УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА

Гольський В.Б.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
(ЧАСТИНА 1)

Навчальний посібник

Дрогобич, 2014

УДК. 531/534 (075)
ББК 22.21я.73.
Г63

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана франка
як навчальний посібник
(протокол № 9 від 26 червня 2014 р.)

Рецензенти:

Крамар Валерій Максимович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Пелещак Роман Михайлович – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Г 63 **Гольський В.Б.**
Теоретична механіка (частина 1): **навчальний посібник.** — Дрогобич: ДДПУ, 2014. — 107 с.

Посібник укладено відповідно до програми навчальної дисципліни **«Теоретична механіка»** для підготовки фахівців ОКР «Бакалавр» галузі знань: 0402. «Фізико-математичні науки» напрямів підготовки 6.040201. «Математика*», 6.040201. «Математика*. Спеціалізація: Економіка», 6.040201. «Математика*» 6.040203. «Фізика», затвердженої вченою Радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Бібліографія 15 назв.

УДК. 531/534 (075)
ББК 22.21я.73.

ЗМІСТ

Вступ

Усі явища природи є результатом руху різних форм матерії. У теоретичній механіці розглядаються тільки речові форми матеріальних об’єктів, тобто матеріальні тіла і суцільні середовища, які характеризуються масою, на відміну від таких форм матерії як електромагнітне поле, заряд і т. д.

Одним з найпростіших видів руху є механічний рух, який полягає у переміщені об’єктів у просторі з протіканням часу. Таким чином, теоретична механіка вивчає механічний рух матеріальних об’єктів.

Теоретична механіка поділяється на три частини: статику, кінематику і динаміку.

Статика – розділ теоретичної механіки, який вивчає умови рівноваги тіл під дією сил, а також перетворення систем сил, прикладених до тіла.

Кінематика – вивчає закономірності механічних рухів матеріальних об’єктів без врахування умов і причин, які викликають і змінюють ці рухи.

У ***динаміці*** – вивчаються закономірності руху матеріальних об’єктів в залежності від прикладених сил, тобто від дії на розглядувані матеріальні об’єкти інших тіл.

РОЗДІЛ 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 1. Основні поняття, аксіоми і теореми статики

Теоретична механіка, як і будь-яка інша наука, має свої поняття та означення, які використовуються для формування її аксіом і теорем. Введемо основні поняття і означення.

Під *матеріальною точкою* розуміють найпростішу модель матеріального тіла будь якої форми, розміри якого достатньо малі та яке можна прийняти за геометричну точку з масою, що дорівнює масі тіла.

Механічною системою називають будь-яку сукупність матеріальних точок.

Під *абсолютно твердим тілом* розуміють механічну систему, відстані між точками якої не змінюється при будь-яких взаємодіях.

Зрозуміло, що всі тіла в природі, в тій чи іншій мірі деформуються, але в деяких задачах деформаціями тіл можна знехтувати та вважати ці тіла абсолютно твердими. Наприклад, при русі Землі навколо Сонця її можна вважати абсолютно твердим тілом і навіть матеріальною точкою.

Силою в механіці називають фізичну величину, що є мірою механічної дії одного тіла на інше. Сила характеризується точкою прикладання, числовим значенням і напрямом дії. Сила є векторною величиною.

Механічна дія матеріальних тіл одне на одного може відбуватись безпосередньо при їх стиканні або на відстані, через силові поля. Позначають силу буквою із знаком вектора. Наприклад, $\vec{F}, \vec{P}, \ldots$, а величину сили - $|\vec{F}|, |\vec{P}|, \ldots$, або просто $F, P, \ldots$ (Рис. 1.1).

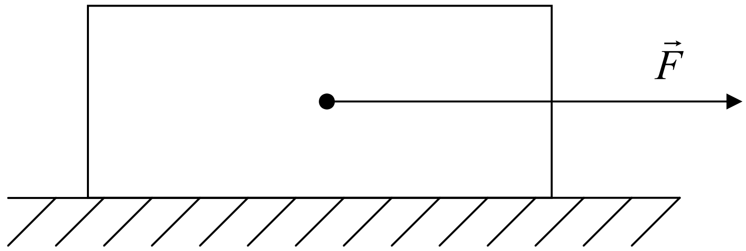


Рис. 1.1

Сукупність сил що діють на розглядуване тіло або точки механічної системи називають *системою сил* (Рис. 1.2).

Систему сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку, що знаходиться в стані спокою, або рухаєте за інерцією, не призводить до зміни цього стану, називають *еквівалентною нулю*, або *рівноважною системою сил*.

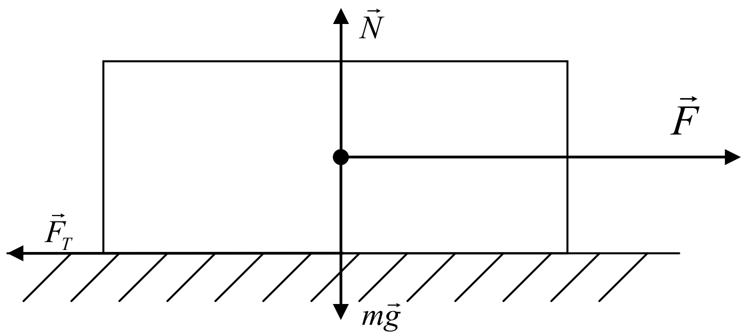


Рис. 1.2

Рівнодійною розглядуваної системи сил називають силу, дія якої на тверде тіло, або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил. Позначають рівнодійну $\vec{R}$, а умова її еквівалентності системі сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ записується: $\vec{R} \propto (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$

Зрівноважуючою заданої системи сил вважають таку силу, додаванням якої до заданої системи, утворює нову систему сил, еквівалентну нулю. Якщо $\vec{R}'$ є зрівноважуючою силою системи сил $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$, то $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n', \vec{R}') \propto 0$

§ 2. Аксіоми статики

І. Аксіома про рівновагу системи двох сил.

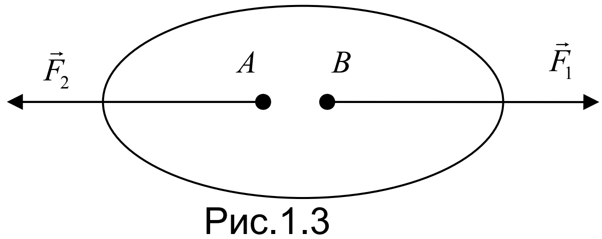


Рис.1.3

Для рівноваги системи двох сил, прикладених до точок твердого тіла, необхідно та достатньо, щоб ці сили були рівні за

величиною та діяли вздовж однієї прямої, яка проходить через точки їх прикладання в протилежних напрямках. (Рис.1.3)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0. \qquad (2.1)$$

Якщо сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ знаходяться у рівновазі, то вони утворюють систему сил, еквівалентну нулю. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \propto 0$. Дія такої системи сил на нерухоме тіло не змінює його стану спокою. Аксіома справедлива і для сил, прикладених в одній точці твердого тіла або в одній матеріальній точці.

II. Аксіома про додавання системи сил, еквівалентної нулю.

Якщо на тверде тіло діє система сил, то до неї можна додавати (відкидати) систему сил, еквівалентну нулю. Одержана після додавання (відкидання) нова система сил є еквівалентною до початкової системи сил.

Під дією доданої системи сил і нової, одержаної після додавання рівноважної системи сил, тіло буде рухатись абсолютно однаково при незмінних інших умовах.

III. Аксіома паралелограма сил.

Дві сили, які прикладені до однієї точки твердого тіла, або до однієї матеріальної точки, можна замінити рівнодійною силою, величина якої дорівнює довжині діагоналі паралелограма, побудованого на заданих силах і напрямленого вздовж цієї діагоналі (Рис. 1.4).

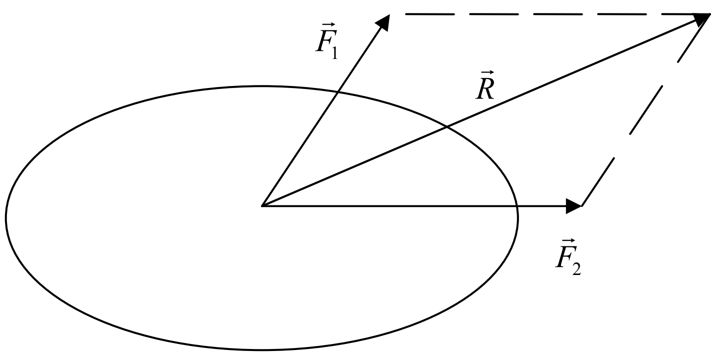


Рис. 1.4

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{2.2}$$

$$R = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \vec{F}_2^{\,2} + 2F_1F_2\cos(\widehat{\vec{F}_1\vec{F}_2})}. \tag{2.3}$$

Справедливе обернене твердження: ***одну силу можна розкласти на дві складові***.

Застосовуючи теорему синусів, визначимо кути, які утворює рівнодійна $\vec{R}$ з складовими силами $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$.

$$\frac{R}{\sin(180^0 - (\vec{F}_1, \vec{F}_2))} = \frac{F_1}{\sin(\vec{R}, \vec{F}_2)};$$

$$\sin(\vec{R}, \vec{F}_2) = \frac{F_1}{R}\sin(\vec{F}_1, \vec{F}_2). \tag{2.4}$$

IV. Аксіома про рівність сил дії та протидії – один з основних законів класичної механіки, сформульованих І.Ньютоном.

Сили взаємодії двох тіл рівні за величиною (за модулем), протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої, яка проходить через точки їх прикладання.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{2.5}$$

Підкреслимо, що сили дії та протидії завжди прикладені до різних тіл або різних взаємодіючих точок одного і того ж тіла.

V. Аксіома зв'язків.

Зв'язком для твердого тіла або матеріальної точки називаються матеріальні об'єкти, які обмежують переміщення твердого тіла чи матеріальної точки.

Аксіома зв'язків стверджує, що будь-який зв'язок можна відкинути і замінити силою (реакцією зв'язку в найпростішому випадку) або системою сил (в загальному випадку).

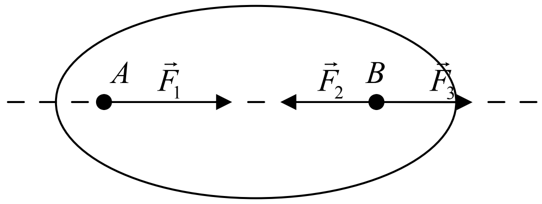
Правильно замінити відкинуті зв'язки силами реакцій – одна з головних задач при вивченні статики.

§ 3. Найпростіші теореми статики

Теорема 1. ***Дія сили на тверде тіло не змінюється при перенесенні точки прикладання сили вздовж лінії її дії.***

Доведення:

Нехай до деякої точки А твердого тіла прикладена сила $\vec{F}_1$.



…

Рис. 1.5

Виберемо на лінії дії сили $\vec{F}_1$ точку *B* і додамо в точці *B* систему сил $(\vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim 0$ (Рис.1.5). Це значить, що сила $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$. Виберемо силу $F_3 = F_1$. Згідно аксіоми 2 про додавання еквівалентної 0 системи сил, одержана нова система $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim \vec{F}_1$.

Система сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim 0$ згідно аксіоми 1, отже її можна відкинути. Тоді $(\vec{F}_1) \sim (\vec{F}_3)$.

Таким чином сила $\vec{F}_1$ прикладена в точці *A* еквівалентна силі $\vec{F}_3$ прикладеній в точці *B*.

Отже, в абсолютно твердому тілі точку прикладання сили можна довільно переносити вздовж лінії її дії. При наявності деформації теорема невірна.

Теорема 2. ***Якщо тверде тіло під дією трьох сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, знаходиться в рівновазі, то лінії дії таких трьох сил перетинаються в одній точці.***

Доведення.

Розглянемо тверде тіло на яке діє система трьох сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$, дві з яких $(\vec{F}_2, \vec{F}_3)$ перетинаються в точці *A*.

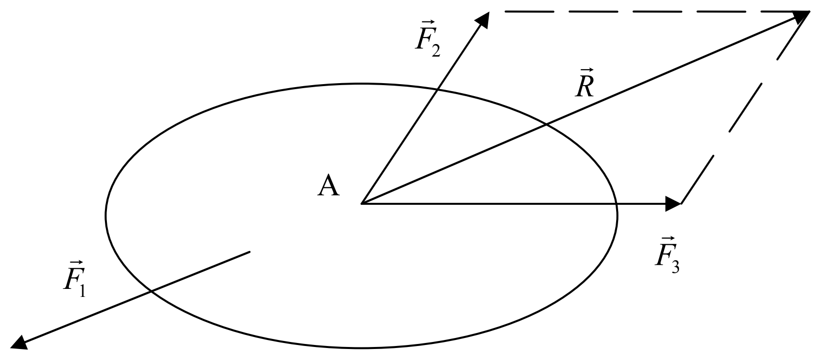


Рис. 1.6

Знайдемо рівнодійну силу $\vec{F}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, тоді система трьох сил еквівалентні системи двох сил: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \sim (\vec{F}_1, \vec{R}_{1,2})$ (Рис. 1.6). Оскільки тіло знаходиться в рівновазі, то згідно аксіоми 1 сили $\vec{F}_1$ і $\vec{R}_{1,2}$ повинні бути напрямленні по одній прямій, яка проходить через точки їх прикладання.

Таким чином лінія дії сили $\vec{F}_1$ повинна пройти через точку прикладання сили $\vec{R}_{1,2}$, а значить і точки прикладання $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$. Отже, лінії дії трьох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ перетнуться в одній точці.

Ця теорема дозволяє визначити лінію дії невідомої сили в багатьох задачах статики твердого тіла.

§ 4. Система збіжних сил

Системою збіжних сил (або пучком сил) називають таку систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці – центрі пучка (Рис. 1.7).

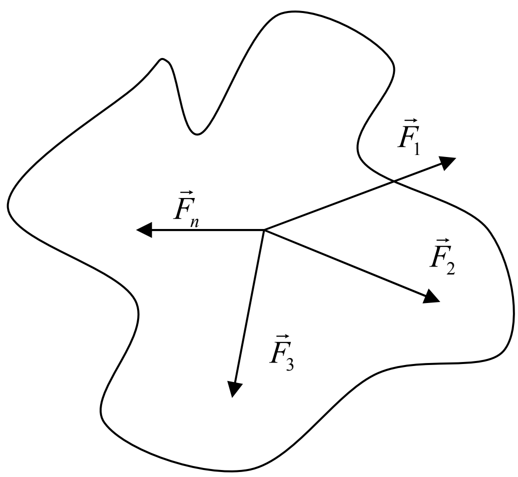


Рис. 1.7

Збіжні системи сил можуть бути просторовими і плоскими, тобто розміщеними в одній площині. Розглянемо просторову систему збіжних сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$, прикладених до твердого тіла в точці О – центрі пучка та знайдемо рівнодійну силу $\vec{R}$.

Додаючи сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ за правилом паралелограма (Рис. 1.8).

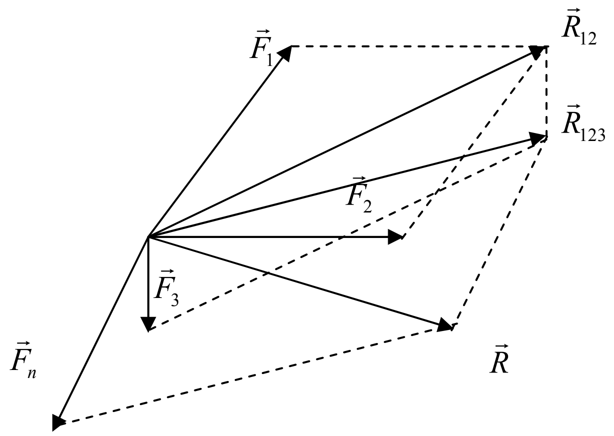


Рис. 1.8

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3;$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,. \qquad (4.1)$$

Таким чином система *n* збіжних сил є еквівалентною одній силі $\vec{R}$, що є рівнодійною цієї системи сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n) \sim \vec{R}$. Процес послідовного застосування до сил аксіоми паралелограма приводить до побудови силового многокутника, в якому кінець вектора попередньої сили співпадає з початком наступної.

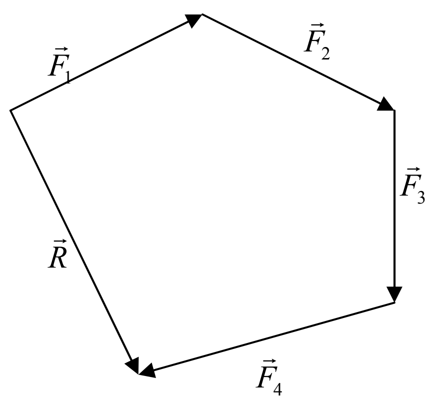


Рис. 1.9

Рівнодійна сила $\vec{R}$ у силовому многокутнику з'єднує початок першої сили з кінцем останньої (Рис. 1.9).

Зрозуміло, що для просторової системи сил, силовий многокутник є просторовою фігурою, а для плоскої системи сил – плоскою фігурою.

Для аналогічного знаходження рівнодійної $\vec{R}$ системи збіжних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ необхідно вибрати прямокутну систему координат і спроектувати сили на її осі.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \, . \qquad (4.2)$$

То в проекції на осі координат

$$\vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} \, ; \; \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} \, ; \; \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} \, . \qquad (4.3)$$

Тоді модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2} \, , \qquad (4.4)$$

а косинус кутів між $\vec{R}$ і осями координат

$$\cos(\vec{R},\hat{\vec{i}}) = \frac{R_x}{R} ; \; \cos(\vec{R},\hat{\vec{j}}) = \frac{R_y}{R} ; \; \cos(\vec{R},\hat{\vec{k}}) = \frac{R_z}{R} . \qquad (4.5)$$

У випадку рівноваги системи збіжних сил $\vec{R} = 0$. Це означає що силовий многокутник, побудований із сил збіжної системи має бути замкнутим (кінець останнього вектора співпадає з початком першого) (Рис. 1.10).

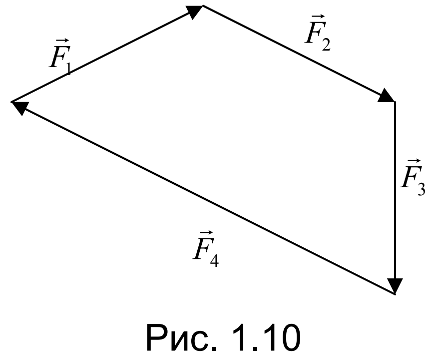


Рис. 1.10

В аналітичній формі умова рівноваги системи збіжних сил має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \tag{4.6}$$

Таким чином, для рівноваги просторової системи збіжних сил, прикладених до твердого тіла, необхідно та достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

§ 5. Момент сили відносно точки

Під *моментом сили* відносно точки розуміють вектор, що прикладений в цій точці, і який визначається векторним добутком радіус-вектора точки прикладання сили на силу (Рис. 1.11).

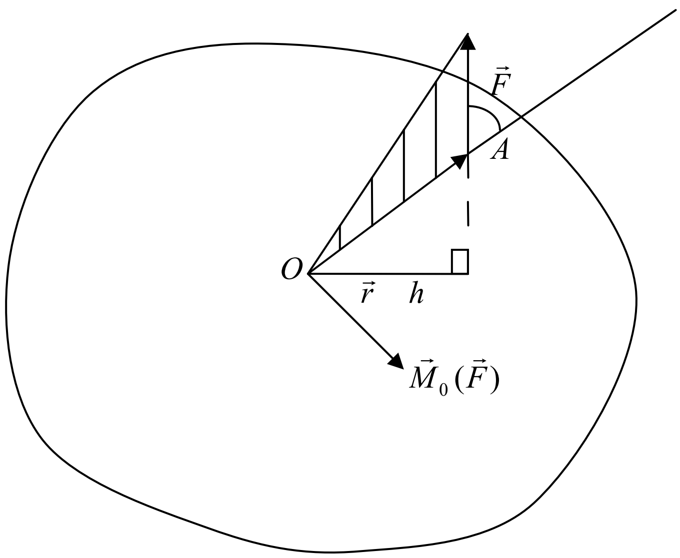


Рис. 1.11

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{5.1}$$

Згідно означення векторного добутку

$$\left|\vec{M}_0(\vec{F})\right| = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}). \tag{5.2}$$

В теоретичній механіці вводять поняття *плече сили відносно точки*, під яким розуміють найкоротшу відстань від цієї точки до напряму дії сили, тобто довжину перпендикуляра опущеного з моментної точки на напрям дії сили.

$$h = r\sin(\vec{r}, \vec{F}). \tag{5.3}$$

Момент сили відносно точки чисельно дорівнює добутку сили на її плече відносно цієї точки.

$$\left|\vec{M}_0(\vec{F})\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot h; \; \left|M_0(\vec{F})\right| = F \cdot h. \tag{5.4}$$

Якщо лінія дії сили проходить через моментну точку, то момент цієї сили дорівнює *0* (бо *h=0*). Зауважимо, що в теоретичній механіці говорять: *модуль момента сили чисельно дорівнює подвійній площі трикутника, побудованого на силі та моментній точці*.

$$M_0(\vec{F}) = 2S_{\vartriangle AOB} = S_{OABC}. \tag{5.5}$$

Нехай сила $\vec{F}$ задана своїми проекціями на осі деякої системи координат і задані координати точки її прикладання (Рис. 1.12).

