Гольський В.Б.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

(ЧАСТИНА 2)

Навчальний посібник

«Формули, цитати, тексти перекладів, ілюстрації, цифровий та інший фактичний матеріал і бібліографічні відомості перевірено, зауваження рецензентів ураховано.»

__________ Гольський В.Б. ____________

дата Прізвище та ініціали підпис

Дрогобич, 2015

УДК.
ББК
Г63

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана франка
як навчальний посібник
(протокол № __ від __________ 2015 р.)

Рецензенти:

Вірт Ігор Степанович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри машинознавства і основ технологій Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.;

Пелещак Роман Михайлович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Г 63 **Гольський В.Б.**
Теоретична механіка (частина 2) : **навчальний посібник.** — Дрогобич: ДДПУ, 2015. — 110 с.

Посібник укладено відповідно до програми навчальної дисципліни **«Теоретична механіка»** для підготовки фахівців ОКР «Бакалавр» галузі знань: 0402. «Фізико-математичні науки» напрямів підготовки 6.040201. «Математика*», 6.040201. «Математика*. Спеціалізація: Економіка», 6.040201. «Математика*» 6.040203. «Фізика», затвердженої вченою Радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Бібліографія 15 назв.

УДК. 531/534 (075)
ББК 22.21я.73.

ЗМІСТ

Розділ 1. Основи аналітичної механіки

§ 1.1. Варіаційний принцип в механіці

В залежності від характеру досліджуваних об'єктів механіку можна поділити на механіку матеріальної точки, механіку твердого тіла і механіку суцільних середовищ. Найбільш складним для вивчення є неперервні середовища, оскільки вони є системами з нескінченно великим числом ступенів вільності. Крім того, при розв'язанні задач, які розглядає механіка суцільних середовищ поряд з методами теоретичної механіки використовуються також методи та рівняння термодинаміки, електродинаміки тощо.

В попередніх розділах, задачі механіки розв'язувались за допомогою рівнянь Ньютона. Тепер ми познайомимось з іншим підходом до опису і вивчення руху механічних систем.

Під *механічною системою* ми будемо розуміти сукупність матеріальних точок, рух яких може бути вільним або обмеженим зв'язками. Зокрема, сукупність матеріальних точок, об'єднаних жорсткими зв'язками, утворює тверде тіло.

В аналітичній механіці кожній механічній системі співставляється деяка функція узагальнених координат і узагальнених швидкостей системи, а також часу:

$$L=L(\text{координат, швидкостей, часу}),$$

яка називається *функцією Лагранжа*. *Узагальненими координатами* q_k називаються будь-які величини, за допомогою яких може бути задане положення системи в просторі. Під *узагальненими швидкостями* $\dot{q}_k$ $\left(\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}\right)$ розуміють похідні від узагальнених координат по час

Встановивши для розглядуваної системи вигляд функції Лагранжа, можна описати рух системи з допомогою рівнянь Лагранжа, які зв'язують частинні похідні функції L по координатах і швидкостях. Ці рівняння Лагранжа заміняють рівняння Ньютона.

Використання рівнянь Лагранжа замість рівнянь Ньютона володіє тою перевагою, що кількість рівнянь Лагранжа дорівнює числу ступенів вільності системи, яке при наявності зв’язків, обмежуючих рух системи буде меншим, за потроєне число частинок системи. Кількість рівнянь Ньютона, необхідних для опису системи із N частинкою, дорівнює $3N$. Крім того, в рівняння Лагранжа не входять реакції зв’язків, які невідомі. Таким чином, при використанні рівнянь Лагранжа реакції зв’язків, автоматично виключається із розгляду, що суттєво спрощує розв’язання задачі.

До рівнянь Лагранжа можна прийти двома шляхами: виходячи із рівнянь Ньютона і з допомогою загального варіаційного принципу – принципу найменшої дії .

Принцип найменшої дії може бути покладений в основу класичної механіки, замість законів Ньютона. Перевага принципу найменшої дії полягає в тому, що його можна легко поширити на системи, які не є механічними, наприклад на пружні середовища, елементарні поля, поля елементарних частинок тощо.

§ 1.2. Зв’язки

Обмеження геометричного або кінематичного характеру, які накладаються на координати (тобто положення) і швидкості частиною називають *зв’язками*.

Приклади систем із зв’язками геометричного характеру:

1) частинка, яка при своєму русі не може покинути, задану поверхню або криву.

Якщо поверхня або крива є нерухомими, то зв’язок називають <u>стаціонарним</u>; якщо поверхня або крива рухається, то це <u>нестаціонарний</u> зв’язок.

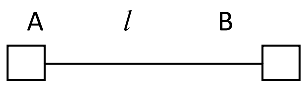


Рис. 1.

2) дві частинки, які зв’язані невагомим жорстким стержнем l (Рис. 1.). В цьому випадку обмеження, яке накладене зв’язком, може бути записане у вигляді рівняння:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2 \tag{1.1}$$

Обмеження кінематичного характеру полягає в тому, що швидкість точки дотику повинна дорівнювати нулю.

<u>Приклад:</u> диск, який котиться без ковзання по жорсткій поверхні.

В загальному випадку зв’язок геометричного характеру можна задати рівнянням:

$$f(x_{1,} y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, t) = 0 \tag{1.2}$$

Коли обмеження накладені і на швидкості руху частиною, то рівняння зв’язку має вигляд:

$$\varphi(x_{1,} y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) = 0 \tag{1.3}$$

Якщо рівняння (1.3) може бути про інтегроване по часу, то воно еквівалентне рівнянню (1.2).

Зв’язки, що задаються рівняннями (1.2) і інтегрованими по часу рівняннями (1.3) називаються *голономними* (або *інтегруючими*). У випадку голономних зв’язків накладені ними обмеження виражаються рівняннями, що пов’язують координати частинок і час.

Неінтегровані зв'язки (1.3) і зв'язки, що виражаються у вигляді нерівностей називаються *неголономними*.

Зв'язки, які не змінюються з часом називаються *стаціонарними*:

$$f(x_{1,}y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N) = 0. \tag{1.4}$$

§ 1.3. Рівняння Лагранжа в декартових координатах

Розглянемо систему, яка складається із взаємодіючих між собою частинок, і яка знаходиться в зовнішніх полях. (Тобто на частинки системи діють також зовнішні сили)

Припустимо, що частина сил, які діють на частинки системи визначається за наступним законом:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U\left(x_i, y_i, z_i, t\right)}{\partial \vec{r}_i}, \tag{1.5}$$

або

$$\vec{F}_i = -grad\ U\left(x_i, y_i, z_i, t\right) = -\vec{\nabla}_i U\left(x_i, y_i, z_i, t\right), \tag{1.6}$$

де

$$U(x_l, y_l, z_l, t) = 0\ , \tag{1.7}$$

функція координат частинок і часу, яка називається *потенціалом* системи (сила (1.5) називається *потенціальною*).

Якщо у функцію U не входять явно t, то вона є *потенціальною енергією* системи, а сила, яка виражається формулою (1.5) називається *потенціальною і стаціонарною*.

Тут $\vec{\nabla}$ – оператор, компоненти якого дорівнюють частинним похідним по координатах i-ої частинки:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z_i}\vec{k}\,. \tag{1.8}$$

Нехай частина сил, що діють на систему потенціальна, а частина сил – не потенціальна. Тоді рівняння руху запишуться наступним чином:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= -\frac{\partial U}{\partial x_i} + F^*_{i_x} \\ m_i \ddot{y}_i &= -\frac{\partial U}{\partial y_i} + F^*_{i_y} \\ m_i \ddot{z}_i &= -\frac{\partial U}{\partial z_i} + F^*_{i_z} \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ \dots\ ,N). \tag{1.9}$$

Введемо функцію Лагранжа, яка для розглядуваної нами системи має вигляд:

$$L(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = \sum_i \frac{m_i(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - U(x_i, y_i, z_i, t) \tag{1.10}$$

Знайдемо частинну похідну від L по $\dot{x}_i$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i,$$

а потім похідну по часу:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i\,. \tag{1.11}$$

Частинна похідна:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i} = F_i, \tag{1.12}$$

визначає *i*-ту компоненту потенціальної сили.

Враховуючи (1.11) і (1.12) у рівняннях (1.9), отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = F^*_{i_x}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = F^*_{i_y}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = F^*_{i_z}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Як бачимо, кількість рівнянь в системі (1.13) – $n=3N$. Надалі будемо використовувати позначення $(x_i, y_i, z_i) \Rightarrow x_i$, тоді рівняння Лагранжа в Декартові системі координат можна записати наступним чином:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = F^*_i, \tag{1.13'}$$

F^*_i – компоненти вектора не потенціальних сил.

Для систем, в яких діють тільки потенціальні сили, рівняння Лагранжа мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad (i=1,2,\ \dots,\ n). \tag{1.14}$$

§ 1.4. Рівняння Лагранжа в узагальнених координатах

Доведемо, що рівняння Лагранжа (1.13) залишаються справедливими при переході від декартових координат x_i до узагальнених координат q_k, а також, що в рівняння Лагранжа, записаних в узагальнених координатах, реакції зв'язків не входять.

Розглянемо голономну систему з ідеальними стаціонарними зв'язками. Розділимо не потенціальні сили, що діють на частинки системи на дві категорії: сили реакції зв'язків R_i та інші не потенціальні сили F_i^*

Тоді рівняння Лагранжа в декартових координатах прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = R_i + F_i^*, \quad (i=1,2,\ \dots,\ n) \qquad (1.15)$$

Нехай на систему накладено r зв'язків, які задаються рівняннями:

$$f_l(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \qquad (l=1,\ 2,\ \dots,\ r) \qquad (1.16)$$

Декартові координати x_i, які визначають положення системи, можуть бути представлені як функції узагальнених координат q_k. Якщо t не входить в рівняння зв'язків, то завжди можна вибрати q_k так, щоб час не входив і в вирази x_i через q_k, тобто

$$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_s), \qquad (1.17)$$

де $s=n-r,$ $(i=1,2,\ \dots,n)$.

Дальше для скорочення запису будемо писати:

$$x_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \Rightarrow x_i(q_k)$$

Для доведення нам потрібні наступні співвідношення:

$$\ddot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ s) \tag{1.18}$$

Індекс, по якому ведеться сумування називають *німим* індексом (його можна позначити будь-якою буквою). Оскільки величини $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ не містять залежності від $\dot{q}_k$, то на основі (1.18), запишемо:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \tag{1.19}$$

а також

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = 0\,. \tag{1.20}$$

Оскільки величини, $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ не залежать від час і $\dot{q}_k$, а є тільки функціями координат, то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_l \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\frac{dq_l}{dt} = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l\,. \tag{1.21}$$

Тепер продеференціюємо вираз (4) по q_k:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right) = \sum_l \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l = \sum_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k \partial q_l}\dot{q}_l\,. \tag{1.22}$$

Співставляючи (1.21) і (1.22), маємо

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,. \tag{1.23}$$

Приступимо до доведення. Помножимо всі рівняння Лагранжа (1.15) на $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ і додамо всі рівняння разом. Одержимо:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\,. \tag{1.24}$$

Розглянемо перший доданок у правій частині (помноживши його на dq_k, $dq_k \neq 0$). Це робота сил ідеальних зв'язків:

$$\left(\sum_i R_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_k = \sum_i R_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k \right) = \sum_i R_i dx_i = 0.$$

Розглянемо другий доданок у правій частині (1.24), помноживши його також на dq_k:

$$\left(\sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) dq_k = \sum_i F_i^* \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k \right) = \sum_i F_i^* dx_i.$$

Це буде робота не потенціальних сил при зміні узагальненої координати q_k на dq_k. Тому величину

$$\sum_i F_i^* \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = Q_k^* \tag{1.25}$$

називають *узагальненою силою*.

У правій частині рівняння (1.24) залишається лише Q_k^* .

Розглянемо тепер ліву частину рівняння (1.24). Додамо і віднімемо в ній доданок

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q},$$

матимемо:

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} - \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k}\right) =$$

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (1.26)$$

Одержуємо рівняння Лагранжа в узагальнених координатах:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k^*, \qquad (k=1,2,\ \ldots\ , s) \qquad (1.27)$$

В дане рівняння реакції зв’язків R_i не входить.

Якщо всі сили, що діють на частинки системи (крім реакції зв’язків), потенціальні, то рівняння (1.27) набувають вигляду:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \ (k=1,2,\ \ldots\ , s). \qquad (1.28)$$

§ 1.5. Функція Лагранжа та енергія механічної системи

Функція Лагранжа $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ є характеристичною функцією механічної системи. Через цю функцію можуть бути виражені імпульси частинок системи:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \tag{1.29}$$

узагальнена сила

$$Q_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \tag{1.30}$$

а також енергія системи.

Покажемо, що вираз повної енергії системи через функцію Лагранжа має вигляд:

$$E = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \tag{1.31}$$

Для цього знайдемо повну похідну по часу від величини E:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - \frac{d}{dt}L(q_k, \dot{q}_k, t) = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \sum_k \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{d}{dt}\right)\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_k Q_k^* \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Позначимо:

$$W^* = \sum_k Q_k^* \dot{q}_k, \tag{1.32}$$

– роботу всіх не потенціальних сил за одиницю часу або потужність усіх не потенціальних сил, що діють на систему. Дійсно, в декартовій системі координат виконується рівність:

$$W^* = \sum_i F_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_i \frac{F_i dx_i}{dt} = \sum_i \frac{dA_i}{dt}$$

Отже,

$$\frac{dE}{dt} = W^* - \frac{\partial L}{\partial t}\,. \qquad (1.33)$$

Як видно з виразу (1.33) для того, щоб мало місце збереження повної енергії $\left(\frac{dE}{dt} = 0\right)$, повинні виконуватись дві умови:

1. Повинні бути відсутні не потенціальні сили, тобто $W^* = 0$*;*

2. В функцію Лагранжа не повинен входити явно час.

Такі системи, для яких функція Лагранжа не залежить явно від часу, називають *консервативними*. Це означає, що сили, які діють в цих системах є потенціальними і не залежними від часу, їх також називають *консервативними силами*.

Отже, ми вияснили, що для замкнутої системи, в якій діють тільки консервативні сили величина *E*, задана формулою (1.31) залишається постійною, а це означає, що *E* – *повна енергія системи*.

В механіці функції величин q_k і $\dot{q}_k$, які при русі системи зберігають своє значення, задане початковими умовами, сталим називають *інтегралами руху*.

Отже, *повна механічна енергія* замкнутої консервативної системи є інтегралом руху.

З курсу фізики, відомо:

$$E = T + U\,. \qquad (1.34)$$

Повна механічна енергія дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії системи.

Визначимо умови, при яких вираз (1.31) переходить в (1.34). Для цього отримаємо вираз кінетичної енергії твердого тіла узагальнених координат. Зв'язки будемо вважати голономними.

Виразимо декартові координати x_i частинок системи через узагальнені координати q_k.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_s, t), \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Час буде входити явно лише у випадку нестаціонарних зв'язків. Знайдемо повні похідні по часу від x_i.

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k . \tag{1.35}$$

Підставимо ці вирази у формулу для T:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \right)^2 =$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 + \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_i m_i \sum_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 . \tag{1.36}$$

Перший доданок формули (1.36) є функцією тільки q_k і t (від $\dot{q}_k$ не залежить). Позначимо його:

$$\alpha(q_k .t) = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2 . \tag{1.37}$$

Другий доданок перетворимо наступним чином (змінимо порядок сумування по k та i):

$$\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k = \sum_k \dot{q}_k \left(\sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right) = \sum_k \beta_k(q_i, t)\dot{q}_k . \qquad (1.38)$$

де

$$\beta_k = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \qquad (1.39)$$

Третій доданок перетворимо наступним чином:

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)^2 = \sum_i \frac{m_i}{2}\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l =$$

$$= \sum_k \sum_l \dot{q}_k \dot{q}_l \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l} = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \gamma_{k,l}(q_i, t), \qquad (1.40)$$

де

$$\gamma_{k,l}(q_i, t) = \sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}. \qquad (1.41)$$

Тоді

$$T = \alpha(q_k . t) + \sum_k \beta_k(q_i, t)\dot{q}_k + \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \gamma_{k,l}(q_i, t), \qquad (1.42)$$

У випадку стаціонарних зв’язків:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_s, t) \neq f(t)$$

Тому $\frac{\partial x_i}{\partial t} = 0$, виходить, що

$$\alpha(q_k.t) = 0$$

$$\beta_k(q_i,t) = 0$$

$$\gamma_{k,l}(q_i,t) \Rightarrow \gamma_{k,l}(q_i)$$

Тоді

$$T = \sum_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l \gamma_{k,l}(q_i) \tag{1.43}$$

Отже, для системи із стаціонарними зв'язками кінетична енергія є однорідною функцією узагальнених швидкостей $\dot{q}_k$. Функцію Лагранжа для системи частинок в декартових координатах ми уже записували:

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = \sum_i \frac{m_i \dot{x}_i^2}{2} - U(x_i, t).$$

При переході до узагальнених координат, одержимо

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - U(q_k, t)$$

де T визначається формулою (1.42):

$$T = T(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Лише у випадку стаціонарних зв'язків, кінетична енергія є однорідною квадратичною функцією узагальнених швидкостей $T = T(q_k, \dot{q}_k)$ і функція Лагранжа спрощується:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t), \qquad (1.44)$$

(хоч випадок стаціонарний, але сили можуть бути потенціальні нестаціонарні) $T = T(q_k, \dot{q}_k)$ – визначається формую (1.43).

§ 1.6. Закони збереження. Зв'язок функції Лагранжа із законами збереження

В основі законів збереження, які розглядаються в механіці, мають властивості простору і часу. Збереження енергії зв'язане з однорідністю часу, збереження імпульсу – з однорідністю простору і збереження моменту імпульсу зв'язане з ізотропністю простору.

