. $x^2 + 4y^2 = 16$.

2. $4x^2 + y^2 = 16$.

3. $2x^2 + y^2 = 18$.

4. $4x^2 + 6y^2 = 12$.

72. Побудуйте гіперболу і знайдіть її усі характеристики:

1. $x^2 - 4y^2 = 16$.

2. $-4x^2 + y^2 = 16$.

3. $2x^2 - y^2 = 18$.

4. $-4x^2 + 6y^2 = 12$.

73. Побудуйте параболу і знайдіть її усі характеристики:

1. $4x^2 - y = 0$.

2. $-4x^2 + y = 0$.

3. $y = 4x^2 + 1$.

4. $x = y^2 + 1$.

5. $x = -y^2 - 1$.

6. $y = -2x^2 + 1$.

74. Знайдіть рівняння дотичних, проведених з точки $O(0;0)$ до кола $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

75. На еліпсі $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайдіть точку, відстань якої від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого фокуса.

76. Запишіть рівняння еліпса, що проходить через точку $A(3; 12/5)$ і дотикається до прямої $4x + 5y - 25 = 0$. Знайдіть координати точки дотику.

77. Складіть рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами $A(7;7)$, $B(0;8)$, $C(-2;4)$.

78. Складіть рівняння кола з центром у точці $A(6;7)$, яке дотикається до прямої $5x - 12y = 24$.

79. В еліпсі $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписано правильний трикутник, причому одна з його вершин збігається з правим кінцем великої осі. Знайдіть координати двох інших вершин.

80. Напишіть рівняння прямої, що дотикається до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ у точці $M(2;-3)$.

81. Знайдіть рівняння тих дотичних до еліпса $3x^2 + 8y^2 = 45$, відстань яких від центра еліпса дорівнює 3.

82. Складіть рівняння гіперболи, яка дотикається до прямої $y = x - 2$ у точці $N(4;2)$.

83. Паралельно прямій $y = -2x + 7$, проведіть дотичну до параболи $y^2 = 12x$.

84. Знайдіть кут між асимптотами гіперболи, якщо: а) $\varepsilon = 2$; б) відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

85. Запишіть рівняння прямої, яка у точці $B(5;-4)$ дотикається до гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

86. Знайдіть найкоротшу відстань від параболи $y^2 = 64x$ до прямої $4x + 3y + 46 = 0$.

87. Паралельно прямій $10x - 3y + 9 = 0$, складіть рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$.

88. Складіть рівняння гіперболи, якщо $y = x/2$ одна з асимптот і $5x - 6y - 8 = 0$ одна з дотичних до гіперболи.

89. Визначте типи кривих:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$,

2) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$,

3) $x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$,

4) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$,

5) $x^2 + y^2 + 6x - 14y - 5 = 0$,

6) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$,

7) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$,

8) $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

90. Визначте, як розміщена пряма відносно еліпса:

а) $2x - y - 3 = 0$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $2x + y - 10 = 0$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

в) $3x + 2y - 20 = 0$; $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

91. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; 2; -1)$ і перетинає вісь Ox під прямим кутом.

92. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5; 3; 4)$ паралельно вектору $\vec{s} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}$.

93. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; 1; 1)$ перпендикулярно векторам $\vec{s}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{s}_2 = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

94. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(0; 2; 1)$ паралельно векторам $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

95. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 1; 1)$ паралельно площині $2x - 2y + 2z + 1 = 0$.

96. Напишіть рівняння площини, яка проходить через три точки $O(0;0;0)$, $M_1(-4;2;-1)$, $M_2(-2;-4;3)$.

97. Знайдіть відстань від точки $M_0(3;5;-8)$ до площини $6x - 3y + 2z - 28 = 0$.

98. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;3;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

99. Зведіть до нормального виду рівняння наступних площин:
1) $x + y - z - 2 = 0$, 2) $3x + 5y - 4z + 7 = 0$, 3) $2x - y + 3z - 1 = 0$, 4) $5x + 4y - z - 7 = 0$, 5) $2x + 3y - 6z + 21 = 0$.

100. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $R(-5;1;6)$, $P(4;-2;1)$ і $Q(2;4;-3)$.

101. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(5;4;3)$ і відтинає рівні відрізки на осях координат.

102. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;0;-1)$, $M_2(1;-1;3)$ перпендикулярно площині $3x + 2y - z - 5 = 0$.

103. Знайдіть відстань між паралельними площинами $2x + y - z + 3 = 0$ і $-2x - y + z - 5 = 0$.

104. Знайдіть точку N , симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

105. Через пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ проведіть площину, паралельну прямій $\frac{x}{-1} = \frac{z+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

106. Складіть рівняння проекції прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ на площину $x + y + 2z - 5 = 0$.

107. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-5;0)$, $M_2(6;0;2)$ паралельно площині $x + 5y + 2z - 10 = 0$.

108. Складіть рівняння проекції прямої

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0, \end{cases}$$

на координатні площини.