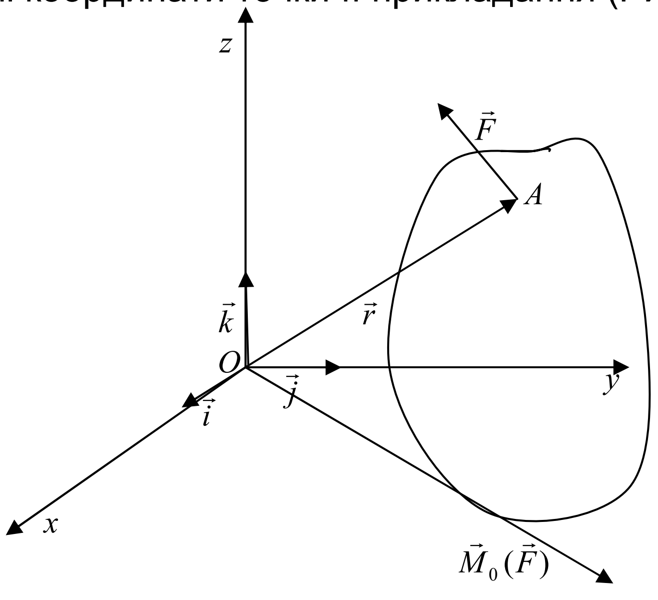


Рис. 1.12

Тоді

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}. \tag{5.6}$$

Звідси, проекції момента сили *F* відносно точки О на осі координат:

$$M_{0x} = yF_z - zF_y;$$

$$M_{0y} = zF_x - xF_z; \qquad (5.7)$$

$$M_{0z} = xF_y - yF_x.$$

Модуль момента сили $\left|\vec{M}_0(\vec{F})\right|$ визначається формулою:

$$\left|\vec{M}_0(\vec{F})\right| = \sqrt{\left(yF_z - zF_y\right)^2 + \left(zF_x - xF_z\right)^2 + \left(xF_y - yF_x\right)^2}. \qquad (5.8)$$

Косинуси кутів момента $\vec{M}_0(\vec{F})$ з осями координат:

$$\cos\left(\angle\left(\vec{M}_0(\vec{F}),\vec{i}\right)\right) = \frac{M_{0x}\left(\vec{F}\right)}{\left|\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right|};$$

$$\cos\left(\angle\left(\vec{M}_0(\vec{F}),\vec{j}\right)\right) = \frac{M_{0y}\left(\vec{F}\right)}{\left|\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right|}; \qquad (5.9)$$

$$\cos\left(\angle\left(\vec{M}_0(\vec{F}),\vec{k}\right)\right) = \frac{M_{0z}\left(\vec{F}\right)}{\left|\vec{M}_0\left(\vec{F}\right)\right|}.$$

У випадку плоскої системи сил в теоретичній механіці користуються поняттям *алгебраїчний момент сили*, під яким розуміють фізичну величину, яка визначається як добуток сили на її плече, взятий із знаком «+» або «–».

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \qquad (5.10)$$

Знак «+» беруть тоді, коли сила намагається обертати тіло навколо моментної точки проти годинникової стрілки; знак «–» якщо за годинниковою стрілкою.

Приклад:

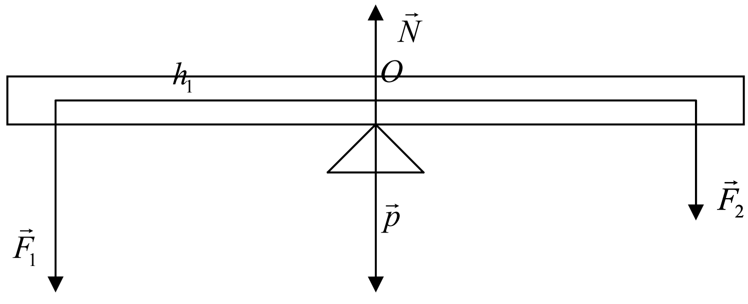


Рис. 1.13

$$M_0(\vec{F}_1) = +F \cdot h; \; M_0(\vec{P}) = 0;$$

$$M_0(\vec{F}_2) = -F \cdot h.$$

Одиницею вимірювання моменту сили в системі СІ є $H \cdot м$.

§ 6. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називають алгебраїчний момент проекції цієї сили на площину, яка перпендикулярна до осі, відносно точки перетину осі з цією площиною (Рис. 1.14). Момент сили відносно осі є додатнім, якщо проекція сили на площину, яка перпендикулярна осі (проекція сили на площину є вектором), намагається обертати тіло навколо додатного напряму осі проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо вона намагається обертати тіло за годинниковою стрілкою.

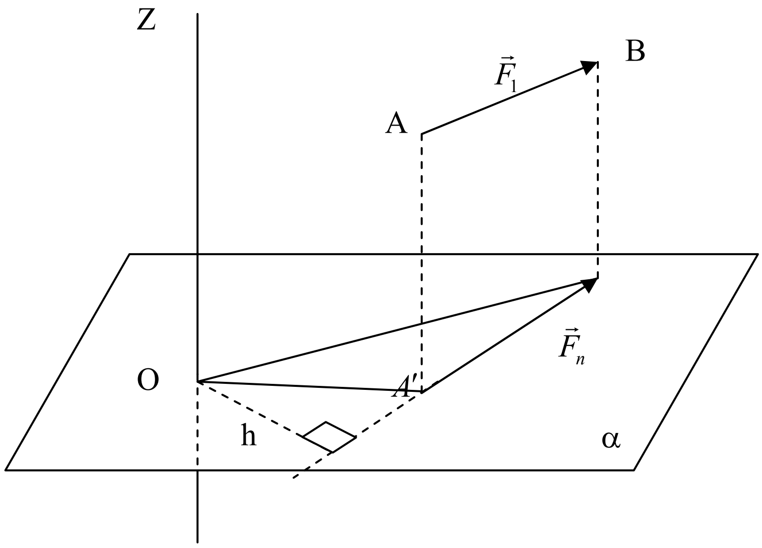


Рис. 1.14

Моменти сили відносно осі, наприклад *OZ* позначимо $\vec{M}_z\left(\vec{F}\right)$. Згідно означення

$$\vec{M}_z\left(\vec{F}\right) = \vec{M}_O\left(\vec{F}_n\right) = \pm hF_n, \tag{6.1}$$

де $\vec{F}_n$ – вектор проекції сили $\vec{F}$ на площину α, яка перпендикулярна до осі *OZ*, а точка *O* – точка перетину осі *OZ* та площини α (Рис. 1.14).

Із означення моменту сили відносно осі слідує, що введений вище алгебраїчний моменти сили відносно точки можна вважати моментом сили відносно осі, що проходить через цю точку і є перпендикулярною до площини, в якій лежить сила і момент на точка. Момент сили відносно осі також можна виразити через площу трикутника, побудованого на проекції сили $\vec{F}_n$ і точці перетину O осі *Z* з площиною α:

$$M_z(\vec{F}) = \pm hF_n = \pm 2S_{\Delta OA_1B_1}\,. \tag{6.2}$$

Зауважимо, що момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

1) $\vec{F} \parallel OZ(\vec{F}_n = 0)$;

2) лінія дії сили перетинає вісь (*h=0*, плече сили $\vec{F}_n$ дорівнює 0).

Об’єднуючи ці два випадки можна сказати, що момент сили відносно осі дорівнюють нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.

Легко показати, що момент сили відносно осі дорівнює проекції вектора моменту сили відносно будь-якої точки на осі на цю ж вісь.

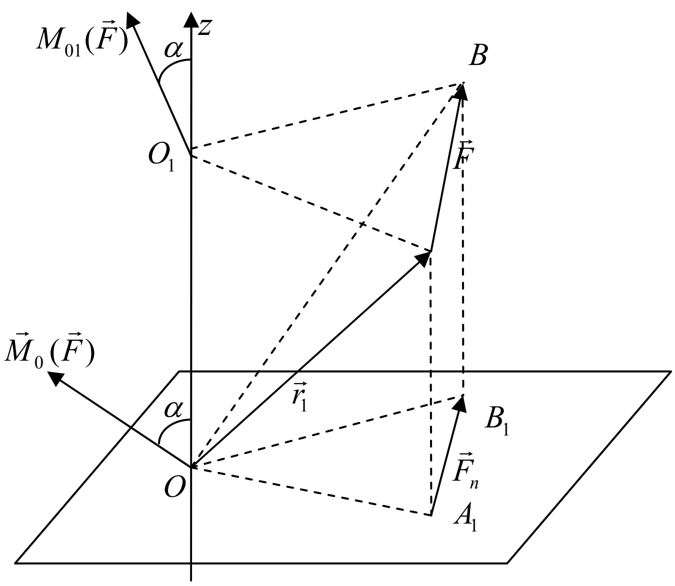


Рис. 1.16

Використавши зв'язок момента сили відносно осі з моментом сили відносно точки на осі, можна отримати формули для обчислення моментів відносно осей координат, якщо відомо проекції сили на осі координат і координати точок прикладання сили.

Для осі *OX*:

$$M_x(\vec{F}) = M_{ox}(\vec{F}).$$

Знаємо, що

$$M_{ox}(\vec{F}) = yF_z - zF_y$$

тоді

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y. \qquad (6.3)$$

Аналогічно для осей *OY* та *OZ*.

$$M_y(\vec{F}) = M_{oy}(\vec{F}) = zF_x - xF_z. \qquad (6.4)$$

$$M_z(\vec{F}) = M_{oz}(\vec{F}) = xF_y - yF_x. \qquad (6.5)$$

Підставляючи в дані формули проекції сил F_x, F_y, F_z із відповідними знаками і координати точки прикладання сил, одержимо необхідні знаки проекцій $M_x(\vec{F})$, $M_y(\vec{F})$ та $M_z(\vec{F})$.

При розв'язуванні задач моменти силі відносно осі часто знаходять використовуючи його означення, тобто проектуючи силу на площину, яка перпендикулярна осі, та обчислюючи потім алгебраїчний момент цієї проекції відносно точки перетину осі з цією площиною.

§ 7. Зведення двох паралельних сил до рівнодійної

А. Паралельні сили, що діють в одну сторону

Розглянемо тверде тіло, на яке в точках A і B діють сили відповідно $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$. Завдання полягає в тому щоб знайти їх рівнодійну (Рис. 1.17).

Прикладемо в точках A і B рівні за модулем і протилежні за напрямом сили $\vec{S}_1$ та $\vec{S}_2$, які урівноважують систему сил еквівалентну нулю. Додаючи $\vec{S}_1 + \vec{F}_1 = \vec{R}_1$ та $\vec{S}_2 + \vec{F}_2 = \vec{R}_2$ одержимо дві сили $\vec{R}_1$ та $\vec{R}_2$ лінії яких перетинаються в точці D.

Перенесемо сили $\vec{R}_1$ та $\vec{R}_2$ в точку D і розкладемо кожну з них на дві складові по напрямах, паралельних до $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$ і відрізку прямої AB.

Одержимо складові сили, відповідно однакові за модулем і напрямом до сил в точках A і B:

$$\vec{S}_1 = \vec{S}_1^{'};\ \vec{S}_2 = \vec{S}_2^{'};\ \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{'};\ \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{'}.$$

Відкинемо систему сил $\left(\vec{S}_1^{'}, \vec{S}_2^{'}\right) \sim 0$. Тоді рівнодійна сила

$$\vec{R} = \vec{F}_1^{'} + \vec{F}_2^{'} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Перенесемо її в точку C.

З подібності $\vartriangle DKE$ і $\vartriangle DAC$

$$\frac{AC}{DC} = \frac{S_1^{'}}{F_1^{'}} = \frac{S_1}{F_1}.$$

Аналогічно з подібністю $\vartriangle BCD$ і $\vartriangle MLD$

$$\frac{BC}{DC} = \frac{S_2^{'}}{F_2^{'}} = \frac{S_2}{F_2}.$$

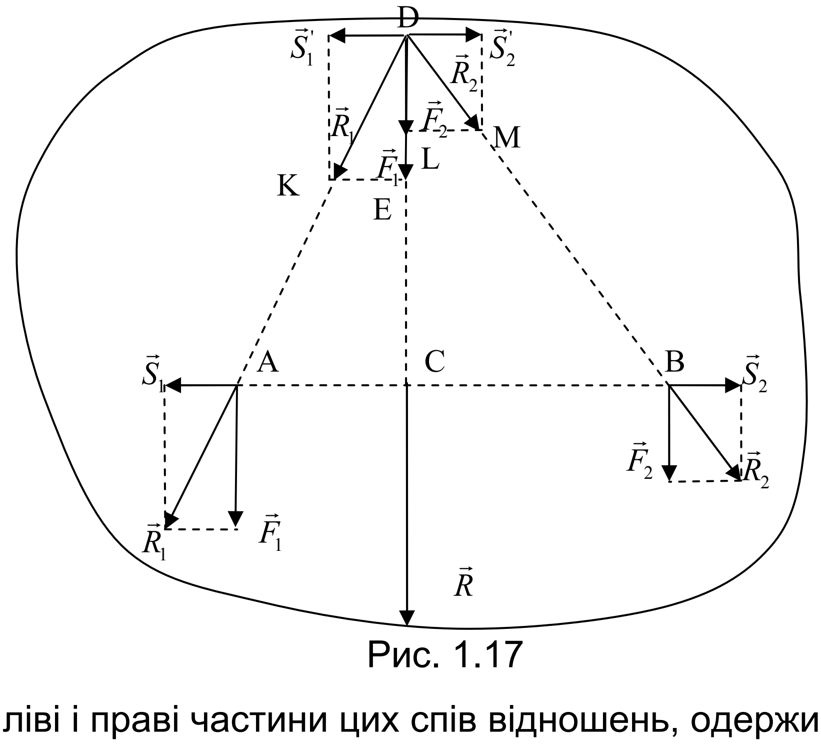


Рис. 1.17

Поділивши ліві і праві частини цих спів відношень, одержимо:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ або } \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}. \qquad (7.1)$$

Таким чином, *рівнодійна двох паралельних сил, що напрямлені в одну сторону, паралельна до цих сил, дорівнює за модулем їх сумі і* *напрямлена в цю ж сторону*. Лінія дії рівнодійної сили розміщена між лініями дії заданих сил і ділить відрізок прямої на частини, обернено пропорційні силам внутрішнім чином.

Зауваження:

- Якщо дві паралельні сили, напрямлені в одну сторону, можна замінити однією рівнодійною, то і будь-яку силу можна розкласти на дві паралельні сили, напрямлені в одну сторону.
- Застосовуючи послідовно правило зведення двох паралельних сил, напрямлених в одну сторону, до довільної системи сил, що напрямлені в одну сторону, можна звести її до однієї рівнодійної сили.

Б. Різні за модулем паралельні сили, що напрямлені в протилежні сторони

Нехай на твердому тілі в точках A і B діють дві паралельні сили $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, причому $\left|\vec{F}_1\right| > \left|\vec{F}_2\right|$, які напрямлені в протилежні сторони (Рис. 1.18).

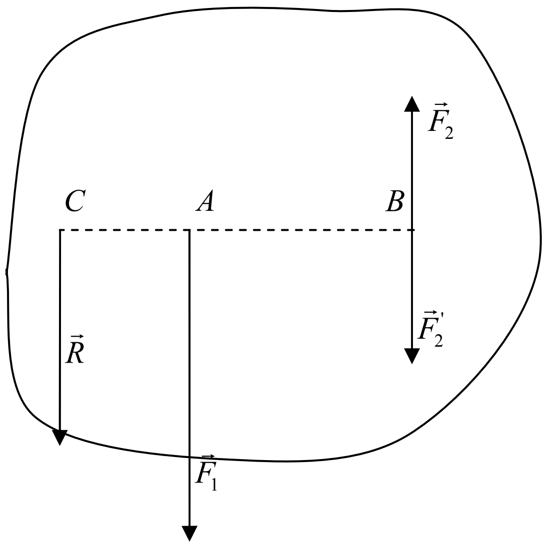


Рис. 1.18

Розкладемо силу $\vec{F}_1$ на дві паралельні сили: $\vec{F}_2'$ $\left(\vec{F}_2' = -\vec{F}_2\right)$ і прикладену в точці B та $\vec{R}\,(R = F_1 - F_2)$, напрямлені в одну сторону. Точку C прикладання сили $\vec{R}$ визначимо із співвідношення: $\dfrac{AC}{F_2} = \dfrac{BC}{F_1} = \dfrac{AB}{R}$ (тут сила $\vec{F}_1$ є рівнодійною $\vec{R}$ та $\vec{F}_2^{'}$). Система сил $(\vec{F}_2^{'}, \vec{F}_2) \sim 0$. Таким чином дія сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{R}$, а $\vec{R}$ є рівнодійною $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$.

Отже, *дві нерівні паралельні сили напрямлені в протилежні сторони можна звести до рівнодійної сили, яка паралельна до цих сил і напрямлена в сторону більшої сили*. Лінія дії рівнодійної розміщена за лінією дії більшої сили і ділить відстань між заданими силами на частини, обернено пропорційні силам, зовнішнім чином.

§ 8. Пара сил. Момент пари сил

В теоретичній механіці пара сил розглядається як одне із основних понять. *Парою сил* називають систему двох рівних за модулем паралельних сил, що напрямлені в протилежні сторони (Рис.1.19).

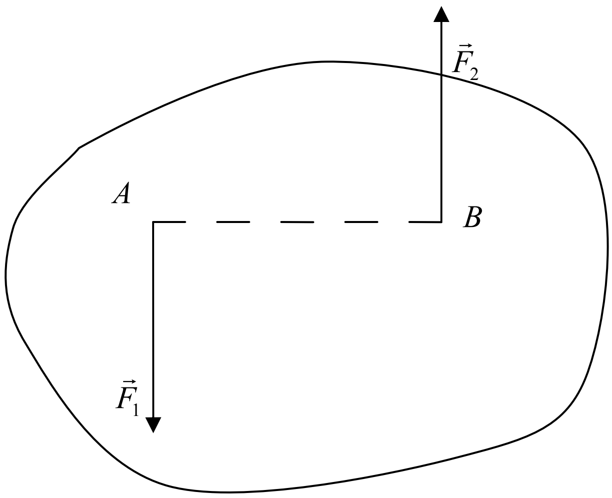


Рис. 1.19

Пару сил можна розглядати як граничний випадок двох нерівних паралельних сил напрямлених у протилежні сторони. Тоді модуль рівнодійної сили дорівнює нулю. А точка прикладання рівно дії R знаходиться на безмежності.

$$R = F_1 - F_2 = 0;$$

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}; \quad R \to 0; \quad \frac{AB}{R} \to \infty;$$

значить $AC \to \infty, \quad BC \to \infty.$

Підкреслимо, що пара сил не утворює систему сил еквівалентну нулю. Під дією пари сил вільне тверде тіло виходить з рівноваги. Як правило пару сил прикладають до тіла для здійснення його обертального руху, наприклад до маховика вентильного крану при його закриванні чи відкриванні (Рис. 1.20).

Зауважимо, що пару сил не можна замінити однією силою, вона не має рівнодійної, а є такою системою сил, спростити яку неможливо. Пара сил характеризується площиною дії, подібно до того як сила характеризується лінією дії.

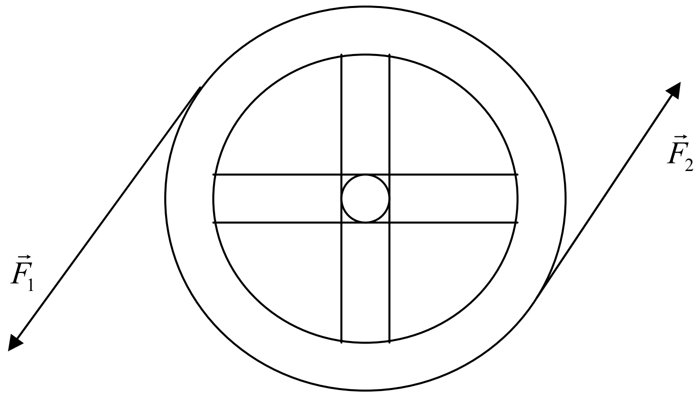


Рис. 1.20

Площиною дії пари сил називають площину, в якій розташовані сили пари.