З'ясуємо суть понять однорідність та ізотропність. Однорідність означає однорідність властивостей у всіх точках. Ізотропія означає однаковість властивостей в кожній точці по всіх напрямках. Однорідність та ізотропія незалежні одне від одного.

Зокрема:

1) однорідність часу означає, що механічні властивості замкнутої системи не залежать від вибору потоку відліку часу;
2) однорідність простору означає, що при будь-якому паралельному переносі замкнутої системи як цілого в просторі, її механічні властивості не змінюються;
3) ізотропність простору означає, що властивості замкнутої механічної системи не залежать від її повороту як цілого в просторі.

А. Закон збереження енергії.

Нехай система частинок знаходиться в незмінних зовнішніх умовах (це має місце, коли система замкнута або коли система знаходиться у зовнішньому постійному силовому полі). Зв’язки (якщо вони є!) ідеальні і стаціонарні. В цьому випадку час в силу своєї однорідності не може входити явно у функцію Лагранжа.

Дійсно, однорідність означає рівнозначність всіх моментів часу. Тому заміна одного моменту часу іншим без зміни значень координат і швидкостей частинок не повинна змінювати механічні властивості системи. Це справедливо лише в тому випадку, коли заміна одного моменту часу іншим, не змінює умов, в яких знаходиться система, тобто у випадку, незалежності від часу зовнішнього поля (якщо воно є!)

І так, для замкнутої системи або системи, що знаходиться в стаціонарному зовнішньому полі

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

де $L = L(q_k^{(1)}, \dot{q}_k^{(1)})$.

Тоді

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\,. \tag{1.45}$$

Якщо система консервативна, то рух частинок описується однорідними рівняннями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad (k=1,2,3,\ \dots\ ,s). \tag{1.46}$$

Звідси визначимо:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.47}$$

Підставивши (1.47) в (1.45), отримаємо:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k = \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$$

$$\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 0\,. \tag{1.48}$$

Або

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right) = 0\,. \tag{1.49}$$

Вираз в дужках (1.50) є не що інше, як енергія системи *E*:

$$E = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$$

Таким чином отримаємо, що

$$\frac{d}{dt}E = 0.$$

Звідки

$$E = const\,.$$

Отже, із однорідності часу випливає закон: *енергія замкнутої системи частинок (або системи, що знаходиться в стаціонарному зовнішньому силовому полі) залишається сталою*. Тобто енергія є *інтеграл руху*.

Б. Збереження імпульсу.

Розглянемо замкнену систему частинок. Замкнутість означає, що дія зовнішніх тіл на систему відсутня. В силу однорідності простору переміщення всіх частинок системи на однаковий відрізок $\delta\vec{r}$ не повинно змінити механічні властивості системи – функція Лагранжа при переміщенні $\delta\vec{r}$ не змінюється.

Для незамкненої системи переміщення $\delta\vec{r}$ викликало би зміну розміщення частинок відносно зовнішніх тіл, що взаємодіють з системою. Це привело б до зміни фізичних (механічних) властивостей системи. Таким чином тільки для замкненої системи паралельний переніс системи як єдиного цілого не змінює $L(\delta L = 0)$.

Вважаючи переміщення $\delta\vec{r}$ малим:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta\vec{r}_i = \delta\vec{r} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 . \tag{1.50}$$

(i – номер частинки; $(\delta\vec{r}_i \equiv \delta\vec{r})$). Якщо $\delta\vec{r}_i = 0$, то

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 . \tag{1.51}$$

Похідну $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}$ треба розуміти так:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}\vec{i} + \frac{\partial L}{\partial y_i}\vec{j} + \frac{\partial L}{\partial z_i}\vec{k}$$

Помножимо рівняння Лагранжа на відповідні одиничні вектори:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u_{ix}};\times\vec{i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u_{iy}};\times\vec{j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial u_{iz}};\times\vec{k}$$

а потім просумуємо ці рівняння:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}. \qquad (1.52)$$

Підставивши (1.52) в (1.53), отримаємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i} = 0$$

Але

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i} = \vec{p}_i$$ – імпульс і-ої частинки.

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i} = \vec{p}$$ – сумарний імпульс системи.

Отже, отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = const. \tag{1.53}$$

Отже, виходячи з однорідності простору, ми встановили закон: *сумарний імпульс замкненої системи частинок залишається сталим, тобто є інтегралом рух*.

В. Збереження моменту імпульсу.

Внаслідок ізотропії простору механічні властивості замкнутої системи частинок не повинні змінюватись при довільному повороті системи як єдиного цілого в просторі. У відповідності з цим не повинна змінюватись і функція Лагранжа $(\delta L = 0)$.

Знайдемо приріст функції Лагранжа δL при довільну повороті системи на кут $\delta\varphi$. При повороті системи всі вектори, які характеризують систему одержують прирости, які по порядку величини $\sim \delta\varphi$.

Відомо, що

$$\delta \vec{r}_i = [\delta\varphi, \vec{r}_i]; \qquad \delta \vec{u}_i = [\delta\varphi, \vec{u}_i]; \tag{1.54}$$

Тоді

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta \vec{r}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}\delta \vec{u}_i, \tag{1.55}$$

де

$$L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i)).$$

Підставивши (1.54) в (1.55), отримаємо:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}[\delta\varphi, \vec{r}_i] + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}[\delta\varphi, \vec{u}_i]. \tag{1.56}$$

У вираз (1.56) у змішаному (векторно-скалярному) добутку можна виконувати циклічні перестановки векторів:

$$\delta L = \sum_i \delta\varphi\left[\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right] + \sum_i \delta\varphi\left[\vec{u}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}\right] = \delta\varphi \sum_i \left\{\left[\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right] + \left[\vec{u}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}\right]\right\}$$

Врахуємо далі:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i};$$

$$= \delta\varphi \sum_i \left\{\left[\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right] + \sum_i \left[\vec{u}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{u}_i}\right]\right\} = \delta\varphi \frac{d}{dt}\sum_i \left[\vec{r}_i, \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right] = 0;$$

Але $\dfrac{\partial L}{\partial \vec{u}_i} = \vec{P}_i,\ [\vec{r}_i, \vec{P}_i] = \vec{M}_i$ – момент імпульсу частинки відносно початку координат. Оскільки $\delta\varphi = 0$, то

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{M}_i = 0. \tag{1.57}$$

Отже,

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = const. \tag{1.58}$$

Виходячи з ізотропії простору, ми показали, що виконується закон збереження моменту імпульсу (1.58): *результуючий (сумарний) момент імпульсу замкненої системи частинок залишається постійним.*

§ 1.7. Канонічні рівняння Гамільтона

При розв'язанні задач про рух систем з N ступенем вільності з допомогою рівнянь Лагранжа треба розв'язувати систему N диференціальних рівнянь другого порядку. Незалежними змінними в цих рівняннях є узагальнені координати q_k і узагальнені швидкості $\dot{q}_k$.

Гамільтон отримав рівняння руху, в яких незалежними змінними є *узагальнені координати* q_k і *узагальнені імпульси* p_k . Рівняння Гамільтона або як їх ще називають *канонічні рівняння* є диференціалами рівняннями першого порядку, але їх число дорівнює 2N. Рівняння Гамільтона називають канонічними, оскільки залишаються інваріантними при загальних перетвореннях змінних.

Можна перейти від змінних, q_k, p_k до інших канонічних змінних: $Q_i(q_k, p_k, t)$ та $P_i(q_k, p_k, t)$, при цьому вигляд рівнянь Гамільтона не зміниться, лише функцію Гамільтона $H(q_k, p_k, t)$ треба замінити на $H'(Q_i, P_i, t)$.

Рівняння Гамільтона можна вивести виходячи із рівнянь Лагранжа або безпосередньо з принципу найменшої дії. Обмежимось першим шляхом.

В якості функції, яка характеризує систему, Гамільтон взяв енергію:

$$E = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t), \tag{1.59}$$

яка виражена через q_k, p_k. Враховуючи, що:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Запишемо (1.59) у наступному вигляді:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \tag{1.60}$$

При чому $\dot{q}_k$ вважаються вираженими через q_k, p_k.

Характеристичну функцію *H* називають *функцією Гамільтона* або *гамільтоніаном.* Наприклад, гамільтоніан частинки, яка рухається в потенціальному полі $U(x, y, z, t)$:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t)$$

В стаціонарному полі $U = U(x, y, z)$.

Для виведення рівнянь Гамільтона, виходячи з рівнянь Лагранжа, знайдемо повні диференціали лівої і правої частин рівності (1.60). Ліва частина:

$$dH = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k. \tag{1.61}$$

Права частина:

$$dH = \sum_k p_k d\dot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k =$$

$$= \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k . \tag{1.62}$$

Із рівняння Лагранжа, якщо в системі діють тільки потенціальні сили, маємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt} p_k = \dot{p}_k . \tag{1.63}$$

Прирівнявши (1.61) і (1.62) з врахуванням (1.63), отримаємо:

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k = \sum_k \dot{q}_k dp_k - \sum_k \dot{p}_k dq_k . \tag{1.64}$$

Оскільки dp_k та dq_k, внаслідок голономності системи незалежні і рівність (1.64) виконується при будь-яких dp_k і dq_k, то коефіцієнти при dp_k та при dq_k в лівій та правій частині цієї рівності рівні. Тому, можна записати:

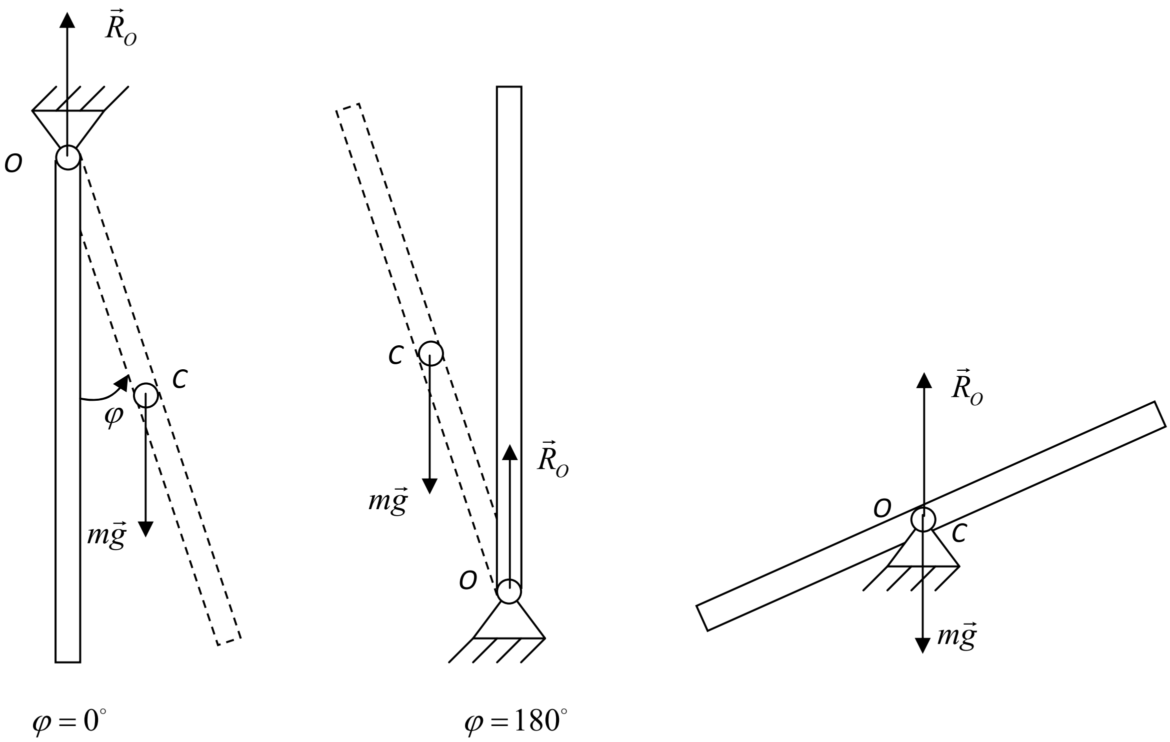
$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \qquad \dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} . \tag{1.65}$$

Рівняння (1.65) називаються *канонічними рівняннями Гамільтона*.

Розділ 2. Основи теорії коливань

§ 2.1. Визначення стійкості положення рівноваги

Для наочності розглянемо положення рівноваги на прикладі одного твердого тіла. Нехай таким тілом є стержень АВ (Рис. 2.1, а, б, в) з горизонтальною віссю обертання, що проходить через точку О. Стержень має два положення рівноваги при $\varphi = 0^\circ$ і $\varphi = 180^\circ$. У положенні рівноваги сили, прикладені до стержня, становлять урівноважену систему сил.



а) *б*) *в*)

Рис. 2.1

Щоб встановити, чи буде розглянуте положення рівноваги стержня стійким, варто дати йому досить мале початкове відхилення від положення рівноваги, а в загальному випадку надати йому ще досить малу початкову кутову швидкість і розглянути його рух. Для простоти обмежимося тільки одним малим початковим відхиленням від положення рівноваги. У відхиленому положенні сили, що діють на стержень (сила тяжіння й реакція в точці О), уже не є врівноваженими.

Якщо існує досить мале початкове відхилення стержня від положення рівноваги, при якому сили прагнуть повернути стержень у положення рівноваги, то таке положення рівноваги вважається *стійким*.

Положення рівноваги стержня при $\varphi = 0^{\circ}$ (рис. 2.1, а) є стійким, тому що при початковому його відхиленні на малий кут сили, що діють на стержень, прагнуть повернути його в положення рівноваги.

У випадку коли сили віддаляють стержень від положення рівноваги, положення рівноваги є *нестійкі*. Положення рівноваги стержня при $\varphi = 180^{\circ}$ може бути прикладом нестійкого положення рівноваги (рис. 2.1, б). Сили, що діють на стержень, у цьому випадку прагнуть відхилити його ще дальше від положення рівноваги при будь-якому як завгодно малому початковому його відхиленні від положення рівноваги.

Якщо стержень, одержавши будь-яке мале початкове відхилення від положення рівноваги, залишається в рівновазі в новому відхиленому положенні, то таке положення рівноваги з *байдужним*. Прикладом байдужного положення рівноваги може служити рівновага стержня, у якого закріплена точка О збігається із центром мас С. У цьому випадку сили, прикладені до стержня, утворять рівноважну систему сил при будь-якому початковому його відхиленні від первісного положення рівноваги (рис. 2.1, в).

У загальному випадку крім початкового відхилення стержню варто надати також ще й деяку досить малу початкову кутову швидкість. Природно, що тоді випадок байдужного положення рівноваги стержня варто віднести до хиткого положення рівноваги, тому що, одержавши будь-яку малу початкову кутову швидкість, стержень далі буде віддалятися із цією кутовою швидкістю по інерції від свого початкового положення рівноваги.

Все викладене про положення рівноваги стержня характерно не тільки для будь-якого твердого тіла, але й для будь-якої механічної системи. Найбільший інтерес представляє стійке положення рівноваги тіла або механічної системи, тому що в такому положенні рівноваги тіло або система можуть перебувати довго, якщо їм не надається яке-небудь збурювання.

При стійкому положенні рівноваги система, виведена з положення рівноваги досить малими збуреннями у вигляді початкових відхилень і швидкостей, які надаються всім точкам системи або їхньої частини, робить коливання біля положення рівноваги або наближається до нього без коливань.

При хиткому положенні рівноваги випадкові збурювання приводять до того, що система при подальшому русі усе далі й далі віддаляється від положення рівноваги. Таким чином, насамперед необхідно встановити характер положення рівноваги системи. Для цього потрібно ввести точне поняття стійкості положення рівноваги системи.

Строге визначення поняття положення рівноваги було дано наприкінці минулого століття в роботах російського вченого А.М. Ляпунова. Приведемо це визначення для системи з будь-яким скінченим числом ступенів вільності n.

Домовимось узагальнені координати q_1, q_2, ... , q_n відраховувати від положення рівноваги системи, тобто приймати їх рівними нулю в положенні рівноваги. Початкове збурення системи з в загальному випадку з початкових значень узагальнених координат q_1^0, q_2^0, ... , q_n^0 і початкових узагальнених швидкостей $\dot{q}_1^0$, $\dot{q}_2^0$, ... , $\dot{q}_n^0$.

За Ляпуновим, *рівновага системи називається стійкою, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа* ε *можна вибрати два інших малих додатних числа* η_1 *й* η_2, *і якщо при початкових, збуреннях вони задовольняють умовам* $\left|q_i^0\right| < \eta_1$, $\left|\dot{q}_i^0\right| < \eta_2$, *то в подальшому русі механічної системи виконуються умови* $\left|q_i\right| < \varepsilon$ *для кожної узагальненої координати.*

Таким чином, за Ляпуновим, положення рівноваги вважається стійким, якщо можна задати досить малу область зміни початкових значень узагальнених координат в околі положення рівноваги й область початкових узагальнених швидкостей, для яких величини узагальнених координат при наступному русі системи обмежені заданим ε околом поблизу положення рівноваги. Ясно, що області початкових значень q_i^0 і $\dot{q}_i^0$, визначаються додатними числами η_1 й η_2, залежать від обраного ε окола, тобто самого числа ε. Ці області початкових значень q_i^0 і $\dot{q}_i^0$ не повинні відповідати $\eta_1 = 0$ і $\eta_2 = 0$, тобто, тільки самому положенню рівноваги, для якого $q_i^0 = 0$ і $\dot{q}_i^0 = 0$.

У положенні рівноваги механічної системи кожна узагальнена сила Q_i дорівнює нулю. Для випадку потенційного силового поля узагальнені сили через потенційну енергію виражаються формулами:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Отже, у положенні будь-якої рівноваги $\partial \Pi / \partial q_i = 0$, тому потенціальна енергія при цьому може досягати свого екстремального значення.