109. Зведіть рівняння прямої до канонічного виду:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0, \\ 3x + y - 17z = 0. \end{cases}$$

110. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $N(5; -1; -3)$ і паралельна прямій

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

111. Знайдіть точку перетину прямих:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3}.$$

112. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(3; 0; -1)$, $B(1; 2; -4)$ і $C(0; 7; -2)$. Знайдіть рівняння сторін AD і CD .

113. Складіть параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки $M(2; -5; 1)$ і $N(-1; 1; 2)$.

114. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

115. Дано точки $A(-1; 2; 3)$ і $B(2; -3; 1)$. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; -1; 2)$ і паралельна вектору $\overrightarrow{AB}$.

116. Знайдіть кут між прямими:

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0, \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

117. В площині Oyz знайдіть пряму, яка проходить через точку $O(0; 0; 0)$ і перпендикулярна прямій

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ y + 2z = -2. \end{cases}$$

118. Дано дві вершини $C(-2; 3; -5)$ і $D(0; 4; -7)$ паралелограма $ABCD$, а також точку $M(1; 2; -3, 5)$ перетину діагоналей. Знайдіть рівняння сторони AB .

119. Дано три точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 3)$ і $C(3; 3; 2)$. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно векторам $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

120. Складіть рівняння прямої, яка проходить через пряму

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4} \text{ перпендикулярно до площини } 3x + y - z + 2 = 0.$$

121. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2; -1; -3)$ і $M_2(3; 1; -5)$.

122. Знайдіть кут між прямими:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + 1 = 0, \\ y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

123. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1; -3; 2)$ перпендикулярно до прямих:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-5}.$$

124. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; 1; -3)$ і утворює з осями координат кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

125. Перевірте, чи точки $A(3; 5; -5)$, $B(4; 6; -4)$ і $C(5; 7; -3)$ лежать на одній прямій.

126. Пряма l проходить через точку $M_0(2; 1; -1)$ і точку перетину прямої

$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{7}$ з площиною $x - y + z - 1 = 0$. Знайдіть кут, утворений прямою l з площиною $x + 2y - z + 3 = 0$.

127. Знайдіть відстань від точки $M(2; 3; 1)$ до прямої

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}.$$

128. Дано вершини тетраедра: $A(2; -1; -4)$, $B(-1; 4; -1)$, $C(-2; 3; -2)$ і $D(3; 10; -15)$. Складіть рівняння грані ABC і знайдіть координати точки D' , яка є симетрична точці D відносно цієї грані. Знайдіть також об'єм тетраедра і довжину висоти, опущеної з вершини D .

129. Знайдіть проекцію точки $P(8; 5; 2)$ на площину, яка проходить через точки $A(3; -2; 3)$, $B(4; -2; 0)$, $C(-1; 4; 3)$.

130. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(3; 1; -2)$ і

пряму $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

131. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(4; -3; 1)$ паралельно до прямих:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}, \quad \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

132. Трикутник ABC утворений перетином площини $x + 2y + 4z - 8 = 0$ з координатними площинами. Знайдіть рівняння середньої лінії трикутника, паралельної площині Oxy .

133. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;1;-2)$ і точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ з площиною $2x - 3y - 5z = 3$.

134. Знайдіть точку N , симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно площини $x + y - 2z - 6 = 0$.

135. Доведіть, що прямі

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}, \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

лежать в одній площині та складіть рівняння цієї площини.

136. Напишіть рівняння площини, яка відтинає на осі Oy відрізок $OB = 5$ і перпендикулярна вектору $\vec{n} = (3; -2; 4)$.

137. Напишіть рівняння площини, яка проходить через основи перпендикулярів, проведених з точки $A(2;3;-5)$ на координатні осі.

138. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точки $A(2;-1;4)$ і $B(3;2;-1)$ перпендикулярно площині $x + y + 2z - 3 = 0$.

139. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки $M(2;3;-5)$ на площину $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

140. Знайдіть кут між площиною $2x + y - 2z - 3 = 0$ і координатною площиною Oyz .

141. Знайдіть відстань між паралельними площинами $x - y + z - 1 = 0$ і $2x - 2y + 2z - 5 = 0$.

142. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1;-1;1)$ перпендикулярно до площин $2x - y + z - 1 = 0$ і $x + 2y - z + 1 = 0$.

143. Напишіть рівняння площини, яка проходить через три точки $A(2;-3;2), B(-1;-2;-1), C(-3;1;4)$.

144. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;1;-2)$ і точку перетину прямої $x = 2t - 1, y = t + 2, z = 1 - t$ з площиною $3x - 2y + z = 3$.

145. Знайдіть відстань від точки $M(2;0;3)$ до прямої

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

146. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;2;-1)$ і

пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$.

147. Знайдіть відстань між паралельними прямими:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}, \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -t - 1, \\ z = 3t + 2. \end{cases}$$

148. Напишіть рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+1}{4}, \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{4}.$$

149. Складіть рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x + y + 5z - 1 = 0$, $2x + 3y - z + 2 = 0$ і точку $M(3;2;1)$.