Для кількісної характеристики дії пари сил вводять поняття моменту пари сил. *Моментом пари сил* називають вектор, модуль якого дорівнює добутку сили пари на її плече і напрямлений перпендикулярно до площини дії пари сил так, щоб з його кінця було видно намагання пари сил обертати тверде тіло проти годинникової стрілки. Позначають момент пари сил $\vec{M}$. Під плечем пари сил розуміють найкоротшу відстань між лініями дії сил, які утворюють пару. Момент пари сил є *ковзаючим вектором*, тобто він не має постійної точки прикладання, його можна прикладати (зображати) в будь-якій точці площини дії пари сил (Рис. 1.21).

$$M = F_1 h = F_2 h, \tag{8.1}$$

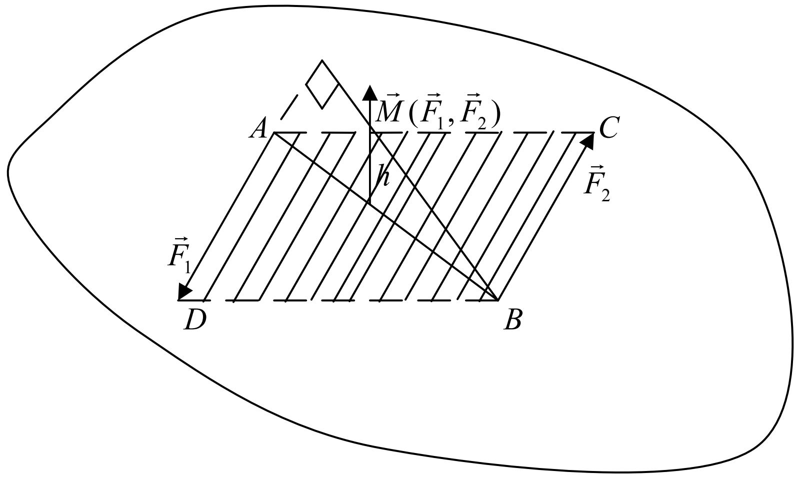


Рис. 1.21.

$$M = S_{\square ADBC} = 2S_{\triangle ABD} = 2S_{\triangle ABC}. \tag{8.2}$$

При розгляді пари сил часто користуються поняття алгебраїчного моменту пари сил, під яким розуміють взятий із знаком «+» або «-» добуток однієї із сил пари на плече пари сил.

$$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = \pm Fh. \tag{8.3}$$

Знак «+» береться при намаганні пари обертати тверде тіло проти руху стрілки годинника, а «-» - за рухом стрілки годинника.

Теорема (про еквівалентність двох пар сил, що розміщенні в одній площині). ***Пару сил, що діє на тверде тіло, можна замінити іншою парою сил, яка розташована у тій же площині дії і має однаковий з першою парою алгебраїчний момент.***

Цю теорему формулюють ще й так.

Дві пари сил, розташовані в одній площині, еквівалентні, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти.

Доведення

Нехай на тверде тіло діє пара сил $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ з алгебраїчним моментом $M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ (Рис.1.22).

$$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = -F_1 h = -F_2 h.$$

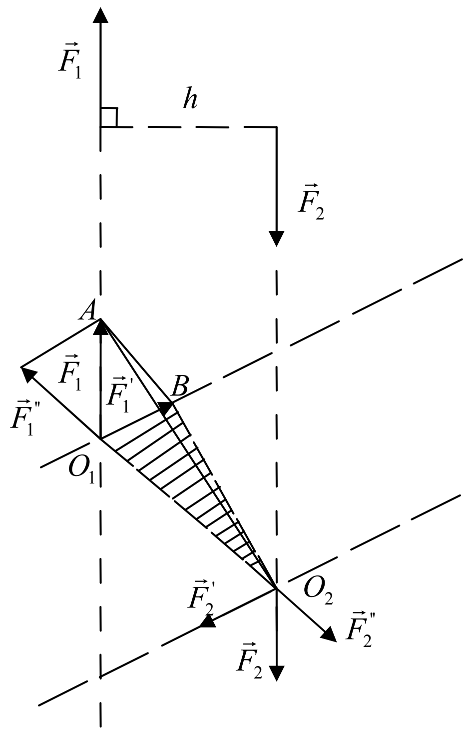


Рис.1.22

Перенесемо силу $\vec{F}_1$ в точку O_1, а силу F_2 в точку O_2 і проведемо через точки O_1 і O_2 дві будь-які паралельні прямі, які перетинають лінії дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ а значить лежать в площині дії заданої пари сил. З'єднаємо точки O_1 і O_2 та розкладемо силу $\vec{F}_1$ в точці O_1 і силу $\vec{F}_2$ в точці O_2 за правилом паралелограма за одержаними напрямами.

Так як сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ утворюють пару сил, то $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$;

а, отже,

$$\vec{F}_1^{'} = -\vec{F}_2^{'},\ \vec{F}_1^{"} = -\vec{F}_2^{"}.$$

Тому

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1^{'}, \vec{F}_2^{'}, \vec{F}_1^{"}, \vec{F}_2^{"}).$$

Сили $\vec{F}_1^{"}$ і $\vec{F}_2^{"}$ діють вздовж однієї прямої у протилежних напрямках і тому утворюють еквівалентну нулю систему $(\vec{F}_1^{"}, \vec{F}_2^{"}) \sim 0$ і її можна відкинути. Тоді $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1^{'}, \vec{F}_2^{'})$.

Покажемо, що алгебраїчні моменти у цих пар сил є однакові.

1)Напрям обертання у них один і той же.

2) $M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=2S_{\vartriangle O_1O_2A}$; $M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=2S_{\vartriangle O_1O_2B}$.

$\vartriangle O_1O_2A$ і $\vartriangle O_1O_2B$ є рівновеликі оскільки, оскільки основа O_1O_2 є спільна, а вершини А і В лежать на паралельних прямих; тому висоти цих трикутників однакові.

$$S_{\vartriangle O_1O_2B}=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot h;$$

$$S_{\vartriangle O_1O_2A}=\frac{1}{2}O_1O_2\cdot h;$$

$$S_{\vartriangle O_1O_2B}=S_{\vartriangle O_1O_2A}.$$

Отже,

$$M(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=M(\vec{F}_1^{'},\vec{F}_2^{'}).$$

Теорема доведена.

Висновки:

- *Пару сил як жорстку фігуру можна довільно повертати і переносити в її площині дії.*
- *Можна змінювати плече пари сил і модуль сили, зберігаючи при цьому алгебраїчний момент пари сил і площину дії.*

Теорема (про перенесення пари сил в паралельну площину). ***Дія пари сил на тверде тіло не змінюється при перенесенні цієї пари сил в паралельну площину.***

Доведення

Для доведення цієї теореми розглянемо пару сил $(\vec{F}_1^{'},\vec{F}_2^{'})$, які прикладені в точках А та В площини *П₁* твердого тіла. Виберемо довільну площину *П₂* паралельну до площини *П₁* і спроектуємо точки А і В на площину *П₂* (Рис. 1.23).

У точці A_1 прикладемо систему сил $(\vec{F}_1^{'},\vec{F}_2^{'})\sim 0$ і у точці B_1 – $(\vec{F}_1^{''},\vec{F}_2^{''})\sim 0$. Виберемо сили $\vec{F}_1^{'}$ і $\vec{F}_2^{'}$ так, щоб вони задовольняли умови

$\vec{F}_1^{'} = \vec{F}_1$; $\vec{F}_2^{'} = \vec{F}_2$. Додамо сили $\vec{F}_1 + \vec{F}_2^{''} = \vec{R}$. Оскільки $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2^{''}\right|$, то точка прикладання *O* ділить AB_1 пополам, напрям $\vec{R}$ співпадає з $\vec{F}_1^{'}$ і $\vec{F}_2^{''}$.

Аналогічно $\vec{F}_2 + \vec{F}_1^{''} = \vec{R}$, так як $\left(\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_1^{''}\right|\right)$ то $\vec{R} = \vec{R}^{'}$ або $(\vec{R}, \vec{R}^{'}) \sim 0$ і її можна відкинути.

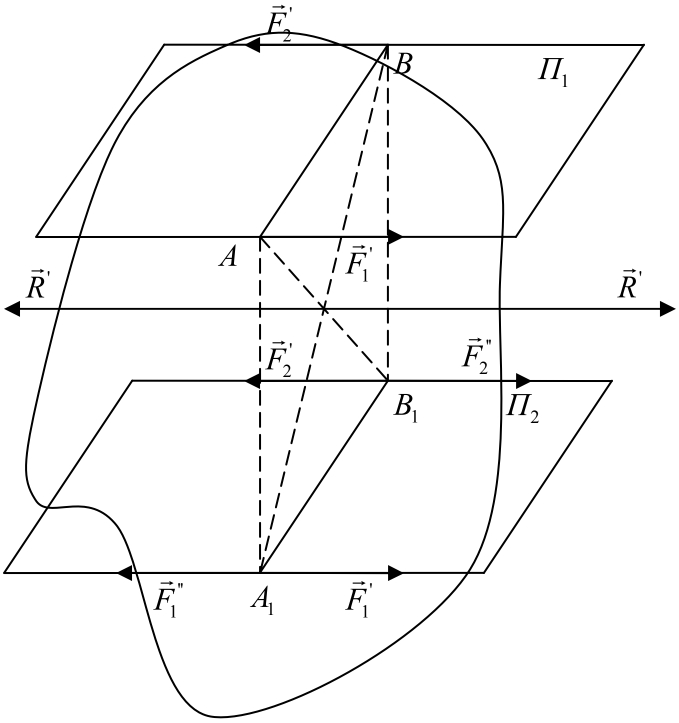


Рис. 1.23

Таким чином, пара сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$ еквівалентна такій же парі сил $\left(\vec{F}_1^{'}, \vec{F}_2^{'}\right)$, яка діє в іншій, паралельній площині. А це значить, що пару сил, не змінюючи її дії на тверде тіло, можна перенести із однієї площини в іншу, паралельну їй.

Теорема (про суму моментів сил, що утворюють пару). ***Сума моментів сил, що утворюють пару, відносно будь-якої довільної точки не залежить від вибору точки і дорівнює моменту пари сил.***

Доведення

Нехай задана пара сил $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right)$. Треба довести:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2),$$

де O – будь-яка точка (Рис. 1.24).

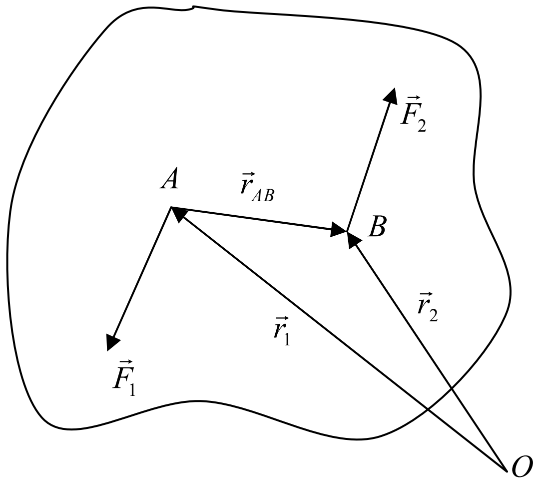


Рис. 1.24.

Для доведення розглянемо ліву частину цієї рівності

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_2,$$

тут враховано, що $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Оскільки

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{AB},$$

то

$$\vec{M}_0(\vec{F}_1) + \vec{M}_0(\vec{F}_2) = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

Вибравши за точку O (моментну точку) послідовно точки A і B, будемо мати:

$$\vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) + \vec{M}_B(\vec{F}_2) = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

Момент пари сил дорівнює моменту однієї сили відносно точки прикладання другої сили цієї пари сил.

Якщо моментна точка O вибрана в площині дії пари сил, то, як частинний випадок, справедлива теорема про суму алгебраїчних моментів сил пари: *сума алгебраїчних моментів сил пари відносно довільної точки в площині дії пари сил, дорівнює алгебраїчному моменту пари сил:*

$$M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) = M(\vec{F}_1, \vec{F}_2).$$

§ 9. Додавання пар сил

Теорема. *Дві пари сил, які діють на одне і теж тверде тіло в площинах, що перетинаються, можна замінити однією еквівалентною парою сил, момент якої дорівнює векторній сумі моментів задах сил.*

Доведення

Нехай маємо дві пари сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^{'})$ і $(\vec{F}_2, \vec{F}_2^{'})$, які діють в площинах, що перетинаються (Рис. 1.25).

Такі пари сил можна одержати із пар сил,які довільним чином розташовані у площинах Π_1 та Π_2, шляхом паралельного переносу, повороту у площині дії і одночасної зміни плеча та модуля сил пар. Дано сили в точках A і B

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad \vec{R}^{'} = \vec{F}_1^{'} + \vec{F}_2^{'}.$$

Сили $\vec{R}^{'}$ та $\vec{R}$ (складають) утворюють пару сил, оскільки прикладені в різних точках, $\vec{R} = \vec{R}^{'}$, бо є сумою рівних за величиною і протилежно напрямлених сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1^{'})$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2^{'})$. Таким чином, при додаванні двох пар сил, що діють в різних площинах утворюється еквівалентна пара сил

$$(\vec{R}, \vec{R}^{'}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1^{'}; \vec{F}_2, \vec{F}_2^{'}).$$

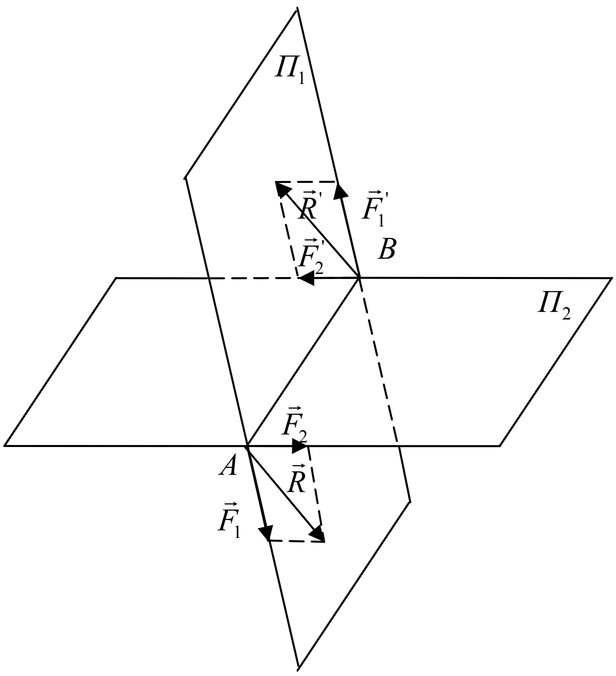


Рис. 1.25

Тоді

$$\vec{M}(\vec{R},\vec{R}') = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{R} = \vec{r}_{BA} \cdot (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F}_1 + \vec{r}_{BA} \cdot \vec{F}_2 =$$
$$= \left[\vec{r}_{BA}, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_{BA}, \vec{F}_2\right] = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

Отже

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \qquad (9.1)$$

Момент еквівалентної пари сил дорівнює векторній сумі моментів заданих пар сил.

РОЗДІЛ ІІ. КІНЕМАТИКА

§ 1. Кінематика точки. Швидкість точки

У кінематиці точки розглядається характеристики руху матеріальної точки як траєкторія швидкість, прискорення, а також методи їх визначення при різних способах задання руху. Важливим у кінематиці є поняття траєкторії. *Траєкторією* називають геометричне місце точок, в яких перебуває рухомий об’єкт протягом всього часу руху відносно деякої системи відліку. *Під системою відліку* розуміють тіло, відносно якого розглядається рух даного об’єкта і зв’язану з ним систему координат. Форма траєкторії залежить від вибраної системи відлуку. Наприклад: льотчик здійснює бомбардування об’єкта. Відносно Землі траєкторія параболічна, а відносно літака – прямолінійна.

Розглянемо рух матеріальної точки відносно декартової системи координат. Положення точки, в будь-який момент задане, якщо відомо зміну руху вектора з часом,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ або } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називається рівнянням руху точки.

Нехай в момент часу t положення точки визначається радіус-вектором $\vec{r}$, а в момент часу $t + \Delta t \to \vec{r} + \Delta\vec{r}$ (Рис. 2.1).

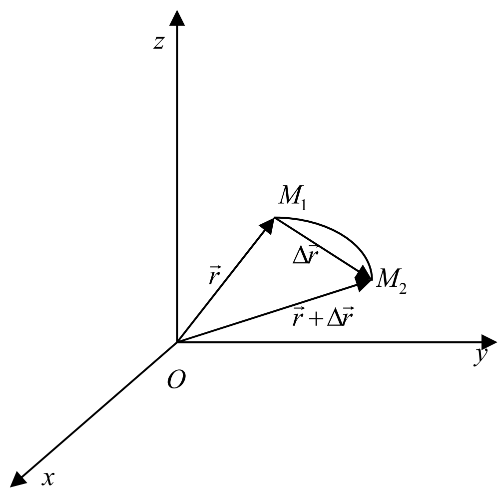


Рис. 2.1.

Під *швидкістю* розуміють границю відношення приросту радіус-вектора $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt, за який цей приріст відбувся, якщо цей проміжок часу прямує до нуля.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

Таким чином:

- Точкою прикладання вектора швидкості $\vec{V}$ є рухома матеріальна точка;
- Модуль швидкості $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$;
- Напрямлена швидкість по дотичній до траєкторії в даній точці (Рис. 2.2).

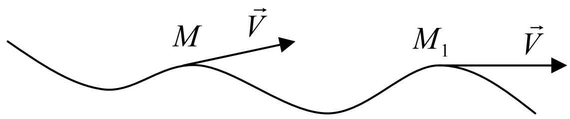


Рис. 2.2.

§ 2. Швидкість в декартовій системі координат

Згідно означення:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.1)$$

а

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.2)$$

Тоді

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (2.3)$$

В теоретичній механіці прийнято похідну по часу від будь-якої величини позначати крапкою зверху:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \ \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \ \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Тому

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \tag{2.4}$$

Модуль швидкості у декартовій системі координат має вигляд:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ , \tag{2.5}$$

а напрямні косинуси, що визначають напрям вектора швидкості, можна знайти за допомогою формул:

$$\begin{cases} \cos(\vec{V}\hat{,}\vec{i}) = \dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ \cos(\vec{V}\hat{,}\vec{j}) = \dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \\ \cos(\vec{V}\hat{,}\vec{k}) = \dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \end{cases} \tag{2.6}$$

§ 3. Швидкість у полярній системі координат

При розгляді руху точки на площині зручно користуватися полярною системою координат. Виберемо довільну точку O і зв’яжемо з нею систему координат (Рис. 2.3). Зв'язок декартових координат з полярними визначається так:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \tag{3.1}$$

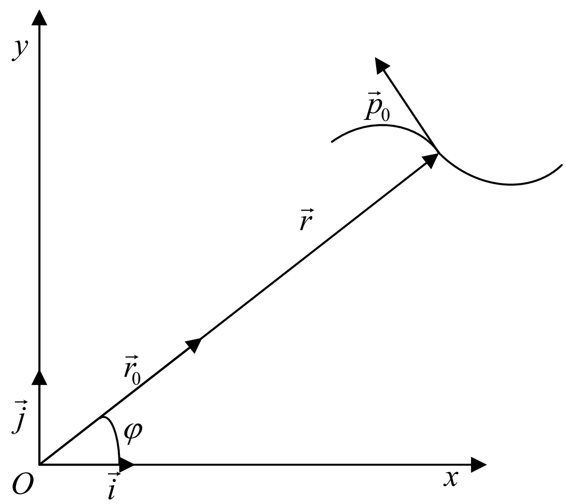


Рис. 2.3.

Знайдемо вигляд вектора швидкості у полярній системі координат. Як відомо швидкість знаходиться за допомогою формули:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В загальному випадку радіус вектор точки в декатовій системі координат має вигляд

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{3.2}$$

враховуючи що ми розглядаємо двовимірний випадок та перехід до полярних координат, отримаємо:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi). \tag{3.3}$$

Тоді

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) + r(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Введемо вектори $\vec{r}_0$ та $\vec{p}_0$:

$$\vec{r}_0 = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,\ \vec{p}_0 = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \tag{3.4}$$

після чого вектор швидкості в полярній системі координат набере вигляду:

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0. \tag{3.5}$$

Знайдемо модулі і скалярний добуток векторів $(\vec{r}_0, \vec{p}_0)$:

$$\left|\vec{r}_0\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1;$$

$$\left|\vec{p}_0\right| = \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 1;$$

$$(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = (\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi)(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}) = -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

З другого боку

$$(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = r_0 p_0 \cos(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = 1\cdot 1\cdot\cos(\vec{p}_0, \vec{r}_0) = 0.$$

Тобто, вектори $\vec{r}_0$ і $\vec{p}_0$ перпендикулярні $(\widehat{\vec{r}_0, \vec{p}_0}) = 90^0$. $\vec{r}_0$ – одиничний вектор напрямлений вздовж $\vec{r}$, а $\vec{p}_0$ – одиничний вектор $\perp$ до $\vec{r}_0$.