§ 2.2 Гармонійне коливання матеріальної точки під дією сили, пропорційної зміщенню

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки М масою m під дією сили $\vec{P}$, яка напрямлена до нерухомого центру О (рис. 2.2) і пропорційна першій степені відстані ОМ точки М від центра О:

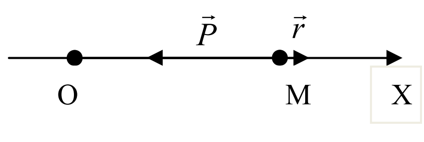


Рис. 2.2

$$\vec{P} = -c\vec{r}, \tag{2.1}$$

тут c – додатній коефіцієнт пропорційності, а знак "-" вказує, що сила завжди напрямлена в сторону, протилежну радіусу-вектору $\vec{r}$, тобто до центру О, який відповідає рівноважному положенню точки.

Силу, що прагне повернути точку в положення рівноваги, називають *відновлюючою*.

Відхилимо т. М. від положення рівноваги і відпустимо без початкової швидкості, або з початковою швидкістю яка напрямлена вздовж осі ОХ, що проходить через початкове положення точки і центра О. Прискорюючись, так що швидкість напрямлена в цю ж сторону що й точка , тобто до центру О, та сповільнюючись в протилежному напрямі, точка по інерції проходить повз центр О, здійснюючи навколо нього прямолінійний коливний рух. Якщо крім відновлюючої сили інших сил, зокрема сили опору руху, нема. Такі коливання носять назву *вільних*.

Відновлюючу силу, яка пропорційна відхиленню точки від положення рівноваги, називають *лінійно відновлюючою силою*, а самі коливання — *лінійними*.

Приймаючи пряму, вздовж якою відбувається рух, за вісь ОХ і поміщаючи початок координат в положення рівноваги О, запишемо основне диференціальне рівняння вільних незатухаючих коливань точки:

$$m\ddot{x} = P, \tag{2.2}$$

або

$$m\ddot{x} = -cx. \tag{2.2$'$}$$

Розділимо обидві частини рівняння на m та позначимо їхнє відношення через k^2:

$$k^2 = \frac{c}{m}, \tag{2.3}$$

тоді рівняння набере вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{2.4}$$

Таке лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами легко розв’язується звичайним способом написання характеристичного рівняння. Враховуючи, що корені цього рівняння в цьому випадку є уявними і рівними $\pm ik$, отримаємо його загальний розв’язок:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,. \tag{2.5}$$

Підставимо початкові умови, при $t = 0$, $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, в (2.5) та в похідну від (2.5) по часу:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt\,, \tag{2.6}$$

та знайдемо сталі інтегрування:

$$C_1 = x_0\,, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}\,, \tag{2.7}$$

Таким чином, рівняння руху буде мати вигляд:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt \tag{2.8}$$

Вівши амплітуду A, та початкову фазу α, отримаємо:

$$x = A \sin(kt + \alpha) \tag{2.9}$$

де

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}} \tag{2.10}$$

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}},\ \cos\alpha = \frac{\dot{x}_0}{k\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}} \tag{2.11}$$

Отже, розглянутий прямолінійний рух точки під дією лінійної відновлюючої сили представляє собою гармонійні коливання з частотою k і періодом T, які рівні

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \tag{2.12}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}, \tag{2.13}$$

які не залежить від початкових умов, а тільки від коефіцієнта пропорційності в лінійному законі відновлючої сили та маси точки.

§ 2.3. Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка, що рухається в одній і тій ж вертикальній площині по колу під дією сили тяжіння. Математичним маятником є вантаж досить малих розмірів,який підвішений до нерухомої точки О за допомогою невагомого стержня або невагомої, нерозтяжної нитки.

Відстань ОМ=l називається *довжиною математичного маятника.* Положення матеріальної точки М можна можна охарактеризувати кутом φ, який відраховується від вертикалі – положення рівноваги маятника.

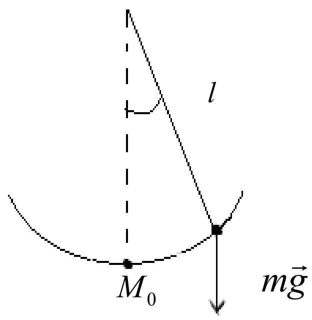


Рис. 2.3.

Математичний маятник можна розглядати як систему з одним ступенем вільності. Зв'язок у вигляді нитки або стержня є ідеальним. Виберемо за узагальнену координату кут φ. Запишемо для маятника рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \tag{2.14}$$

Кінетична енергія математичного маятникавизначається формулою:

$$T = \frac{mu^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{mgl\varphi}{2}. \tag{2.15}$$

оскільки

$$u = l\dot{\varphi}. \tag{2.16}$$

Активна сила – сила тяжіння $m\vec{g}$ – є потенціальною силою. Внаслідок цього, узагальнена сила Q через потенціальну енргію запишеться в вигляді:

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \tag{2.17}$$

Для того, щоб знайти вигляд потенціальної енергії в відхиленому положенні маятника, потрібно знайти роботу сили тяжіння при переміщенні точки М з цього в положення в положенння рівноваги M_0, де $\varphi = 0$. Робота буде рівна добутку сили тяжіння на висоту опускання точки М і є додатньою величиною, тобто

$$\prod = A_{MM_0} = mgl(1-\cos\varphi); \tag{2.18}$$

$$Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi. \tag{2.19}$$

Знайдемо похідні, які входять в рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mgl^2}{g}\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mgl^2}{g}\ddot{\varphi}. \tag{2.20}$$

Рівняння Лагранжа для математичного маятника, після перенесення всіх членів в ліву частину буде мати вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{2.21}$$

Отримаємо нелінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок не можна записати за допомогою елементарних функцій. У випадку малих коливань, коли φ достатньо мале, можна вважати, що $\sin\varphi \approx \varphi$. Рівняння малих власних коливань математичного маятника буде мати вигляд:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0, \tag{2.22}$$

де кругова частота коливань $k = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Його розв'язки мають вигляд:

$$\varphi = A\sin(kt + \alpha), \tag{2.23}$$

де сталі величини A та α – амплітуда та початкова фаза. Період малих коливань математичного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{2.24}$$

Малі коливання математичного маятника є гармонійними. Період їх коливань залежить тільки від довжини математичного маятника і прискорення вільного падіння g та не залежить від амплітуди коливань. Відзначеними властивостями не володіють коливання математичного маятника, що не є малими. Ці коливання вже не є гармонійними, і їхній період коливань залежить від амплітуди A.

§ 2.4. Фізичний маятник

Фізичним маятником називається тверде тіло, що обертається під дією сили тяжіння навколо нерухомої горизонтальної осі, що не проходить через центр мас (рис. 2.4). Вісь обертання фізичного маятника називається *віссю підвісу*, а точка її перетину О з перпендикулярної до осі підвісу вертикальною площиною, у якій знаходиться центр мас, називається *точкою підвісу*.

Фізичний маятник можна вважати системою з однією ступеню вільності. За узагальнену координату приймемо кут між вертикаллю і відрізком ОС, що з'єднує точку підвісу O з центром мас C. Вважаємо, що тертя в підшипниках осі підвісу немає і, отже, зв'язки, накладені на маятник, є ідеальними.

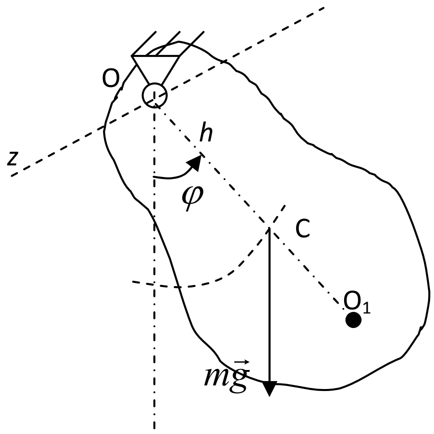


Рис. 2.4

Складемо для фізичного маятника рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}. \tag{2.25}$$

Кінетична енергія маятника як твердого тіла, що обертається навколо нерухомої горизонтальної осі підвісу Oz, визначається формулою:

$$T = J_{Oz}\frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{2.26}$$

де J_{Oz} – момент інерції маятника відносно його осі підвісу.

Потенційна енергія обчислюється так само, як і для математичного маятника:

$$\Pi = mgh(1 - \cos\varphi), \tag{2.27}$$

де m – маса фізичного маятника і h=OC.

Знайдемо похідні, що входять у рівняння Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_{Oz}\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=J_{Oz}\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=mgh\sin\varphi. \tag{2.28}$$

Рівняння Лагранжа після ділення обох частин на J_{Oz} і переносу всіх членів в одну сторону, приймає вигляд:

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgh}{J_{Oz}}\sin\varphi=0. \tag{2.29}$$

Його можна одержати, застосувавши до фізичного маятника диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$J_{Oz}\ddot{\varphi}=\sum_{k=1}^{N}M_{Oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)$$

де

$$\sum_{k=1}^{N}M_{Oz}\left(\vec{F}_k^{(e)}\right)=-mgh\sin\varphi.$$

У випадку малих коливань $\sin\varphi\approx\varphi$ і диференціальне рівняння прийме вигляд:

$$\ddot{\varphi}+\frac{mgh}{J_{Oz}}\varphi=0,$$

або

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0. \tag{2.30}$$

де $k = \sqrt{mgh / J_{Oz}}$.

Якщо для фізичного маятника ввести умовну довжину, яку називають *зведеною довжиною* фізичного маятника:

$$l = \frac{J_{Oz}}{mh},$$

то період його малих коливань через цю довжину виразиться так само, як і період математичного маятника. Дійсно,

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{Oz}}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (2.31)$$

Малі власні коливання фізичного маятника, так само як і математичного, є гармонійними з періодом, що не залежить від амплітуди.

Якщо від точки під вішення О відкласти по лінії ОС зведену довжину фізичного маятника l, то одержимо крапку O_1, яка називається центром качання. Для зведеної довжини фізичного маятника справедливі наступні теореми Гюйгенса.

1. Зведена довжина фізичного маятника більша відстані від точки підвісу до центра мас, тобто $l > h$. Для доведення теореми застосуємо до фізичного маятника теорему Штейнера про зв'язок моментів інерції щодо паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас. Одержимо

$$l = \frac{J_{Oz}}{mh} = \frac{J_{Cz} + mh^2}{mh} = \frac{J_{Cz}}{mh} + h > h, \qquad (2.32)$$

тому що відрізок $O_1C = \frac{J_{Cz}}{mh} = l - h > 0$. Тут J_{Cz} – момент інерції щодо горизонтальної осі, яка паралельна осі підвішування та проходить через центр мас.

2. Центр качання та точка підвісу фізичного маятника взаємні, тобто якщо тверде тіло підвісити за горизонтальну вісь, що проходить через центр качання, паралельно початковій осі, що проходить через точку підвісу, то одержимо новий фізичний маятник, зведена довжина якого дорівнює зведеній довжині попереднього маятника, тобто $l_1 = l$.

Обчислимо зведену довжину l_1 фізичного маятника, у якого вісь підвісу проходить через точку O_1 – центр качання колишнього маятника. Відповідно до визначення зведеної довжини, застосовуючи теорему Штейнера, маємо

$$l_1 = \frac{J_{O_1 z}}{m \cdot O_1 C} = \frac{J_{Cz} + m\left(l-h\right)^2}{m\left(l-h\right)} = \frac{J_{Cz}}{m\left(l-h\right)} + l - h = l, \tag{2.33}$$

тому що з (2.32) випливає, що $J_{Cz} = mh\left(l-h\right)$.

Якщо від точки O_1 відкласти відрізок $l_1 = l$, то одержимо точку O, тобто центр качання і точка підвісу взаємні. Періоди малих коливань фізичних маятників навколо горизонтальних осей, що проходять через точку підвісу та центр качання, однакові. Важливе прикладне значення теорії малих коливань фізичного маятника полягає в тому, що її можна покласти в основу експериментального визначення моментів інерції тіл. Для експериментального визначення моменту інерції тіла масою m відносно деякої осі досить зробити цю вісь горизонтальною віссю підвісу, визначити період малих коливань тіла навколо цієї осі та відстань від точки підвісу до центра мас. Тоді згідно (2.31) момент інерції відносно горизонтальної осі підвісу визначиться формулою:

$$J_{Oz} = \frac{T^2}{4\pi^2} mgh. \tag{2.34}$$

Розділ 3. Рівняння руху суцільного середовища

§ 3.1. Об’ємні та поверхневі сили. Рівняння руху суцільного середовища

У класичній механіці розглядається рух системи із скінченним числом ступенів вільності (наприклад: тверде тіло, що складається з великої кількості частинок, є системою з 6 ступенів вільності). Коли розглядаються рухи, складніші ніж у твердого тіла, необхідно розглядати тіло, як систему матеріальних точок, або як суцільне середовище, втрачаючи при цьому частину інформації про рух окремих частинок. Для будь-якого суцільного середовища, яке містить в собі число Авогадро атомів або молекул, немає ніякого сенсу розглядати систему 10^{23} диференціальних рівнянь з відповідною кількістю початкових умов. Оскільки, по-перше, таку кількість умов практично визначити неможливо, по-друге, ніякий персональний комп’ютер не зможе проаналізувати таку кількість рівнянь. Отже використання тієї чи іншої моделі суцільного середовища дозволяє спростити задачу.

Замість розгляду рухів окремих атомів або молекул у моделях суцільного середовища, частина простору, яка заповнена середовищем, наділяється додатними скалярними, векторними та тензорними характеристиками – полями (функціями координат та часу). Якщо серед характеристик середовища зустрічаються тензорні величини, відповідні рівняння для середовища описуються в тензорній формі.

Рідкою частинкою називається малий об’єм суцільного середовища, який у процесі свого руху деформується, але маса його не змішується з навколишнім середовищем.

При вивченні рівноваги, або будь-яких рухів рідини та газів рідка частинка розглядається як матеріальний об’єкт, який підпорядковується усім законам механіки.

Для характеристики розподілу маси у просторі, який заповнений рідиною або газом, використовують величину, яка називається густиною. Середнє значення густини середовища у деякому малому об'ємі визначається як відношення маси Δm, яка міститься у цьому об'ємі, до величини об'єму ΔV :

$$\rho_{сер} = \frac{\Delta m}{\Delta V} . \tag{3.1}$$

Замість середнього значення густини часто, використовується величина, що називається густиною середовища у даній точці:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} , \tag{3.2}$$

де об'єм ΔV містить у собі цю точку. Відповідно елемент маси dm середовища пов'язаний з елементом об'єму dV, де знаходиться ця маса, співвідношенням:

$$dm = \rho dV . \tag{3.3}$$

Під час руху суцільного середовища його елемента dm (рідка частинка) залишається не змінною. У загальному випадку густина представляє собою скалярну функцію координат та часу:

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) \tag{3.4}$$

Для опису рухів суцільного середовища введено векторне поле $\vec{u}(\vec{r}, t)$ – швидкість частинок суцільного середовища, які проходять через точку $\vec{r}$ в момент часу t. Швидкість $\vec{u}(\vec{r}, t)$ так само, як і густина $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, не відноситься до будь-якої точки, а надає усереднину характеристику середовища в певній точці простору в заданий момент часу.

Оскільки частинки з яких складається суцільне середовище, підпорядковуються рівнянням Ньютона, то подібні рівняння можна записати і для суцільного середовища. Вони враховують, що зміна імпульсу $\vec{p}$ системи частинок за одиницю часу визнаються силами $\vec{F}$, які діють на ці частинки:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{3.5}$$

а зміна моменту імпульсу $\vec{L}$ за одиницю часу – моментом сили $\vec{M}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{3.6}$$

Розглянемо рівняння (3.5) для елемента об'єму суцільного середовища dV, який складається з одних і тих же рідких частинок. Сили, що діють на цей елемент об'єму, можна розділити на два типи: *об'ємні та поверхневі. Об'ємними* називаються *сили*, які діють на ці частинки системи в середині об'єму.

Об'ємні сили визначаються формулою:

$$d\vec{F}^{(об)} = \vec{f}\,dm = \vec{f}\,\rho dV, \tag{3.7}$$

де $\vec{f}$ – густина сил (сума сил, які діють на одиницю маси). Прикладом об'ємної сили є сила тяжіння. Співвідношення (3.7) можна записати також у тензорній формі:

$$dF_i^{(об)} = f_i dm = f_i \rho dV. \tag{3.8}$$

Поверхневими називаються *сили*, які діють на виділений об'єм суцільного середовища з боку сусідніх об'ємів. В загальному випадку сила з якою об'єм діє на сусідній, з яким стикається, характеризується трьома складовими: нормальною та двома дотичними. Компоненти поверхневих сил найкраще визначити у тензорній формі:

$$dF_i^{(пов)} = p_{ik} d\tau_k = p_{ik} n_k d\tau \,. \tag{3.9}$$

Тут p_{ik} – тензор механічних напружень, вектор $d\vec{\tau} = \vec{n} d\tau$ характеризує елемент поверхні, вздовж якої стикаються два об'єми, $\vec{n}$ – одиничний вектор, що перпендикулярний до поверхні $d\tau$ – елемент площі дотику поверхонь. У цій формі, а також в усіх наступних формулах з тензорними величинами за повторювальними індексами виконується сумування:

$$p_{ik} n_k = p_{i1} n_1 + p_{i2} n_2 + p_{i3} n_3 \,. \tag{3.10}$$

Повна сила F_i, яка діє на виділений об'єм V та поверхню $\sum_V$, що його обмежує, рівна

$$F_i = F_i^{(об)} + F_i^{(пов)} = \int_V f_i \rho dV + \oint_{\sum_V} p_{ik} n_k d\tau \tag{3.11}$$

Останній інтеграл за теоремою Остроградського-Гауса можна перетворити в об'ємний. Отримаємо:

$$F_i = \int_V (\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}) dV \,. \tag{3.12}$$

Щоб записати рівняння руху суцільного середовища (3.5), розглянемо елемент об'єму середовища з масою dm, який знаходиться в точці $\vec{r}$ у момент часу t і має швидкість $\vec{u}(\vec{r},t)$. Імпульс цього елементу дорівнює $\vec{u}dm$. За час dt , за який елемент об'єму переміститься у точку $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}dt$ і буде мати швидкість:

$$\vec{u}(\vec{r}',t') = \vec{u}(\vec{r} + \vec{u}dt, t + dt) \approx$$

$$\approx \vec{u}(\vec{r},t) + U_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt = \vec{u}(\vec{r},t) \left[\left(\vec{u}\vec{\nabla} \right) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] dt. \tag{3.13}$$

Похідна

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}, \tag{3.14}$$

називається *субстанційною похідною*, яка характеризує зміну швидкості рідкої частинки, що рухається в просторі. Перший добуток у (3.14) називається *локальною похідною* і характеризує зміну параметрів руху у деякій фіксованій точці простору зі зміною часу. Другий доданок (*конвективна похідна*) описує зміну параметрів руху рідкої частинки внаслідок її переміщення з однієї точки простору в іншу.