150. Напишіть рівняння площини, яка проходить паралельно осі Oy через лінію перетину площин $x + 3y + 5z - 4 = 0$ і $x - y - 2z + 7 = 0$.

151. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно площинам $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ і $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

152. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точки $P(2;0;-1)$ і $Q(1;-1;3)$ перпендикулярно до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$.

153. На площині $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ знайдіть таку точку M , щоб пряма OM утворювала з осями координат рівні кути.

154. Складіть рівняння площин, які проходять через осі координат перпендикулярно площині $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.

155. Складіть рівняння площини, яка проходить через точки $M(0;3;0)$ і $N(1;1;1)$, та точку перетину площин $2x + 2y + z - 7 = 0$, $2x - y + 3z - 3 = 0$ і $4x + 5y - 2z - 12 = 0$.

156. Напишіть рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x + 2y + 3z - 5 = 0$ і $3x - 2y - z + 1 = 0$ і відтинає рівні відрізки на осях Ox і Oz .

157. Напишіть рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x - y - 12z - 3 = 0$ і $3x + y - 7z - 2 = 0$ перпендикулярно до площини $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

158. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат та лінію перетину площин $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

159. Дано однопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$. Знайдіть лінії його перетину з координатними площинами і площинами, паралельними, що проходять на відстані 2 по обидва боки координатних площин.

160. Знайдіть точки перетину поверхонь з прямими:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1; & \frac{x-4}{2} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+2}{-2}; \\ 2) \quad & \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1; & x-3 = y-1 = \frac{z-6}{3}; \\ 3) \quad & 4z = x^2 - 4y^2; & \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}. \end{aligned}$$

161. Обчисліть довжину діаметра поверхні $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$, що проходить через точку $(4; -8/9; 8/3)$.

162. На параболоїді $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ знайдіть прямолінійні твірні, паралельні площині $3x + 2y - 4z = 0$.

163. Запишіть рівняння площини, що дотикається до поверхні $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{4} = -1$ у точці $(-6; 2; 6)$.

164. Знайдіть площину, що дотикається до конуса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0$ в точці $(4; -6; 4)$.

3.25. Індивідуальні завдання.

1. Нехай A, B і C – координати вершин трикутника ABC . Знайдіть:

- площу трикутника;
- рівняння сторін AB, AC і BC та їх кутові коефіцієнти;
- рівняння та довжину висоти AK ;
- кут між медіаною BM та стороною BC ;
- рівняння бісектриси CL ;
- рівняння прямої, яка проходить через точку M паралельно до AB , а також точку N перетину цієї прямої з висотою AK ;
- нормальні рівняння прямих AB, AC, BC, BM, AK, CL та їх рівняння у відрізках на осях.

1. $A(1;1), B(4;3), C(5;1).$
2. $A(0;-1), B(3;3), C(4;1).$
3. $A(4;0), B(7;4), C(8;2).$
4. $A(2;-2), B(5;2), C(6;0).$
5. $A(4;-2), B(7;2), C(8;0).$
6. $A(0;1), B(3;5), C(4;3).$
7. $A(-5;0), B(7;9), C(5;-5).$
8. $A(-6;2), B(6;1), C(7;-1).$
9. $A(-1;1), B(2;5), C(3;3).$
10. $A(1;-2), B(4;-2), C(5;0).$
11. $A(0;0), B(3;4), C(4;2).$
12. $A(0;2), B(3;6), C(4;4).$
13. $A(4;1), B(7;5), C(8;3).$
14. $A(3;2), B(6;6), C(7;4).$
15. $A(-2;1), B(1;5), C(2;3).$
16. $A(4;-3), B(7;1), C(8;-1).$
17. $A(-2;2), B(1;6), C(2;4).$
18. $A(5;0), B(8;4), C(9;2).$
19. $A(2;3), B(5;7), C(6;5).$
20. $A(3;-2), B(6;2), C(7;0).$
21. $A(2;6), B(5;11), C(3;-3).$
22. $A(0;-1), B(12;8), C(10;-6).$
23. $A(-5;-3), B(7;6), C(5;-8).$
24. $A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7).$
25. $A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9).$
26. $A(-8;-4), B(4;5), C(2;-9).$
27. $A(-6;1), B(6;10), C(4;-4).$

$$28. A(-2; -4), B(10; 5), C(8; -9).$$

$$29. A(-3; 0), B(9; 9), C(7; -5).$$

$$30. A(-9; -2), B(3; 7), C(1; -7).$$

2. Задано рівняння площини P_1 , прямої L_1 і точка $M(x; y; z)$. Знайдіть:
 1) рівняння площини P_2 , що проходить через точку M паралельно до площини P_1 ; 2) рівняння площини P_3 , що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1 ; 3) рівняння прямої L_2 , що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1 ; 4) рівняння прямої L_3 , що проходить через точку M паралельно прямій L_1 ; 5) точку K перетину прямої L_1 і площини P_1 ; 6) відстань від точки M до площини P_1 ; 7) відстань від точки M до прямої L_1 .