Модуль швидкості в полярній системі координат, можна знайти згідно формули:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\ . \tag{3.6}$$

З формули (3.5) видно, що швидкість у полярній системі координат є сумою двох векторів $\vec{V}_r$ та $\vec{V}_\varphi$ (Рис. 2.4):

$$\vec{V}_r = \dot{r}\vec{r}_0\,,\ \ \vec{V}_\varphi = r\dot{\varphi}\vec{p}_0\,. \tag{3.7}$$

які називаються відповідно радіальною та трансверсальною швидкістю. Отже, при русі точки по криволінійній плоскій траєкторії, вектор швидкості рівний:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\varphi \tag{3.8}$$

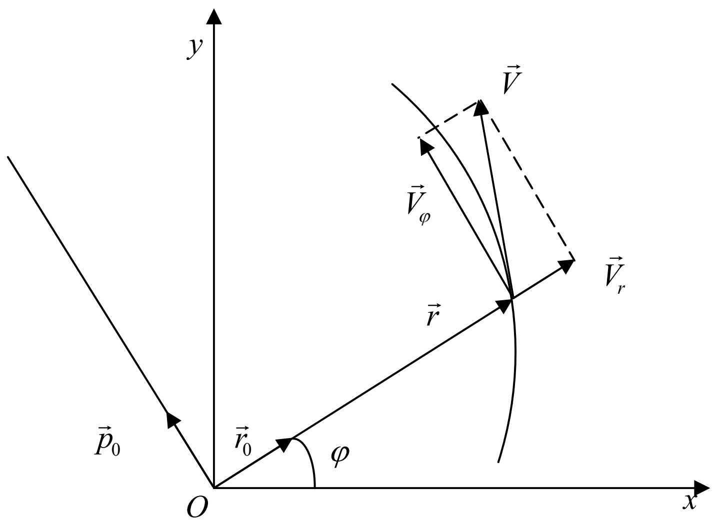


Рис. 2.4

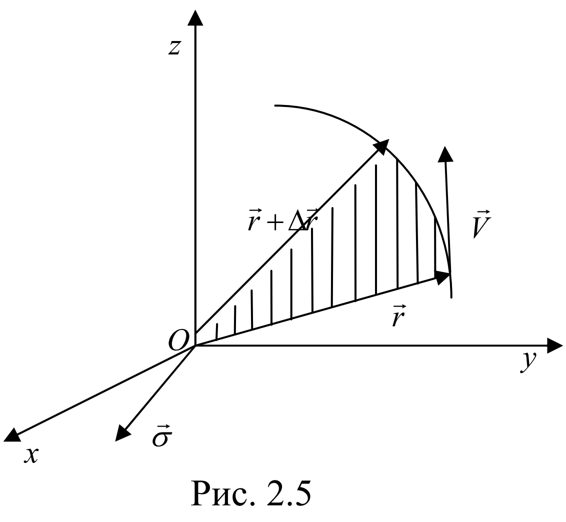


Рис. 2.5

§ 4. Секторна швидкість

Під *секторною швидкістю* розуміють вектор який визначається векторним добутком радіус-вектора точки на її швидкість:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \vec{V}\right]. \tag{4.1}$$

Величина секторної швидкості визначається границею відношення площі, що описана радіус-вектором точки за деякий проміжок часу, до величини цього проміжку часу, якщо останій прямує до нуля (Рис. 2.5).

$$\sigma = \left|\vec{\sigma}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \qquad (4.2)$$

Розписавши векторний добуток, для (4.1), отримаємо:

$$\sigma = \frac{1}{2} rV \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{V}}). \qquad (4.3).$$

§ 5. Прискорення матеріальної точки

Під *прискоренням* розуміють границю відношення зміни швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулась, якщо цей проміжок часу прямує до нуля (Рис. 2.6).

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

Таким чином

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (5.2)$$

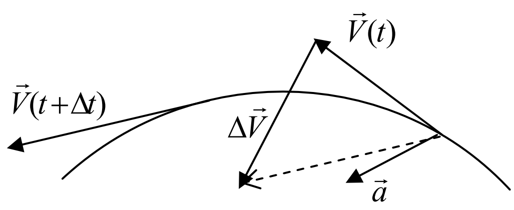


Рис. 2.6.

У декартовій системі координат швидкість визначається формулою:

$$\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}.$$

Тоді прискорення буде мати вигляд:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \qquad (5.3)$$

Звідси, проекції прискорення на осі координат будуть рівні:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}\ .$$

Отже, прискорення у декартовій системі координат визначаються формулою:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \qquad (5.4)$$

Тоді модуль прискорення має вигляд:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2\vec{i} + \ddot{y}^2\vec{j} + \ddot{z}^2\vec{k}}\ , \qquad (5.5)$$

а його напрям визначають напрямні косинуси:

$$\cos(\vec{a}\hat{,}\vec{i}) = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(\vec{a}\hat{,}\vec{j}) = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos(\vec{a}\hat{,}\vec{k}) = \frac{\ddot{z}}{a}\ . \qquad (5.6)$$

§ 6. Прискорення в полярній системі координат

Згідно означення прискорення можна знайти за допомогою формули:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\ .$$

Як показано вище, швидкість в полярній системі координат має вигляд:

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0\ ,$$

а рівняння руху:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases}$$

де $\vec{r}_0$ і $\vec{p}_0$ - залежні від часу вектори.

Тоді

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\varphi}\vec{p}_0) = \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0 + r\dot{\varphi}\dot{\vec{p}}_0. \qquad (6.1)$$

Знайдемо похідні за часом від $\vec{r}_0$ і $\vec{p}_0$:

$$\dot{\vec{r}}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) = -\vec{i}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + \vec{j}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = (-\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi)\cdot\dot{\varphi} = \vec{p}_0\dot{\varphi};$$

$$\dot{\vec{p}}_0 = \frac{d\vec{p}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(-\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi) = -\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}\vec{i} - \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\vec{j} = -\dot{\varphi}\vec{r}_0;$$

Отже,

$$\dot{\vec{r}}_0 = \dot{\varphi}\vec{p}_0, \quad \dot{\vec{p}}_0 = -\dot{\varphi}\vec{r}_0. \tag{6.2}$$

Підставивши (6.2) в (6.1) отримуємо:

$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{r}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0 + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0 - r(\dot{\varphi})^2\vec{r}_0 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{p}_0 + r\ddot{\varphi}\vec{p}_0$$

Тобто прискорення в полярній системі координат має вигляд:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{p}_0 \tag{6.3}$$

Як бачимо воно є сумою двох векторів. Позначимо:

$$\vec{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{r}_0 \tag{6.4}$$

– радіальне прискорення (напрямлене вздовж радіуса-вектора $\vec{r}$);

$$\vec{a}_\varphi = (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{p}_0 \tag{6.5}$$

– трансверсальне прискорення (напрямлене вздовж $\vec{p}_0$).

Таким чином:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\varphi, \tag{6.6}$$

його модуль знаходиться за формулою:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2}, \tag{6.7}$$

а кут між вектором прискорення та його складовими можна знайти з виразу:

$$tg\alpha = \frac{a_\varphi}{a_r}. \tag{6.8}$$

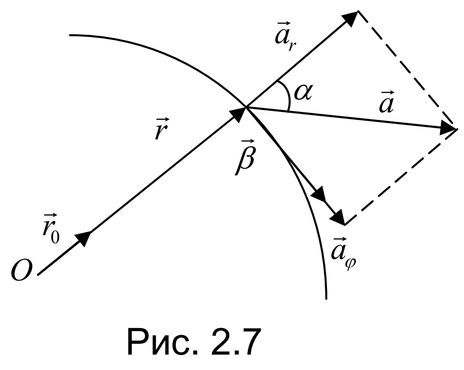


Рис. 2.7

§ 7. Природній спосіб задання руху

При природному способі заданні руху задаються траєкторія і закон руху точки по траєкторії. Рух точки розглядається відносно фіксованої системи відліку. Задання траєкторії відносно вибраної системи відліку реалізується різними способами: рівняннями (можливо разом з нерівностями), словесно або у вигляді графіка (в деякому масштабі). Наприклад, можна сказати, що траєкторія автомобіля, якого можна вважати матеріальною точкою, є дуга кола радіусом 10 км.

Для задання закону руху точки по траєкторії необхідно вибрати на траєкторії точку О, яка приймається за початок відліку відстаней (Рис 2.8). Відстань в одну сторону від точки О по траєкторії вважаються додатніми (наприклад вправо), а в іншу – від'ємними. Кім цього, потрібно задати початок відліку часу. Зазвичай за $t=0$ приймають момент часу, в який матеріальна точка проходить через точку О, або момент початку руху. Час до цього вважається від'ємним, а після – додатнім.

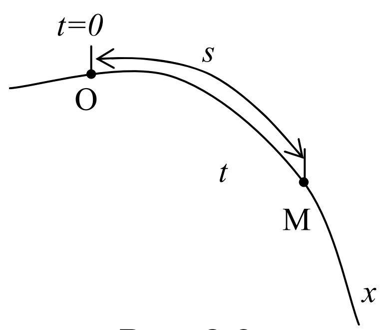


Рис. 2.8

Якщо в момент часу t рухома точка займає положення М, то закон руху точки по траєкторії задається залежністю від часу відстані s, що вимірюється від точки О до точки М. Тобто $s=f(t)$. Ця функція повинна бути неперервною і двічі диференційованою. Відстань s береться по траєкторії, незважаючи на складність форми траєкторії. Ця відстань не має прямого відношення до пройденого шляху точкою за час t, так як за початок вимірювання відстане може бути вибрана, в певних випадках, і кінцева точка руху. До того ж рух точки може бути і коливальним навколо початкової точки O.

Від задання руху в декартових координатах можна перейти і до задання природнім способом. Закон руху точки по траєкторії в диференціальній формі через декартові координати виражається наступною формулою:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\ , \tag{7.1}$$

і після інтегрування – в кінцевій формі

$$s = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_0^t \sqrt{\left[f_1'(t)\right]^2 + \left[f_2'(t)\right]^2 + \left[f_3'(t)\right]^2}\,dt\,, \tag{7.2}$$

якщо

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t). \tag{7.2}$$

За початок відліку відстаней прийнято точку траєкторії, в якій знаходиться матеріальна точка в початковий момент часу. Знак в квадратного кореня визначається напрямом додатніх і від'ємних відстаней.

§ 8. Швидкість матеріальної точки при природному способі задання руху

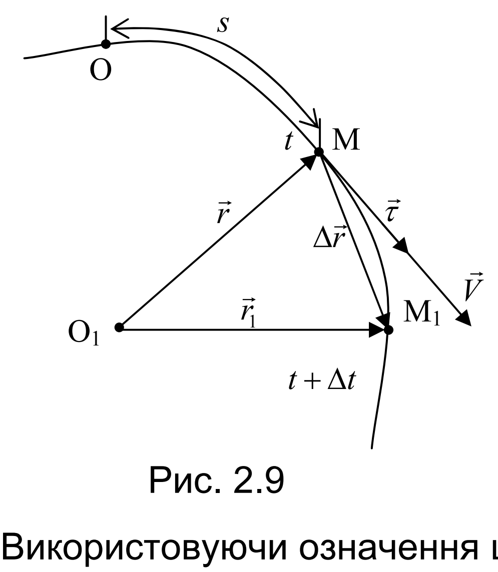


Рис. 2.9

Нехай рух точки задано природнім способом, тобто задано траєкторію точки і закон її руху по траєкторії $s = f(t)$. Обчислимо швидкість точки. Для цього використаємо радіус вектор $\vec{r}$ точки, початок якого знаходиться в нерухомій точці O_1 (Рис. 2.9). При русі точки її радіус-вектор змінюється із зміною часу, отже змінюється в залежності від відстані. Використовуючи означення швидкості маємо:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\dot{s}\,, \qquad (8.1)$$

або $\vec{V} = \dot{s}\vec{\tau}$, де $\vec{\tau} = d\vec{r}/ds$. Вектор $\vec{\tau}$ напрямлений по дотичній до траєкторії як похідна від вектора по скалярному аргументу і є одиничним вектором. Модуль цього вектора рівний одиниці, як границя відношення довжини хорди $|\Delta\vec{r}|$ до довжини стягуючої її дуги $|\Delta s|$ при прямуванні її до нуля.

Одиничний вектор $\vec{\tau}$ завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в сторону збільшення відстані незалежно від напрямку руху точки. При $ds > 0$ напрямок векторів $\vec{\tau}$ та $d\vec{r}$ співпадають. Вектор $d\vec{r}$ в цьому випадку напрямлений в сторону збільшення відстаней. Якщо точка рухається в напрямку зменшення відстані, то $ds < 0$ і напрямок векторів $\vec{\tau}$ та $d\vec{r}$ протилежні. Проте вектор $d\vec{r}$ напрямлений в сторону збільшення відстані.

При $\dot{s} > 0$ вектор швидкості напрямлений вздовж $\vec{\tau}$, тобто в сторону збільшення відстані; при $\dot{s} < 0$ він має напрямок протилежний до $\vec{\tau}$, тобто в сторону зменшення відстані.

Величина $V_\tau = \dot{s}$ називається алгебраїчною швидкістю матеріальної точки. Її можна вважати проекцією швидкості на додатній напрям дотичної до траєкторії, який співпадає з напрямом одиничного вектора $\vec{\tau}$.

Природне задання руху точки повністю визначає швидкість точки по величині і напрямку. Алгебраїчну швидкість знаходять диференціювання по часу закону зміни відстані. Одиничний вектор $\vec{\tau}$ визначається по заданій траєкторії.

§ 9. Прискорення точки при природному заданні руху

Враховуючи, що для швидкості точки маємо

$$\vec{V} = \dot{s}\vec{\tau} = V_\tau\vec{\tau}\,, \qquad (9.1)$$

у відповідності з означенням прискорення отримаємо:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{\tau}\right) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{9.2}$$

Знайдемо $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Довжина малої хорди з точністю до малих величин рівна довжині хорди, що стягує хорда. Для малих кутів можна записати рівність:

$$\frac{d\tau}{dt} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$$

Відповідно до цього отримуємо:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|\vec{n} = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|\left|\frac{ds}{dt}\right|\vec{n} = \frac{|\dot{s}|}{\rho}\vec{n},$$

де ρ – радіус кривизни (вважають додатнім).

Врахувавши останню формулу, отримаємо для визначення прискорення

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}, \tag{9.3}$$

так як $\dot{s}^2 = V^2$ і $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ напрямлено всередину вгнутості траєкторії паралельно одиничному вектору головної нормалі.

Отримано розклад прискорення точки за осям природного тригранника. Частина прискорення

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau}, \tag{9.4}$$

називається дотичною складовою прискорення. Друга частина

$$\vec{a}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}, \tag{9.5}$$

називається нормальною складовою прискорення. Вона напрямлена всередину вгнутості траєкторіє, тобто в сторону додатного напряму одиничного вектора головної нормалі $\vec{n}$, оскільки всередину вгнутості траєкторії напрямлено повне прискорення

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{9.6}$$

Отже проекції прискорення на природні осі:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{dV_\tau}{dt},\ a_n = \frac{V^2}{\rho},\ a_b = 0. \tag{9.7}$$

Третій одиничний вектор $\vec{b}$, що напрямлений вздовж бінормалі, так щоб три вектори $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ та $\vec{b}$ утворювали праву систему осей координат, визначає напрямок третьої природної осі.

Врахувавши ортогональність $\vec{a}_\tau$ та $\vec{a}_n$ отримуємо:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2},\ tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \tag{9.8}$$

При $\dot{s} > 0$ і $\ddot{s} > 0$ вектори швидкості і дотичної складової прискорення напрямлені в одну сторону – по $\vec{\tau}$. Рух точки є прискореним в додатному напрямку дотичної до траєкторії. Коли $\dot{s} < 0$ і $\ddot{s} < 0$ також ці вектори мають однаковий напрямок, і відповідно рух точки є прискореним, але у від'ємному напрямку дотичної до траєкторії.

Якщо $\dot{s} > 0$ і $\ddot{s} < 0$, то вектор швидкості напрямлений вздовж $\vec{\tau}$, вектор дотичного прискорення йому протилежний. Рух точки є сповільненим в додатному напрямку дотичної до траєкторії. При $\dot{s} < 0$ і $\ddot{s} > 0$ має сповільнений рух матеріальної точки у від'ємну сторону дотичної до траєкторії.

§ 10. Ступені вільності твердого тіла та теорема про проекції швидкостей

У теоретичній механіці під *твердим тілом* розуміють абсолютно тверде тіло, тобто тіло у якого віддаль між будь-якими двома точками не змінюються протягом всього часу руху. Рух твердого тіла у значній мірі залежить від числа його ступенів вільності. *Числом ступенів вільності* називають число незалежних параметрів, які визначають положення тіла відносно вибраної системи відліку. Вільне тверде тіло у загальному випадку має 6 ступенів вільності: три поступального руху і три обертального руху.

<u>Теорема:</u> ***При будь-якому русі твердого тіла проекції швидкостей точок на пряму, що їх з'єднує є рівними.***

Доведення:

Для доведення теореми розглянемо довільний рух твердого тіла. Виберемо довільні точки А і В, положення яких задається радіус векторами $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$ відносно системи координат з початком в точці О (Рис. 2.10). Нехай швидкість точки А – $\vec{V}_A$ а швидкість точки В – $\vec{V}_B$, які утворюють з прямою, що їх з'єднує відповідно кути α і β. З рисунка бачимо, що

$$\vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_{AB}. \qquad (10.1)$$

домноживши скалярно на $(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$ ліву частину і праву (піднесемо до скалярного квадрату), отримаємо:

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A)(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{BA}.$$

Але

$$\vec{r}_{BA} \cdot \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{BA}^{\,2} = const,$$

тобто

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = \vec{r}_{BA}^{\,2} = const. \qquad (10.2)$$

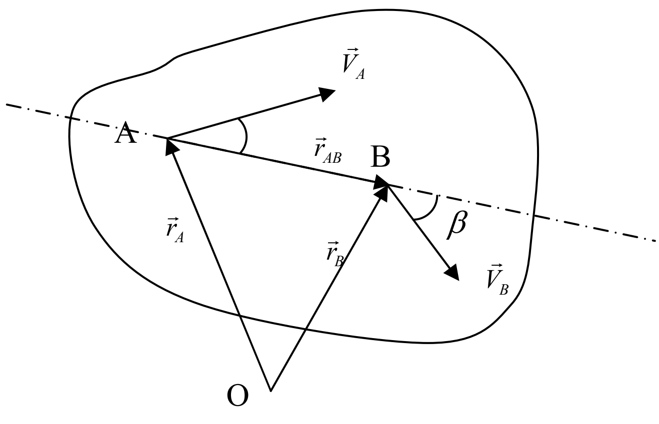


Рис. 2.10

Продиференціюємо вираз (10.2) за часом:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{BA}^{\,2}) = 0 ,$$

отримаємо:

$$2(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\left(\frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}\right) = 0 . \qquad (10.3)$$

Використавши означення швидкості, формула (10.3) набере вигляду:

$$2\vec{r}_{BA}(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = 0 . \qquad (10.4)$$

Перемножимо скалярно ліву частину рівності (10.4):

$$2r_{BA}V_B\cos\beta - 2r_{BA}V_A\cos\alpha = 0 ,$$

та винесемо спільне за дужки:

$$2r_{BA}(V_B\cos\beta - V_A\cos\alpha) = 0 . \qquad (10.5)$$

Оскільки $r_{BA} \neq 0$, то справедлива рівність:

$$V_B\cos\beta - V_A\cos\alpha = 0 ,$$

з якої випливає наступне:

$$V_B\cos\beta = V_A\cos\alpha . \qquad (10.6).$$

Теорема доведена.

Зауважимо, що є два найпростіші види руху твердого тіла: поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої осі. Їх комбінація дає можливість описати будь-який складний рух.

§ 11. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним рухом твердого тіла називають такий рух, при якому пряма проведена через будь-які дві точки твердого тіла залишається паралельною до свого початкового положення в кожний момент часу. Підкреслимо, що траєкторії точок твердого тіла, які рухаються поступально можуть бути не тільки прямими але і будь-якими кривими лініями, в тому числі і колами. Наприклад педалі велосипеда відносно рами здійснюють поступальний рух. Властивості поступального руху характеризує наступна теорема:

<u>Теорема:</u> При поступальному русі твердого тіла траєкторії, швидкості і прискорення точок тіла є однакові.

Доведення:

Нехай радіуси-вектори двох точок твердого тіла A і B відповідно дорівнюють $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$ (Рис. 2.11).

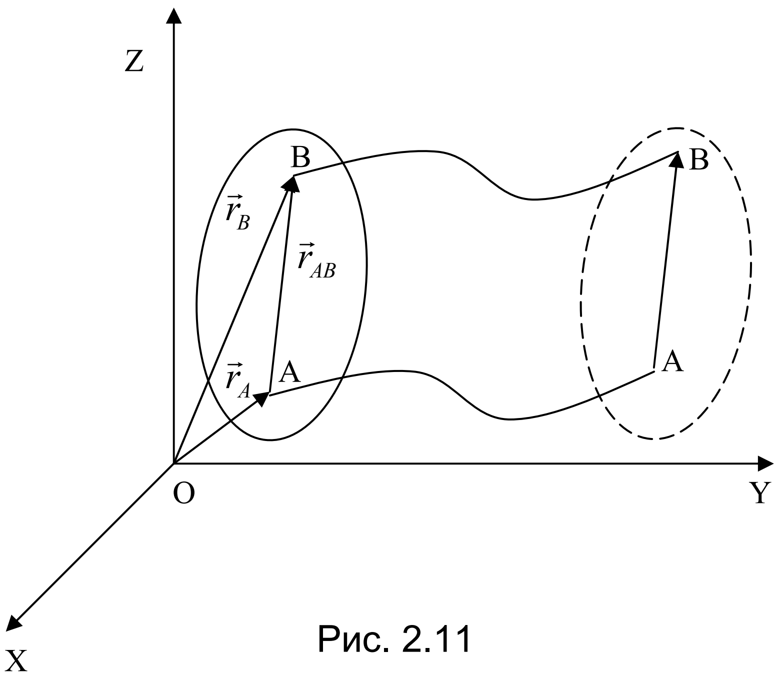


Рис. 2.11

При чому

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB}. \tag{11.1}$$

Для будь-якого твердого тіла вектор $\vec{r}_{AB}$ є постійним за модулем, а при поступальному русі і за напрямом, тобто $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{const}$. Кінці вектора $\vec{r}_{AB}$ опишуть однакові криві, які і будуть траєкторіями точок A та B. Продиференціювавши (11.1), матимемо:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \frac{d}{dt}\vec{r}_{AB},$$

оскільки $\vec{r}_{AB} = \overrightarrow{const}$, то $\frac{d}{dt}\vec{r}_{AB} = 0$. Тому

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A. \tag{11.2}$$

Продиференціюємо (11. 2) за часом:

$$\frac{d\vec{V}_B}{dt} = \frac{d\vec{V}_A}{dt},$$

або

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A . \qquad (11.3)$$

Теорема доведена.