У декартових координатах диференціальний оператор $(\vec{u}\vec{\nabla})$, що діє на $\vec{u}$ у (3.14), має вигляд:

$$(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}. \tag{3.15}$$

Зміна імпульсу маси dm за одиницю часу dt визначається співвідношенням:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{\vec{u}\left(\vec{r}',t'\right)dm - \vec{u}(\vec{r},t)dm}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{d\vec{u}}{dt} dm. \tag{3.16}$$

Таким чином швидкість зміни імпульсу рідких частинок у об'ємі V дорівнює:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int_V \rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right)dV . \tag{3.17}$$

У відповідності з рівнянням (3.6) ця величина дорівнює силі, яка діє на об’єм V :

$$\int_V \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u_i\right)dV=\int_V\left(\rho f_i+\frac{\partial p_{ix}}{\partial x_k}\right)dV . \tag{3.18}$$

Оскільки об’єм V – довільний, то з (3.18) випливає:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\left(\vec{u}\vec{\nabla}\right)u_i=f_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{ix}}{\partial x_k} . \tag{3.19}$$

Це і є *рівняння руху суцільного середовища*. Його називають *диференціальним рівнянням руху у напруженнях.*

§ 3.2. Закон збереження маси. Рівняння неперервності

Закон збереження маси для ізольованої системи проявляється у тому, що маса m такої системи залишається постійною під час руху. Якщо система не ізольована і має постійний за величиною об’єм, через поверхню цього об’єму можуть виходити або входити частинки. Зміна маси об’єму за одиницю часу буде дорівнювати:

$$\frac{dm}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV . \tag{3.20}$$

Кількість частинок, які входять в середину об’єму, або виходять з нього за одиницю часу, може бути визначена за допомогою потоку маси, що проходить крізь поверхню $\sum_V$, що обмежує об’єм. Число частинок, що входить в середину об’єму V та які виходять з нього не однакові, тому кількість маси, яка виходить за час dt зі швидкістю $\vec{u}$ через елемент поверхні $d\vec{\sigma}$, дорівнюватиме:

$$dm = \rho\vec{v}dtd\vec{\sigma}.$$

Зміна маси середовища у цьому об’ємі за одиницю часу буде рівна:

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \rho\vec{u}d\vec{\sigma}, \tag{3.21}$$

тобто зменшення маси всередині об’єму V супроводжується потоком маси крізь поверхню назовні в цьому напряму руху частинок відповідає знак "-" в правій частині рівняння (3.21). Формула (3.21) це закон збереження маси в інтегральній формі.

Величина

$$\vec{j} = \rho\vec{u}, \tag{3.22}$$

називається густиною потоку маси. Закон збереження (3.21) подібний до закону збереження в електродинаміці.

Якщо зміна маси в середині об’єму супроводжується, тільки зміною густини, (3.21) можна переписати у вигляді:

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\oint_V \vec{j}d\vec{\sigma}, \tag{3.23}$$

або за теоремою Остроградського-Гауса,

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \frac{\partial \vec{j}_k}{\partial x_k} dV \ . \tag{3.24}$$

Оскільки об’єм V у цій формулі довільний, знаходимо закон збереження маси у диференціальній формі (рівняння неперервності):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0 \tag{3.25}$$

Якщо середовище не стисливе, тобто $\rho = const$, рівняння (3.25) прийме вигляд:

$$div\vec{u} = 0$$

§ 3.3. Закон збереження енергії. Повна система рівнянь руху суцільного середовища

У реальному середовищі мають місце дисипативні процеси, тобто внутрішня енергія частково перетворюється в теплову, змінюється температура середовища, і характер руху в системі теж може змінитися. Такі системи характеризуються ще однією скалярною функцією – температурною $T = T(\vec{r}, t)$, для якої необхідно мати ще одне рівняння. Це рівняння можна знайти, виходячи з першого закону термодинаміки:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{dA}{dt} \ . \tag{3.26}$$

Рівняння (3.26) є узальненим законом збереження енергії системи, які складаються з великої кількості частинок і не можуть бути описані у рамках класичної механіки. Визначення енергії E та роботи A у формулі (3.26) відрізняється від прийнятих у класичній механіці, хоча й засновані на механічних поняттях. Величини Q – кількість теплоти – у класичній механіці не існує взагалі. Послідовно її можна визначити лише методами статистичної фізики. Повна енергія рідких частинок в об’ємі V подається із суми кінетичної T_k та внутрішньої енергії U:

$$E = T_k + U \quad . \tag{3.27}$$

Кінетична енергія T_k макроскопічного колективного руху в об’ємі V рівна:

$$T_k = \int_V \frac{1}{2} u^2 dm = \int \frac{\rho u^2}{2} dV \; . \tag{3.28}$$

Внутрішня енергія U представляє собою усереднену за часом потенціальну енергію взаємодії частинок середовища між собою. У термодинаміці вона зв’язана теплоємністю середовища c_v та температурою T:

$$U = \int_V U dm = \int_V \rho c_V T dV \; . \tag{3.29}$$

Таким чином, повна енергія рідких частинок в об’ємі V може бути записана у вигляді:

$$E = \int_V \rho \varepsilon dV \; , \tag{3.30}$$

де $\varepsilon = \frac{u^2}{2} + U$ – енергія одиниці маси суцільного середовища. Зміна кінетичної енергії маси dm за одиницю часу визначається аналогічно, як визначалась зміна імпульсу (формули (3.16), (3.17)).

$$\frac{dT_k}{dt} = \int_V \rho u_i \frac{du_i}{dt} dV = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right) u_i dV , \qquad (3.31)$$

де враховані співвідношення (3.14), (3.19). Так само, зміна повної енергії маси dm за одиницю часу дорівнює:

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \rho \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \int_V \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) dV \qquad (3.32)$$

Робота зовнішніх сил над елементами об’єму V за одиницю часу (потужність) складається з внесків об’ємних та поверхневих сил, що помножені скалярно на швидкість $\vec{u}$:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \rho f_i u_i dV + \oint_{\Sigma_V} P_{ik} n_k u_i d\sigma . \qquad (3.33)$$

Поверхневий інтеграл перетворюємо в об’ємний:

$$\oint_{\Sigma_V} p_{ik} n_k u_i d\sigma = \int_V \frac{\partial p_{ik} u_i}{\partial x_k} dV = \int_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} u_i dV + \int_V p_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dV . \qquad (3.34)$$

В останньому інтегралі врахуємо симетрію p_{ik}, та запишемо:

$$p_{ik}\frac{\partial u_i}{dx_k} = p_{ik}u_{ik}\,,\; u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{3.35}$$

Таким чином потужність зовнішніх сил має вигляд:

$$\frac{dA}{dt} = \int_V \left(\rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right) u_i dV + \int_V p_{ik}u_{ik}dV\,. \tag{3.36}$$

Зміна енергії в об'ємі V, зумовлена потоком теплоти через поверхню $\sum_V$ може бути записана у вигляді інтегралу:

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_{\Sigma_V} \vec{q}d\vec{\sigma} = -\int_V div\,\vec{q}\,dV \tag{3.37}$$

де $\vec{q}$ – густина потоку теплоти. Із спостережень відомо, що

$$\vec{q} = -\gamma\vec{\nabla}T \tag{3.38}$$

де γ – коефіцієнт теплопровідності.

Співвідношення (3.32), (3.36), (3.37) підставлені в перший закон термодинаміки (3.26) з врахуванням рівняння неперервності $\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ дозволяють записати закон енергії суцільного середовища у вигляді (закон збереження енергії в інтегральній формі):

$$\int_V \frac{\partial\rho\varepsilon}{\partial t}dV = -\oint_{\Sigma_V} \vec{\rho}d\vec{\sigma} + \int_V \rho\vec{f}\vec{u}dV\,. \tag{3.39}$$

Зміна енергії в об'ємі суцільного середовища супроводжується потоком енергії через поверхню $\sum_V$, що обмежує цей об'єм, та роботою об'ємних сил усередині об'єму. Густина потоку енергії (вектор Умова):

$$S_i = \rho\left(\frac{u^2}{2} + U\right)u_i - P_{ik}v_k + q_i \tag{3.40}$$

Складається з внесків конвективного переносу енергії $\rho\left(\frac{u^2}{2} + U\right)u_i$ за рахунок макроскопічних рухів суцільного середовища, роботи поверхневих сил – $P_{ik}u_k$ та переносу теплоти q_i . З (3.39) випливає *закон збереження енергії суцільного середовища у диференціальній формі*:

$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t} + div\vec{\rho} = \rho\vec{f}\vec{u}\,. \tag{3.41}$$

Після підстановки (3.27), (3.29), (3.31), (3.36), (3.37) у (3.26) з врахуванням довільності об'єму *V* будемо мати рівняння:

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \left(\vec{v}\vec{\nabla}\right)U\right) = div\left(\gamma\vec{\nabla}T\right) + P_{ik}u_{ik}\,. \tag{3.42}$$

Рівняння

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = f_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k}, \tag{3.43.а}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div\vec{v} = 0, \tag{3.43.б}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = div\left(\gamma \vec{\nabla} T\right) + P_{ik} v_{ik} \ , \qquad (3.43.в)$$

представляють собою *повну систему рівнянь руху суцільного середовища*, якщо її доповнити рівняннями, які пов'язують величини U, γ, P_i з термодинамічними параметрами ρ та T. Форма цих рівнянь визначає модель суцільного середовища (твердого тіла, рідини або газу).

.

Розділ 4. Елементи теорії пружності

§ 4.1. Основні положення теорії пружності

Основною задачею теорії пружності є визначення за заданими зовнішніми силами, що діють на тверде тіло, змін форми, яких тіло зазнає і тих внутрішніх сил пружності, які при цих змінах форми виникають між частинами тіла. У такому загальному вигляді задача теорії пружності повністю ще не розв’язана, але існує цілий ряд достатньо повно досліджених окремих випадків, результати яких можна використовувати при розв’язанні важливих технічних задач, коли необхідно визначати характеристики міцності елементів машин і конструкцій.

За допомогою теорії пружності можуть бути перевірені розв’язки, одержані з використанням припущень опору матеріалів, і встановлені межі застосовності цих розв’язків. У теорії пружності задачі розв'язуються з меншим числом припущень, що ускладнює математичні прийоми, які використовуються для розв’язання.

Не зважаючи на стрімкий розвиток науки і техніки, знань, що існують на сьогоднішній день, недостатньо для побудови теорії пружності, в якій би розглядалася дійсна будова твердих тіл. Тому надалі буде використано поняття ідеально пружного тіла, яке володіє такими властивостями, щоб отримані аналітичні результати якомога точніше узгоджувалися з даними досліду.

У теоретичній механіці під твердим тілом мають на увазі систему незмінно зв'язаних між собою матеріальних точок. При дії на таке тіло зовнішніх сил відстані між окремими його точками не змінюються, тому внутрішні сили не входять в рівняння рівноваги і внутрішня будова тіла не розглядається. Насправді необхідно враховувати здатність твердих тіл змінювати свою форму під дією зовнішніх сил, а при цьому слід враховувати внутрішню будову тіла.

При розв’язанні задач лінійної теорії пружності вважають справедливими такі припущення:

1. Речовина ідеально пружного тіла безперервно розподілена по його об'єму. У випадках, коли з цього тіла виділяються нескінченно малі елементи, вважається, що ці елементи мають ті самі фізичні властивості, що й ідеальне пружне тіло. Таке припущення дозволяє не розглядати реальну структуру матеріалу (кристалічна, зерниста, бульбашкова), а розглядати його як аморфне середовище, що безперервно заповнює даний об'єм.

2. Ідеально пружне тіло однорідне. Це означає, що механічні властивості в будь-якій точці тіла однакові, тобто в усіх точках тіла при одних і тих самих напруженнях виникають однакові деформації. Дане припущення дозволяє вважати розподіл внутрішніх сил за об'ємом безперервним.

3. Ідеально пружне тіло ізотропне. Це означає, що пружні властивості в кожній його точці однакові на всіх напрямках.

4. За відсутності зовнішніх сил і при певній температурі пружне тіло має певну форму і певний об'єм. Цей стан тіла називається *природним станом*. На підставі цього припущення початковий напружений (деформований) стан тіла, що виник до прикладання силових дій, не враховується, тобто припускається, що у момент навантаження u1090 тіла деформації і напруження в будь-якій його точці дорівнюють нулю.

5. Про малість деформацій, тобто припускається, що відносні лінійні і кутові деформації малі порівняно з одиницею.

6. При видаленні зовнішніх сил деформоване пружне тіло повертається до свого природного стану, що відповідає даній температурі. Таким чином, природний стан ідеального пружного тіла при даній температурі є стійкою формою рівноваги при цій температурі.

Пружне тіло володіє властивістю накопичення в собі енергії в зворотній формі. Це означає, що для того щоб викликати деформацію тіла, потрібно витратити певну кількість роботи і, навпаки, така ж кількість роботи звільняється при видаленні зовнішніх сил, коли тіло повертається до свого природного стану (припускається, що при деформації температура тіла є постійною).

Переліченими властивостями ідеального пружного тіла більшою чи меншою мірою володіють тіла, з якими доводиться стикатися при різних технічних розрахунках. Такі матеріали, як залізо і сталь, до яких звичайно застосовуються висновки теорії пружності, володіють достатньо однорідною будовою, і якщо деформації не виходять за відомі межі, то матеріали ці можна вважати ідеально пружними; вони повертаються до свого природного стану, якщо видалити сили, що викликали деформації. Чавун, камінь і дерево за своїми властивостями більше відрізняються від однорідного ідеально пружного тіла, і висновки теорії пружності з набагато меншою точністю можуть бути застосовні і до цих матеріалів. У цьому випадку результати теорії пружності в застосуванні до цих матеріалів можна розглядати як перше наближення.

При розв'язанні задач теорії пружності користуються *теоремою про єдиність розв'язку: якщо задані зовнішні поверхневі та об'ємні сили перебувають в рівновазі, їм відповідає одна єдина система напружень і переміщень*.

Щоб при постійній температурі змінити форму тіла, необхідно прикласти зовнішні сили. Кожній зміні форми тіла відповідає своя система зовнішніх сил. Положення про єдиність розв'язку справедливе, якщо тільки справедливі припущення про природний стан тіла (інакше можлива незліченна кількість розв'язків) і припущення про лінійну залежність між деформаціями і зовнішніми силами.

Застосування точного розв'язку задачі, отриманого за певних умов на контурі для приблизної оцінки напружень за дещо змінених умов, виробляється на підставі принципу, вперше сформульованого Сен-Венаном. Згідно з цим принципом система взаємно зрівноважуючих сил, розподілених по малій частині поверхні тіла, що деформується, викликає напруження, що швидко зменшуються з віддалянням від місця прикладання цих сил. Тобто якщо зовнішні сили, прикладені на невеликій ділянці пружного тіла, замінити діючою на тій самій ділянці статично еквівалентною системою сил (що має той самий головний вектор і той самий головний момент), то ця заміна викличе лише зміну місцевих деформацій. У точках, віддалених від місця прикладення зазначеної вище системи сил на великі відстані (тобто відстані, великі порівняно з лінійними розмірами тієї частини поверхні, по якій розподілені сили), відповідні напруження можна вважати малими.

§ 4.2. Закон Гука. Види деформацій

Розглядаючи механіку твердого тіла, ми користувалися поняттям абсолютно твердого тіла. Однак у природі абсолютно твердих тіл немає, оскільки всі реальні тіла під дією сил змінюють свою форму і розміри, тобто деформуються.

Деформація називається пружною, якщо після припинення дії зовнішніх сил тіло відновлює первинні розміри і форму. Деформацію, що зберігається в тілі після припинення дії зовнішніх сил, називають пластичною (або залишковою). Деформації реального тіла завжди пластичні, оскільки вони після припинення дії зовнішніх сил ніколи повністю не зникають. Проте якщо залишкові деформації досить малі, то ними можна нехтувати і розглядати їх як пружні, що ми і враховуватимемо надалі.

У теорії пружності доводиться, що всі види деформації (розтягу або стиску, зсуву або згину, крутіння тощо) можуть бути зведені до деформації розтягу, стиску і зсуву, які відбуваються одночасно.

Розглянемо однорідний стержень завдовжки l і площею поперечного перерізу S (рис. 4.1), до кінців якого прикладено сили F_1 і F_2 ($F_1=F_2=F$), що спрямовані вздовж його осі, внаслідок чого довжина стержня змінюється на величину Δl. Природно, що при розтягу величина Δl позитивна, а при стиску — негативна.