$$1. P_1: 5x + 3z - 7 = 0, L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}, M(2; -3; 0).$$

$$2. P_1: 2x - 3y + z - 4 = 0, L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-6}{1}, M(-1; 0; 4).$$

$$3. P_1: x - 5y + 3z - 2 = 0, L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+5}{1}, M(-3; 0; 2).$$

$$4. P_1: x - 3y + 2z + 4 = 0, L_1: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}, M(1; 0; -3).$$

$$5. P_1: 3x - 4z + 11 = 0, L_1: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}, M(2; 9; 0).$$

$$6. P_1: 3x + 2z - 5 = 0, L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}, M(-1; 2; -1).$$

$$7. P_1: 7x - 6y + 5z - 1 = 0, L_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-1}{5}, M(4; -3; -8).$$

$$8. P_1: 3x - 9y + 7z - 9 = 0, L_1: \frac{x+1}{9} = \frac{y+8}{3} = \frac{z+4}{5}, M(-3; -2; 7).$$

$$9. P_1: 4x - y - 2z + 3 = 0, L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}, M(1; 0; -1).$$

$$10. P_1: 2x + y - 3z = 0, L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}, M(0; 3; 4).$$

$$11. P_1: 5x - 7y + 3z - 9 = 0, L_1: \frac{x+7}{1} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{5}, M(2; -3; 5).$$

12. $P_1: 2x - 6y + 5z - 5 = 0, L_1: \frac{x+6}{3} = \frac{y-8}{5} = \frac{z-4}{5}, M(-1; 3; 8).$
13. $P_1: 4x + 3y - 5z - 3 = 0, L_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}, M(-1; 9; 0).$
14. $P_1: 4x - 5y + 3z - 7 = 0, L_1: \frac{x-1}{8} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{7}, M(-8; -5; 9).$
15. $P_1: 2x + 6y - 5z + 5 = 0, L_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-4}{5}, M(-1; 5; -4).$
16. $P_1: 5x + 2z - 3 = 0, L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}, M(2; 3; 0).$
17. $P_1: 6x - 5y + 2 = 0, L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{2}, M(2; 5; 1).$
18. $P_1: 4x - 3y + 1 = 0, L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}, M(1; -4; 1).$
19. $P_1: 4x - 8y + 3z - 9 = 0, L_1: \frac{x-1}{8} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{7}, M(-8; 4; 1).$
20. $P_1: x + 5y - 3z - 2 = 0, L_1: \frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{5}, M(3; 6; 2).$
21. $P_1: 2x - y + 2z - 3 = 0, L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}, M(0; 2; -1).$
22. $P_1: 3x - 4y - 4z = 0, L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}, M(0; 5; 5).$
23. $P_1: x + 3y - z = 0, L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}, M(0; 0; -5).$
24. $P_1: -x + 7y + 3z - 4 = 0, L_1: \frac{x-5}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{5}, M(0; -6; 2).$
25. $P_1: 2x - 7y + 5z - 5 = 0, L_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y+8}{7} = \frac{z-4}{5}, M(-3; 1; -4).$
26. $P_1: 4x - 3y + z - 3 = 0, L_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{1}, M(-2; 10; -5).$
27. $P_1: 5x - 8y + 3z - 9 = 0, L_1: \frac{x-7}{7} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{4}, M(2; -3; 5).$
28. $P_1: 7x + 2y - 3z - 4 = 0, L_1: \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{2}, M(-4; 0; -5).$

$$29. P_1: -6x + 4y + 2z - 3 = 0, L_1: \frac{x+8}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}, M(-8; 0; 7).$$

$$30. P_1: 3x - 8y + z + 2 = 0, L_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{7} = \frac{z+2}{5}, M(0; 9; -3).$$

3. В тетраедрі $A_1A_2A_3A_4$ знайдіть: 1) рівняння площини $A_1A_3A_4$; 2) рівняння прямої A_2A_3 ; 3) рівняння прямої, яка проходить через точку A_4 , перпендикулярно до площини $A_1A_2A_3$; 4) рівняння прямої, яка проходить через точку A_3 , паралельно до прямої, що проходить через точки A_1 і A_4 ; 5) рівняння площини, що проходить через точку A_4 , перпендикулярно до прямої A_1A_2 ; 6) кут між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$; 7) кут між площинами $A_1A_2A_3$ і $A_1A_4A_3$; 8) площу грані $A_1A_4A_3$; 9) об'єм тетраедра $A_1A_2A_3A_4$.

1. $A_1(-3; 5; 8), A_2(6; -8; 2), A_3(1; 9; -7), A_4(5; -6; 3).$
2. $A_1(-3; -5; 8), A_2(-6; -8; 2), A_3(5; 9; -7), A_4(3; -6; 3).$
3. $A_1(-3; 5; -8), A_2(2; -8; 2), A_3(1; 7; -7), A_4(5; -6; 8).$
4. $A_1(-4; 5; 8), A_2(3; -8; 2), A_3(5; 9; -7), A_4(5; -6; 3).$
5. $A_1(-3; 6; 8), A_2(4; -8; 2), A_3(1; 5; -7), A_4(2; -6; 6).$
6. $A_1(3; 5; 8), A_2(6; -8; 4), A_3(8; 9; -7), A_4(5; -7; 3).$
7. $A_1(-7; 5; 8), A_2(6; -8; 3), A_3(5; 9; -7), A_4(8; -6; 3).$
8. $A_1(4; 5; 3), A_2(4; -8; 2), A_3(6; 9; -7), A_4(1; -6; 3).$
9. $A_1(1; 5; 8), A_2(-5; -8; 2), A_3(1; 9; -7), A_4(5; -6; 3).$
10. $A_1(-3; -5; -8), A_2(-6; -8; 2), A_3(-1; 9; -7), A_4(-5; -6; 3).$
11. $A_1(4; 5; -3), A_2(4; -8; -2), A_3(6; -3; 7), A_4(1; -6; 9).$
12. $A_1(-3; -5; 8), A_2(6; -8; 2), A_3(1; 4; -7), A_4(9; -6; 3).$
13. $A_1(4; -5; 3), A_2(4; 8; 2), A_3(6; -9; -7), A_4(1; -6; -3).$
14. $A_1(1; 5; 3), A_2(7; -8; 2), A_3(5; 9; -7), A_4(4; -6; 3).$
15. $A_1(-4; 5; 3), A_2(4; -8; -2), A_3(-6; 9; -7), A_4(-1; -6; 3).$
16. $A_1(4; -7; 3), A_2(3; -8; 2), A_3(-7; 9; -7), A_4(6; -6; 3).$
17. $A_1(-6; 5; 3), A_2(4; -8; 7), A_3(6; 8; -7), A_4(1; -5; 3).$
18. $A_1(4; 5; 9), A_2(4; -8; 5), A_3(6; 9; -2), A_4(1; -6; -5).$
19. $A_1(-5; 5; 3), A_2(-4; -8; 2), A_3(-6; 9; -7), A_4(-1; 6; -3).$

20. $A_1(9; 5; 6), A_2(7; -8; 12), A_3(16; 9; -7), A_4(11; -6; 13)$.
21. $A_1(6; -5; 3), A_2(7; -8; 2), A_3(-5; 9; -7), A_4(9; -6; 3)$.
22. $A_1(-4; 5; -3), A_2(-4; -8; 3), A_3(6; -8; 7), A_4(1; -6; -3)$.
23. $A_1(5; -5; -3), A_2(2; -8; 2), A_3(6; 9; -5), A_4(7; -6; 3)$.
24. $A_1(4; 8; -3), A_2(2; -8; -2), A_3(6; 3; -7), A_4(11; -6; -3)$.
25. $A_1(4; 5; -6), A_2(4; -8; 9), A_3(6; 5; -9), A_4(1; -6; 3)$.
26. $A_1(7; -5; 3), A_2(4; 8; -2), A_3(6; -9; -7), A_4(1; -6; 8)$.
27. $A_1(9; 5; 3), A_2(-9; -8; 2), A_3(4; 9; -7), A_4(8; -6; 3)$.
28. $A_1(8; -5; 3), A_2(4; -6; 2), A_3(-6; 9; -3), A_4(7; -6; 3)$.
29. $A_1(4; 5; -3), A_2(-7; -8; 2), A_3(-3; 9; -7), A_4(8; -6; -3)$.
30. $A_1(7; -5; 3), A_2(4; -11; 2), A_3(3; 9; -7), A_4(1; -10; 7)$.

4. Знайдіть точку M' , симетричну точці M відносно прямої L :

1. $M(0; 3; -2), L: \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{2}$.
2. $M(2; -3; 0), L: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$.
3. $M(-1; 0; 4), L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-6}{1}$.
4. $M(-3; 0; 2), L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+5}{1}$.
5. $M(1; 0; -3), L: \frac{x}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$.
6. $M(2; 9; 0), L: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.
7. $M(-1; 2; -1), L: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}$.
8. $M(4; -3; -8), L: \frac{x+5}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-1}{5}$.
9. $M(-3; -2; 7), L: \frac{x+1}{9} = \frac{y+8}{3} = \frac{z+4}{5}$.
10. $M(1; 0; -1), L: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{1}$.

11. $M(0;3;4), L: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-3}.$
12. $M(2;-3;5), L: \frac{x+7}{1} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{5}.$
13. $M(-1;3;8), L: \frac{x+6}{3} = \frac{y-8}{5} = \frac{z-4}{5}.$
14. $M(-1;9;0), L: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}.$
15. $M(-8;-5;9), L: \frac{x-1}{8} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{7}.$
16. $M(2;3;0), L: \frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-4}{5}.$
17. $M(-1;5;-4), L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}.$
18. $M(1;-4;1), L: \frac{x}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{2}.$
19. $M(2;5;1), L: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$
20. $M(-8;4;1), L: \frac{x-1}{8} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{7}.$
21. $M(3;6;2), L: \frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{5}.$
22. $M(0;2;-1), L: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}.$
23. $M(0;5;5), L: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}.$
24. $M(0;0;-5), L: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}.$
25. $M(0;-6;2), L: \frac{x-5}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{5}.$
26. $M(-3;1;-4), L: \frac{x-6}{3} = \frac{y+8}{7} = \frac{z-4}{5}.$
27. $M(-2;10;-5), L: \frac{x-5}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{1}.$

$$28. M(-4; 0; -5), L: \frac{x-7}{7} = \frac{y+8}{5} = \frac{z+4}{4}.$$

$$29. M(2; -3; 5), L: \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{2}.$$

$$30. M(-8; 0; 7), L: \frac{x+8}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

5. Знайдіть точку M' , симетричну точці M відносно площини P :

$$1. P: 3x + 5z - 7 = 0, M(-2; 3; 0).$$

$$2. P: 2x - 3y + z - 4 = 0, M(-1; 0; 4).$$

$$3. P: 2x + 5y - 3z - 2 = 0, M(3; 0; -2).$$

$$4. P: x + 3y - 2z + 5 = 0, M(1; 0; -3).$$

$$5. P: 7x - 4z + 10 = 0, M(2; -9; 5).$$

$$6. P: 3x + 2z - 5 = 0, M(-1; 2; -1).$$

$$7. P: -7x + 6y + 3z - 1 = 0, M(-4; 3; 8).$$

$$8. P: 3x - 9y + 7z - 9 = 0, M(-3; -2; 7).$$

$$9. P: 4x - y - 2z + 3 = 0, M(1; 0; -1).$$

$$10. P: 2x + 5y - 3z = 0, M(0; 3; 4).$$

$$11. P: 5x - 7y + 3z - 9 = 0, M(2; -3; 5).$$

$$12. P: 2x - 6y - z - 5 = 0, M(1; 3; -5).$$

$$13. P: 4x + 3y - 5z - 3 = 0, M(-1; 9; 0).$$

$$14. P: 8x - y + 2z - 7 = 0, M(-8; 0; 9).$$

$$15. P: -2x - 5y + 4z + 5 = 0, M(-1; -5; 4).$$

$$16. P: 5x + 2z - 3 = 0, M(2; 3; 0).$$

$$17. P: 6x - 5y + 2 = 0, M(2; 5; 1).$$

$$18. P: 4x - 3y + 1 = 0, M(1; -4; 1).$$

$$19. P: 4x - 8y + 3z - 9 = 0, M(-8; 4; 1).$$

$$20. P: x + 5y - 3z - 2 = 0, M(3; 6; 2).$$

$$21. P: 2x - y + 2z - 3 = 0, M(0; 2; -1).$$

$$22. P: 7x - 4y - 8z = 0, M(0; 5; 5).$$

$$23. P: x + 3y - z = 0, M(0; 0; -5).$$

$$24. P: -x + 7y + 3z - 4 = 0, M(0; -6; 2).$$

$$25. P: x + 2y + 5z - 5 = 0, M(3; 1; 4).$$

$$26. P: 4x - 3y + z - 3 = 0, M(-2; 10; -5).$$

$$27. P: 2x - 3y + 8z - 9 = 0, M(5; -2; 4).$$

$$28. P: 7x + 2y - 3z - 4 = 0, M(-4; 0; -5).$$

$$29. P: 8x - y + 2z - 3 = 0, M(-3; 1; -7).$$

$$30. P: -3x - 2y + 6z + 2 = 0, M(0; 7; -1).$$

6. Для еліпса знайдіть координати вершин, фокусів, ексцентриситет і рівняння директрис. Для гіперболи знайдіть координати вершин, фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та рівняння асимптот. Для параболи знайдіть параметр параболи, координати вершини, координати фокуса і рівняння директриси:

$$1. \frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad y^2 = 7x.$$

$$2. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad x^2 = 17y.$$

$$3. \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1; \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1; \quad y^2 = 8x.$$

$$4. \frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{256} = 1; \quad \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1; \quad x^2 = 16y.$$

$$5. \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{144} = 1; \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{196} = 1; \quad y^2 = 9x.$$

$$6. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1; \quad \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{100} = 1; \quad x^2 = 49y.$$

$$7. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1; \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1; \quad y^2 = 64x.$$

$$8. \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} = 1; \quad \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad x^2 = 4y.$$

$$9. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} = 1; \quad \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1; \quad y^2 = \sqrt{3}x.$$

$$10. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{225} = 1; \quad x^2 = y.$$

$$11. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad y^2 = 5x.$$

$$12. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad x^2 = 6y.$$

$$13. \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1; \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; \quad y^2 = 23x.$$

- | | | |
|--|--|------------------------|
| 14. $\frac{x^2}{361} + \frac{y^2}{324} = 1;$ | $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{144} = 1;$ | $x^2 = 36y.$ |
| 15. $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{144} = 1;$ | $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{144} = 1;$ | $y^2 = 26x.$ |
| 16. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1;$ | $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1;$ | $x^2 = \sqrt{7}y.$ |
| 17. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1;$ | $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1;$ | $y^2 = 19x.$ |
| 18. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{49} = 1;$ | $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{400} = 1;$ | $x^2 = 56y.$ |
| 19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1;$ | $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1;$ | $y^2 = 100x.$ |
| 20. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1;$ | $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{25} = 1;$ | $x^2 = 14y.$ |
| 21. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{144} = 1;$ | $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{121} = 1;$ | $y = 4x^2 - 8x + 6.$ |
| 22. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1;$ | $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{64} = 1;$ | $x^2 = 25y.$ |
| 23. $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{100} = 1;$ | $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{169} = 1;$ | $x = 2y^2 - 2y + 4.$ |
| 24. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{169} = 1;$ | $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{64} = 1;$ | $x^2 = 26y.$ |
| 25. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1;$ | $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1;$ | $y = 2x^2 - 12x + 14.$ |
| 26. $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{16} = 1;$ | $\frac{x^2}{361} - \frac{y^2}{400} = 1;$ | $x^2 = 81y.$ |
| 27. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{361} = 1;$ | $\frac{x^2}{400} - \frac{y^2}{225} = 1;$ | $y^2 = 13x.$ |
| 28. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1;$ | $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = 1;$ | $x^2 = 9y.$ |
| 29. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1;$ | $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;$ | $y^2 = 43x.$ |

$$30. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{676} = 1; \quad \frac{x^2}{529} - \frac{y^2}{484} = 1; \quad x = -\frac{1}{4}y^2 + y.$$

7. Складіть канонічні рівняння еліпса (1-10), гіперболи (11-20) та параболи (21-30), якщо задано їх наступні характеристики:

1. $b=15$, $F(-10;0)$.

2. $a=12$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{16}$.

3. $A(0;-2)$, $B(15;1)$.

4. $\varepsilon = \frac{3}{5}$, $A(0;8)$.

5. $b=215$, $\varepsilon = \frac{7}{8}$.

6. $a=4$, $F(3;0)$.

7. $A(-3;0)$, $B(1;40)$.

8. $a=11$, $\varepsilon = \frac{10}{11}$.

9. $b=22$, $\varepsilon = \frac{7}{9}$.

10. $b=7$, $F(5;0)$.

11. $y = \pm \frac{3}{4}x$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

12. $a=13$, $\varepsilon = \frac{14}{13}$.

13. $b=210$, $F(-11;0)$.

14. $A(6;0)$, $B(-22;1)$.

15. $y = \pm \frac{1}{3}x$, $a=3$.

16. $y = \pm \frac{17}{8}x$, $c=9$.

17. $a=11$, $\varepsilon=2$.

18. $A(-5;1)$, $B(2;9)$.

19. $b=4$, $F(-11;0)$.

$$20. y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} x, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

$$21. \text{ рівняння директриси } x = -6.$$

$$22. \text{ вісь симетрії } O x \text{ і } A(27;9).$$

$$23. \text{ вісь симетрії } O y \text{ і } A(-9;6).$$

$$24. \text{ рівняння директриси } y = 25.$$

$$25. \text{ рівняння директриси } x = 8.$$

$$26. \text{ вісь симетрії } O y \text{ і } A(-2;3\sqrt{2}).$$

$$27. \text{ вісь симетрії } O x \text{ і } A(-5;15).$$

$$28. \text{ рівняння директриси } y = -3.$$

$$29. \text{ вісь симетрії } O y \text{ і } A(4;1).$$

$$30. \text{ рівняння директриси } y = 5.$$

8. Встановіть, які лінії визначаються рівняннями:

$$1. x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$$

$$2. 4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 11 = 0.$$

$$3. y = -2 - \sqrt{4 - x}.$$

$$4. 6x^2 + 6y^2 - 2x - 6y - 1 = 0.$$

$$5. 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0.$$

$$6. 9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0.$$

$$7. y^2 - 4x + 8 = 0.$$

$$8. 16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$$

$$9. 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0.$$

$$10. 2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0.$$

$$11. x^2 + y^2 + 6x - 8y + 17 = 0.$$

$$12. y = 2 - 2\sqrt{3 - x}.$$

$$13. 45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0.$$

$$14. 2y^2 - x - 12y + 14 = 0.$$

$$15. 5x^2 + 5y^2 - 10x + 8y - 6 = 0.$$

$$16. 16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$$

$$17. x = -2 + \sqrt{2y - y^2}.$$

$$18. x^2 + 4x + 2y + 12 = 0.$$

- 19. $25x^2 - 9y^2 + 150x - 18y + 441 = 0.$
- 20. $x^2 + 4y^2 + 2x + 24y + 21 = 0.$
- 21. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0.$
- 22. $y = 1 - \sqrt{x^2 - 6x + 25}.$
- 23. $9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 = 0.$
- 24. $2x^2 + y^2 - 14x + 16y - 25 = 0.$
- 25. $4x^2 + y^2 + 24x + 2y + 21 = 0.$
- 26. $y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$
- 27. $x = -3 - \sqrt{8 - 2y}.$
- 28. $y^2 - 6x - 6y + 21 = 0.$
- 29. $x^2 - 4y^2 + 4x - 24y - 28 = 0.$
- 30. $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0.$

Список використаних джерел

1. Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 180 с.
2. Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 252 с.
3. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. – Ч.1. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2016. – 180 с.
4. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. – Ч.2. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2017. – 176 с.
5. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. – Ч.3. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2018. – 136 с.
6. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В., Дільний В.М. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. – Ч.4. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2019. – 186 с.
7. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шаповаловський О.В., Дільний В.М., Шавала О.В. Вища математика: навчальний посібник. У 5-ти ч. – Ч.5. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2020. – 125 с.
8. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Основи одновимірного комплексного аналізу: навчально-методичний посібник. – Дрогобич: Швидкодрук, 2012. – 273 с.
9. Винницький Б.В., Шавала О.В. Диференціальні рівняння, Ч.1: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2014. – 136 с.
10. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч.1. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 517 с.
11. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч.2. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 511 с.
12. Винницький Б.В., Дільний В.М., Шепарович І.Б. Основи багатовимірного аналізу: навчальний посібник. У 3-х ч. – Дрогобич: РВВ ДДПУ, 2010. – Ч.1. – 347 с.; Ч.2. – 161 с; Ч.3 – 179 с.

13. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч.1. – 380 с.; Ч.2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
14. Дільний В.М., Шепарович І.Б. Математичний аналіз. Інтеграл по многовидах: навчальний посібник. – Дрогобич: РВВ ДДПУ, 2021. – 160 с.
15. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.; Ч.2. – 299 с.
16. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
17. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.
18. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч.1. – 463 с.; Ч.2. – 2003. – 470 с.
19. Дюженкова Л.І., Носаль Т.В. Вища математика: Практикум. – К.: Вища шк., 1991. – 407 с.
20. Клепо В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. 2-ге видання. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
21. Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С. Вища математика. Загальний курс. Ч.1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія. – Чернівці: Книги – ХХІ, 2010. – 319 с.
22. Лиман Ф.М., Власенко В.Ф., Петренко С.В. Вища математика. – Суми: Університетська книга, 2012. – 614 с.
23. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Вища математика. Практикум: У 2-х ч. – Київ: КНЕУ, 2009. – Ч.1. – 2009. – 706 с.; Ч.2. – 2012. – 748 с.
24. Лютий О.І., Макаренко О.І. Збірник задач з вищої математики. – К.: КНЕУ, 2003. – 305 с.
25. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1992. – Ч. 1 – 495 с.; Ч. 2. – 1993. – 375 с.
26. Малярець Л.М., Афанасьєва Л.М., Ігначкова А.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч.1. – Х.: Вид. ХНЕУ, 2011. – 392 с.
27. Михайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – Київ: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.
28. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: У 2 ч. – К.: Техніка, 1984. – Ч.1. – 600 с.
29. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. – 440 с.
30. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – Київ: Діал, 2003. – 461 с.
31. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія.

- Диференціальне числення функцій однієї змінної. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 552 с.
32. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. — Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
33. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.
34. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-ге вид. доп. і доопр. – Х.: Рубікон, 1999. – 320 с.
35. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. – 403 с.
36. Тріщ Б.М. Вища математика. Збірник індивідуальних завдань: навчальний посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2020. – 149 с.
37. Хаць Р.В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2023. – 130 с.
38. Чікіна Н.О., Антонова І.В., Балака Л.О. та ін. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: У 2-х ч. – Ч.1. – Харків: Підручник НТУ «ХП», 2012. – 224 с.
39. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. – К.: Вища шк., 1984. – 391 с.
40. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. – К.: Вища школа, 1986. – 512 с.
41. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2005. – Ч.1. – 447 с.; Ч. 2. – 510 с.
42. Adams R.A., Essex C. Calculus: Complete course. 10th edition. Toronto: Pearson Canada, 2021. – 1200 p.
43. Guichard D. Calculus: Early transcendentals. Calgary: Lyryx Learning Inc., 2021. – 610 p.
44. Howard A., Bivens I., Stephen D. Calculus. 12th edition. Wiley: John Wiley & Sons, Inc., 2022. – 1152 p.
45. Rudnyeva G.V. Elements of linear algebra and analytic geometry. Second revised and expanded edition: textbook. – Kharkiv: Panov A.M., 2020. – 236 p.

Руслан Хаць

**ВИЩА МАТЕМАТИКА В
ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ. Ч. 1.
ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
122 «Комп'ютерні науки», 073 «Менеджмент»,
014 «Середня освіта (Трудове навчання та технології)»,
015 «Професійна освіта (Транспорт)»

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Редактор
Ірина Невмержицька

Технічний редактор
Ірина Артимко

Здано до набору 12.05.2025 р. Формат 60х90/16. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 11,31. Зам. 38.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.