Поступальний рух твердого тіла повністю характеризується рухом однієї точки. Тому для задання поступального руху твердого тіла досить задати рівняння руху будь-якої точки тіла:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases} \qquad (11.4)$$

Рівняння (11.4) є рівняннями поступального руху твердого тіла. Тверде тіло, яке здійснює поступальний рух має три ступені вільності.

§ 12. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий його рух, при якому існують точки тіла, розміщені на одній прямій, що залишаються нерухомими на протязі всього руху. Пряма навколо якої відбувається обертання твердого тіла називається *віссю обертання*. Розглянемо обертання твердого тіла навколо осі OZ (Рис. 2.12).

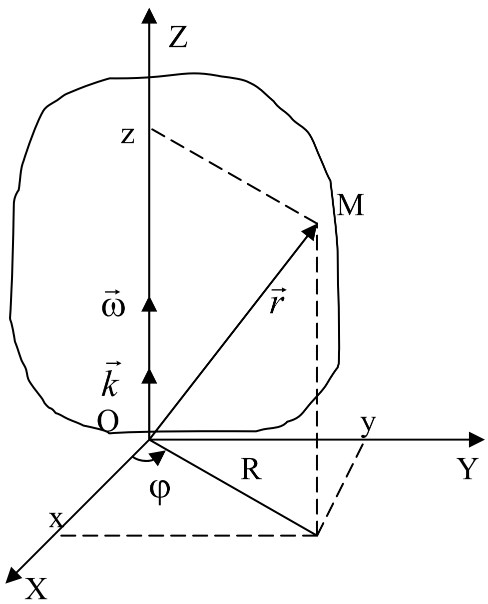


Рис. 2.12

Координати довільної точки М твердого тіла будуть визначатись, згідно виразів:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \\ z = const \end{cases}$$

Таким чином при обертальному русі тіло має один ступінь вільності – кут φ. Положення тіла в будь-який момент часу t задане, якщо задано рівняння:

$$\varphi = f(t)\,, \tag{12.1}$$

де $f(t)$ – довільна двічі диференційована функція. Рівняння (12.1) називають рівнянням обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. Кут φ вважають додатним, якщо він відкладається проти годинникової стрілки. Траєкторії точок тіла при обертальному русі є колами, що лежать у площинах перпендикулярних до осі обертання. Для характеристики обертального руху твердого тіла вводять поняття кутової швидкості ω і кутового прискорення ε.

Під *кутовою швидкістю* розуміють фізичну величину, яка визначається границею відношення зміни кута повороту до проміжку часу, за який ця зміна відбулася, якщо цей проміжок часу прямує до нуля.

$$\omega = \lim_{\vartriangle t \to 0} \frac{\vartriangle\varphi}{\vartriangle t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,; \tag{12.2}$$

Домовились кутову швидкість вважати векторною величиною, причому модуль визначається за формулою (12.2), а напрям визначається за правилом свердлика. *Якщо вісь свердлика направити вздовж осі обертання, а ручку обертати в напрямку обертання твердого тіла, то поступальний рух свердлика вкаже напрям кутової швидкості* $\vec{\omega}$. $\vec{\omega}$ є псевдовектором, оскільки не має постійної точки прикладання; його можна переносити у будь-яку точку площини перпендикулярної до осі обертання. $\vec{\omega}$ – називають аксіальним вектором (оскільки напрямлений по осі).

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}\,, \tag{12.3}$$

якщо $\dot{\varphi} > 0$, то $\vec{\omega}$ спів напрямлений з $\vec{k}$.

Під *кутовим прискоренням* розуміють фізичну величину, яка визначається вектором:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \tag{12.4}$$

або

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\vec{k}\,. \tag{12.4'}$$

Одиницями вимірюваннями кутової швидкості та кутового прискорення відповідно є:

$$[\omega] = \frac{рад}{c}, \quad [\varepsilon] = \frac{рад}{c^2}.$$

При рівноприскореному русі $\omega_t > \omega_0$ напрями $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ співпадають, а при рівносповільненому русі $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ – протилежно напрямлені.

§ 13. Лінійна швидкість при обертовому русі

Розглянемо обертання твердого тіла навколо осі OZ (Рис. 2.13).

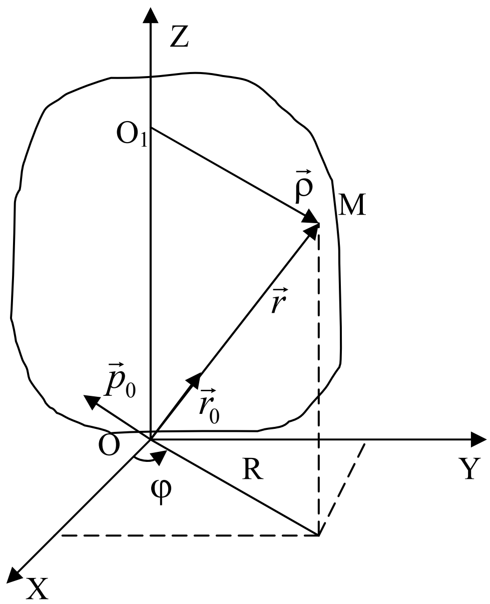


Рис. 2.13

Як відомо, швидкість довільної точки твердого тіла можна знайти за формулою:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{13.1}$$

В загальному випадку радіус вектор точки має вигляд:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ . \tag{13.2}$$

Тіло має один ступінь вільності виразимо декартові координати через полярі:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \\ z = const = h. \end{cases} \tag{13.3}$$

Тоді, підставивши (13.3) в (13.2) отримаємо:

$$\vec{r} = R\left(\vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi\right) + h\vec{k}\ . \tag{13.4}$$

Якщо знайти від виразу (13.4) похідну за часом отримаємо швидкість точок твердого тіла:

$$\vec{V} = R\dot{\varphi}\left(-\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi\right) = R\dot{\varphi}\vec{p}_0. \tag{13.5}$$

Формула (13.5) є незручною оскільки напрям $\vec{p}_0$ в кожному конкретному випадку визначити непросто. Зручнішу для використання формулу встановив математик Ейлер.

Знайдемо векторний добуток $\vec{k} \times \vec{r}$:

$$\left[\vec{k},\vec{r}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & k \end{vmatrix} = \vec{i}R\sin\varphi + \vec{j}R\cos\varphi = R\vec{p}_0\,.$$

Тоді (13.5) прийме вигляд:

$$\vec{V} = R\dot{\varphi}\vec{p}_0 = \dot{\varphi}\left[\vec{k},\vec{r}\right] = \left[\dot{\varphi}\vec{k},\vec{r}\right] = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right].$$

Отже, швидкість можна знайти згідно наступної формули:

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]. \tag{13.6}$$

Оскільки $\vec{\omega}$ кутова швидкість, то $\vec{V}$ називається лінійною швидкістю.

Покажемо, що формула Ейлера для лінійної швидкості не залежить від вибору початку відліку (полюса полярної системи координат). Виберемо за початок відліку точку O_1 на осі Z (Рис. 2.13). Тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_{oo_1} + \vec{\rho}, \tag{13.7}$$

підставивши (13.7) в (13.6), отримаємо:

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{00_1} + \vec{\rho}\right] = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{00_1}\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right] = \left[\vec{\omega}, \vec{\rho}\right],$$

$\vec{\rho}$ – радіус-вектор точки М відносно точки O_1.

$$V = \omega \cdot r \cdot \sin\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] = \omega R \tag{13.8}$$

Таким чином $V = \omega R$, де R – радіус кола, по якому рухається точка М.

Швидкість $\vec{V}$ можна інтерпретувати як швидкість руху кінця радіус-вектора $\vec{r}$. Оскільки:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

то

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]. \tag{13.9}$$

Цю формулу можна узагальнити на будь-який вектор з початком в точці О.

Застосуємо цю формулу до одиничних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, матимемо:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{i}\right]; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{j}\right]; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{k}\right]. \tag{13.10}$$

Ці формули називаються формулами Пуассона.

§ 14. Лінійне прискорення при обертовому русі

Для знаходження лінійного прискорення, виходимо з його означення:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt},$$

оскільки швидкість можна знайти з формули:

$$\vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right].$$

Отримаємо:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega},\vec{r}\right] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt},\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}\right], \tag{14.1.}$$

Врахуємо, що $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення, а $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\vec{\omega},\vec{r}\right]$ – лінійна швидкість, тоді лінійне прискорення визначається формулою:

$$\vec{a} = \left[\vec{\varepsilon},\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]. \tag{14.2}$$

Як видно з формули (14.2) прискорення при обертовому русі є сумою двох прискорень: тангенціального та нормального.

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon},\vec{r}\right], \tag{14.3}$$

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega},\left[\vec{\omega},\vec{r}\right]\right]. \tag{14.4}$$

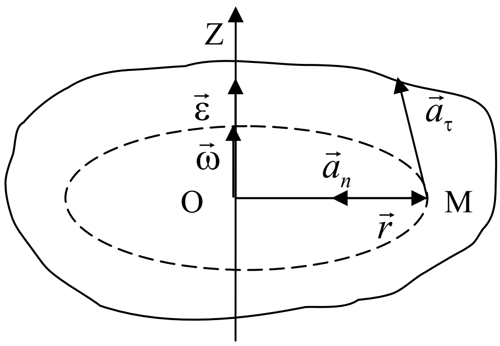


Рис. 2.14.

Щоб переконатися в правильності (14.3) та (14.4) розглянемо обертання твердого тіла і зокрема його точки M навколо осі Z в найпростішому випадку, коли вектор $\vec{r}$ перпендикулярний осі OZ. Розпишемо тангенціальне прискорення, векторно перемноживши праву частину:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r\sin(\vec{\varepsilon},\vec{r}) = \varepsilon r = \frac{d\omega}{dt}r = \frac{d^2\varphi}{dt^2}r\,,$$

тобто

$$a_\tau = \ddot{\varphi}r\,. \tag{14.5}$$

Напрям $\vec{a}_\tau$ є дотичним до траєкторії в точці М в даний момент часу. Розкривши векторний добуток, для нормального прискорення, отримаємо

$$\vec{a}_n = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\,\right]\right] = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}\,) - \vec{r}\,(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \vec{\omega} \cdot \omega r \cos(\vec{\omega}, \vec{r}\,) - \vec{r}\,\omega\omega \cos(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r} \ .$$

Нормальне прискорення

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \ , \qquad (14.6)$$

напрямлене протилежно до $\vec{r}$ (тобто до центра кола).

§ 15. Складний рух точки

Розглянемо рух деякої матеріальної точки М відносно системи відліку $O'X'Y'Z'$, яка у свою чергу рухається відносно системи відліку $OXYZ$ (Рис. 2.15). Позначимо радіус-вектор точки М відносно рухомої ($O'X'Y'Z',$) системи відліку $\vec{r}$, радіус-вектор точки М відносно нерухомої системи відліку $\vec{R}$ і радіус-вектор початку координат рухомої системи відносно нерухомої через $\vec{r}_0$

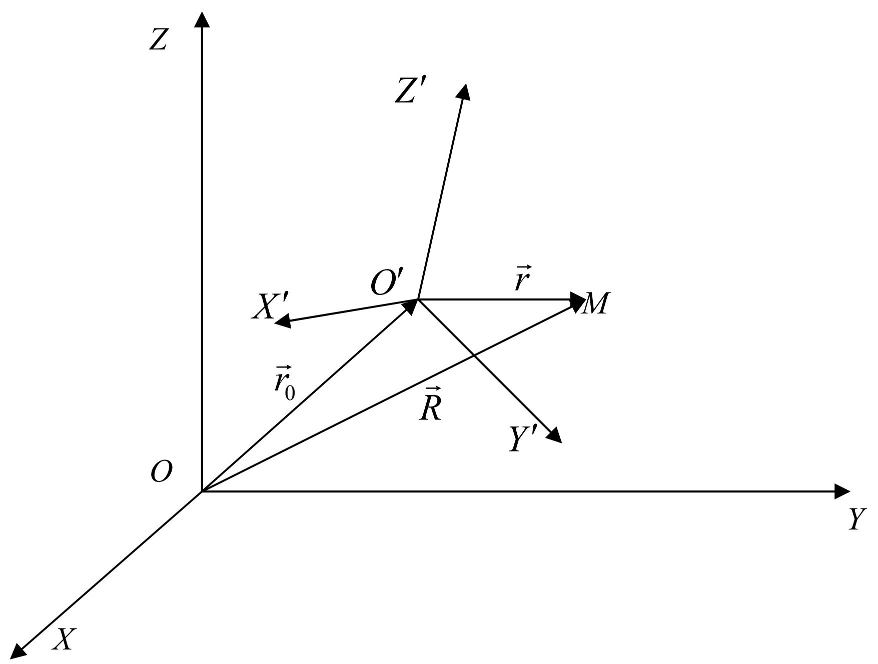


Рис. 2.15

Рух матеріальної точки відносно нерухомої системи координат називається *абсолютним рухом*. Рух матеріальної точки відносно рухомої системи координат називають *відносним рухом*. Рухом тієї точки простору рухомої системи координат, з якою в даний момент часу співпадає рухома матеріальна точка, відносно нерухомої системи координат, називається *переносним рухом*.

Визначимо абсолютну швидкість точки:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{R}}{dt}, \tag{15.1}$$

врахувавши, що $\vec{R} = \vec{r}_0 + \vec{r}$, матимемо:

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{15.2}$$

де

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}, \tag{15.3}$$

– швидкість руху початку координат рухомої системи відносно нерухомої, тобто абсолютна швидкість точки О. Знайдемо похідну за часом від радіуса-вектора точки в рухомій системі координат:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \dot{x}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \frac{xd\vec{i}}{dt} + \frac{yd\vec{j}}{dt} + \frac{zd\vec{k}}{dt}.$$

Позначимо

$$\vec{V}_в = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}, \tag{15.4}$$

– відносна швидкість руху точки.

Похідні за часом від орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ представимо формулами Пуассона.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{i}\right]; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{j}\right]; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{\omega}, \vec{k}\right].$$

Тоді

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_в + x\left[\vec{\omega}, \vec{i}\right] + y\left[\vec{\omega}, \vec{j}\right] + z\left[\vec{\omega}, \vec{k}\right] = \vec{V}_в + \left[\vec{\omega}, x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right],$$

або

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_в + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{15.5}$$

Таким чином абсолютна швидкість буде мати вигляд:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + \vec{V}_в + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{15.6}$$

Для аналізу цієї формули припустимо, що точко М є нерухомою відносно рухомої точки відліку. Тоді $\vec{V}_в = 0$, а – $\vec{V}_a = \vec{V}_{пер}$. Отже,

$$\vec{V}_{пер} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{15.7}$$

Тут $\vec{V}_0$ – швидкість руху точки початку відліку рухомої системи координат, тобто абсолютна швидкість точки O', а ω – кутова швидкість обертання рухомої системи і відповідно $\vec{r}$.

Остаточно одержуємо:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{пер} + \vec{V}_в, \tag{15.8}$$

ця формула виражає *теорему додавання швидкостей* при складному русі точки: ***швидкість абсолютного руху точки рівна векторній сумі переносної та відносної швидкості***.

§ 16. Додавання прискорень точки в загальному випадку переносного руху

Абсолютне прискорення визначимо з формули:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}.$$

Використавши формулу для абсолютної швидкості (15.6), отримаємо:

$$\vec{a}_a = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_0 + \vec{V}_в + [\vec{\omega}, \vec{r}]\right) = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] + \frac{d\vec{V}_в}{dt}. \tag{16.1}$$

Врахувавши, що:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_в + [\vec{\omega}, \vec{r}],$$

отримаємо:

$$\frac{d\vec{V}_в}{dt} = \vec{a}_в + \left[\vec{\omega}, \vec{V}_в\right]. \qquad (16.2)$$

Потрібно врахувати, що

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \vec{a}_0, \; \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}.$$

Остаточно маємо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{V}_в\right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] + \vec{a}_в + \left[\vec{\omega}, \vec{V}_в\right],$$

або

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] + \vec{a}_в + 2\left[\vec{\omega}, \vec{V}_в\right]. \qquad (16.3)$$

Це загальна формула для абсолютного прискорення точки. Якщо $\vec{V}_в = 0, \quad \vec{a}_в = 0$ то $\vec{a}_a = \vec{a}_{пер}$.

Тоді

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_0 + \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right], \qquad (16.4)$$

або,

$$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad (16.4')$$

де

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\right], \; \vec{a}_n = \left[\vec{\omega}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right].$$

Отже абсолютне прискорення при складному русі точки визначається з формули:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_в + 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}_в\right]. \qquad (16.5)$$

Як бачимо, що абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного прискорення, відносно прискорення і деякого додаткового прискорення, яке називається *прискоренням Коріоліса*.

$$\vec{a}_k = 2\left[\vec{\omega}, \vec{v}_в\right]. \qquad (16.6)$$

Таким чином, формула (16.5) набере вигляду:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_в + \vec{a}_k. \qquad (16.7)$$

§ 17. Плоский рух твердого тіла та його рівняння руху

Плоским рухом твердого тіла називають такий його рух, при якому кожна його точка рухається тільки в одній площині. Площини в яких рухаються точки твердого тіла паралельні між собою, тому рух називають ще плоско паралельним.

Нехай тіло здійснює рух паралельно до площини Π. Проведемо в цьому тілі кілька площин Π', Π'', … , що паралельні Π. Тіло розіб'ється на ряд плоских фігур S', S'', … (Рис.2.16). Усі точки, що належать одній фігурі, рухаються в площині фігури. Рух однієї такої фігури цілком визначає рух всього твердого тіла, оскільки площини, якими ми розбили тверде тіло, жорстко зв'язані між собою і не можуть рухатися одна без одної.

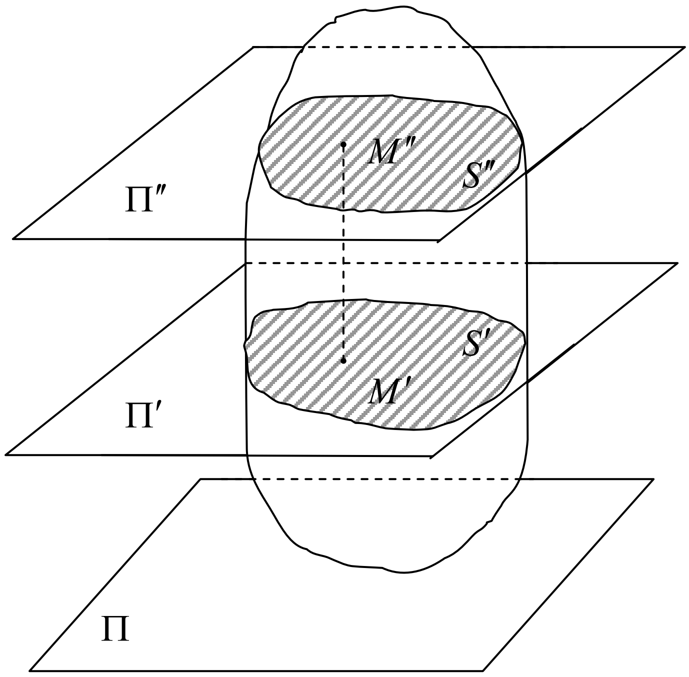


Рис. 2.16.

Точки M' і M'', що належать площинам S' і S'' та перпендикулярній до цих площин прямій, будуть мати однаковий рух: однакові траєкторії, швидкості та прискорення. Тобто достатнього розглянути рух такої однієї площини, щоб вивчити рух усього твердого тіла.

Розглянемо одну з таких фігур S (Рис. 2.17), для цього візьмемо дві системи координат в площині руху фігури: OXY – нерухому та $O'X'Y'$ – рухому, яка зв'язана з рухом тіла.