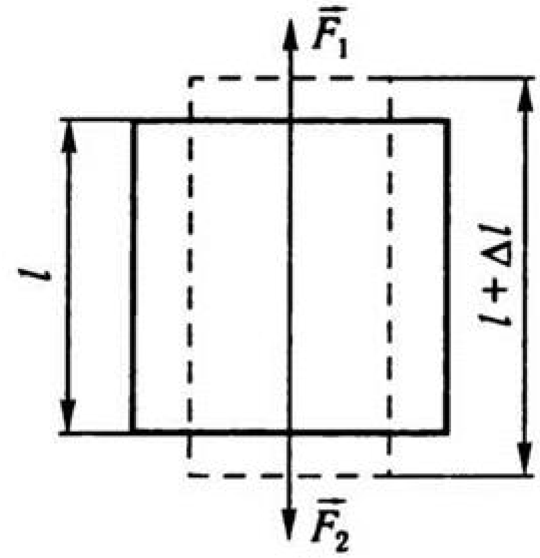


Рис. 4.1

Силу, що діє на одиницю площі поперечного перерізу, називають напруженням:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \qquad (4.1)$$

Якщо сила напрямлена по нормалі до поверхні, то напруження називається нормальним, а якщо по дотичній до поверхні — тангенціальним.

Кількісною мірою, що характеризує ступінь деформації тіла, є відносна деформація. Так, відносна зміна довжини стержня (поздовжня деформація)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (4.2)$$

Відносний поперечний розтяг (стиск)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}, \qquad (4.3)$$

де d — діаметр стержня. Величини ε і ε' завжди мають різні знаки (при розтягу величина Δl позитивна, а Δd — негативна; при стиску, навпаки, Δl — негативна, а Δd — позитивна). Із досвіду випливає взаємозв'язок ε і ε':

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon ,$$

де μ — позитивний коефіцієнт, що залежить від властивостей матеріалу і називається коефіцієнтом Пуассона.

Англійський фізик Р. Гук (1635—1703) встановив, що для будь-якої малої деформації сила пружності пропорційна деформації, або *для малих деформацій напруження, що виникає всередині тіла, прямо пропорційне відносній деформації є* (закон Гука):

$$\sigma = -E\varepsilon , \tag{4.4}$$

де коефіцієнт пропорційності E називають модулем Юнга. Із виразу (4.4) видно, що модуль Юнга визначається напруженням, що спричинює відносне видовження, яке дорівнює одиниці. Знак мінус вказує на протилежний напрям напруження і деформації.

Із формул (4.1), (4.2) і (4.4) випливає, що

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\sigma}{E} = -\frac{F}{ES}, \tag{4.5}$$

або

$$F = -\frac{Es}{l}\Delta l = -k\Delta l , \tag{4.6}$$

де k — коефіцієнт пружності. Вираз (4.5) випливає із закону Гука, відповідно до якого видовження стержня при пружній деформації пропорційне силі, що діє на стержень.

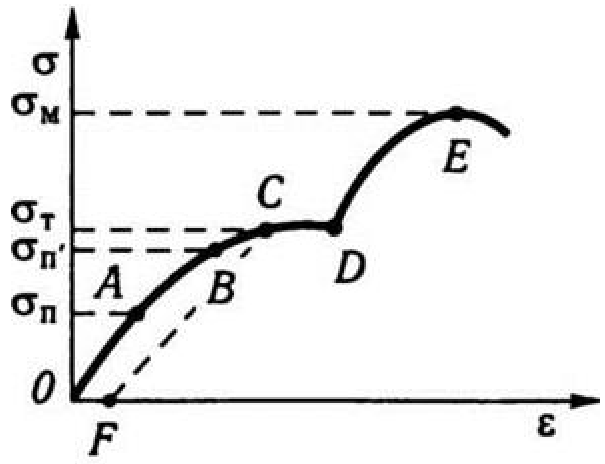


Рис. 4.2.

Деформація твердих тіл описується законом Гука до певної межі. Зв’язок між деформацією і напруженням можна показати у вигляді діаграми напружень, яку розглянемо для металевого зразка (рис. 4.2). Із рисунка видно, що лінійна залежність σ від ε, встановлена Гуком, виконується у дуже вузьких межах до так званої межі пропорційності σ_n. При подальшому збільшенні напруження деформація ще пружна (хоча залежність $\sigma(\varepsilon)$ уже нелінійна) і до межі пружності σ_n' залишкові деформації не виникають. За межами пружності в тілі виникають залишкові деформації і графік, що описує повернення тіла в початкове положення, після припинення дії сили зобразиться кривою CF паралельною BO. Напруження, при якому виникає помітна залишкова деформація, називають межею текучості σ_m — точка C на кривій залежності $\sigma(\varepsilon)$. У ділянці CD деформація зростає без збільшення напруження, тобто тіло немов би «тече». Цю область називають ділянкою текучості (або пластичної деформації).

Матеріали, для яких ділянка текучості значна, називають в’язкими, для яких її практично немає — крихкими. При подальшому розтягу (за точку D) тіло руйнується. Максимальне напруження, що виникає в тілі до руйнування, називають границею міцності $\sigma_м$. Діаграма напружень для реальних твердих тіл залежить від різних факторів. Одне й те саме тверде тіло може при короткочасній дії сил виявити крихкі властивості, а при тривалій дії і слабких силах — текучі властивості. Деформацію зсуву найпростіше здійснити, якщо взяти брусок у формі прямокутного паралелепіпеда і прикласти до нього силу F (рис. 4.3), дотичну до поверхні (нижня частина бруска закріплена нерухомо). Відносну деформацію зсуву визначають за формулою

$$tg\,\gamma = \frac{\Delta l}{h}, \tag{4.7}$$

де Δl — абсолютний зсув паралельних шарів тіла один відносно одного; h — відстань між шарами (для малих кутів $tg\,\gamma \approx \gamma$).

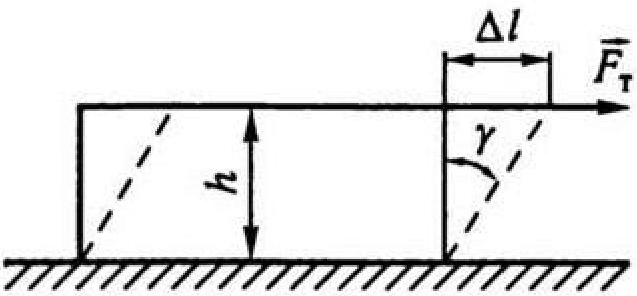


Рис. 4.3

Розділ 5. Основи гідродинаміки

§ 5.1. Основні рівняння гідростатики

Хоча за своїми властивостями рідини і гази багато в чому відрізняються одне від одного, існує загальна властивість, що об'єднує їх, — плинність, тобто їх малий опір до деформації зсуву. Отже, досліджуючи рух рідин і газів, використовуємо єдиний підхід. Розділ механіки, що вивчає рівновагу та рух рідин і газів, їх взаємодію між собою та обтічними твердими тілами, називають гідроаеромеханікою.

У гідроаеромеханіці нехтують молекулярною будовою рідин і газів, сприймаючи їх як суцільне середовище, неперервно розподілене в просторі. Густина рідин і газів у загальному випадку залежить від тиску. Проте у багатьох задачах цією залежністю можна нехтувати і користуватися єдиним поняттям нестисливої рідини — рідини, густина якої завжди стала і не залежить від часу.

Якщо в нерухомій рідині помістити тонку пластину, то частинки рідини, що розміщуються з різних боків від неї, діятимуть на кожний її елемент ΔS із силами $\Delta\vec{F}$, які незалежно від орієнтації пластини будуть рівні за модулем і напрямлені перпендикулярно до площини ΔS, оскільки наявність дотичних сил привела б частинки рідини в рух і рівновага порушилася б (рис. 5.1).

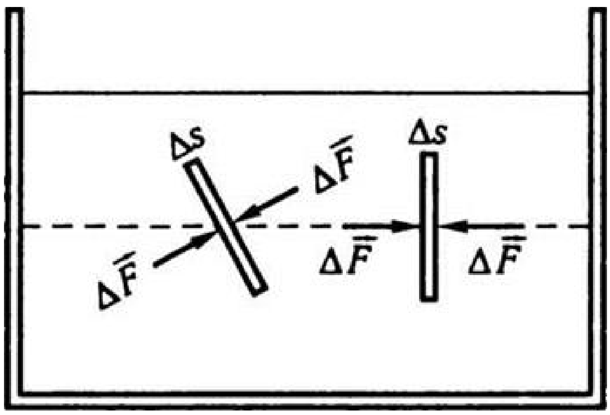


Рис. 5.1

Фізичну величину, що дорівнює відношенню нормальної сили, яка діє з боку рідини на будь-яку площину, до її площі, називають тиском рідини p:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \qquad (5.1)$$

Одиниця тиску — паскаль (Па): один паскаль дорівнює тиску, що створює сила в один ньютон, рівномірно розподілена по нормальній до неї поверхні площею 1 м^2 (1 Па=1 Н/м^2).

Для рідини, що перебуває в рівновазі, виконується **закон Паскаля**: *тиск у рідині чи газі передається в усіх напрямах однаково*.

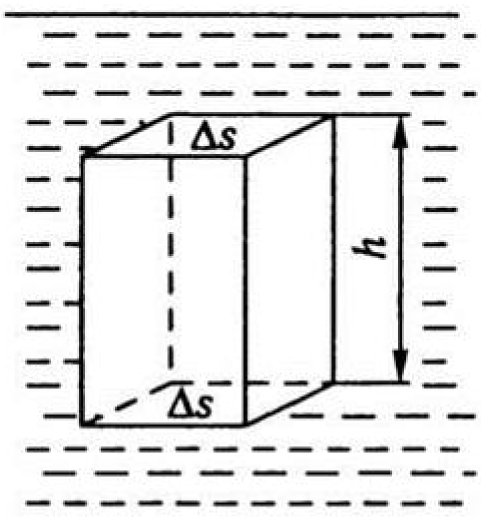


Рис. 5.2

Розглянемо, як впливає сила тяжіння на розподіл тиску всередині нерухомої нестисливої рідини, що перебуває у спокої. Умовно виділимо в рідині елемент певної форми, наприклад паралелепіпед, площа основи якого ΔS, а висота h (рис. 5.2). Оскільки рідина цього об’єму перебуває у спокої, то рівнодійна всіх сил, що діють на об’єм рідини, дорівнює нулю, а сили, що діють на бічну поверхню, взаємно врівноважуються. Щоб знайти умови рівноваги паралелепіпеда у вертикальному напрямі, треба врахувати тиски p_1 і p_2, що діють на верхню і нижню основи паралелепіпеда. Запишемо умову рівноваги для вертикального напряму:

$$p\Delta s = p_0\Delta s + \rho gh\Delta s,$$

або

$$p = p_0 + \rho gh, \tag{5.2}$$

де ρgh — гідростатичний тиск рідини, зумовлений дією земного тяжіння; ρ — густина рідини.

Рівняння (5.2) є основним рівнянням гідростатики для нестисливої рідини.

Гідростатичний тиск рідини залежить від густини рідини ρ та висоти її стовпа і не залежить від форми посудини, в якій зберігається рідина. Отже, якщо тиск на вільну поверхню нерухомої рідини p_0, то гідростатичний тиск на глибині h визначають рівнянням (5.2).

Відповідно до цього рівняння сила тиску на нижні шари рідини буде більша, ніж на верхні, а тому на тіло, занурене в рідину, діє виштовхувальна сила, яка визначається **законом Архімеда**: *на тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку цієї рідини напрямлена вгору виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (газу)*:

$$F_A = \rho gV, \tag{5.3}$$

де F_A — сила Архімеда; ρ — густина рідини; V — об’єм зануреного в рідину тіла.

Для вимірювання гідростатичного тиску застосовують манометри. Найпростіший тип манометра має вигляд U-подібної трубки, один кінець якої з’єднується з посудиною, в якій вимірюється тиск, другий — з атмосферою або запаяний і повітря з нього відкачано. За різницею рівнів рідин у колінах манометра визначають тиск у посудині.

Великі тиски вимірюють металевими манометрами, в яких металева пружна трубка приєднується до резервуара, де вимірюється тиск. При зміні тиску змінюється конфігурація трубки. Її зміна фіксується стрілкою чи іншим показником тиску. Низькі й високі тиски вимірюють приладами, дія яких ґрунтується на залежності електричного опору манганінової дротини від тиску або електричних властивостей кварцових пластинок від тиску (п'єзоелектричний ефект).

Манометри складаються з чутливого елемента і елемента, який тиск перетворює в іншу величину, зручну для вимірювання. За типом чутливого елемента манометри поділяють на рідинні, механічні, поршневі, електричні, теплові, радіоактивні тощо.

§ 5.2. Гідродинаміка ідеальної рідини

Завдання гідродинаміки полягає в тому, щоб знайти співвідношення, які дають можливість за числовими значеннями сил описати стан руху рідини або за станом руху рідини знайти діючі сили.

Рух рідини або газу можна вивчати двома методами. За допомогою першого методу вивчають рух кожної частинки окремо. Він потребує визначення кінетичних характеристик руху (переміщення, швидкість, прискорення) частинок рідини при переміщеннях їх у просторі й часі. Такий метод вивчення стану руху рідини запропонував французький математик і механік Ж. Лагранж (1736—1813), тому його називають методом Лагранжа. Одержання законів руху рідини за методом Лагранжа пов'язане зі значними математичними труднощами, тому на практиці користуються іншим методом. Спостерігають не за рухом кожної частинки рідини, а в потоці рідини виділяють фіксований елементарний об'єм і вивчають, що відбувається з часом у кожній точці виділеного об'єму. Такий метод вивчення стану руху рідини розробив видатний математик і фізик Л. Ейлер (1707—1783). Його називають методом Ейлера. За цим методом аналізують не швидкості й прискорення частинок рідини, а швидкості й прискорення потоку рідини.

Вивчаючи рух рідини, користуються ідеалізованим об’єктом або рідиною, яку називають ідеальною, тобто рідиною, яка абсолютно нестислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя.

Потік рідини або газу називають стаціонарним, якщо його швидкість в усіх точках простору з часом не змінюється.

Для полегшення аналізу руху рідини або газу користуються лініями і трубками течії. Під лінією течії розуміють лінію, дотична до якої в кожній точці збігається з вектором швидкості $\vec{u}$ (рис. 5.3).

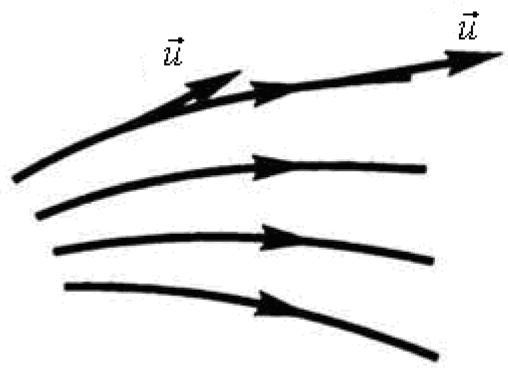


Рис. 5.3.

Лінія течії і траєкторія руху частинки в загальному випадку не збігаються. Траєкторія показує шлях тієї самої частинки за весь час її руху. Лінія течії характеризує напрям руху нескінченної множини частинок, які у певний момент часу розміщуються на лінії. Тільки при стаціонарному потоці рідини або газу лінії течії збігаються з траєкторіями руху частинок. Для нестаціонарних потоків такого збігу немає.

Частину рідини, обмежену лініями течії, називають трубкою течії. Всі частинки, що містяться всередині трубки течії, не виходять за межі трубки, і жодна з частинок, які залишаються за межами трубки течії, не проникає в неї. Трубка течії має вигляд трубки з жорсткою бічною поверхнею, по якій протікає рідина. Якщо поперечний переріз трубки течії малий, то можна вважати, що швидкість рідини для всіх точок заданого перерізу однакова.

Течію рідини називають усталеною (або стаціонарною), якщо форма і розміщення ліній течії, а також значення швидкостей у кожній точці поперечного перерізу з часом не змінюються.

Розглянемо будь-яку трубку течії. Виберемо два її перерізи S_1 і S_2 (рис. 5.4). За час Δt через довільний переріз s пройде об'єм рідини $Su\Delta t$; отже, за 1 с через S_1 пройде об'єм рідини S_1u_1, де u_1 — швидкість течії рідини в перерізі S_1. Через S_2 за 1 с пройде об'єм рідини S_2u_2, де u_2 — швидкість течії рідини в перерізі S_2. Якщо рідина нестислива, то через переріз S_1 пройде такий самий об'єм рідини, як і через переріз S_2, тобто

$$S_1u_1 = S_2u_2 = const\,. \qquad (5.4)$$

Отже, добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу трубки течії є величиною сталою для цієї трубки течії.

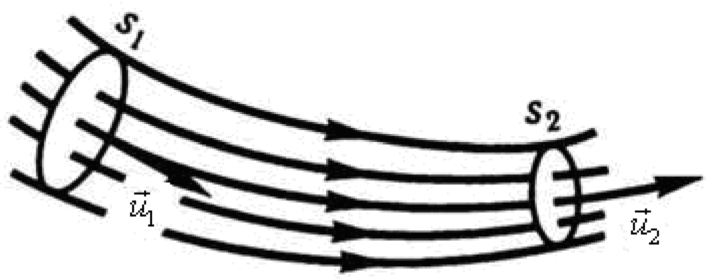


Рис. 5.4

Співвідношення (5.4) називають рівнянням нерозривності для нестисливої рідини. Його можна застосувати не тільки до реальних рідин, а й до газів.

Виділимо в ідеальній рідині, що рухається стаціонарно, трубку течії малого перерізу. Розглянемо об'єм, обмежений перерізами s_1 та s_2 і стінками трубки течії. За досить малий час Δt цей об'єм зміститься вздовж трубки течії, причому переріз S_1 займе положення S_1', пройшовши шлях $\Delta l_1 = u_1\Delta t$, а переріз S_2 займе положення S_2', пройшовши шлях $\Delta l_2 = u_2\Delta t$.

Завдяки нерозривності струменя заштриховані об’єми матимуть однаковий розмір (рис. 5.5):

$$\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1 = S_1 u_1 \Delta t =$$

$$= \Delta V_2 = S_2 \Delta l_2 = S_2 u_2 \Delta t = \Delta V$$

Енергія кожної частинки рідини складається з її кінетичної енергії й потенціальної енергії в полі сил тяжіння. Внаслідок стаціонарності течії частинка, що знаходиться через час Δt у будь-якій із точок незаштрихованої частини цього об’єму, має таку саму швидкість, яку мала частинка, що була в тій самій точці в початковий момент часу. Тому приріст енергії можна визначити як різницю енергій заштрихованих об’ємів ΔV_1 і ΔV_2.

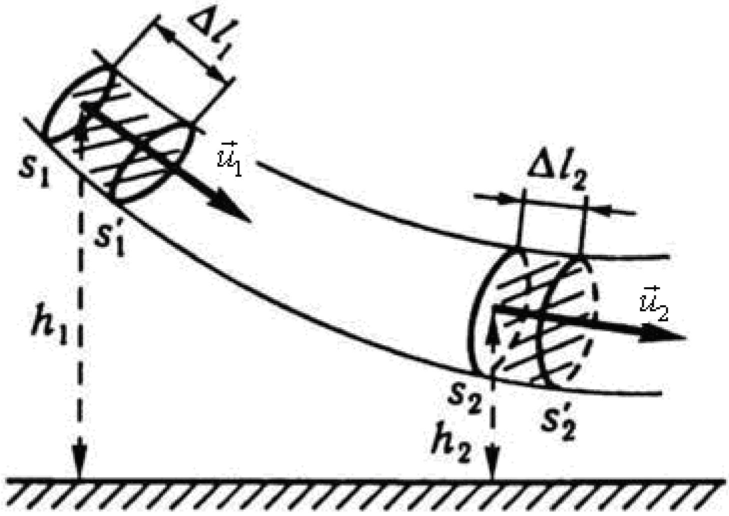


Рис. 5.5

Візьмемо переріз трубки течії в і відрізок Δl настільки малими, щоб усім точкам кожного із заштрихованих об’ємів можна було надати одне і те саме значення швидкості u, тиску p і висоти h. Тоді приріст енергії

$$\Delta E = \left(\frac{\Delta m_2 u_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 \right) - \left(\frac{\Delta m_1 u_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1 \right).$$

Оскільки маси заштрихованих об'ємів однакові

$$\Delta m_1 = \rho \Delta V_1 = \Delta m_2 = \rho \Delta V_2 = \rho \Delta V$$

де ρ — густина рідини,

$$\Delta E = \Delta V \left(\frac{\rho u_2^2}{2} + \rho g h_2 \right) - \Delta V \left(\frac{\rho u_1^2}{2} + \rho g h_1 \right). \tag{5.5}$$

В ідеальній рідині сил тертя немає. Тому приріст енергії ΔE має дорівнювати роботі, яку виконують сили тиску над виділеними об'ємами. Сили тиску на бокову поверхню перпендикулярні в кожній точці до напряму переміщення частинок, до яких вони прикладені, внаслідок чого вони роботи не виконують. Відмінна від нуля лише робота сил $F_1 = p_1 S_1$ і $F_2 = p_2 S_2$, прикладених до перерізів S_1 і S_2. Сумарна робота дорівнює

$$A = F_1 \Delta l_1 + F_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = \left(p_1 - p_2 \right) \Delta V\,. \tag{5.6}$$

Порівнявши вирази (5.5) і (5.6) і зробивши деякі перетворення, дістанемо

$$\frac{\rho u_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho u_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2$$

Оскільки перерізи S_1 і S_2 взято довільно, то для будь-якого перерізу трубки течії виконується умова

$$\frac{\rho u^2}{2} + \rho g h + p = const\,. \tag{5.7}$$

Рівняння (5.7) одержав Д. Бернуллі (1700—1782). Його називають рівнянням Бернуллі для стаціонарного потоку ідеальної рідини. Це рівняння є математичним виразом закону збереження енергії щодо сталої течії ідеальної рідини. Експериментально доведено, що рівняння Бернуллі (5.7) можна застосовувати і для реальних рідин, в'язкість яких невелика, а також для газів, швидкість руху яких значно менша від швидкості поширення в них звуку. Величину р у формулі (5.7) називають статичним тиском, величину $\frac{\rho u^2}{2}$ — динамічним тиском, а величину ρgh — гідростатичним тиском.

Для горизонтальної трубки течії ($h_1 = h_2$) вираз (5.7) набирає вигляду

$$\frac{\rho u^2}{2} + p = const\,. \tag{5.8}$$

Суму $\frac{\rho u^2}{2} + p$ називають *повним тиском*, або *повним напором*. Тиск виявляється меншим у тих точках, де швидкість більша. Отже, при течії рідини по горизонтальній трубі, що має різні перерізи, швидкість рідини, згідно з рівнянням нерозривності, в місцях звуження більша, а статичний тиск менший, в більш широких місцях труби — навпаки. Це можна продемонструвати, встановивши вздовж труби ряд манометрів (рис. 5.6). Повний тиск вимірюють трубкою Літо. Вона має вигляд зігнутої манометричної трубки, яку розміщують у рухомій рідині так, що її відкритий кінець повернутий назустріч течії рідини.

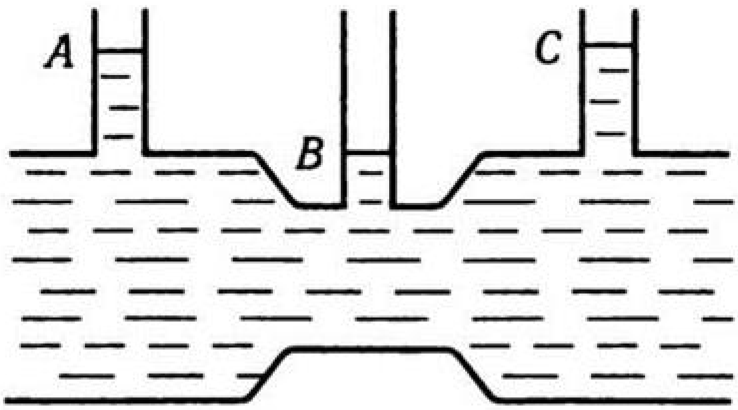


Рис. 5.6

Досвід засвідчує, що в манометричній трубці, прикріпленій до вузької частини труби в точці В, рівень рідини нижчий, ніж в манометричних трубках, прикріплених до широкої частини труби в точках А і С.

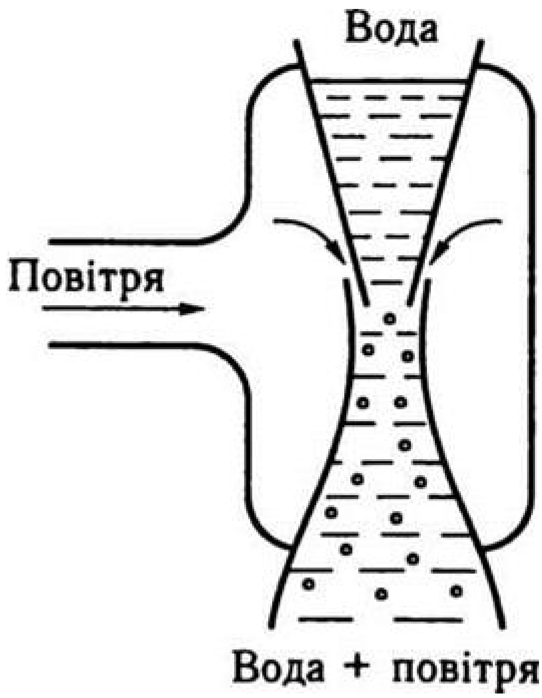


Рис. 5.7

Зменшення статичного тиску в точках, де швидкість потоку більша, покладено в основу роботи водоструминного насоса (рис. 5.7). Струмінь води подається в конусоподібну трубку, відкриту в атмосферу так, що тиск на виході із трубки дорівнює атмосферному. В місці звуження трубки вода тече з більшою швидкістю. В цьому місці тиск менший від атмосферного. Цей тиск установлюється також у відкачаній посудині, зв’язаній з трубкою через отвір у вузькій частині трубки. Повітря підхоплюється водою, що витікає з вузького кінця трубки з великою швидкістю. У такий спосіб можна відкачати повітря із посудини до досить низьких тисків.

§ 5.3. Гідродинаміка в'язкої рідини

В'язкість (внутрішнє тертя) — це властивість реальних рідин (газів) чинити опір переміщенню однієї частини рідини відносно іншої. При переміщенні одних шарів реальної рідини відносно інших виникають сили внутрішнього тертя, що спрямовуються по дотичній до поверхні шарів. Дія цих сил виявляється в тому, що з боку шару, який рухається швидше, на шар, який рухається повільніше, діє прискорювальна сила. І навпаки, з боку шару, що рухається повільніше, діє гальмівна сила на шар, який рухається швидше.

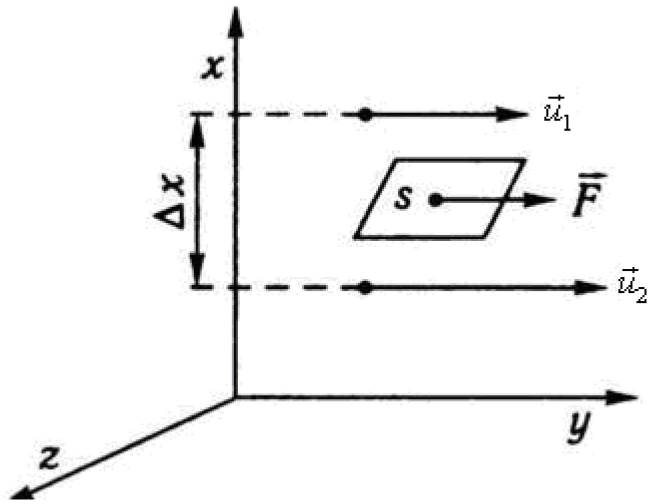


Рис. 5.8

Сила внутрішнього тертя F тим більша, чим більша виділена площа поверхні шару S (рис. 5.8), і залежить від зміни швидкості течії рідини при переході від шару до шару. На рис. 5.8 показано два шари, які розміщуються один від одного на відстані Δx і рухаються зі швидкостями $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$, при цьому $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \Delta u$. Напрям, в якому відраховується відстань між шарами, перпендикулярний до швидкості течії шарів. Відношення $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ показує зміну швидкості при переході від шару до шару в напрямі x, перпендикулярному до напряму руху шарів, і називається градієнтом швидкості.

Отже, модуль сили внутрішнього тертя

$$F = \eta \left| \frac{\Delta u}{\Delta x} \right| S\,, \tag{5.9}$$

де коефіцієнт пропорційності η, що залежить від природи рідини, називається коефіцієнтом динамічної в'язкості (або просто в'язкістю). В'язкість виражається в паскаль-секундах (Па·с): один паскаль-секунда дорівнює коефіцієнту динамічної в'язкості середовища, в якому при ламінарній течії і градієнті швидкості з модулем, що дорівнює 1 м/с на 1 м, виникає сила внутрішнього тертя в один ньютон на 1 м^2 поверхні дотику шарів (1 Па·с = 1 Н·с/м^2). Чим більша в'язкість, тим більше рідина відрізняється від ідеальної, тим більші сили внутрішнього тертя в ній виникають. В'язкість залежить від температури, причому характер цієї залежності для рідин і газів різний: зі збільшенням температури в'язкість рідин зменшується, а газів, навпаки, збільшується. Це свідчить про різну природу в них механізмів внутрішнього тертя. Від температури особливо залежить в'язкість деяких масел. Наприклад, в'язкість касторового масла за температури 18...40 °С зменшується в чотири рази. Відомий фізик П.Л. Капиця (1894—1984) відкрив надтекучий стан рідкого гелію, в'язкість якого за температури 2,17 К дорівнює нулю.

Існує два режими течії рідин (газу). Течія називається ламінарною, якщо вздовж потоку кожний виділений тонкий шар сковзає відносно сусідніх, не переміщуючись з ними, і турбулентною (вихровою), якщо вздовж потоку відбуваються інтенсивне вихроутворення і перемішування рідини (газу). Ламінарна течія рідини спостерігається при відносно невеликих швидкостях її руху. Зовнішній шар рідини, що межує з поверхнею нерухомого твердого тіла, завдяки силам молекулярної взаємодії прилипає до неї і залишається нерухомим. Швидкість інших шарів буде тим більша, чим більша їх відстань від поверхні тіла.

При турбулентній течії частинки рідини мають складові швидкості, перпендикулярні до течії, тому вони можуть переходити з одного шару в інший. Швидкість частинок рідини тим більша, чим далі вони перебувають від поверхні тіла. Оскільки частинки рідини переходять із одного шару в інший, то їхні швидкості в різних шарах відрізняються мало. Завдяки великому градієнту швидкості біля поверхні тіла, як правило, утворюються вихори. Англійський учений О. Рейнольдс (1842—1912) установив, що характер течії залежить від безрозмірної величини, яку називають числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{u} r}{\eta} = \frac{\bar{u} r}{\nu}, \tag{5.10}$$

де ρ — густина рідини; $\bar{u}$ — середня швидкість рідини; r — характерний лінійний розмір (наприклад, радіус труби, радіус кулі); $\nu = \dfrac{\eta}{p}$ — коефіцієнт кінематичної в'язкості.

При числах Рейнольдса, менших ніж 1000, спостерігається ламінарна течія, при великих — турбулентна. Крім того, число Рейнольдса може бути критерієм подібності для різних течій одного і того самого типу (наприклад, обтікання куль різного радіуса рідинами різної в'язкості). Течії, які можна одержати одну з іншої простою заміною масштабу вимірювання координат і швидкостей, називаються подібними. Можна сказати, що течії однакового типу з однаковим числом Рейнольдса подібні — у цьому полягає суть закону подібності.

Наведемо два характерних приклади ламінарної течії рідини.

Приклад 1. Розглянемо капіляр радіусом R і завдовжки l. У рідині подумки виділимо циліндричний шар радіусом r і завтовшки dr (рис. 5.9). У цьому разі з внутрішнього боку діє сила внутрішнього тертя, що визначається співвідношенням (5.9):

$$F = -\eta \frac{du}{dr} s = -\eta 2\pi r l \frac{du}{dr},$$

де $s = 2\pi rl$ — бокова поверхня циліндричного шару; знак « мінус» означає, що при збільшенні радіуса швидкість зменшується з наближенням до стінки капіляра.

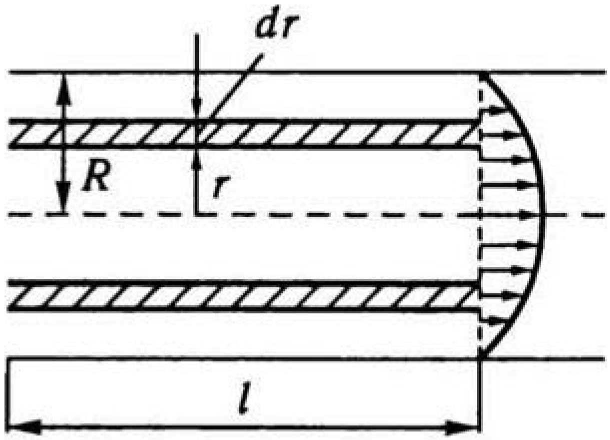


Рис. 5.9

Для усталеної течії рідини сила внутрішнього тертя врівноважується різницею тисків на кінцях циліндра

$$F = \pi r^2 \left(p_1 - p_2 \right) = \pi r^2 \Delta p$$

Звідси

$$-\eta 2\pi rl \frac{du}{dr} = \pi r^2 \Delta p$$

або

$$du = -\frac{\Delta p}{2\eta l} rdr$$

Припускаючи, що біля стінок відбувається прилипання рідини, тобто швидкість на відстані R від осі капіляра дорівнює нулю, після інтегрування дістанемо

$$\int_0^u du = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\int_R^r r dr$$

або

$$u = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right). \quad (5.11)$$

Цей вираз уперше одержав Ж. Пуазейль (1799—1869). Вектори швидкості частинок рідини розподіляються за параболічним законом, причому вершина параболи лежить на осі капіляра.

За допомогою виразу (5.11) легко визначити об’єм рідини, що витікає з капіляра за час t:

$$V = \int_0^R ut 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l}\int_0^R r\left(R^2 - r^2\right)dr.$$

Звідси

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l}. \quad (5.12)$$

Цю формулу прийнято називати законом Пуазейля.

<u>Приклад 2.</u> Розглянемо тепер повільний рух відносно малих кульок у рідині, коли їхні розміри значно менші, ніж розміри посудини, під дією сил тяжіння. На кульку, що падає в рідині вертикально вниз, діє три сили: сила тяжіння $F_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ — густина кульки, а r — її радіус); сила Архімеда

$F_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g$ (ρ_0 — густина рідини) і сила опору, вираз якої емпірично встановив Дж. Стокс (1819—1903); $F_3 = 6\pi r u \eta$ (u — швидкість кульки). При рівномірному русі кульки

$$F_1 = F_2 + F_3$$

або

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi r u \eta$$

Після простих перетворень дістанемо

$$u = \frac{2\left(\rho - \rho_0\right) g r^2}{9\eta}. \qquad (5.13)$$

Розділ 6. Спеціальна теорія відносності

§ 6.1. Передумови виникнення теорії відносності. Постулати Айнштайна

В основі класичної механіки лежить рівняння Ньютона

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,, \tag{6.1}$$

де $\vec{F}$ – сила, що діє на частинку. В загальному випадку сила є функцією координати, швидкості та часу. А довжина та час вимірюється в деякій нерухомі системі відліку. закони Ньютона виконуються в інерціальних системах відліку. Так для земних умов інерціальною можна вважати систему центром якої є центр Землі, з осями, що напрямлені на одній ті ж віддалені зорі.