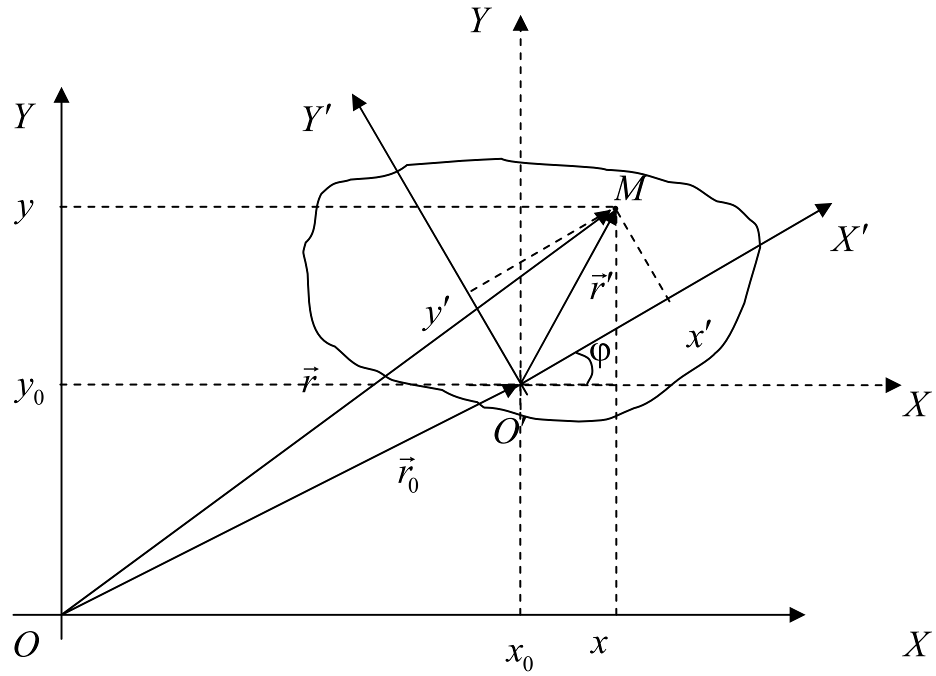


Рис. 2.17

Положення точки М фігури в нерухомій площині визначає радіус-вектор $\vec{r}$, в рухомій – $\vec{r}'$, а $\vec{r}_0$ – радіус-вектор початку рухомої системи координат відносно нерухомої. Побудуємо проекції цих радіус-векторі на осі систем координат рухомої та нерухомої. Координати точки М (x, y) змінюються з часом, (x', y') – залишаються сталими протягом усього руху. Точка O' має координати $(0,0)$ – в рухомій системі координат та (x_0, y_0) – в нерухомій.

Щоб визначити положення рухомої системи координат відносно нерухомої, достатньо задати:

- положення початку рухомої системи координат O', тобто (x_0, y_0), або радіус-вектор $\vec{r}_0$;
- кут однієї з рухомих осей із нерухомою, наприклад кут φ між OX та $O'X'$.

За цими даними визначається і рух плоскої фігури. Тому рух плоскої фігури є заданим коли відомо в будь-який момент часу значення величин x_0, y_0 та φ. Плоский рух твердого тіла визначається:

- рівнянням рух основної точки:

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t)$$

- рівняння обертання фігури навколо полюса:

$$\varphi_0 = f_3(t).$$

Щоб отримати рівняння руху будь-якої точки плоскої фігури спроектуємо на нерухомі осі OX та OY очевидну геометричну рівність:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}',$$

і отримаємо:

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \tag{17.1}$$

Рівняння (17.1) представляють собою рівняння руху точки М, або параметричне рівняння її траєкторії. Виключивши з них час отримаємо рівняння траєкторії.

Розділ III. ДИНАМІКА

§ 1. Основні поняття та аксіоми класичної механіки

В основу теоретичної (класичної) механіки покладені аксіоми (закони) Ньютона, які були сформульовані в його праці «Математичні начала натуральної філософії», опубліковані в 1687р. Класичну механіку часто називають механікою Ньютона. Для формулювання аксіом Ньютона необхідно дати означення інерціальних систем відліку, для яких справедливі аксіоми (закони) Ньютона.

Під *інерціальними* розуміють такі *системи*, які рухаються рівномірно і прямолінійно, тобто без прискорень, відносно будь якої іншої нерухомої системи відліку. Ньютон вважав,що існує абсолютно нерухомий простір, з яким слід пов'язати вихідну інерціальну систему відліку. Ньютонівське визначення абсолютного простору породило суперечку та заперечення вчених. Остаточно зруйнував поняття абсолютного простору та часу А.Айнштейн у своїй теорії відносності, який показав, що простір і час є відносними та математично обґрунтував (виразив) зв'язок простору та часу з рухомою матерією.

У наш час за вихідну інерціальну систему відліку приймають систему координат, центр якої співпадає з центром Сонця, а осі напрямлені на одні і ті ж віддалені зорі протягом всього часу. Таку систему координат називають *геліоцентричною*. Будь яка інша система координат, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно геліоцентричної системи буде інерціальною. Досліди підтвердили правильність такого вибору.

1-а аксіома (або закон) Ньютона

Існують інерціальні системи відліку, відносно яких тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, якщо на нього не діють сили або діє рівноважна система сил.

Матеріальна точка на яку не діють сили, або діє рівноважна система сил, називається *ізольованою матеріальною точкою*.

Рівномірний і прямолінійний рух точки називають *рухом за інерцією*. Частинним випадком руху за інерцією є стан спокою, коли $\vec{V}=0$. При русі матеріальної точки за інерцією її прискорення $\vec{a}=0$. Тобто прискорення можна трактувати як межу відхилення руху тіла від руху за інерцією.

<u>*2-а аксіома Ньютона або основний закон динаміки.*</u>

Прискорення тіла (матеріальної точки) відносно інерціальної системи відліку прямопропорційне прикладеній до тіла силі і напрямлене вздовж лінії дії сили.

Розглянемо рух матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку. Якщо на точку діє сила $\vec{F}$ і надає їй прискорення $\vec{a}$ відносно системи відліку то основний закон динаміки можна записати у формі:

$$\vec{F}=m\vec{a}\,. \tag{1.1}$$

Додатній коефіцієнт пропорційності m характеризує інертні властивості тіла і називається інертною масою тіла. У теоретичній механіці інертна маса вважається сталою величиною, яка не залежить від швидкості та прискорення матеріальної точки, а також від природи сили прикладеної до тіла. На відміну від інертної маси, маса, яка входить у закон всесвітнього тяжіння який також записав Ньютон:

$$F=G\frac{Mm}{r^2},$$

називається гравітаційною масою, M і m – гравітаційні маси тіл, що взаємодіють. У наш час, з великим ступенем точності експериментально встановлено еквівалентність інертної та гравітаційної маси. Масу, як правило, визначають за силою тяжіння і прискоренням вільного падіння біля поверхні Землі:

$$m=\frac{P}{g}, \tag{1. 2}$$

<u>*3-я аксіома Ньютона, або закон про рівність сил дії і протидії відносно інерціальної системи відліку.*</u>

Сили взаємодії двох тіл (матеріальних точок) рівні за величиною і протилежні за напрямом і діють вздовж однієї прямої

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 . \tag{1.3}$$

4-а аксіома або закон незалежної дії сил (закон суперпозиції сил).

При одночасній дії на матеріальну точку декількох сил прискорення точки відносно інерціальної системи відліку від дії кожної окремої сили не залежить від наявності інших прикладених до точки сил і повне прискорення дорівнює векторній сумі прискорень від дії окремих сил.

Якщо на матеріальну точку діє система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, то $m\vec{a}_1 = \vec{F}_1$, $m\vec{a}_2 = \vec{F}_2$, ... , $m\vec{a}_n = \vec{F}_n$, а прискорення з яким буде рухатись тіло чи матеріальна точка, буде рівне:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \tag{1.4}$$

або:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \tag{1.5}$$

Рівняння (1.5) виражає основне рівняння динаміки матеріальної точки.

Зауважимо, що основне рівняння динаміки точки є справедливим і для невільної матеріальної точки на яку накладені зв’язки. В цьому випадку в число прикладених сил треба виносити сили реакцій зв’язків.

§ 2. Диференціальні рівняння руху та основні задачі динаміки

Запишемо основне рівняння динаміки матеріальної точки

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \tag{2.1}$$

ввівши рівнодійну силу $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, та використавши представлення прискорення через другу похідну від радіуса-вектора, матимемо:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\,, \qquad (2.2)$$

або

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}\,. \qquad (2.2')$$

Вирази (2.2) чи (2.2’) називаються диференціальним рівняння руху матеріальної точки у векторній формі. У проекціях на осі координат його можна записати:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\,, \qquad (2.3)$$

або

$$m\ddot{x} = F_x\,, \quad m\ddot{y} = F_y\,, \quad m\ddot{z} = F_z\,, \qquad (2.3')$$

Розглянемо механічну систему матеріальних точок. Під механічною системою матеріальних точок розуміють таку їх сукупність в якій кожна матеріальна точка залежить від руху і положення всіх інших точок сукупності. Визначальною характеристикою механічної системи є наявність сил взаємодії між її точками. Прикладом механічної системи матеріальних точок є Сонячна система.

Сили, які діють на механічну систему поділяються на зовнішні і внутрішні. *Зовнішніми* називаються сили, які зумовлені дією, що не належить до даної системи. *Внутрішні* сили зумовлені дією тіл, що входять до складу системи.

Запишемо диференціальні рівняння руху механічної системи матеріальних точок. Для першої точки воно буде мати вигляд:

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{(зовн)} + \sum_{i=2}^{n}\vec{F}_{1i}^{(внутр)}\,,$$

$\vec{F}_1^{(зовн)}$ – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на одну точку;

$\vec{F}_{1i}^{(внутр)}$ – сила взаємодії першої точки з *i*-ою точкою даної механічної системи.

Для другої точки це рівняння запишеться так:

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_2^{(зовн)} + \sum_{i=1,3}^{n} \vec{F}_{2i}^{(внутр)} ,$$

а для $k-$ої та $n-$ої відповідно зобразиться формулами:

$$m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(зовн)} + \sum_{i=1,2,...k-1,k+1}^{n} \vec{F}_{ki}^{(внутр)} ,$$

$$m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^{(зовн)} + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_{ni}^{(внутр)} .$$

Для системи з n матеріальних точок будемо мати систему з n диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1^{(зовн)} + \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}^{(внутр)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_k \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2} = \vec{F}_k^{(зовн)} + \sum_{i=1,2,...k-1,k+1}^{n} \vec{F}_{ki}^{(внутр)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{F}_n^{(зовн)} + \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_{ni}^{(внутр)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

Система рівнянь (2.4) на даний час в загальному випадку не розв'язана. Точний розв'язок отриманий лише для системи двох тіл (задача двох тіл - розв'язана). Система рівнянь для трьох матеріальних точок в загальному випадку не розв'язана (проблема трьох тіл). Існують частинні розв'язки задачі трьох тіл при специфічно вибраних початкових умовах. Наприклад, обмежену задачу трьох тіл розв'язав Лагранж і отримав трикутні і колінеарні точки лібрації.

Використовуючи диференціальні рівняння руху в тій чи іншій системі координат можна розв'язувати дві основні задачі динаміки (пряму і обернену).

Перша задача (пряма): знаючи масу та закон руху тіла, знайти силу, що діє на дане тіло.

Нехай рівняння руху матеріальної точки задані в декартовій системі координат, наступними рівняннями:

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \tag{2.5}$$

тоді

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2}, \quad F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2}, \quad F_z = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{d^2 f_3(t)}{dt^2}. \tag{2.6}$$

Відповідно, модуль сили визначається формулою:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \tag{2.7}$$

а напрям за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos\left(\vec{F},\hat{\ }\vec{i}\right) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos\left(\vec{F},\hat{\ }\vec{j}\right) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos\left(\vec{F},\hat{\ }\vec{k}\right) = \frac{F_z}{F}. \tag{2.8}$$

Друга (обернена) задача: за даною масою і діючою на тіло силою, визначити рівняння руху тіла.

Розглянемо розв'язок цієї задачі в прямокутній декартовій системі координат. У загальному випадку сила $\vec{F}$ та її проекції на координатні осі можуть залежати від часу, координат рухомої точки та її швидкості. Диференціальні рівняння руху точки, мають вигляд:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right), \tag{2.9}$$

або

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{y} = F_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{z} = F_z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right). \end{cases} \tag{2.10}$$

Для знаходження рівнянь руху матеріальної точки про інтегруємо систему (2.10) звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Розв'язок одного диференціального рівняння другого порядку містить дві довільні сталі. У випадку системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку число постійних дорівнює шість. Тобто:

$$\begin{cases} x = f_1\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ y = f_2\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ z = f_3\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \end{cases} \tag{2.11}$$

а швидкість матеріальної точки можна буде знайти, використавши її проекції на осі координат:

$$\begin{cases} V_x = \dot{x} = f_1'\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ V_y = \dot{y} = f_2'\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ V_z = \dot{z} = f_3'\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right). \end{cases} \tag{2.12}$$

З формул (2.11) та (2.12) можна сказати, що рівняння сили не визначає конкретний рух, а виділяє цілий клас рухів, який характеризується шістьма довільними сталими. Сила визначає лише прискорення матеріальної точки, а швидкість і положення точки будуть залежати від початкової швидкості та початкового положення (від початкових умов руху), тобто від значення констант $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ в момент часу $t = 0$.

Нехай при $t = 0$:

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \dot{x} = V_{0x},\ \dot{y} = V_{0y},\ \dot{z} = V_{0z},$$

тоді отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_0 = f_1\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ y_0 = f_2\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ z_0 = f_3\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ V_{0x} = f_1'\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ V_{0y} = f_2'\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \\ V_{0z} = f_3'\left(0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\right), \end{cases} \tag{2.13}$$

з якої шукають сталі інтегрування.

§ 3. Прямолінійний рух. Найпростіші випадки інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальних точок

Встановимо умови при яких матеріальна точка рухається прямолінійно. Диференціальне рівняння руху у загальному випадку:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

яке в проекціях на осі координат має вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Нехай точка рухається вздовж осі OX. Тоді у кожний момент часу:

$$y = z = 0,\ \dot{y} = \dot{z} = 0,\ \ddot{y} = \ddot{z} = 0,$$

а диференціальне рівняння руху буде мати вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x\left(t, x, \dot{x}\right). \tag{3.1}$$

Тобто, щоб точка рухалася вздовж осі OX, необхідно, щоб рівнодійна сила діяла вздовж осі OX.

Розглянемо тіло рух вздовж осі OX під дією постійної сили:

$$F = const = C.$$

Тоді диференціальне рівняння руху прийме вигляд:

$$m\ddot{x} = C,$$

або

$$\ddot{x} = \frac{C}{m} = a. \tag{3.2}$$

Перепишемо (3.2) наступним чином:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = a, \tag{3.3}$$

помноживши обидві частини рівності (3.3) на dt, проінтегруємо отримане за часом:

$$\dot{x} = at + c_1. \tag{3.4}$$

Тепер в (3.4) $\dot{x}$ представимо, як $\frac{dx}{dt}$ та після множення на dt отримаємо:

$$dx = \left(at + c_1 \right) dt . \tag{3.5}$$

Щоб знайти рівняння руху потрібно знайти інтеграл від обох частин рівності (3.5):

$$x = \int dx = \int \left(at + c_1 \right) dt = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2 . \tag{3.6}$$

Накладемо початкові умови:

$$t = 0 , \; x = x_0 , \; \dot{x} = V_0 .$$

Підставивши їх спочатку в (3.4), а потім в (3.6) отримаємо:

$$c_1 = V_0 , \; c_2 = x_0 . \tag{3.7}$$

Тоді рівняння руху з врахуванням (3.7) прийме вигляд:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} . \tag{3.8}$$

Нехай сила є функцією часу:

$$F = F(t) .$$

Тоді основне рівняння динаміки прямолінійного руху матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = F(t) ,$$

або

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(t) . \tag{3.9}$$

Зробимо аналогічні кроки, що і для формул (3.3)-(3.5) та отримаємо:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int F(t) dt + c_1 , \tag{3.10}$$

$$x = \int \left(\frac{1}{m} \int F(t) dt + c_1 \right) + c_2 . \tag{3.11}$$

Застосувавши початкові умови визначимо константи c_1 та c_2 і матимемо шуканий закон руху.

Розглянемо випадок, коли сила, що діє на матеріальну точку, є функцією координати:

$$F = F(x) .$$

Тоді диференціальне рівняння руху матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = F\left(x\right),$$

або

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F\left(x\right). \tag{3.12}$$

розглянемо ліву частину рівності та перетворимо її:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}, \tag{3.13}$$

Підставляючи останню рівність в основне рівняння динаміки одержимо:

$$V\frac{dV}{dx} = \frac{1}{m}F\left(x\right), \tag{3.14}$$

або

$$\frac{V^2}{2} = \frac{1}{m}\int F\left(x\right)dx + C. \tag{3.15}$$

Звідси

$$V = \sqrt{\frac{2}{m}\int F\left(x\right)dx + C}, \tag{3.16}$$

але швидкість можна представити як похідну координати за часом:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\int F\left(x\right)dx + C}, \tag{3.17}$$

та розв'язавши диференціальне рівняння (3.17) отримаємо закон руху точки.

Наступним розглянемо випадок, коли сила, що діє на матеріальну точку, залежить від швидкості:

$$F = F\left(V\right).$$

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки з врахуванням рівності (3.13) прийме вигляд:

$$V\frac{dV}{dx} = \frac{1}{m}F\left(V\right), \tag{3.18}$$

або

$$V\frac{dV}{F(V)}=\frac{dx}{m}. \qquad (3.19)$$

про інтегрувавши обидві частини рівності, отримаємо:

$$\int\frac{VdV}{F(V)}=\frac{x}{m}+c_1. \qquad (3.20)$$

Розв'язуючи цей перший інтеграл руху відносно V, одержимо:

$$V=\frac{dx}{dt}=\phi(x,c_1). \qquad (3.21)$$

Тоді

$$dx=\phi(x,c_1)dt, \qquad (3.22)$$

а після інтегрування:

$$x=\int\phi(x,c_1)dt+c_2. \qquad (3.23)$$

Визначивши c_1 та c_2 з початкових умов матимемо рівняння руху тіла.

У випадку коли сила є функцією часу, координати та швидкості одночасно:

$$F=F(t,x,V),$$

диференціальне рівняння руху зводиться до неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Завжди можна знайти спосіб його розв'язання.

§ 4. Елементарна і повна робота

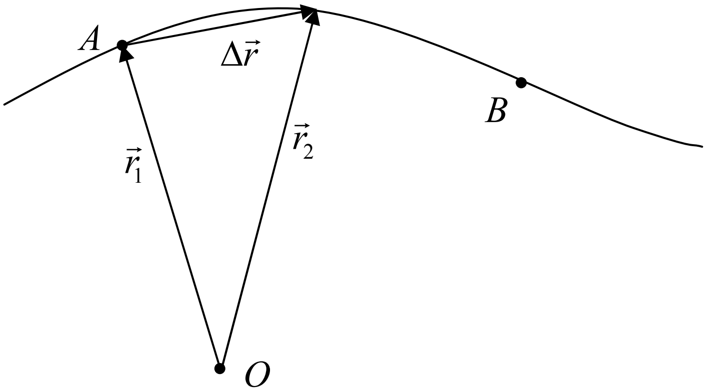


Рис. 3.1

Нехай матеріальна точка здійснює переміщення по довільній криволінійній траєкторії під дією деякої сили $\vec{F}$ (рис. 3.1). За деякий час Δt вона здійснює переміщення:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1.$$

Під *роботою* сили $\vec{F}$ під час переміщення матеріальної точки на $\Delta\vec{r}$ розуміють фізичну величину, яка визначається скалярним добутком сили на переміщення:

$$A = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right). \tag{4.1}$$

В граничному випадку при $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ перейде в $d\vec{r}$. А *елементарна робота* сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки дорівнює скалярному добутку сили на вектор переміщення:

$$\delta A = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right), \tag{4.2}$$

або

$$\delta A = F dr \cos\left(\vec{F} \,\hat{,}\, d\vec{r}\right). \tag{4.2'}$$

Робота не є повним диференціалом, тому використовується таке δ.

Повна робота при переміщенні матеріальної точки з точки А в точку В знаходиться як інтеграл від рівності (4.2):

$$A = \int_A^B \left(\vec{F}, d\vec{r}\right). \tag{4.3}$$

Виразимо елементарне переміщення матеріальної точки $d\vec{r}$ через швидкість її руху:

$$d\vec{r} = \vec{V} dt,$$

тоді вираз для елементарної та повної роботи набуде вигляду:

$$\delta A = \left(\vec{F}, \vec{V}\right) dt = \left(\vec{F} dt, \vec{V}\right). \tag{4.4}$$

Величину $\vec{F} dt$ – називають *імпульсом сили*. Отже, *елементарна робота* дорівнює скалярному добутку імпульсу сили на швидкість точки.

Повну роботу можна представити за допомогою формули:

$$A = \int_0^t \left(\vec{F}, \vec{V}\right) dt \tag{4.5}$$

Величину $\left(\vec{F},\vec{V}\right)$ – називають *потужністю*, оскільки вона визначає роботу сили за одиницю часу і характеризує роботоздатність сили.

§ 5. Кінетична енергія. Теорема про зміну кінетичної енергії точки та системи матеріальних точок

Подамо означення кінетичної енергії матеріальної точки та системи матеріальних точок. *Кінетичною енергією* матеріальної точки називають фізичну величину, яка визначається половиною добутку маси матеріальної точки на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{mV^2}{2}. \qquad (5.1)$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій всіх точок системи:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}. \qquad (5.2)$$

Для матеріальної точки масою m, яка рухається під дією сили $\vec{F}$, основний закон динаміки має вигляд:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}. \qquad (5.3)$$

Домножимо скалярно обидві частини цього співвідношення (5.3) на $d\vec{r}$ та отримаємо:

$$md\vec{r}\,\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (5.4)$$

Врахувавши, що:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V},$$

а

$$\vec{F}d\vec{r} = dA,$$

рівність (5.4) набере вигляду:

$$m\vec{V}d\vec{V} = dA\,. \tag{5.5}$$

Ліву частину формули (5.5) перетворимо наступним чином:

$$m\vec{V}d\vec{V} = d\left(\frac{m\vec{V}^2}{2}\right). \tag{5.6}$$

Отже після врахування (5.6) остаточно маємо:

$$d\left(\frac{m\vec{V}^2}{2}\right) = dA\,. \tag{5.7}$$

Формула (5.7) виражає теорему про зміну кінетичної енергії точки у диференціальній формі: ***Диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі сили, що діє на цю точку***.

Інтегруючи обидві частини рівності (5.7) одержимо теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі

$$\frac{m\vec{V}^2}{2} - \frac{m\vec{V}_0^2}{2} = A\,, \tag{5.8}$$

яку можна сформулювати наступним чином: ***Зміна кінетичної енергії точки на деякому переміщенні дорівнює роботі сили, що діє на точку на цьому дж переміщенні.***

У випадку системи N матеріальних точок на кожну точку системи діють як внутрішні так і зовнішні сили. Теорема про зміну кінетичної енергії однієї, наприклад i-ї точки запишеться:

$$d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \vec{F}_i^{\,зовн} d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\,внутр} d\vec{r}_i\,, \tag{5.9}$$

де $i = 1, 2, \ldots, N$. Просумуємо ліві та праві частини цих співвідношень по всіх точках:

$$\sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,зовн} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,внутр} d\vec{r}_i\,, \tag{5.10}$$

або

$$d\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,зовн} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,внутр} d\vec{r}_i\,. \tag{5.10’}$$

Позначимо повну кінетичну енергію системи:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right),$$

та відповідно елементарну роботу зовнішніх та внутрішніх сил:

$$dA_i^{зовн}=\vec{F}_i^{зовн}d\vec{r}_i,\ dA_i^{внутр}=\vec{F}_i^{внутр}d\vec{r}_i\,.$$

Тоді отримаємо:

$$dT=\sum_{i=1}^{N}A_i^{зовн}{}_i+\sum_{i=1}^{N}A_i^{внутр}\,. \qquad (5.11)$$

Формула (5.11) виражає теорему про зміну кінетичної енергії у диференціальній формі: ***Диференціал від кінетичної енергії системи дорівнює сумі елементарних робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.***

В інтегральній формі можна записати:

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{N}\int_{r_{i0}}^{r_i}dA_i^{зовн}+\sum_{i=1}^{N}\int_{r_{i0}}^{r_i}dA_i^{внутр}\,,$$

або

$$T-T_0=\sum_{i=1}^{N}A_i^{зовн}+\sum_{i=1}^{N}A_i^{внутр}\,, \qquad (5.12)$$

де $A_i^{зовн}=\int_{r_{i0}}^{r_i}dA_i^{зовн}$ – робота зовнішньої сили для i-ої точки системи при її переміщенні з початкового r_{i0} у кінцеве r_i положення; $A_i^{внутр}=\int_{r_{i0}}^{r_i}dA_i^{внутр}$ – робота внутрішньої сили для точки і-ої системи при її переміщенні з початкового r_{i0} у кінцеве r_i положення.

Формула (5.12) виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок в інтегральній формі: ***Зміна кінетичної енергії системи матеріальних точок при її переміщенні з одного положення в інше дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на цю систему***.

§ 6. Потенціальне силове поле. Потенціальна енергія

Для обчислення роботи сили на деякому переміщенні в загальному випадку необхідно знати закон руху точки на цьому переміщенні. Проте, є клас сил, для яких робота не залежить від характеру руху точки на заданому переміщенні. Ці сили називаються *потенціальними* і вони відіграють важливу роль в різних розділах механіки і фізики взагалі.

Під *силовим полем* розуміють частину простору в кожній точці якого на матеріальну точку діє сила, що залежить від координат точки і часу:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t). \tag{6.1}$$

Силове поле називають *стаціонарним*, якщо діючі сили не змінюються з часом, тобто:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}). \tag{6.2}$$

В іншому випадку поле нестаціонарне.

Силове поле називається *потенціальним*, якщо існує силова функція $\vec{U}(\vec{r}, t)$ така, що:

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = grad\, \vec{U}(\vec{r}, t), \tag{6.3}$$

де

$$grad\, \vec{U}(\vec{r}, t) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} U \ ,$$

а оператор набла визначається формулою:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \ .$$

Тоді проекції сили на осі координат можна визначити так:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{6.4}$$

Із (6.4) видно, що силова функція визначається з точністю до константи:

$$F_x = \frac{\partial (U + C)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Елементарна робота в потенціальному силовому полі, з врахуванням (6.4) визначається формулою:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU \ ,$$

$$dA = dU \ . \qquad (6.5)$$

Тобто, ***елементарна робота у потенціальному силовому полі дорівнює повному диференціальному полі дорівнює повному диференціалу від силової функції***.

В інтегральній формі можна отримати:

$$A = U - U_0 \, , \qquad (6.6)$$

де

$$U = U\left(x, y, z\right), \quad U_0 = U\left(x_0, y_0, z_0\right).$$

Отже, ***у потенціальному полі повна робота сили на деякому переміщенні дорівнює різниці значень силової функції в кінцевій і початковій точках переміщення і не залежить від форми траєкторії, по якій здійснюється переміщення***.

Прикладом потенціального поля є поле тяжіння. У випадку потенціального силового поля поряд з силовою функцією U вводять іншу функцію Π, яка характеризує запас енергії в даній точці поля та називається *потенціальною енергією*:

$$\Pi = -U \, . \qquad (6.7)$$

Тоді

$$A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi \, . \qquad (6.8)$$

§ 7. Закон збереження механічної енергії

Розглянемо рух матеріальної точки у потенціальному полі. Тоді теорема про зміну кінетичної енергії має вигляд (5.8):

$$\frac{m\vec{V}^2}{2} - \frac{m\vec{V}_0^2}{2} = A \, .$$

Виразимо роботу сил, що діють на матеріальну точку через різницю потенціальних енергій у початковій і кінцевій точках переміщення (6.8):

$$A = \Pi_0 - \Pi,$$

матимемо

$$\frac{m\vec{V}^2}{2} - \frac{m\vec{V}_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi.$$

Звідси отримаємо:

$$\frac{m\vec{V}^2}{2} + \Pi = \frac{m\vec{V}_0^2}{2} + \Pi_0 = const. \qquad (7.1)$$

Введемо *повну механічну енергію* матеріальної точки E, яка дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії:

$$E = \frac{m\vec{V}^2}{2} + \Pi = const, \qquad (7.2)$$

або

$$E = T + \Pi = const. \qquad (7.2')$$

Таким чином, закон збереження механічної енергії матеріальної точки формулюється так: ***при русі точки у потенціальному силовому полі її повна механічна енергія є постійною величиною***.

У випадку системи N матеріальних точок теорема про зміну кінетичної енергії записується формулою (5.12):

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{N} A_i^{зовн} + \sum_{i=1}^{N} A_i^{внутр} = \sum_{i=1}^{N} A_i\ .$$

Якщо система рухається в потенціальному силовому полі, то

$$\sum_{i=1}^{N} A_i = \Pi_0 - \Pi, \qquad (7.3)$$

Де Π – потенціальна енергія зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

Тоді

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi,$$

або

$$T + \Pi = \Pi_0 + T_0 = const\,. \qquad (7.4)$$

Позначаючи через E повну механічну енергію системи матеріальних точок, матимемо:

$$E = T + \Pi = const\,. \qquad (7.5)$$

Формула (7.5) виражає закон збереження механічної енергії системи: ***повна механічна енергія системи в потенціальному силовому полі зовнішніх і внутрішніх сил є постійною величиною***.

§ 8. Кількість руху точки та системи матеріальних точок

Однією з характеристик руху точки або системи є кількість руху. *Кількістю руху матеріальної точки* називається векторна фізична величина, яка визначається добутком маси матеріальної точки на її швидкість.

$$\vec{p} = m\vec{V}\,. \qquad (8.1)$$

Кількість руху у фізиці часто називають *імпульсом тіла*.

Проекції кількості руху на осі декартової системи координат записуються формулами:

$$p_x = mV_x\,,\ \ p_y = mV_y\,,\ \ p_z = mV_z\,. \qquad (8.1')$$

Кількістю руху системи матеріальних точок $\vec{p}$ називають векторну суму кількостей руху окремих точок цієї системи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i\,. \qquad (8.2)$$

Проекції $\vec{p}$ на осі декартової системи координат мають вигляд:

$$p_x = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{ix}\,,\ \ p_y = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{iy}\,,\ \ p_z = \sum_{i=1}^{N} m_i V_{iz}\,. \qquad (8.2')$$

Зауважимо, що вектор кількості руху системи, на відміну від вектора кількості руху точки, є вільним вектором, оскільки не має точки прикладання. Вектор кількості руху точки прикладений у самій точці.

Кількість руху системи матеріальних точок можна виразити через масу системи:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i ,$$

і швидкість центра мас системи $\vec{V}_C$.

Під *центром мас* механічної системи скінченого числа N матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_N$, радіус-вектори яких відносно однієї і тієї точки O відповідно $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$, розуміють геометричну точку C, радіс-вектор якої визначається виразом

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} . \qquad (8.3)$$

Позначаючи декартові координати матеріальних точок:

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots\ ,\ (x_N, y_N, z_N),$$

і проектуючи рівність (8.3) на осі координат, одержимо формули

$$x_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i ,\ \ y_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i \ \ z_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i . \qquad (8.3')$$

Підкреслимо, що центр мас є не матеріальною точкою, а геометричною, яка характеризує розподіл маси в системі. Центр мас може не співпадати з жодною точкою системи. Наприклад, кільце.

Виразимо імпульс (кількість руху) системи через масу та швидкість центра мас. Імпульс системи

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i .$$

Згідно означення центра мас (8.3), отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{r}_c .$$

Тоді

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_C\right) = M\,\frac{d}{dt} = M\vec{V}_C. \qquad (8.4)$$

Отже, *імпульс (кількість руху) системи матеріальних точок визначається добутком маси системи на швидкість центра мас системи*. Вектор кількості руху системи, як правило, прикладають в центрі мас.

§ 9. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки та системи матеріальних точок

Розглянемо рух матеріальної точки. Виходимо з диференціального рівняння руху під дією сили $\vec{F}$.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}. \qquad (9.1)$$

Оскільки маса матеріальної точки постійна, то її внесемо під знак диференціала та помножимо обидві часини рівності на dt:

$$d\left(m\vec{V}\right) = \vec{F}dt. \qquad (9.2)$$

Формула (9.2) є математичним виразом теореми про зміну імпульсу матеріальної точки у диференціальній формі: ***диференціал від кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу сили, що діє на цю точку.***

Інтегруючи (9.2) в межах від нуля до t, отримаємо:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \int_0^t \vec{F}dt.$$

Позначимо

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt, \qquad (9.3)$$

і назвемо цю величину *повним імпульсом сили* $\vec{F}$ за час t. Тоді, отримаємо математичний вираз теореми про зміну імпульсу точки в інтегральній формі:

$$m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}\,. \qquad (9.3)$$

Зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу сили за цей проміжок часу.

У випадку системи матеріальних точок диференціальне рівняння руху кожної точки має вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right) = \vec{F}_i^{\,зовн} + \vec{F}_i^{\,внутр}\,. \qquad (9.4)$$

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,з}dt \quad (10)$$

Просумуємо по всіх точках рівність (9.4):

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,зовн} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,внутр}\,.$$

Врахувавши, що сума похідних дорівнює похідній від суми та використавши властивість внутрішніх сил $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,внутр} = 0$, отримаємо:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,зовн}\,, \qquad (9.5)$$

де $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\vec{V}_i\right)$ – імпульси системи матеріальних точок. Помноживши обидві сторони рівності (9.5), отримаємо математичний запис теореми про зміну імпульсу системи матеріальних точок в диференціальній формі:

$$d\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,зовн}dt\,, \qquad (9.6)$$

Яка формулюється: ***диференціал кількості руху системи матеріальних точок дорівнює векторній сумі елементарних імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на цю систему.***

Візьмемо інтеграл від лівої і правої частини рівності (9.6) в межах від нуля до t:

$$p - p_0 = \sum_{i=1}^{N}\int_0^t \vec{F}_i^{\,зовн}dt\,.$$

Введемо позначення – $S_i^{зовн} = \int_0^t \vec{F}_i^{зовн} dt$, та отримаємо:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \sum_{i=1}^{N} S_i^{зовн} . \qquad (9.7)$$

Формула (9.7) є математичним записом теореми про зміну імпульсу системи матеріальних точок в інтегральній формі: ***зміна імпульсу системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює векторній сумі імпульсів всіх зовнішніх сил, що діють на систему, за цей проміжок часу.***

У проекціях на осі декартової системи координат вона має вигляд:

$$p_x - p_{0x} = \sum_{i=1}^{N} S_{ix}^{зовн} , \quad p_y - p_{0y} = \sum_{i=1}^{N} S_{iy}^{зовн} , \quad p_z - p_{0z} = \sum_{i=1}^{N} S_{iz}^{зовн} . \qquad (9.7')$$

З формули (9.7), бачимо, що у випадку, коли сума всіх зовнішніх сил прикладених до системи дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{зовн} = 0 ,$$

то

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 .$$

А це означає, що

$$\vec{p} = const . \qquad (9.8)$$

Вираз (9.8) є математичним записом закону збереження кількості руху, який формулюється так: ***якщо векторна сума всіх зовнішніх сил, що діють на механічну систему дорівнює нулю, то кількість руху системи є постійною за величиною і напрямом.***

З формул (9.7’) бачимо, що коли дорівнює нулю проекція суми всіх зовнішніх сил на будь яку координатну вісь (наприклад OX) дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ix}^{зовн} = 0 ,$$

то

$$p_x = const\,. \tag{9.9}$$

Проекція кількості руху системи на цю вісь є постійною. Інакше кажучи, закон збереження імпульсу виконується і в проекціях на осі координат.

§ 10. Момент кількості руху (кінетичний момент) точки і системи

Під *моментом кількості руху* або *кінетичним моментом* матеріальної точки відносно деякого центра O розуміють фізичну величину, яка визначається векторним добутком радіус вектора матеріальної точки на її кількість руху:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{V}\right]. \tag{10.1}$$

Зауважимо, що у фізиці кінетичний момент називають моментом імпульсу матеріальної точки (тіла).

Момент імпульсу $\vec{L}$ прикладений в точці O відносно якої він визначається. Якщо розписати векторний добуток за допомогою визначника отримаємо:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(yp_z - zp_y\right) + \vec{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \vec{k}\left(xp_y - yp_x\right). \tag{10.2}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y = m\left(y\dot{z} - z\dot{y}\right), \\ L_y &= zp_x - xp_z = m\left(z\dot{x} - x\dot{y}\right), \\ L_z &= xp_y - yp_x = m\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) \end{aligned} \tag{10.3}$$

Під *кінетичним моментом системи* матеріальних точок відносно деякої точки O розуміють векторну суму кінетичних моментів матеріальних точок цієї системи, відносно точки O.

$$\vec{L}^{(c)} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]. \tag{10.4}$$

Кінетичний момент системи $\vec{L}^{(c)}$ прикладений в точці O, відносно якої він розраховується.

§ 11. Теорема про зміну кінетичного моменту точки і системи матеріальних точок

Для матеріальної точки основний закон динаміки має вигляд:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}.$$

Помножимо зліва обидві частини цього співвідношення векторно на радіус-вектор $\vec{r}$, матимемо.

$$\left[\vec{r},m\frac{d\vec{v}}{dt}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}\right]. \tag{11.1}$$

У правій частині рівняння (11.1) маємо момент сили відносно нерухомої точки O:

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right)=\left[\vec{r},\vec{F}\right].$$

Перетворимо ліву частину рівності (11.1). Для цього знайдемо похідну.

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{V}\right]=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},m\vec{V}\right]+\left[\vec{r},m\frac{d\vec{V}}{dt}\right]=\left[\vec{V},m\vec{V}\right]+\left[\vec{r},m\frac{d\vec{V}}{dt}\right]=\left[\vec{r},m\frac{d\vec{V}}{dt}\right],$$

оскільки $\left[\vec{V},m\vec{V}\right]=0$.

Тоді формулу (11.1) запишемо у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{V}\right]=\vec{M}_O\left(\vec{F}\right),$$

або

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}_O\left(\vec{F}\right). \tag{11.2}$$

Співвідношення (11.2) виражає теорему про зміну кінетичного моменту точки: ***Похідна по часу від кінетичного моменту матеріальної точки відносно якого-небудь центра дорівнює моменту діючої на точку сили відносно цього центра***.

У проекціях на осі координат

$$\frac{dL_x}{dt} = M_{Ox}\left(\vec{F}\right), \quad \frac{dL_y}{dt} = M_{Oy}\left(\vec{F}\right), \quad \frac{dL_z}{dt} = M_{Oz}\left(\vec{F}\right). \tag{11.2'}$$

Якщо момент сили, що діє на рухому матеріальну точку, відносно центра O дорівнює нулю, тобто $\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = 0$ то:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

а це означає

$$\vec{L} = const. \tag{11.3}$$

Цей частинний випадок теореми про зміну кінетичного моменту називається законом збереження кінетичного моменту.

У проекціях на осі

$$L_x = c_1, \quad L_y = c_2, \quad L_z = c_3, \tag{11.3'}$$

де c_1, c_2, c_3 – перші інтеграли диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

У випадку системи матеріальних точок для кожної точки можна записати теорему про зміну кінетичного моменту у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{зовн}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{внутр}\right], \; i = 1, 2, ..., N. \tag{11.4}$$

Просумуємо ліві та праві частини рівності (11.4) за всіма точками системи і зразу винесемо $\dfrac{d}{dt}$ за знак суми:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{V}_i\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{зовн}\right] + \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{внутр}\right], \tag{11.5}$$

Згідно властивістю внутрішніх сил:

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{внутр}\right] = 0,$$

рівність (11.5) буде мати вигляд:

$$\frac{d\vec{L}^{(c)}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{зовн}\right). \tag{11.6}$$

Позначимо геометричну суму моментів всіх зовнішніх сил, що діють на точки системи:

$$\vec{M}_O^{зовн} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^{зовн}\right).$$

Остаточно одержимо:

$$\frac{d\vec{L}^{(c)}}{dt} = \vec{M}_O^{зовн}. \qquad (11.7)$$

Формула (11.7) представляє математичний запис теореми про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок: ***похідна за часом від кінетичного моменту системи матеріальних точок відносно деякої точки дорівнює векторній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на цю систему, відносно цієї точки.***

1). Якщо $\vec{M}_O^{зовн} = 0$, то $\vec{L}^{(c)} = const$.

2). Якщо сума моментів всіх зовнішніх сил відносно осі OX дорівнює нулю, тобто $M_x^{зовн} = \sum_{i=1}^{N} M_x\left(\vec{F}_i^{зовн}\right) = 0$, то $L_x^{(c)} = const$.

Кінетичний момент системи відносно будь якої координатної осі є постійним, якщо сума моментів зовнішніх сил відносно цієї осі дорівнює нулю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреєв В.О., Дущенко В.П., Федорченко А.М. Теоретична фізика. Класична механіка. К.: Вища школа. – 1984. – 224 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука. – 1967. – Т. I. – 512 с. –Т. II. – 664 с.
3. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М., 1959. – 596 с.
4. Гаральд Іро. Класична механіка. – Львів. – 1999 – 464 с.
5. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа. – 1983. – 576 с.
6. Жирнов Н.И. Класическая механика. – М.: Просвещение. –1980. – 303 с.
7. Ландау Л.Д. Лифшиц. И.Н. Теоретичекая Физика: Учебное пособие. – В 10-ти т. Т. I. Механика. – М.: Наука, – 1988. – 216 с.
8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наук. – 1985. – 448 с.
9. Савельев И.В. Основы теоретической физики. Т. 1. – М.: Наука. – 1991. – 496 с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2., – М.: Наука, –- 1970. – 568 с.
11. Тарг С.М. Короткий курс теоретической механики. – М., 1963. – 416 с.
12. Терлецкий Я.П. Теоретическая механика. – М., – 1987. – 160 с.
13. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Т. 1. – К.: Вища школа. – 1992. – 536 с.
14. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. II. – 411 с.
15. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. 1. – 438 с.

Д О Д А Т К И

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Затверджую
Ректор Дрогобицького
державного педагогічного
університету імені Івана Франка
________________ В.Г. Скотний
"__" _____________200___р.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ПРОГРАМА

для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня **"Бакалавр"**
галузі знань : «0402.Фізико-математичні науки» напрямів підготовки «6.040201.
Математика», «6.040201. Математика. Спеціалізація: Економіка»,
«6.040201. Математика. 6.040203. Фізика»
Дисципліна: нормативна.

Програму уклав: кандидат фізико-математичних наук, доцент Гольський В.Б.

Рецензенти:
Доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри теоретичної фізики,
Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича
Маханець О.М.

Доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри загальної
фізики Дрогобицького державного
педагогічного університету імені Івана
Франка

Пелещак Р.М.

Затверджено
на засіданні кафедри теоретичної фізики
та методики викладання фізики
(протокол № __ від ________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради
інституту фізики, математики та
інформатики
(протокол № __ від __________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні науково-методичної ради
університету
(протокол № __ від __________ 20___ р.)

Затверджено
на засіданні Вченої ради університету
(протокол № ___від ___________ 200_ р.)

Дрогобич, 2011

1. Пояснювальна записка

Засновником механіки вважається Архімед (287-212 р.р. до н.е.), який зробив точний розв’язок задачі про важіль та створив вчення про центр ваги тіла. Швидкий і успішний розвиток механіки починається лише з епохи Відродження, коли створюються умови для розвитку науки і техніки.

Зародження небесної механіки – науки про рух небесних тіл – пов'язано з великим відкриттям Миколи Коперніка (1473-1543) – створенням геліоцентричної системи світу, що змінила геоцентричну систему Птоломея. Це відкриття зробило переворот у науковому світогляді тієї епохи. На підставі навчання Коперніка й астрономічних спостережень, Кеплер (1571-1630) сформулював три закони руху планет, що згодом привели до відкриття Ньютоном закону всесвітнього тяжіння. Створення основ динаміки належить великим ученим – італійцю Галілео Галілею (1564-1642) і англійцю Ісаку Ньютонові (1643-1727).

Курс «**Теоретичної механіки**», для напрямів підготовки «6.040201. Математика» та суміжних, розрахований на поглиблене розуміння математичних прийомів та методів вивчених студентами з попередніх суто математичних дисциплін. Оскільки студенти дуже часто не бачать де на практиці може бути використані їхні математичні знання, виникає певний дисбаланс між теорією і практикою. Цю прогалину має заповнити теоретична механіка, яка являючись розділом фізики, послуговується, як шкільною математикою, так і математикою вищої школи. Це дає можливість зрозуміти прикладну суть вивчених курсів та освоїти нову і важливу дисципліну.

Програма курсу складається з трьох розділів: «Механіки систем із скінченим числом ступенів вільності», «Механіки суцільного середовища» та «Основ спеціальної теорії відносності». Основна увага приділена першому розділу, де вивчається три основні частини механіки: статика, кінематика та динаміка. Там же передбачено вивчення законів збереження, основ аналітичної механіки та теорії керувань. Інші розділі хоч і менші за об'ємом матеріалу, проте охоплюють основні знання потрібні для студентів зазначеного вище напряму підготовки.

Програма укладена на основі галузевих стандартів освітньо-професійної програми підготовки бакалавра за напрямом підготовки 0402 "фізико-математичні науки":

ПМ.06.01	Механіка систем із скінченим числом ступенів вільності	
ПМ.06.01.01	**Статика твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.02	**Кінематика точки і твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.03	**Динаміка матеріальної точки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.04	**Закони збереження в механіці.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11
ПМ.06.01.05	**Динаміка системи матеріальних точок.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.06	**Основи динаміки твердого тіла.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.01.07	**Основи аналітичної механіки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.01.08	**Основи теорії коливань.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.02	Механіка суцільного середовища	
ПМ.06.02.01	**Рівняння руху суцільного середовища.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.02.02	**Теорія пружності.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08
ПМ.06.02.03	**Основи гідродинаміки.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.05, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.07 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.08, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.14
ПМ.06.03	Основи спеціальної теорії відносності	
ПМ.06.03.01	**Релятивістська кінематика.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11
ПМ.06.03.02	**Релятивістська динаміка.**	2.СВ.Д.01.ЗР.Р.10, 2.СВ.Д.01.ЗР.Р.11

Завдання курсу полягає в тому, щоб студенти зрозуміли та засвоїли теоретичний матеріал і вміли його використовувати при розв’язуванні задач.

Мета вивчення дисципліни: мати чітке уявлення про методи та прийоми теоретичної механіки, принципи дослідження фізичних явищ та побудову математичних моделей природніх та технічних процесів.

Структурно-логічна схема місця дисципліни в ОПП підготовки фахівців.

Дисципліна вивчається після курсів: аналітична геометрія, лінійна алгебра, алгебра і теорія чисел, математичний аналіз, проективна геометрія і основи геометрії, комплексний аналіз.

.

2. ЗМІСТ ПРОГРАМИ

ВСТУП

Теоретична механіка і її місце серед інших наук. Значення механіки для розвитку природознавства й техніки. Основні історичні етапи розвитку механіки. Об’єктивний характер законів механіки.

1. МЕХАНІКА СИСТЕМ ІЗ СКІНЧЕНИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ

1.1. Статика твердого тіла

Основні поняття та аксіоми. Моменти сили відносно точки та осі. Зведення двох паралельних сил. Теорія пар сил. Зведення довільної системи сил до простої системи. Умови рівноваги. Плоска система сил. Теорема Вариньона. Тертя. Часткові випадки просторових систем сил. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла.

1.2. Кінематика точки і твердого тіла

Швидкість та прискорення точки в різних системах координат. Векторний спосіб вивчення руху точки. Прості рухи твердого тіла. Складний рух точки. Плоский рух твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Загальний випадок руху тіла. Кінематика складних рухів твердого тіла.

1.3. Динаміка матеріальної точки

Основні поняття і означення динаміки. Завдання динаміки. Закони Ньютона. Інерціальні системи відліку. Принцип незалежності дії сил. Принцип відносності Галілея. Диференціальні рівняння руху точки. Дві задачі динаміки точки. Основна задача динаміки точки і її розв'язок. Сталі інтегрування і початкові умови. Розв'язок оберненої задачі динаміки точки. Рух невільної матеріальної точки. Сили реакції зв'язків.

1.4.Динаміка системи матеріальних точок

Завдання станів системи матеріальних точок у класичній механіці. Класифікація сил, що діють на систему. Властивості внутрішніх сил. Загальні теореми динаміки системи.

1.5. Закони збереження в механіці

Загальні теореми динаміки матеріальної точки й механічної системи. Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки й механічної системи. Закон збереження кількості руху. Теорема про рух центра мас системи.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра й осі. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки. Випадок центральної сили. Головний момент кількості руху (кінетичний момент) механічної системи відносно центра і осі. Теорема про зміну кінетичного моменту системи. Закон збереження кінетичного моменту системи.

Елементарна робота сили й робота сили на скінченому переміщенні. Потужність. Робота сили тяжіння і сили пружності. Теореми про зміну, кінетичної енергії матеріальної точки й механічної системи. Рух системи в потенціальному силовому полі. Поняття про силову функцію. Потенціальна енергія механічної системи. Закон збереження механічної енергії точки і системи.

1.6. Основи динаміки твердого тіла

Динаміка твердого тіла. Моменти інерції системи і твердого тіла відносно площини, осі й полюса. Радіус інерції. Відцентрові моменти інерції. Еліпсоїд інерції. Головні осі інерції. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо головної центральної осі інерції. Фізичний маятник.

1.7. Основи аналітичної механіки

В'язі і їх класифікація. Можливі переміщення. Елементарна робота сили на можливому переміщенні. Ідеальні в'язі. Принцип можливих переміщень. Узагальнені координати системи. Узагальнене рівняння динаміки. Рівняння Лагранжа. Канонічні рівняння. Принцип Гамільтона.

1.8. Основи теорії коливань

Гармонійне коливання матеріальної точки під дією сили, пропорційної зміщенню. Стійкість положення рівноваги. Коливання системи з однією ступеню вільності. Математичні і фізичні маятники. Малі коливання системи з двома ступенями вільності.

2. МЕХАНІКА СУЦІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА

2.1. Рівняння руху суцільного середовища

Рівняння нерозривності. Сили об'ємні і поверхневі. Властивості поверхневих сил.

2.2. Теорія пружності

Тензор напружень. Рівняння руху суцільного середовища. Симетричність тензора напружень. Еліпсоїд напружень. Реологічні рівняння.

2.3. Основи гідродинаміки

Моделі рідин та рівняння руху. Критерії подібності при обтіканні твердих тіл потоком в'язкої нестискуваної рідини. Рух в'язкої нестискуваної рідини.

3. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

3.1. Релятивістська кінематика

Експериментальне обґрунтування СТВ. Постулати Айнштейна. Перетворення Лоренца. Простір і час в СТВ, прийняті системи відліку. Кінематичні наслідки перетворень Лоренца: ефекти скорочення довжини і сповільнення часу. Відносна швидкість, перетворення швидкостей.

Поняття про чотривимірний простір Мінковського. Перетворення Лоренца як обертання системи координат у просторі Мінковського.

3.2. Релятивістська динаміка

Інваріантна маса частинки. Чотиривимірний імпульс. Чотиривимірна сила. Релятивістське коваріантне узагальнення другого закону динаміки Ньютона. Компоненти чотиривимірного імпульсу. Фізичний зміст четвертої компоненти чотиривимірного імпульсу. Релятивістська енергія. Зв'язок між власною енергією частинки і її масою (формула Айнштейна). Частинки з нульовою масою.

Орієнтовна тематика практичних занять

1. Рівновага твердого тіла, до якого прикладена збіжна система сил.
2. Теорема про три непаралельні сили.
3. Метод проекцій.
4. Момент сили відносно точки. Рівновага твердого тіла з однією нерухомою точкою.
5. Кінематика точки. Траєкторія та рівняння руху точки.
6. Кінематика точки. Швидкість та прискорення.
7. Кінематика твердого тіла. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.
8. Складний рух точки.
9. Плоский рух твердого тіла.
10. Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки.
11. Основні форми диференціальних рівнянь динаміки матеріальної точки.
12. Визначення сил по заданому русі.
13. Визначення руху по заданих силах.
14. Коливальний рух.
15. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.
16. Теорема про рух центра інерції системи матеріальних точок

17. Теорема про зміну головного вектора кількостей руху системи матеріальних точок
18. Теорема про зміну головного моменту кількості руху системи матеріальних точок. Моменти інерції твердого тіла.
19. Динаміка плоского руху твердого тіла.
20. Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.
21. Класифікація зв'язків. Число ступенів вільності.
22. Принцип можливих переміщень.
23. Загальне рівняння динаміки системи матеріальних точок. Рівняння Лагранжа.
24. Рівняння руху суцільного середовища.
25. Перетворення Лоренца.

Знання та вміння, які повинен набути студент після вивчення програмного матеріалу модулів

ЗНАТИ:

- основні поняття, аксіоми та теореми статики твердого тіла;
- кінематичні характеристики точки та твердого тіла;
- закони динаміки матеріальної точки та системи матеріальних точок;
- закони збереження механіки;
- основи аналітичної механіки;
- основи теорії коливань;
- рівняння руху суцільного середовища;
- математичні моделі, що використовуються в теорії пружності;
- моделі рідин та їхні рівняння руху;
- постулати Айнштейна;
- перетворення Лоренцо;
- фізичний зміст четвертої компоненти чотиривимірного імпульсу.

ВМІТИ:

а) загальна компетентність:

- пояснити механічні явища та процеси;
- пояснити математичні моделі, які використовує теоретична механіка ;
- використовувати засвоєні знання у майбутній професійній діяльності;

б) предметна компетентність:

- доводити теореми статики;
- використовувати умову рівноваги твердого тіла, до якого прикладена збіжна система сил;
- визначати реакції для твердого тіла з однією нерухомою точкою;
- знаходити рівняння руху та траєкторію точки;
- обчислювати швидкість та прискорення матеріальної точки при різних способах задання руху точки;
- визначати кінематичні характеристики точок твердого тіла;
- використовувати опис складного руху точки;
- записувати основні форми диференціальних рівнянь динаміки матеріальної точки;
- визначати сили по заданому рухові;
- описувати рух по заданим силам;
- використовувати теорему про рух центра інерції системи матеріальних точок;
- обчислювати кількість руху точки та системи матеріальних точок;
- визначати момент інерції твердого тіла.
- записувати функцію Лагранжа для динамічних задач;
- знаходити рівняння руху суцільного середовища;
- використовувати перетворення Лоренца.

3. КРИТЕРІЇ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ ТА ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ

Критерії оцінювання навчальних досягнень за національною шкалою.

Оцінювання знань студентів з курсу проводиться за чотирибальною системою ("відмінно", "добре", "задовільно", "незадовільно") відповідно до основних критеріїв та показників рівня знань.

Оцінювання досягнутих успіхів за семестр проводиться в системі оцінювання університету, після чого переводиться в національну шкалу оцінювання та шкалу ECTS відповідно до таблиці.

Шкала оцінювання університету (в балах)	Національна шкала оцінювання	Оцінка з заліку	Шкала ECTS		
			Сумарна модульна оцінка (в балах)	Оцінка за шкалою ECTS	Визначення
90-100	"відмінно"	"зарахо-вано"	90-100	A	ВІДМІННО - відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок
75-89	"добре"		90-95	B	ДУЖЕ ДОБРЕ - вище середнього рівня з кількома помилками
			74-89	C	ДОБРЕ - в загальному правильна робота з певною кількістю грубих помилок
60-74	"задовільно"		69-74	D	ЗАДОВІЛЬНО - непогано, але зі значною кількістю недоліків
			60-69	E	ДОСТАТНЬО - виконання задовольняє мінімальні критерії
0-59	“незадовільно”	"незара-ховано"	50-59	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО - потрібно працювати перед тим, як отримати залік
			0-49	F	НЕЗАДОВІЛЬНО - необхідна серйозна подальша робота

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра теоретичної фізики та МВФ

Теоретична механіка

Для студ. IV курсу напрямів підготовки (бакалавр) «Математика та економіка» та «Математика та фізика»

ОКР «Бакалавр» **2013/2014**

Візитка

Загальна обсяг: 180 годин/5 кредитів ECTS (36 год. – лекція 36 год. – практичних, 108 год. – самостійної роботи).

Вивчення предмету завершується екзаменом у 7 семестрі.

Викладач: кандидат фізико-математичних наук, доцент Гольський Віталій Богданович

Програма складається з двох модулів.

Передбачено дві модульні контрольні роботи. Контрольні роботи складаються з трьох частин: тестових завдань, теоретичного питання та задачі. Проти кожного завдання контрольної роботи виставлено бали, які може отримати студент за правильне його виконання.

Розподіл балів між видами модульної атестації.

100 балів.
а) Дві самостійні роботи – 1 - 25 балів, 2 – 20 балів (разом 45 балів).
б) Дві модульні контрольні роботи: 1 - 25 балів, 2 – 30 балів (разом 55 балів)

Структура навчальної дисципліни:

Модуль 1. (50 балів)

1. Механіка систем із скінченим числом ступенів вільності

1.1. Статика твердого тіла.
1.2. Кінематика точки і твердого тіла.
1.3. Динаміка матеріальної точки.
1.4. Динаміка системи матеріальних точок.
1.5. Закони збереження в механіці.

Модуль 2. (50 балів)

1.6. Основи динаміки твердого тіла.
1.7. Основи аналітичної механіки.
1.8. Основи теорії коливань.

2. Механіка суцільного середовища

2.1. Рівняння руху суцільного середовища.
2.2. Теорія пружності.
2.3. Основи гідродинаміки.

3. Основи спеціальної теорії відносності

3.1. Релятивістська кінематика.
3.2. Релятивістська динаміка.

Студенти, які навчаються за індивідуальним навчальним планом проходять усі види модульної атестації у терміни визначені їх індивідуальним планом. Переведення сумарної модульної оцінки за чотирибальною шкалою здійснюється за таблицею «Положення про кредитно-модульну систему організації навчального процесу.

Екзамен за талоном № 2 та К містить завдання на 100 балів.

Список літератури:

1. Андреєв В.О., Дущенко В.П., Федорченко А.М. Теоретична фізика. Класична механіка. К.: Вища школа. – 1984. – 224 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Наука. – 1967. – Т. I. – 512 с. –Т. II. – 664 с.
3. Гаральд Іро. Класична механіка. – Львів. – 1999 – 464 с.
4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа. – 1983. –576с.
5. Жирнов Н.И. Класическая механика. – М.: Просвещение. –1980. – 303 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наук. – 1985. – 448 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2., – М.: Наука, – 1970. – 568 с.
8. Тарг С.М. Короткий курс теоретической механики. – М., 1963. – 416 с.
9. Терлецкий Я.П. Теоретическая механика. – М., – 1987. – 160 с.
10. Федорченко А.М. Теоретична фізика. Т. 1. – К.: Вища школа. – 1992. – 536 с.
11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. II. – 411 с.
12. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1966. – Ч. 1. – 438 с.

Доцент________Гольський В.Б. **Зав. кафедри_______проф. Бойчук В.І.**

Кафедра теоретичної фізики та МВФ

Завдання модульної письмової роботи за модуль № 1
з навчальної дисципліни **“Теоретична механіка”** для підготовки фахівців
освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр” спеціальностей “ПМСО. Математика та економіка.”
і “ПМСО. Математика та фізика.”

Варіант 1.

Тестове завдання I *(0,5 бала за правильну відповідь на питання)*.

1. Як направлений орт $\vec{\rho}_0$ в полярній системі координат?

а) вздовж осі OX; б) вздовж осі OY; в) вздовж $\vec{\rho}$; г) перпендикулярно $\vec{\rho}$; д) паралельно $\vec{\rho}$.

2. Чим можна замінити будь-який зв’язок, відкинувши його?

а) реакцією зв’язку; б) статикою зв’язку; в) твердим тілом; г) матеріальною точкою; д) силою, яка еквівалентна нулю.

3. Що вивчає кінематика?

а) умови рівноваги механічних рухів матеріальних об’єктів без врахування умов і причин, які викликають і змінюють ці рухи

б) закономірності механічних рухів матеріальних об’єктів без врахування умов і причин, які викликають і змінюють ці рухи;

в) умови рівноваги тіл під дією сил, а також перетворення систем сил, прикладених до тіла;

г) закономірності руху матеріальних об’єктів в залежності від прикладених сил, тобто від дії на розглядувані матеріальні об’єкти інших тіл;

д) закономірності руху рівноваги тіл під дією сил, а також перетворення систем сил, прикладених до тіла;

4. З яких розділів складається механіка

а) статистика, кінематика, динаміка;

б) аксіоми статики, теореми статики, основна задача статики;

в) аксіоми Ньютона, системи збіжних сил, пара сил;

г) статистика, аксіоми Ньютона, основна задача статики;

д) статика, кінематика, динаміка;

5. Назвіть розділ теоретичної механіки, який вивчає умови рівноваги матеріальних точок, твердих тіл, механічних систем, при умові дії на них зі сторони інших тіл сил і моментів сил.

а) статистика; б) кінематика; в) динаміка; г) статика; д) кінематична статика.

6. Що таке система збіжних сил?

а) системою збіжних сил називають таку систему сил, лінії дії яких не перетинаються в одній точці;

б) системою збіжних сил називають таку систему сил, лінії дії яких паралельні;

в) системою збіжних сил називають таку систему сил, лінії дії яких перпендикулярні;

г) системою збіжних сил називають таку систему сил, лінії дії яких знаходяться в різних площинах;

д) системою збіжних сил називають таку систему сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці;

7. Що називається проекцією сили на площину?

а) це сукупність сил, що діють на розглядуване тіло або механічну систему

б) сила для заданої системи сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил.

в) алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатним напрямком осі.

г) вектор, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили на цю площину.

д) вектор, що проведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве.

8. Що таке рівнодійна сила?

а) це сукупність сил, що діють на розглядуване тіло або механічну систему
б) сила для заданої системи сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил.
в) алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатним напрямком осі.
г) вектор, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили на цю площину.
д) вектор, що проведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве.

9. Що таке система сил?
а) це сукупність сил, що діють на розглядуване тіло або механічну систему
б) сила для заданої системи сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил.
в) алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатним напрямком осі.
г) вектор, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили на цю площину.
д) вектор, що проведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве.

10. Що називається проекцією сили на вісь?
а) це сукупність сил, що діють на розглядуване тіло або механічну систему
б) сила для заданої системи сил, дія якої на тверде тіло або матеріальну точку еквівалентна дії цієї системи сил.
в) алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між силою і додатним напрямком осі.
г) вектор, що знаходиться між проекціями початку і кінця сили на цю площину.
д) вектор, що проведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве.

Правильні відповіді: 1 – в; 2 – а; 3 – б; 4 – д; 5 – г; 6 – д; 7– г; 8 – б; 9 – а; 10 – в.

Тестове завдання ІІ *(1 бал за правильну відповідь на запитання).*

1. Назвіть умови для рівноваги системи двох сил.____________________________________
____
____
2. Чому дорівнює рівнодійна сукупності сил, які діють на матеріальну точку?__________
____
____
3. Наведіть приклади механічних явищ і процесів.__________________________________
____
____
4. У чому полягає основна задача механіки?_______________________________________
____
____
5. Що таке рівнодійна кількох сил?____
____
____
6. Сформулюйте І теорему статики.____
____
____
7. Яким чином можна зрівноважити задану пару сил?______________________________
____
____
8. Запишіть формули які визначають напрям вектора швидкості. ____________________
____
____

9. Сформулюйте означення швидкості матеріальної точки.___________________________
____
____
10. Як визначається модуль сили?____
____
____
11. Якою формулою визначається прискорення?_____________________________________
____
____
12. Моментом сили відносно осі є…____
____
____
13. Як геометрично зображається векторний момент?_________________________________
____
____
14. Які аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил?_____________________________
____
____
15. Як звести систему сил до рівнодійної сили? ___________________________________
____
____

Теоретичне завдання **(*до 5 балів за кожне*)**

1. Аксіоми статики.
2. Векторний момент сили відносно точки.

Екзаменатор,
доцент Гольський В.Б.

Завдання виконане студентом _____ курсу
групи __________________

____
прізвище, ім’я, по батькові

Предметний покажчик

Іменний покажчик