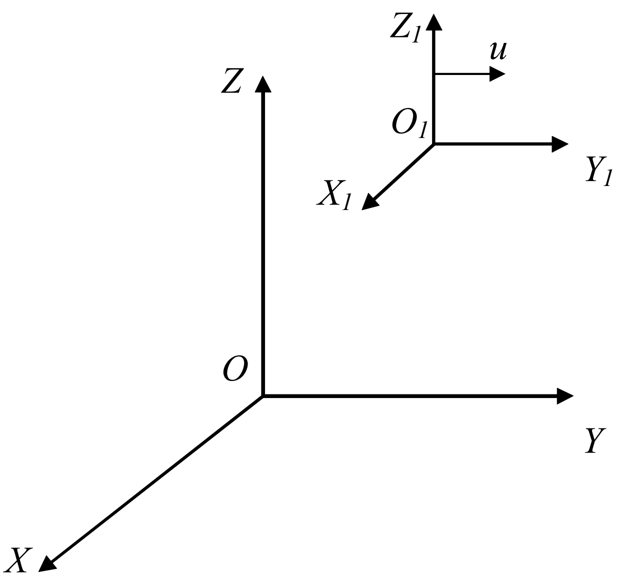


Рис. 6.1

Перехід від однієї системи координат до другої, яка рухається відносно першої, визначається формулами перетворення. Якщо одна система рухається відносно іншої поступально, прямолінійно і з сталою швидкістю, то, вважаючи, що в початковий момент часу осі обидвох систем паралельні і співпадають, будемо мати:

$$x_1 = x - v_x t, \quad y_1 = y - v_y t, \quad z_1 = z - v_z t; \qquad (6.2)$$

u_x, u_y, u_z – компоненти швидкості системи $O_1X_1Y_1Z_1$, відносно системи $OXYZ$. Ці перетворення називаються перетвореннями Галілея. Вважаючи, що час не залежить від вибору системи відліку, тобто $t = t_1$, а також відстань між будь-якими точками в даний момент часу не залежить від того, в якій системі вони вимірюються, отримаємо:

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2^{\cdot} - x_1^{\cdot})^2 + (y_2^{\cdot} - y_1^{\cdot})^2 + (z_2^{\cdot} - z_1^{\cdot})^2}, \quad (6.3)$$

$x^{\cdot}, y^{\cdot}, z^{\cdot}$ – координати в рухомі системі.

По відношення до деякої визначеної інерціальної системи можна вибрати багато інших інерціальних систем, які отримуються одна з іншої за допомогою перетворення Галілея.

Рівняння Ньютона виконуються в інерціальних системах відліку і залишаються інваріантними відносно будь-якої іншої інерціальної системи, тобто перетворення Галілея не змінюють їхнього вигляду.

В кінці XIX ст.. у результаті дослідження явищ електрона, магнетизму і світла зріс інтерес до принципу відносності. Максвел підсумував у своїх знаменитих рівняннях електромагнітного поля результати детальних досліджень цих явищ. Ці рівняння зводять в одне ціле електрику, магнетизм і світло. Проте виникли сумніви щодо їх правильності, тому що їх вигляд не залишається незмінним, якщо їх перетворити за допомогою перетворень Галілея. Однак додаткові перевірки, та експериментальні в тому числі, підтвердили їх справедливість.

Пуанкаре показав, що коли перша система рухається відносно другої прямолінійно і рівномірно в напрямну осі X, то для інваріантності рівнянь Максвела відносно вибору системи відліку перетворення мають інший вигляд. Ці перетворення називаються перетвореннями Лоренца.

Щоб зрозуміти, що означають нові перетворення фізикам потрібно було переосмислити свої уявлення, своє розуміння простору і часу. Цьому значно посприяв знаменитий дослід Майксльсона і Морді в 1887 році. Вони експериментально встановили, що швидкість світла однакова в усіх напрямках і не залежить від руху приймача або джерела, а також середовища, в якому поширюється світло.

Для того щоб можна було говорити про одночастинність в двох різних точка A та B, які знаходяться на відстані *l* одна від одної потрібно, щоб в цих точках знаходились синхронізовані годинники. Для перевірки синхронізації необхідно користуватись якимось сигналом, зокрема можна світловим, який рухається з найбільшою швидкістю *c*.

Нехай два спостерігача з годинниками в точка A та B. Спостерігач з точки A посилає сигнал в момент часу t_A^0 в точку B. Дійшовши до B у момент t_B сигнал повертається в точку A разом з сигналом часу спостерігача B (спостерігач A баче в дзеркалі відображення свого годинника і годинника спостерігача B). Будемо говорити, що годинники у двох спостерігачах синхронні, якщо

$$t_B - t_A^0 = t_A^{\cdot} - t_B\,, \tag{6.4}$$

де t_B – час спостерігача B; $t_A^{\cdot}$- час повернення сигналу в точку A. Такий спосіб включає в себе і визначення одночасності в різних точках простору з точки зору даної інерціальної системи. При переході до іншої інерціальної системи синхронізація не зберігається. Ці висновки ґрунтуються на принципі незмінності швидкості світла та принципі відносності, що і є постулатами спеціальної теорії відносності:

Перший постулат (принцип відносності). *Всі закони інваріантні (незмінні, однакові) щодо переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.*

Другий постулат (принцип інваріантності швидкості світла). *Швидкість світла у вакуумі не залежить від швидкості руху джерела або спостерігача і є сталою в усіх інерціальних системих відліку.*

Нехай в деякій нерухомій системі координат знаходиться стержень АВ, довжини якого рівна *l,* і цей стержень розміщений вздовж осі 0Х. Надамо стержню швидкості u, яка направлена вздовж осі Х, в сторону збільшення значень координати Х. Довжину стержня будемо визначати двома способами:

а) вимірюванням в рухомій системі, що рухається разом зі стержнем, безпосередньо прикладанням масштабу;

б) за допомогою світлових сигналів спостерігача, що знаходиться в початку відліку нерухомої системи, та синхронних в нерухомій системі годинників, розміщених безпосередньо в точках А і В, відстань між якими виміряна масштабом нерухомої системи і не рівне *l*. Цю довжину позначимо r_{AB}.

Згідно принципу відносності довжина стержня в рухомій системі, виміряна операцією а) повинна бути рівна *l* нерухомого стержня. Довжину, яка визначається операцією б), будемо називати «довжиною стержня, що рухається, в нерухомій системі». Нехай на кінцях стержня А та В є рухомі спостерігачі з годинниками, які синхронізовані з годинниками нерухомого спостерігача. Тоді сигнал, який подав рухомий спостерігач А в момент часу t_A, досягає спостерігача В у момент часу t_B згідно спостережень нерухомого спостерігача. Приймаючи до уваги принцип інваріантності швидкості світла, маємо

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-u}. \tag{6.5}$$

Відбитий сигнал повертається до спостерігача А в момент часу $t_A^\bullet$, причому

$$t_A^\bullet - t_B = \frac{r_{AB}}{c+u}, \qquad (6.6)$$

і спостерігачі, що рухаються разом із стержнем, виявлять. що їх годинники йдуть несинхронно. Отже, дві події, які одночасно спостерігаються в одній системі координат, не будуть одночасними при розгляді в іншій системі, яка рухається відносно іншої.

§ 6.2. Перетворення координат Лоренца

Розглянемо дві системи координат: нерухому $0xyzt$ і рухому $O_1x_1y_1z_1t_1$. Нехай відповідні осі паралельні. Кожна система має масштаб та годинник, які є однакові. Крім цього, нехай в початковий момент точки О і O_1 співпадають, а відлік годинників рівний нулю. Кожному набору значень $x_1y_1z_1t_1$, який визначає місце і час події в нерухомій системі, відповідає набір $x_1y_1z_1t_1$, що визначає цю подію в рухомій системі. Необхідно знайти рівняння, що зв’язують ці величини. Ці рівняння повинні бути лінійними в силу однорідності простору і часу. Всі точки системи повинні бути еквівалентними по відношенню до перетворень.

Виберемо на осі x_1 т. Р, що не рухається в рухомій системі координат. Тоді для нерухомого спостерігача маємо

$$O_1P = x_1 = x - ut. \qquad (6.7)$$

Час τ в рухомій системі є функцією координат та часу нерухомої системи:

$$\tau = \tau\left(x^{\bullet}, y, z, t\right) \tag{6.8}$$

Нехай в початку O_1 в момент часу τ_0 надсилається промінь світла в точку Р, який відбивається від цієї точки в момент часу τ і приходить в початок координат τ_2. З властивості синхронності годинників випливає

$$\tau_1 - \tau_0 = \tau_2 - \tau_1; \tag{6.9}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau_0 + \tau_2}{2}. \tag{6.10}$$

Застосовуючи принцип інваріантності світла до нерухомої системи

$$\tau_1 = \tau\left(x^{\bullet}, 0, 0, t + \frac{x^{\bullet}}{c-u}\right) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(0,0,t\right) + \tau\left(0,0,t + \frac{x^{\bullet}}{c-u} + \frac{x^{\bullet}}{c+u}\right)\right], \tag{6.11}$$

та, розглядаючи $x^{\bullet}$, як нескінченно малу величину, отримаємо

$$\tau\left(x^{\bullet}, 0, 0, t + \frac{x^{\bullet}}{c-u}\right) = \tau\left(0,0,0,t\right) + \frac{\partial \tau}{\partial x^{\bullet}} x^{\bullet} + \frac{\partial \tau}{dt}\frac{x^{\bullet}}{c-u} + \cdots \tag{6.12}$$

Нехтуючи тут членами вище другого порядку малості будемо мати.

$$\tau\left(0,0,0,t\right) + \frac{\partial \tau}{\partial x^{\bullet}} x^{\bullet} + \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{x^{\bullet}}{c-u} = \frac{1}{2}\left[2\tau\left(0,0,0,t\right) + \frac{\partial \tau}{\partial t}\left(\frac{x^{\bullet}}{c-u} + \frac{x^{\bullet}}{c+u}\right)\right]. \tag{6.13}$$

Звідки випливає

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^{\bullet}} + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial t}\left(\frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u}\right) = 0, \tag{6.14}$$

або

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^{\bullet}}+\frac{u}{c^{2}-u^{2}}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0 \ . \tag{6.15}$$

Цьому рівняння задовольняє функція

$$\tau=a\left(t-\frac{u}{c^{2}-u^{2}}x^{\bullet}\right), \tag{6.16}$$

де a – невідома функція, що залежить від u. Щоб знайти тепер величини $x_1, y_1, z_1,$ врахуємо, що світло при вимірюванні в рухомій системі координат повинно рухатися з швидкістю с. Якщо через x_1 позначити координату Р, то сигнал з початку координат досягне Р за час:

$$\tau^{*}=\frac{x_1}{c}. \tag{6.17}$$

проте

$$\tau^{*}=a\left(t^{*}-\frac{u}{c^{2}-v^{2}}x^{\bullet}\right), \tag{6.18}$$

де $t^{*}=\frac{x_1}{c-u}$, тому

$$\tau^{*}=a\left(\frac{x^{\bullet}}{c-u}-\frac{ux^{\bullet}}{c^{2}-u^{2}}\right)=\frac{ax^{\bullet}c}{c^{2}-u^{2}}, \tag{6.19}$$

звідки

$$x_1=c\tau^{*}=\frac{ax^{\bullet}c}{c^{2}-u^{2}}=\frac{ax^{\bullet}}{1-\frac{u^{2}}{c^{2}}}, \tag{6.20}$$

або

$$x_1 = ax^{\bullet}\beta^2, \qquad (6.21)$$

де
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Нехай дані, Q – точка рухомої системи, яка розміщена на осі y_1. Час поширення сигналу з т. O_1 в т. Q в нерухомій системі визначається співвідношенням:

$$c^2t^2 = u^2t^2 + y^2, \qquad (6.22)$$

яке дає

$$t = \frac{y}{\sqrt{c^2-u^2}}. \qquad (6.23)$$

В рухомій системі координат

$$y_1 = c\tau_1 = \frac{yca}{\sqrt{c^2-u^2}} = a\beta y, \qquad (6.24)$$

аналогічно отримаємо

$$z_1 = a\beta z. \qquad (6.25)$$

Вводячи позначення $\varphi(u) = a\beta$ і підставляючи значення $x^{\bullet}$ отримуємо наступні формули перетворення:

$$\tau = \varphi\beta\left(t - \frac{u}{c^2}x\right);$$

$$x_1 = \varphi\beta\left(x - ut\right); \qquad y_1 = \varphi y; \qquad z_1 = \varphi z. \tag{6.26}$$

Для визначення функції $\varphi\left(u\right)$ розглянемо ще одну систему x_2, y_2, z_2, τ_2, яка рухається поступально у від'ємному напрямі осі х, зі швидкістю *u*. Двічі застосовувати формули перетворення, будемо мати

$$\tau_1 = \varphi(-u)\beta(-u)\left(\tau + \frac{ux_1}{c^2}\right) = \varphi(-u)\varphi(u)\beta^2\,\frac{c^2 - u^2}{c^2}\,t = \varphi(-u)\varphi(u)t\,, \tag{6.27}$$

$$x_2 = \varphi(-u)\beta(-u)(x_1 + u\tau) = \varphi(-u)\varphi(u)\beta^2 x\,. \tag{6.28}$$

Співвідношення між x_2 та x не містить t, і, відповідно системи $Oxyzt$ та $O_2x_2y_2z_2\tau_2$ знаходиться в стані спокою одна відносно другої. Тому

$$\varphi\left(u\right)\times\varphi\left(-u\right) = 1\,. \tag{6.29}$$

Для вияснення фізичного змісту функції $\varphi\left(u\right)$ розглянемо т. Q. Ординати цієї точка рівна:

$$y = \frac{y_1}{\varphi\left(u\right)}\,. \tag{6.30}$$

Врахувавши симетрію, зрозумію, що це величина може залежати тільки від величини швидкості, а не від напрямку руху, тому

$$\varphi\left(u\right) = \varphi\left(-u\right) = 1\,. \tag{6.31}$$

Отже формули перетворення Лоренца будуть мати вигляд:

$$x_1 = \beta\left(x - ut\right), \quad y_1 = y, \quad z_1 = z, \quad \tau = \beta\left(t - \frac{ux}{c^2}\right), \tag{6.32}$$

де

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

§ 6.3. Відносність довжини та проміжку часу

Перетворення Лоренца приводять до уявлень, які суперечать звичним уявленням про властивості простору і часу. Розглянемо, наприклад, поняття довжини. Нехай в системі O, x, y, z, τ , знаходиться нерухомо деякий стержень довжини *l,* який розміщений вздовж осі x_1. Довжину *l,* яку виміряли в системі $O, x, y, z, t_{1,}$ назвемо власною довжиною стержня. Знайдемо довжину цього стержня в системі *Oxyzt*. Позначимо абсциси кінцевий точок стержня через $x_1^{(1)}$ та $x_1^{(2)}$. Для визначення довжини в системі O, x, y, z, t потрібно визначити координати $x^{(1)}$ та $x^{(2)}$ кінцевих точок стержня в момент часу *t.* Скористаємось формули перетворення Лоренца.

$$x_1^{(1)} = \beta\left(x^{(1)} - ut\right), \quad x_1^{(2)} = \beta\left(x^{(2)} - ut\right), \tag{6.33}$$

які дають, що

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\beta}\left(x_1^{)(2} - x_1^{(1)}\right), \tag{6.34}$$

тобто

$$x_2 - x_1 < l\,. \tag{6.35}$$

Або

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}\,. \tag{6.36}$$

де l – релятивістська довжина, l_0 – довжину стержня в рухомій системі відліку.

Обидві системи відліку є повністю рівноправними. Тому, якщо стержень не рухається в системі $Oxyzt$, то його довжина в системі $0,x,y,z,\tau$ буде меншою, ніж в системі $Oxyzt$, оскільки власна довжина, завжди більша від тої, яку відмічає безпосередньо спостерігач.

Зменшення довжини носить чисто кінематичний характер. Фундаментальні зміни в теорії відносності відбуваються і з уявленням про час . Якщо в деякій точці x, системи O,x,y,z,τ, відбувається фізичне явище протягом часу $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ то в системі $Oxyzt$. для моментів t_2 і t_1 отримаємо

$$t_2 = \beta\left(\tau_2 - \frac{u}{c^2}x_1\right), \qquad t_1 = \beta\left(\tau_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right), \tag{6.37}$$

звідси знаходимо

$$t_2 - t_1 = \beta(\tau_2 - \tau_1) = \beta\Delta\tau, \quad \beta > 1 \tag{6.38}$$

або

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,. \tag{6.39}$$

τ_0 і τ – проміжок часу між двома подіями в рухомій та нерухомій системі координат. Тобто власний час завжди менший, ніж час, що пройшов між подіями в нерухомій системі відліку. Зміна часу виявляється залежною від руху. Звідси випливає, що події в рухомій і не рухомій системі координат будуть відбувається не одночасно. А проміжок часу між ними може бути як від'ємний так і додатній.

§ 6.4. Перетворення швидкості

Перетворення Лоренца дозволяють за координатами подій в одній системі відліку знайти координати цієї ж події в іншій системі. Ці ж формули дозволяють визначити залежності швидкостей частинки в різних системах координат

$$t = \beta\left(\tau + \frac{u}{c^2}x_1\right); \qquad x = \beta(x_1 + u\tau), \qquad y = y_1 \qquad z = z_1$$

Про диференціювавши отримаємо

$$dt = \beta\left(d\tau + \frac{u}{c^2}dx_1\right); \quad dx = \beta(dx_1 + ud\tau); \quad dy = dy_1; \quad dz = dz_1, \tag{6.40}$$

звідки

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta(dx_1 + ud\tau)}{\beta\left(d\tau + \frac{u}{c^2}dx_1\right)} = \frac{d\tau\left(\frac{dx_1}{d\tau} + u\right)}{d\tau\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx_1}{d\tau}\right)} = \frac{u + \frac{dx_1}{d\tau}}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx_1}{d\tau}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{d\tau}}{\beta\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{dy}{d\tau}\right)}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dz_1}{d\tau}}{\beta\left(1 + \frac{u}{c^2}\frac{dz_1}{d\tau}\right)}$$

або

$$u_x = \frac{u + u_{x1}}{1 + \frac{uu_{x1}}{c^2}}; \quad u_y = \frac{u_{y1}}{\beta\left(1 + \frac{uu_{y1}}{c^2}\right)}; \quad u_z = \frac{u_{z1}}{\beta\left(1 + \frac{uu_{z1}}{c^2}\right)}. \tag{6.41}$$

Математично це можна записати формулою:

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}' + \vec{v}}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{6.42}$$

де u і u' - швидкості тіла відповідно в рухомій і нерухомій системах координат, а v - швидкість рухомої системи координат відносно нерухомої системи.

Розглянемо граничні випадки:

1) Якщо $v << c$ і $u' << c$, то $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}'$, тобто у нерелятивістському випадку рівняння переходить у класичний закон додавання швидкостей.
2) $u_x^1 = c; \quad u = c$

$$u_x = \frac{c + c}{1 + \frac{c * c}{c^2}} = c$$

$$u_y = c\frac{\sqrt{1 - \frac{c^2}{c}}}{2} = 0$$

$$u_z = 0$$

Отже, абсолютна швидкість не перевищує швидкості світла.

§ 6.5. Основний закон релятивістської динаміки

Релятивістською називається механіка, яка враховує закони теорії відносності і вивчає закони руху тіл з швидкостями, близькими до швидкості світла.

Наведемо головні рівняння релятивістської динаміки. Другий закон Ньютона має формально такий же вигляд:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{6.43}$$

де $\vec{F}$ - результуюча сила, але імпульс в релятивістській динаміці вже не прямопропорційний швидкості, а, як це випливає із перетворень Лоренца, має іншу залежність від швидкості.

Релятивістський імпульс p має більш складну залежність від швидкості, що забезпечує його збереження у випадках релятивістського розсіяння:
З теорії відносності випливає також універсальне співвідношення між повною енергією тіла та його масою

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.44}$$

Це рівняння виражає фундаментальний закон природи, *закон взаємозв'язку маси і енергії.*

Третім головним співвідношенням є *формула для кінетичної енергії*

$$E_k = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - mc^2. \tag{6.45}$$

де $E_0 = mc^2$ - енергія тіла в стані спокою.

Четверте співвідношення зв'язує *повну енергію з релятивістським імпульсом*:

$$E = c\sqrt{p^2 + mc^2}\ . \qquad (6.46)$$

Якщо u близьке до c, то закони релятивістської механіки уже докорінно відрізняються від законів класичної механіки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреєв В.О., Дущенко В.П., Федорченко А.М. Теоретична фізика. Класична механіка. К.: Вища школа. – 1984. – 224 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука. – 1967. – Т. I. – 512 с. –Т. II. – 664 с.
3. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М., 1959. – 596 с.
4. Гаральд Іро. Класична механіка. – Львів. – 1999 – 464 с.
5. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа. – 1983. – 576 с.
6. Жирнов Н.И. Класическая механика. – М.: Просвещение. –1980. – 303 с.
7. Ландау Л.Д. Лифшиц. И.Н. Теоретичекая Физика: Учебное пособие. – В 10-ти т. Т. I. Механика. – М.: Наука, – 1988. – 216 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наук. – 1985. – 448 с.
9. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т. 1. – М.: Наука. – 1991. – 496 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2., – М.: Наука, –- 1970. – 568 с.
11. Тарг С.М. Короткий курс теоретической механики. – М., 1963. – 416 с.
12. Терлецкий Я.П. Теоретическая механика. – М., – 1987. – 160 с.
13. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Т. 1. – К.: Вища школа. – 1992. – 536 с.
14. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. II. – 411 с.
15. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. 1. – 438 с.

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Затверджую

Ректор Дрогобицького
державного педагогічного
університету імені Івана Франка
________________ В.Г. Скотний
"__" _____________200___р.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ПРОГРАМА

для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня **"Бакалавр"**
галузі знань : «0402.Фізико-математичні науки» напрямів підготовки «6.040201. Математика», «6.040201. Математика. Спеціалізація: Економіка», «6.040201. Математика. 6.040203. Фізика»
Дисципліна: нормативна.

Програму уклав: кандидат фізико-математичних наук, доцент Гольський В.Б.

Рецензенти:

Доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри теоретичної фізики,
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
Маханець О.М.

Доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри загальної
фізики Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана
Франка

Пелещак Р.М.

Затверджено
на засіданні кафедри теоретичної фізики та методики викладання фізики
(протокол № __ від ________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради інституту фізики, математики та інформатики
(протокол № __ від __________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради університету
(протокол № __ від __________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні Вченої ради університету
(протокол № ___від ___________ 200_ р.)

Дрогобич, 2011

1. Пояснювальна записка

Засновником механіки вважається Архімед (287-212 р.р. до н.е.), який зробив точний розв'язок задачі про важіль та створив вчення про центр ваги тіла. Швидкий і успішний розвиток механіки починається лише з епохи Відродження, коли створюються умови для розвитку науки і техніки.

Зародження небесної механіки – науки про рух небесних тіл – пов'язано з великим відкриттям Миколи Коперніка (1473-1543) – створенням геліоцентричної системи світу, що змінила геоцентричну систему Птоломея. Це відкриття зробило переворот у науковому світогляді тієї епохи. На підставі навчання Коперніка й астрономічних спостережень, Кеплер (1571-1630) сформулював три закони руху планет, що згодом привели до відкриття Ньютоном закону всесвітнього тяжіння. Створення основ динаміки належить великим ученим – італійцю Галілео Галілею (1564-1642) і англійцю Ісаку Ньютонові (1643-1727).

Курс «**Теоретичної механіки**», для напрямів підготовки «6.040201. Математика» та суміжних, розрахований на поглиблене розуміння математичних прийомів та методів вивчених студентами з попередніх суто математичних дисциплін. Оскільки студенти дуже часто не бачать де на практиці може бути використані їхні математичні знання, виникає певний дисбаланс між теорією і практикою. Цю прогалину має заповнити теоретична механіка, яка являючись розділом фізики, послуговується, як шкільною математикою, так і математикою вищої школи. Це дає можливість зрозуміти прикладну суть вивчених курсів та освоїти нову і важливу дисципліну.

Програма курсу складається з трьох розділів: «Механіки систем із скінченим числом ступенів вільності», «Механіки суцільного середовища» та «Основ спеціальної теорії відносності». Основна увага приділена першому розділу, де вивчається три основні частини механіки: статика, кінематика та динаміка. Там же передбачено вивчення законів збереження, основ аналітичної механіки та теорії керувань. Інші розділі хоч і менші за об'ємом матеріалу, проте охоплюють основні знання потрібні для студентів зазначеного вище напряму підготовки.

Програма укладена на основі галузевих стандартів освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за напрямом підготовки 0402 "фізико-математичні науки":

ПМ.06.01	Механіка систем із скінченим числом ступенів вільності	
ПМ.06.01.01	**Статика твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.02	**Кінематика точки і твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.03	**Динаміка матеріальної точки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.04	**Закони збереження в механіці.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11
ПМ.06.01.05	**Динаміка системи матеріальних точок.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.06	**Основи динаміки твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.07	**Основи аналітичної механіки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.08	**Основи теорії коливань.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.02	Механіка суцільного середовища	
ПМ.06.02.01	**Рівняння руху суцільного середовища.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.02.02	**Теорія пружності.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05,

		2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.02.03	**Основи гідродинаміки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.03	Основи спеціальної теорії відносності	
ПМ.06.03.01	**Релятивістська кінематика.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11
ПМ.06.03.02	**Релятивістська динаміка.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11

Завдання курсу полягає в тому, щоб студенти зрозуміли та засвоїли теоретичний матеріал і вміли його використовувати при розв'язуванні задач.

Мета вивчення дисципліни: мати чітке уявлення про методи та прийоми теоретичної механіки, принципи дослідження фізичних явищ та побудову математичних моделей природніх та технічних процесів.

Структурно-логічна схема місця дисципліни в ОПП підготовки фахівців.

Дисципліна вивчається після курсів: аналітична геометрія, лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, математичний аналіз, проективна геометрія і основи геометрії, комплексний аналіз.

.

2. ЗМІСТ ПРОГРАМИ

ВСТУП

Теоретична механіка і її місце серед інших наук. Значення механіки для розвитку природознавства й техніки. Основні історичні етапи розвитку механіки. Об'єктивний характер законів механіки.

1. МЕХАНІКА СИСТЕМ ІЗ СКІНЧЕНИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

1.1. Статика твердого тіла

Основні поняття та аксіоми. Моменти сили відносно точки та осі. Зведення двох паралельних сил. Теорія пар сил. Зведення довільної системи сил до простої системи. Умови рівноваги. Плоска система сил. Теорема Вариньона. Тертя. Часткові випадки просторових систем сил. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла.

1.2. Кінематика точки і твердого тіла

Швидкість та прискорення точки в різних системах координат. Векторний спосіб вивчення руху точки. Прості рухи твердого тіла. Складний рух точки. Плоский рух твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Загальний випадок руху тіла. Кінематика складних рухів твердого тіла.

1.3. Динаміка матеріальної точки

Основні поняття і означення динаміки. Завдання динаміки. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку. Принцип незалежності дії сил. Принцип відносності Галілея. Диференціальні рівняння руху точки. Дві задачі динаміки точки. Основна задача динаміки точки і її розв'язок. Сталі інтегрування і початкові умови. Розв'язок оберненої задачі динаміки точки. Рух невільної матеріальної точки. Сили реакції зв'язків.

1.4.Динаміка системи матеріальних точок

Завдання станів системи матеріальних точок у класичній механіці. Класифікація сил, що діють на систему. Властивості внутрішніх сил. Загальні теореми динаміки системи.

1.5. Закони збереження в механіці

Загальні теореми динаміки матеріальної точки й механічної системи. Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки й механічної системи. Закон збереження кількості руху. Теорема про рух центра мас системи.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра й осі. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Випадок центральної сили. Головний момент кількості руху (кінетичний момент) механічної системи відносно центра і осі. Теорема про зміну кінетичного моменту системи. Закон збереження кінетичного моменту системи.

Елементарна робота сили й робота сили на скінченому переміщенні. Потужність. Робота сили тяжіння і сили пружності. Теореми про зміну, кінетичної енергії матеріальної точки й механічної системи. Рух системи в потенціальному силовому полі. Поняття про силову функцію. Потенціальна енергія механічної системи. Закон збереження механічної енергії точки і системи.

1.6. Основи динаміки твердого тіла

Динаміка твердого тіла. Моменти інерції системи і твердого тіла відносно площини, осі й полюса. Радіус інерції. Відцентрові моменти інерції. Еліпсоїд інерції. Головні осі інерції. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо головної центральної осі інерції. Фізичний маятник.

1.7. Основи аналітичної механіки

В'язі і їх класифікація. Можливі переміщення. Елементарна робота сили на можливому переміщенні. Ідеальні в'язі. Принцип можливих переміщень. Узагальнені координати системи. Узагальнене рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа. Канонічні рівняння. Принцип Гамільтона.

1.8. Основи теорії коливань

Гармонійне коливання матеріальної точки під дією сили, пропорційної зміщенню. Стійкість положення рівноваги. Коливання системи з однією ступеню вільності. Математичні і фізичні маятники. Малі коливання системи з двома ступенями вільності.

2. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

2.1. Рівняння руху суцільного середовища

Рівняння нерозривності. Сили об'ємні і поверхневі. Властивості поверхневих сил.

2.2. Теорія пружності

Тензор напружень. Рівняння руху суцільного середовища. Симетричність тензора напружень. Еліпсоїд напружень. Реологічні рівняння.

2.3. Основи гідродинаміки

Моделі рідин та рівняння руху. Критерії подібності при обтіканні твердих тіл потоком в'язкої нестискуваної рідини. Рух в’язкої нестискуваної рідини.

3. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

3.1. Релятивістська кінематика

Експериментальне обґрунтування СТВ. Постулати Айнштейна. Перетворення Лоренца. Простір і час в СТВ, прийняті системи відліку. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца: ефекти скорочення довжини і сповільнення часу. Відносна швидкість, перетворення швидкостей. Поняття про чотиривимірний простір Мінковського. Перетворення Лоренца як обертання системи координат у просторі Мінковського.

3.2. Релятивістська динаміка

Інваріантна маса частинки. Чотиривимірний імпульс. Чотиривимірна сила. Релятивістське коваріантне узагальнення другого закону динаміки Ньютона. Компоненти чотиривимірного імпульсу. Фізичний зміст четвертої компоненти чотиривимірного імпульсу. Релятивістська енергія. Зв'язок між власною енергією частинки і її масою (формула Айнштейна). Частинки з нульовою масою.

Орієнтовна тематика практичних занять

1. Рівновага твердого тіла, до якого прикладена збіжна система сил.
2. Теорема про три непаралельні сили.
3. Метод проекцій.
4. Момент сили відносно точки. Рівновага твердого тіла з однією нерухомою точкою.
5. Кінематика точки. Траєкторія та рівняння руху точки.
6. Кінематика точки. Швидкість та прискорення.
7. Кінематика твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.
8. Складний рух точки.
9. Плоский рух твердого тіла.
10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.

11. Основні форми диференціальних рівнянь динаміки матеріальної точки.
12. Визначення сил по заданому русі.
13. Визначення руху по заданих силах.
14. Коливальний рух.
15. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.
16. Теорема про рух центра інерції системи матеріальних точок
17. Теорема про зміну головного вектора кількостей руху системи матеріальних точок
18. Теорема про зміну головного моменту кількості руху системи матеріальних точок. Моменти інерції твердого тіла.
19. Динаміка плоского руху твердого тіла.
20. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.
21. Класифікація зв'язків. Число ступенів вільності.
22. Принцип можливих переміщень.
23. Загальне рівняння динаміки системи матеріальних точок. Рівняння Лагранжа.
24. Рівняння руху суцільного середовища.
25. Перетворення Лоренца.

Знання та вміння, які повинен набути студент після вивчення програмного матеріалу модулів

ЗНАТИ:

- основні поняття, аксіоми та теореми статики твердого тіла;
- кінематичні характеристики точки та твердого тіла;
- закони динаміки матеріальної точки та системи матеріальних точок;
- закони збереження механіки;
- основи аналітичної механіки;
- основи теорії коливань;
- рівняння руху суцільного середовища;
- математичні моделі, що використовуються в теорії пружності;

- моделі рідин та їхні рівняння руху;
- постулати Айнштейна;
- перетворення Лоренцо;
- фізичний зміст четвертої компоненти чотиривимірного імпульсу.

ВМІТИ:

а) загальна компетентність:

- пояснити механічні явища та процеси;
- пояснити математичні моделі, які використовує теоретична механіка ;
- використовувати засвоєні знання у майбутній професійній діяльності;

б) предметна компетентність:

- доводити теореми статики;
- використовувати умову рівноваги твердого тіла, до якого прикладена збіжна система сил;
- визначати реакції для твердого тіла з однією нерухомою точкою;
- знаходити рівняння руху та траєкторію точки;
- обчислювати швидкість та прискорення матеріальної точки при різних способах задання руху точки;
- визначати кінематичні характеристики точок твердого тіла;
- використовувати опис складного руху точки;
- записувати основні форми диференціальних рівнянь динаміки матеріальної точки;
- визначати сили по заданому рухові;
- описувати рух по заданим силам;
- використовувати теорему про рух центра інерції системи матеріальних точок;
- обчислювати кількість руху точки та системи матеріальних точок;
- визначати момент інерції твердого тіла.
- записувати функцію Лагранжа для динамічних задач;
- знаходити рівняння руху суцільного середовища;
- використовувати перетворення Лоренца.

3. КРИТЕРІЇ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ ТА ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ

Критерії оцінювання навчальних досягнень за національною шкалою.

Оцінювання знань студентів з курсу проводиться за чотирибальною системою ("відмінно", "добре", "задовільно", "незадовільно") відповідно до основних критеріїв та показників рівня знань.

Оцінювання досягнутих успіхів за семестр проводиться в системі оцінювання університету, після чого переводиться в національну шкалу оцінювання та шкалу ECTS відповідно до таблиці.

Шкала оцінювання університету (в балах)	**Національна шкала оцінювання**	**Оцінка з заліку**	**Шкала ECTS**		
			Сумарна модульна оцінка (в балах)	**Оцінка за шкалою ECTS**	**Визначення**
90-100	"відмінно"	"зарахо - вано"	90-100	A	ВІДМІННО - відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок
75-89	"добре"		90-95	B	ДУЖЕ ДОБРЕ - вище середнього рівня з кількома помилками
			74-89	C	ДОБРЕ - в загальному пра-вильна робота з певною кількістю грубих помилок
60-74	"задовільно"		69-74	D	ЗАДОВІЛЬНО - непогано, але зі значною кількістю
			60-69	E	ДОСТАТНЬО - виконання задовольняє мінімальні
0-59	“незадовільно”	"незара-ховано"	50-59	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО - потрібно працювати перед тим, як
			0-49	F	НЕЗАДОВІЛЬНО - необхідна серйозна подальша робота

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК