

Міністерство освіти і науки України

Юрій Угрин, Роман Пелещак, Володимир Штим

*Опис електромагнетних
явищ способом
розв'язування задач*

2014

Юрій Угрин, Роман Пелещак, Володимир Штим. Опис електромагнетних явищ способом розв'язування задач.

Рекомендовано до друку: *Рекомендовано до друку Міністерством освіти і науки України (протокол № 1/11 – 12205 від 30.07.2013 р).*

Основу цього посібника складає матеріал з курсу загальної фізики, частина «Електрика та магнетизм». Текст представлений у вигляді задач, розв'язки яких базуються на означеннях, постулатах та результатах попередніх задач. Всі фізичні означення покласифіковані на означення фізичних явищ, фізичних величин, фізичних понять, фізичних систем і приладів.

Посібник призначений для студентів які навчаються за напрямом підготовки «фізика».

Рецензенти:

Завідувач кафедри фізики Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського, професор, доктор фізико-математичних наук **Гохман О. Р.**

Завідувач кафедри мікро- та наноелектроніки Запорізького національного технічного університету, доктор фізико-математичних наук, професор **Погосов В.В.**

Декан Інституту фізики, математики та інформатики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка доктор фізико-математичних наук, професор **Бойчук В.І.**

Відповідальний за випуск: професор **Пелещак Р.М.**

Зміст

Передмова.....	5
Розділ I. Електростатика.....	7
Тема 1. Електричний заряд.....	7
Тема 2. Закон Кулона.....	10
Тема 3. Електричне поле і його напруженість.....	13
Тема 4. Принцип суперпозиції електричних полів.....	17
Тема 5. Диполь.....	24
Тема 6. Потік електричної індукції. Теорема Остроградського–Гауса.....	30
Тема 7. Обчислення напруженостей електричних полів на основі теореми Остроградського–Гауса.....	35
Тема 8. Потенціал електростатичного поля.....	42
Тема 9. Потенціальність електростатичного поля.....	47
Тема 10. Зв'язок між напруженістю і потенціалом.....	50
Тема 11. Провідник в електричному полі.....	55
Тема 12. Діелектрик в електричному полі.....	58
Тема 13. Електричне поле на межі середовищ.....	64
Тема 14. Електроємність.....	69
Тема 15. Конденсатори.....	72
Тема 16. Потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів. Енергія електричного поля.....	80
Розділ II. Постійний електричний струм та контактні явища в металах та напівпровідниках.....	85
Тема 1. Електричний струм та його характеристики: сила та густина струму.....	85
Тема 2. Закон Ома для ділянки кола. Опір провідника.....	93
Тема 3. Електрорушійна сила. Закон Ома для ділянки кола з ЕРС. Закон Ома для повного кола.....	103
Тема 4. Правила Кірхгофа.....	106
Тема 5. Робота і потужність струму.....	109
Тема 6. Класична теорія електропровідності металів	114

Тема 7. Провідність напівпровідників.....	124
Тема 8. Контактні явища в металах.....	135
Тема 9. Явища в контактах двох напівпровідників та напівпровідника з металом.....	144
Тема 10. Термoeлектричні явища.....	146
Тема 11. Електричний струм у вакуумі.....	151
Тема 12. Електричний струм у рідинах.....	155
Тема 13. Контактні явища між металами та електролітами.....	161
Тема 14. Електричний струм в газах. Плазма.....	168
Розділ III. Магнетне поле.....	181
Тема1. Закон Ампера. Індукція магнетного поля. Провідник зі струмом в магнітному полі.....	181
Тема 2. Закон Біо-Савара-Лапласа.	190
Тема 3. Циркуляція і потік вектора індукції магнетного поля...	201
Тема 4. Сила Лоренца.....	210
Тема 5. Електромагнетна індукція.....	225
Тема 6. Магнетне поле в речовині.....	244
Розділ IV. Електричні коливання і електромагнетні хвилі	274
Тема 1. Змінний струм.....	274
Тема 2. Електричні коливання.....	294
Тема 3. Електромагнітне поле. Струми зміщення.....	306
Додатки.....	321
Список задач.....	324
Алфавітний покажчик означень фізичних явищ, фізичних понять, фізичних величин, систем й приладів.....	346
Іменний покажчик.....	353
Література.....	355

Передмова

Нема сумніву в тому, що кожен з нас в процесі навчання мав проблему, яка полягала в тому, що ми змушені читати якийсь текст, але невідомо з якою метою, а точніше відомо, – з якою – з метою його вивчення, проте ця мета здавалася нам надто неприродною. Дійсно, читати щось тільки тому, що це «щось» слід вивчити – дуже нудне заняття. Значно цікавіше шукати відповіді на конкретні питання.

Саме з метою зміни пізнавальної частини мотивації навчання фізики, ми зробили спробу укласти програмний матеріал з курсу електромагнетизму інакше, а саме, розділивши його на конкретні задачі. Базою для розв'язання цих задач служать означення, постулати та попередні задачі. Своєю чергою, всі означення по класифіковані на: 1) означення фізичних явищ чи процесів; 2) означення фізичних понять; 3) означення фізичних величин та 4) означення фізичних систем чи приладів. Задачі мають суцільну нумерацію. Крім того, в кінці підручника дано перелік усіх означень та задач і вказано сторінку. Тому, якщо ви шукаєте відповідь на якесь питання, то зорієнтувавшись до якої теми ця проблема могла б належати, шукаєте відповідну задачу з переліку задач. Так само можна знайти і будь-яке означення.

Саме задачі складають основний матеріал посібника. Тут задачі – це те, що традиційно називають фактичним матеріалом, причому поняття задачі є досить широким – це і виведення формули, і доведення певного твердження, отриманого як теоретичним, так і експериментальним шляхом, і доведення існування якогось явища чи процесу, а також роз'яснення методики конкретного експерименту.

Суцільною нумерацією задач ми підкреслюємо умовність поділу електромагнетизму (як і всієї фізики і будь-якої науки) на частини, розділи та теми. Насправді, електромагнітні явища чи будь-які явища природи не слідують цьому нашому поділу, який ми зробили дещо штучно для того щоб полегшити їх сприйняття. Будь-яке явище природи – це сукупність (чи система) багатьох, а можливо і всіх явищ

з цього нашого штучного переліку явищ. Наприклад, блискавка – це явище оптичне, електростатичне, магнетне, теплове і механічне водночас. Насправді наука не поділяється на частини, розділи, параграфи і т. д., вона єдина і всеохоплююча, а цей поділ, очевидно, виник через те, що людина неспроможна осягнути науку всю і одразу.

У посібнику дуже рідко трапляється нумерація формул. Виявляється, що вона і не потрібна, бо формула, на яку спираємось, є результатом однієї з попередніх задач, тому посилення відбувається на цей результат, тобто на задачу.

Звертаємо вашу увагу і на те, що не обов'язково певну тему починати читати з початку, тобто з означень, можна починати і з задач, а до означень чи постулатів повертатись при потребі. Деякі задачі можна читати виокремленими з контексту, а деякі – ні, оскільки вони базуються на результатах попередніх задач.

У цьому посібнику ви також можете знаходити відповіді на ті питання, які у вас виникли в ході читання підручників, наприклад ви не змогли з'ясувати чому дрібні предмети притягаються до наелектризованих тіл. Тоді припускаючи, що це явище електростатичне в переліку задач розділу I знаходите задачу під номером 17: «поясніть явище притягання дрібних частинок до наелектризованих тіл». Тут же вказана сторінка на якій є розв'язок цієї задачі.

Очевидно також, що не варто пропускати якісь задачі, але, якщо вже це робите, то слід це робити розумно, тобто логічно чи інтуїтивно переконатися, що ця задача є «тупиковою», тобто такою, на якій не базуються інші задачі в межах цього посібника.

Звертаємо вашу увагу на те, що в цій книзі написання деяких фізичних термінів може бути не звичним проте, очевидно, що якщо є «магнетизм», «магнетик», «магнетит» то має бути і «магнетне поле», або якщо є «матерія» чи «потенція» то має бути «матерял» чи «потенціял». Для написання фізичних термінів ми послуговувалися словником фізичної лексики за авторства В. Козирського та В. Шендеровського, виданому в 1996 році.

Розділ I. Електростатика

Тема 1. Електричний заряд

Фізичні поняття

• **Електричний заряд** – це електрична властивість речовини (так як маса є гравітаційною та інерційною властивістю речовини). Поняття електричного заряду є одним з фундаментальних понять електромагнетизму.

• **Елементарний заряд** – це найменший відомий на нинішній день заряд у природі.

Фізичні величини

• **Електричний заряд**, будучи фізичним поняттям, водночас є фізичною величиною. Позначається буквою q і вимірюється в Кулонах (Кл). Зміст цієї величини вимірювання буде зрозумілим після ознайомлення з такою фізичною величиною, як сила електричного струму.

• **Лінійна, поверхнева чи об'ємна густина заряду** – це відношення заряду відповідно до відстані, площі чи об'єму, в якому він є (позначення відповідно λ , σ , ρ).

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dl};$$

$$\sigma \equiv \frac{dq}{dS};$$

$$\rho \equiv \frac{dq}{dV}.$$

Постулати

➤ **Закон збереження електричного заряду:** алгебраїчна сума зарядів, які виникають на всіх тілах, що беруть участь у певному про-

цесі, дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, яка була на цих тілах до початку цього процесу.

Прикладами таких процесів є: тертя бурштину до шерсті, зарядження електрофорної машини, хімічні та ядерні реакції.

➤ **Принцип інваріантності заряду:** величина заряду не залежить від того, у якій інерційній системі відліку він виміряний (інакше величина заряду не залежить від його швидкості).

➤ **Принцип квантованості заряду:** будь-який заряд складається з цілого числа елементарних зарядів.

Задачі

(1) Вкажемо на один з методів перевірки принципу інваріантності заряду.

Для того, щоб перевірити цей принцип, можна порівняти величину заряду електрона в атомах, де вони рухаються з різними швидкостями. Для цього вимірюють ступінь електронейтральності цих атомів. Дійсно, якщо би заряд електрона залежав від його швидкості, наприклад, збільшувався б зі збільшенням швидкості, то в тих атомах, де електрони рухаються з більшою швидкістю, електронейтральність порушувалася б сильніше, ніж у тих, де електрони рухаються повільніше. Оскільки подібної чи будь-якої іншої зміни електронейтральності не зафіксовано (принаймні до швидкостей, що дорівнюють половині швидкості світла у вакуумі), то можна стверджувати, що величина заряду електрона не залежить від його швидкості.

(2) Покажемо, що сила гравітаційного притягання електрона до ядра в атомі водню не спроможна втримати електрон в атомі, тому повинна існувати ще одна сила негравітаційної природи.

Справді, оскільки ядро атома водню – це протон, то сила гравітаційної взаємодії між протоном і електроном

$$F = G \frac{m_e m_p}{r^2}.$$

Знайдемо енергію йонізації атома E як роботу, яку слід виконати проти сил притягання до ядра, щоб перенести електрон з точки, що на відстані r від ядра, у нескінченність. Оскільки це робота змінної сили, то

$$\begin{aligned} E &= A = \int_r^{\infty} dA = \int_r^{\infty} F dr = \int_r^{\infty} G \frac{m_e m_p}{r^2} dr = G m_e m_p \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \\ &= G \frac{m_e m_p}{r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}}{5,3 \cdot 10^{-8}} = 1,9 \cdot 10^{-61} \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Порахуємо, за якої температури атом водню буде йонізований, тобто його енергія теплового руху, що дорівнює $\frac{3}{2}kT$, дорівнюватиме енергії йонізації

$$E = \frac{3}{2}kT,$$

звідки

$$T = \frac{2E}{3k} = \frac{2 \cdot 1,9 \cdot 10^{-61}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} = 9,2 \cdot 10^{-37} \text{ К},$$

що означає, що практично за всіх температурах водень повинен бути йонізованим, чого, насправді, немає.

Ця суперечність спонукає нас думати, що крім гравітаційної сили мусить існувати ще якась, значно більша сила, яка притягає електрона до ядра. Це сила електричного притягання. І існує вона завдяки тому, що електрон і протон, крім маси, мають ще одну властивість, яка називається електричний заряд, або коротко – заряд.

(3) Установимо, який заряд на сьогодні є елементарним.

Оскільки найменший експериментально встановлений (на сьогодні) заряд у природі – це заряд електрона ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) то є всі підстави вважати його елементарним електричним зарядом. З іншого боку, теорія кварків стверджує, що електрон складається з двох кварків з зарядами $-\frac{2}{3}|e|$ та $-\frac{1}{3}|e|$, даючи сумарно заряд $-|e|$. Проте, доки це не встановлено експериментально, ми не можемо стверджувати, що заряд кварка є елементарним зарядом. Таким чином, будемо вважати, що елементарним зарядом є заряд електрона.

Тема 2. Закон Кулона

Фізичні поняття

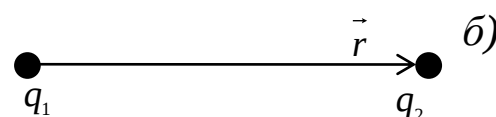
• **Точковий заряд** – це заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах певної задачі.

Постулати

➤ **Закон Кулона:** два точкові заряди взаємодіють з силою прямо пропорційною до величини цих зарядів та обернено пропорційною до квадрата відстані між цими зарядами, і спрямованою вздовж прямої, що їх з'єднує

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_0. \quad (1)$$


У цьому аналітичному тлумаченні закону Кулона $\vec{r}_0$ – це одиничний вектор, спрямований від одного заряду до іншого (мал. 1 (а)).



Мал. 1

Закон Кулона можна подати і так:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2)$$

де $\vec{r}$ – вектор, що з'єднує заряди (мал. 1 (б)).

Очевидно, що закон Кулона у формі (1) цілком тотожний закону Кулона у формі (2). Справді напрям вектора $\vec{F}$ у першому та другому записі однаковий: він спрямований туди ж, куди і вектор $\vec{r}_0$ чи $\vec{r}$, якщо заряди однойменні, і протилежний до нього, якщо заряди різнойменні. Щодо модуля вектора $\vec{F}$, то він однаковий в обидвох формулах запису і становить:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Задачі

(4) Установимо одиницю фізичної величини k .

Із закону Кулона маємо

$$k = \frac{F \cdot r^2}{q_1 q_2},$$

тому

$$[k] = \left[\frac{H \cdot m^2}{C^2} \right].$$

Часто сталу k представляють через іншу сталу, а саме

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де ε_0 – електрична стала.

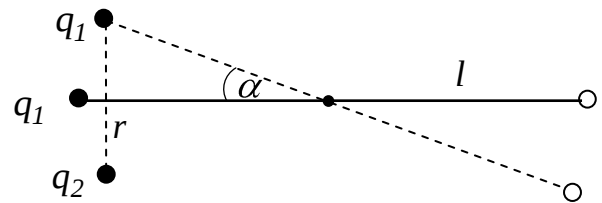
Бачимо, що одиниця електричної сталої обернена до одиниці сталої k , тобто

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{K \cdot \text{л}^2}{H \cdot \text{м}^2} \right] = \left[\frac{\Phi}{\text{м}} \right].$$

(5) Вкажемо на ідею визначення електричної сталої ε_0 .

Електричну сталу можна визначити із закону Кулона, експериментально вимірявши силу взаємодії між двома точковими (або кулястими) зарядами. Це можна зробити за допомогою тих самих крутильних терезів, якими Генрі Кавендіш виміряв гравітаційну сталу. На мал. 2 схематично показано вид згори на крутильні терези. Якщо до заряду q_1 піднести закріплений

заряд q_2 того ж знаку, то нитка терезів закрутиться на кут α , який, як відомо, є пропорційним до моменту сили кручення $M = D\alpha$, де D – коефіцієнт пропорційності, який для кожного приладу є відомим.



Мал. 2

Коли момент сили кручення нитки зрівняється з моментом сили відштовхування зарядів, кулька зупиниться. Умова рівності цих моментів сил

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} l = D \cdot \alpha.$$

З цієї рівності отримаємо:

$$\varepsilon_0 = \frac{q_1 \cdot q_2 \cdot l}{4\pi^2 D \cdot \alpha}.$$

Усі величини у правій частині рівності можна виміряти експериментально.

Тема 3. Електричне поле і його напруженість

Фізичні поняття

- **Електричне поле** – це субстанція, яка створюється електричними зарядами і виявляє себе за дією на електричний заряд.

Як бачимо, заряд є водночас і джерелом поля, і тим інструментом, який виявляє присутність електричного поля.

- **Пробний заряд** – це позитивний точковий заряд, який служить для виявлення та вимірювання електричного поля.

Очевидно, що реальний пробний заряд, крім дуже малих розмірів, повинен мати і дуже малу величину, бо інакше, будучи джерелом ще одного поля, він спотворюватиме досліджуване поле.

- **Лінія напруженості електричного поля (чи силова лінія)** – це лінія у кожній точці якої вектор напруженості поля дотичний до цієї лінії, або, інакше, – це лінія, вздовж якої рухається пробний заряд, на який не діють жодні сили, крім сил електричного поля.

Фізичні величини

- **Напруженість електричного поля в заданій точці простору** – це відношення сили, яка діє з боку цього поля на пробний заряд, поміщений в цю точку до величини цього заряду (позначення $\vec{E}$)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

З цього означення бачимо, що оскільки сила є вектором, то і напруженість є вектором. Крім того вектор $\vec{E}$ спрямований туди ж, куди і вектор $\vec{F}$.

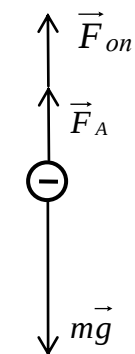
Задачі

(6) Знайдемо заряд електрона в ході мисленнево проведеного досліді Мілікена (1909 р).

Ідея досліді Мілікена полягає в тому, щоб знайти зміну заряду попередньо зарядженої краплі оливи в йонізованому повітрі.

Для цього спочатку виміряємо заряд краплі в звичайному повітрі q , а потім – в йонізованому q' .

Щоб виміряти заряд краплі, слід виміряти коефіцієнт опору при русі краплі в повітрі за відомою методикою.



Мал. 3

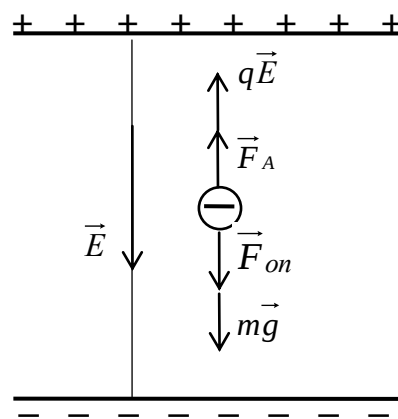
На краплю, яка падає у повітрі, діють три сили: сила тяжіння mg , сила Архімеда $F_A = \rho g V$ та сила опору повітря $F_{on} = r v$, де r – коефіцієнт опору (мал. 3). Дві перші з цих сил постійні і лише третя зростає зі збільшенням швидкості, тому в міру її збільшення буде зростати і сила опору. Через певний час після початку падіння ця сила разом із силою Архімеда, які діють вгору, зрівноважать силу тяжіння і рух перейде в рівномірний

$$F_A + F_{on} = mg,$$

або

$$\rho g V + r v = mg,$$

звідки знаходимо коефіцієнт опору



Мал. 4.

$$r = \frac{mg - \rho g V}{v}. \quad (1)$$

Далі зробимо такий самий експеримент, але в електричному полі, напрямленому вниз. Тепер негативно заряджена крапля буде рухатися рівномірно вгору зі швидкістю u (мал. 4). Напишемо основне рівняння динаміки і для цього випадку

$$qE + \rho g V = mg + ru.$$

З цієї рівності та рівності (1), враховуючи, що $m = \rho_0 V$, де ρ_0 – густина оливи, дістанемо

$$q = \frac{gV}{E} \rho_0 - \rho \left(1 + \frac{u}{v} \right).$$

Усі величини в правій частині цієї рівності досить легко вимірюються експериментально.

Далі слід йонізувати простір між пластинами якимось йонізатором, наприклад, Х-променями, провести такий самий експеримент і знову за тією ж формулою обчислити заряд q' . Зауважимо, що і в першому і в другому випадках заряд слід усереднювати за великою кількістю крапель. Тепер можна переконатися, що зміна заряду краплі Δq становить ціле число зарядів $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, тобто

$$\Delta q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл } n = en,$$

де n – ціле число.

(7) На основі означення напруженості електричного поля та закону Кулона установимо вираз для напруженості поля точкового заряду.

Нехай поле створене точковим зарядом q . Якщо в це поле внести пробний заряд q_0 , то на нього з боку поля діятиме сила $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Але

ця сила – це сила кулонівської взаємодії між зарядами q та q_0 , тому згідно з законом Кулона підставимо за $\vec{F}$ вираз цього закону

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^3} \vec{r}.$$

Отже,

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0$$

або

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r},$$

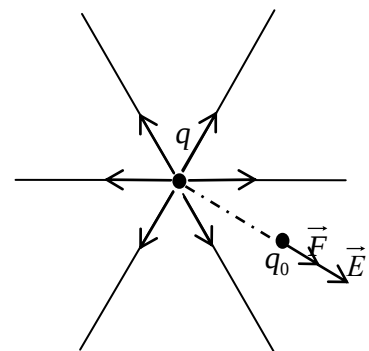
а величина напруженості

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

(8) Установимо картину силових ліній поля точкового заряду.

Нехай цей заряд позитивний. Розмістимо будь-де пробний заряд q_0 (мал. 5). Напруженість поля в цій точці

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0},$$



Мал. 5

де $\vec{F}$ – сила, яка діє з боку поля заряду q на заряд q_0 . Але $\vec{F}$ – це сила взаємодії між цими зарядами, і за законом Кулона вона спрямована вздовж прямої, що проходить через ці два

заряди. А оскільки вектор $\vec{E}$ отриманий діленням вектора $\vec{F}$ на додатній скаляр, то він направлений туди ж, куди і вектор $\vec{F}$. Такий самий результат буде в будь-якій іншій точці простору. Отже, поле точкового заряду радіальне.

(9) Покажемо, що густота ліній напруженості електричного поля точкового заряду в певній області простору вказує на величину напруженості електричного поля в цій області.

З виразу для напруженості поля точкового заряду випливає, що вона залежить лише від відстані від заряду, тобто є всюди однаковою на сфері радіусом r . Представимо цей вираз так:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon_0 S},$$

де S – площа сфери радіусом r .

Густота силових ліній – це кількість силових ліній на одиницю площі поверхні, нормальної до цих силових ліній

$$n = \frac{N}{S_{\perp}} = \frac{N}{S \cdot \cos \alpha}.$$

Підставивши S з цього виразу в останній вираз для E , дістанемо

$$E = \frac{q \cdot \cos \alpha}{\epsilon_0 \cdot N} n,$$

звідки бачимо, що величина напруженості пропорційна до густоти силових ліній n , тобто, там де більша густота силових ліній, там і більша напруженість поля.

Зауважимо, що для випадку поля точкового заряду цей висновок не має значної цінності, бо з аналітичного виразу і так видно, що ближче до заряду, то сильніше поле. Проте в тих випадках, де немає

аналітичного виразу для величини вектора $\vec{E}$, цей метод дає можливість на основі графічної картини силових ліній порівняти напруженість поля в різних областях цього поля.

Тема 4. Принцип суперпозиції електричних полів

Постулати

➤ **Принцип суперпозиції електричних полів:** система точкових зарядів створює у кожній точці простору поле, напруженість якого дорівнює сумі напруженостей, створених кожним із цих зарядів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

Задачі

(10) **Вкажемо на метод знаходження напруженості електричного поля зарядженого тіла, яке не можна вважати точковим зарядом.**

Будь-яке заряджене тіло представимо як систему нескінченної кількості нескінченно близьких один до одного, нескінченно малих точкових зарядів величиною dq . Очевидно, що кожен з цих зарядів буде створювати в певній точці простору нескінченно мале електричне поле напруженістю:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^3} \vec{r}.$$

Згідно з принципом суперпозиції, напруженість електричного поля у цій точці буде дорівнювати сумі згаданих напруженостей. Очевидно, що ми маємо справу з сумою нескінченної кількості нескінченно малих величин. А це є не що інше, як інтеграл. Отже,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^2}, \quad \vec{E} = k \int \frac{dq}{r^3} \vec{r}.$$

З цієї формули бачимо, що інтегрування слід провести по всьому заряду тіла, що важко зробити практично. Тому від інтегрування за зарядом перейдемо до інтегрування за об'ємом. Для цього застосуємо поняття об'ємної густини заряду $\rho \equiv \frac{dq}{dV}$. Дістанемо

$$\vec{E} = k \int \frac{\rho dV}{r^3} \vec{r},$$

тобто, принципово ми можемо обчислити напруженість поля, створену будь яким зарядженим тілом.

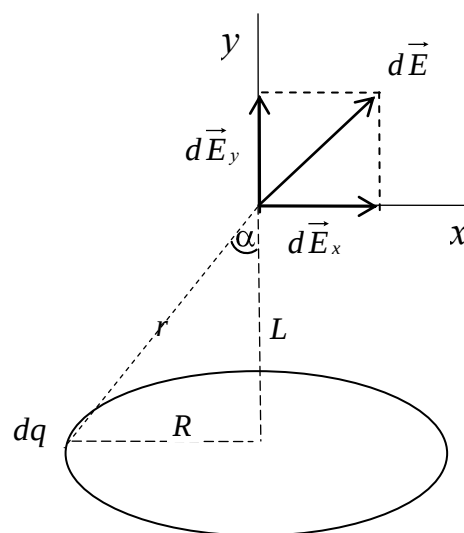
(11) Установимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого кільця радіусом R і лінійною густиною заряду λ на осі кільця на відстані L від його центру.

Згідно з принципом суперпозиції $\vec{E} = \int d\vec{E}$. Розкладемо вектор $d\vec{E}$ на дві складові (мал. 6):

$$d\vec{E} = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j}.$$

Тоді:

$$\vec{E} = \vec{i} \int dE_x + \vec{j} \int dE_y.$$



Мал. 6

З малюнка бачимо, що для кожного вектора $d\vec{E}_x$ знайдеться до нього протилежний і таким чином сума всіх x -ових складових вектора $d\vec{E}$ дорівнює нулеві, тобто

$$\int dE_x = 0.$$

Задача спростилася і

$$\vec{E} = \vec{j} \int dE_y.$$

Як видно з малюнка

$$dE_y = dE \cos \alpha,$$

тому

$$\vec{E} = \vec{j} \int dE \cos \alpha = \vec{j} \int k \frac{dq}{r^2} \cos \alpha.$$

Враховуючи, що $dq = \lambda dl$, де dl – елемент довжини кільця, маємо

$$\vec{E} = \vec{j} \int_0^l k \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha.$$

Отже, інтегрування буде йти по всій довжині кільця l (l у нас водночас змінна інтегрування і довжина кільця).

Щоб обчислити цей інтеграл, слід кожну величину у підінтегральному виразі подати через змінну інтегрування l або винести за знак інтеграла, якщо вона не залежить від l . Що і зробимо:

$$E = k \frac{\lambda}{r^2} \cos \alpha \int_0^l dl = k \frac{\lambda}{r^2} l \cos \alpha.$$

Представимо тепер всі ці величини через відомі

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2 + L^2} \cdot \frac{L \cdot 2\pi R}{\sqrt{R^2 + L^2}} = \frac{\lambda LR}{2\epsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}}.$$

І для вектора $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda LR}{2\epsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}} \vec{j}.$$

Остання рівність говорить про те, що шукана нами напруженість електричного поля – це вектор, спрямований вздовж осі y , величина якого

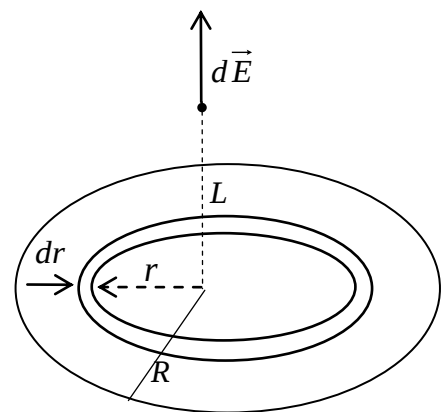
$$E = \frac{\lambda LR}{2\epsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}},$$

або оскільки кільце рівномірно заряджене, замінивши $\lambda = \frac{q}{l} = \frac{q}{2\pi R}$, отримаємо

$$E = \frac{qL}{2\epsilon_0 (R^2 + L^2)^{3/2}}.$$

(12) Знайдемо вираз для напруженості поля рівномірно зарядженого поверхневою густиною заряду σ диска радіусом R на осі диска на відстані L від його центра.

Розділимо диск на нескінченну кількість кілець і скористаємося результатом попередньої задачі. Одне з таких кілець товщиною dr і радіусом r показано на мал. 7.



Мал. 7

Оскільки його товщина нескінченно мала, то на ньому розміщений нескінченно малий заряд dq . Тому напруженість поля, яку воно створює в точці на осі кільця, згідно з результатом попередньої задачі, є

$$E = \frac{Ldq}{2\varepsilon_0 (r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Зверніть увагу, що замість сталого радіуса кільця R підставлено радіус r будь-якого кільця (R тепер у нас є радіусом диска).

Виразимо dq через поверхневу густину заряду. Дістанемо

$$dE = \frac{L\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}},$$

де dS – площа виділеного нескінченно малого кільця. Очевидно, що $dS = 2\pi r dr$, тому маємо

$$dE = \frac{L\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Інтегруємо

$$\begin{aligned} E &= \int_0^K \frac{L\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^K \frac{d(r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}{2(r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \Big|_0^K = \frac{L\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right). \end{aligned}$$

Остаточнo,

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right).$$

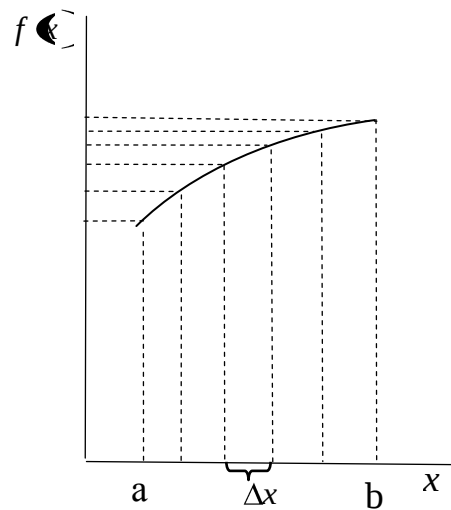
(13) Знайдемо середнє значення напруженості електричного поля точкового заряду в межах майданчика у вигляді диска, якщо заряд є на осі цього диска.

Математичний відступ: середнє значення функції.

Нам слід обчислити середнє значення функції на проміжку $[a, b]$. Очевидно, що наближено це можна зробити, розділивши цей проміжок на n проміжків шириною Δx (мал. 8). Тоді

$$\bar{f} \approx \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{n}.$$

або представивши $n = \frac{|a - b|}{\Delta x}$,



Мал. 8

$$\bar{f} \approx \frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_n)}{|a - b|} \Delta x = \frac{1}{|a - b|} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x.$$

При $n \rightarrow \infty$ (при цьому $\Delta x \rightarrow 0$) сума переходить в інтеграл і дістаємо точну формулу

$$\bar{f} = \frac{1}{|a - b|} \int_a^b f(x) dx.$$

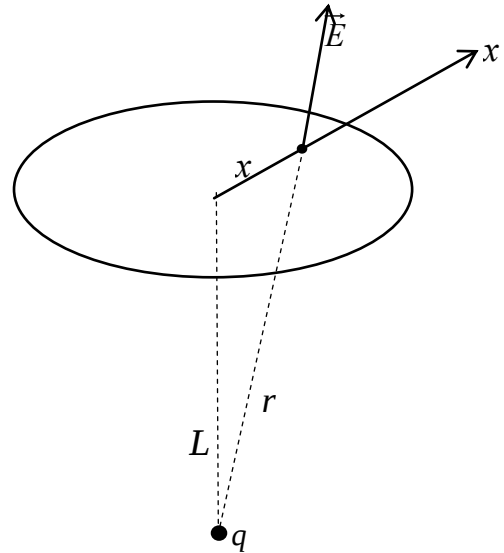
Повернемося до нашої задачі (мал. 9). З міркувань симетрії можемо зробити висновок, що середнє значення напруженості поля вздовж будь-якого радіуса диска однакове і тому дорівнює середньому зна-

ченню на всьому диску. Отже, нам досить обчислити середнє значення вздовж будь-якого радіуса

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{R} \int_0^R E dx = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^R \frac{dx}{r^2} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^R \frac{dx}{x^2 + L^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 RL^2} \int_0^R \frac{dx}{\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 RL} \operatorname{arctg} \frac{x}{L} \Big|_0^R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 RL} \operatorname{arctg} \frac{R}{L}.\end{aligned}$$

Остаточно,

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 RL} \operatorname{arctg} \frac{R}{L}.$$



Мал. 9.

Тема 5. Диполь

Фізичні поняття

- **Плече диполя** – вектор, проведений від негативного заряду диполя до позитивного (позначення $\vec{l}$).
- **Жорсткий диполь** – диполь, плече якого залишається сталим.
- **Точковий диполь** – диполь, плече якого значно менше за відстань від диполя до точки спостереження.

Фізичні величини

- **Дипольний момент** – це добуток одного із зарядів диполя на його плече (позначення $\vec{p}$)

$$\vec{p} \equiv q\vec{l}.$$

Фізичні системи й прилади

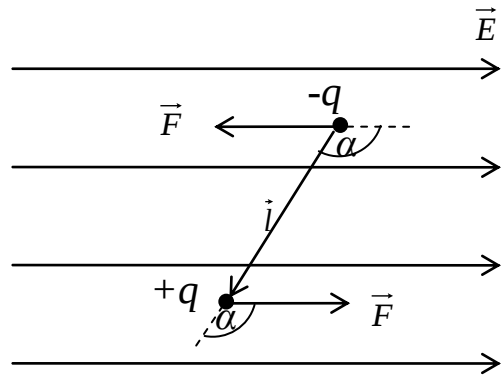
• **Диполь** – це система двох однакових за величиною та протилежних за знаком точкових зарядів.

Задачі

(14) Установимо, який стан займе вільний диполь, який потрапив в однорідне електричне поле.

Під вільним диполем очевидно розуміємо вільне тіло, тобто тіло, на яке не діють жодні сили.

На кожен із зарядів диполя діє сила величиною $F \equiv qE$. Напрями цих сил протилежні. Оскільки диполь жорсткий, то ці сили спричиняють виникнення моменту пари сил:



Мал. 10

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{l} = q\vec{E} \times \vec{l},$$

величина якого

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами $\vec{l}$ і $\vec{E}$. З мал. 10 бачимо, що диполь повертатиметься доти, доки кут α не дорівнюватиме нулеві, тобто диполь розташується так, що його дипольний момент буде паралельний до вектора $\vec{E}$. Після цього на заряд $+q$ буде діяти сила величиною qE в напрямку силових ліній, а на заряд $-q$ – така ж сила проти силових ліній, тобто поле буде намагатися розірвати диполь (тоді як рівнодійна сила на диполь загалом дорівнює нулеві, що означає, що диполь буде в стані спокою).

(15) Установимо вираз для напруженості електричного поля точкового диполя з плечем $\vec{l}$ в точці на відстані r від середини плеча диполя, яку видно під кутом α до плеча диполя.

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів (мал. 11)

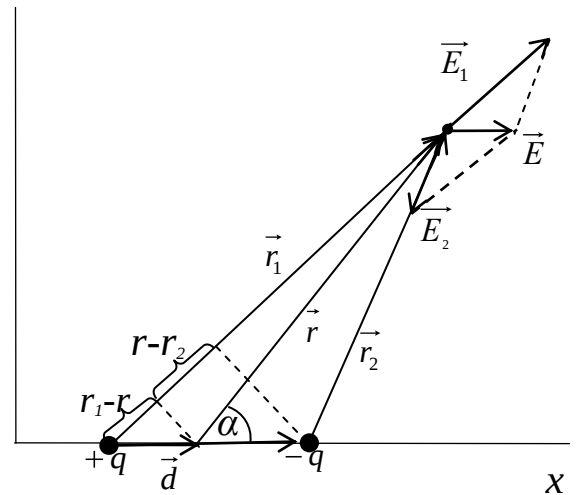
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1)$$

де $\vec{E}_1$ – напруженість поля в певній точці, створена зарядом $+q$, $\vec{E}_2$ – напруженість поля в цій же точці створена зарядом $-q$.

З мал. 11 бачимо, що згідно з формулою напруженості точкового заряду

$$\vec{E}_1 = k \frac{q}{r_1^3} \vec{r}_1, \quad \vec{E}_2 = -k \frac{q}{r_2^3} \vec{r}_2, \quad (2)$$

де знак « $-$ » вказує на те, що відповідний заряд негативний і вектори $\vec{r}_2$ і $\vec{E}_2$ є протилежно напрямлені.



Мал. 11

Виразимо вектори $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ через

$$\vec{r} \text{ і } \vec{d} = \frac{1}{2} \vec{l}.$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{d}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{d}, \quad (3)$$

а також довжини векторів $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ через довжини векторів $\vec{r}$ і $\vec{d}$ (враховуючи, що $d \ll r$):

$$r - r_2 = d \cos \alpha, \quad r_1 - r = d \cos \alpha,$$

звідки

$$r_2 = r - d \cos \alpha, \quad r_1 = r + d \cos \alpha. \quad (4)$$

Повертаючись до рівності (1) і підставляючи в неї (2), (3) і (4), матимемо

$$\begin{aligned} \vec{E} &= k \frac{q}{r_1^3} \vec{r}_1 - k \frac{q}{r_2^3} \vec{r}_2 = kq \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) = \\ &= kq \left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{\left(r + d \cos \alpha \right)^3} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{\left(r - d \cos \alpha \right)^3} \right) = \\ &= \frac{kq}{r^3} \left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{\left(1 + \frac{d}{r} \cos \alpha \right)^3} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{\left(1 - \frac{d}{r} \cos \alpha \right)^3} \right). \end{aligned}$$

Піднявши вирази в знаменниках до кубу й знехтувавши доданками, які містять малі порівняно з одиницею величини $\left(\frac{d}{r} \right)^2$ та $\left(\frac{d}{r} \right)^3$, дістанемо:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \left(\frac{\vec{r} - \vec{d}}{1 + 3 \frac{d}{r} \cos \alpha} - \frac{\vec{r} + \vec{d}}{1 - 3 \frac{d}{r} \cos \alpha} \right).$$

Звівши до спільного знаменника, який буде $1 - \left(3 \frac{d}{r} \cos \alpha \right)^2 \approx 1$, дістанемо

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \left(\left(1 - 3 \frac{d}{r} \cos \alpha \right) \left(\vec{r} - \vec{d} \right) - \left(1 + 3 \frac{d}{r} \cos \alpha \right) \left(\vec{r} + \vec{d} \right) \right).$$

Після перетворень і врахувавши, що $\vec{d} = \frac{1}{2} \vec{l}$

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \left(\vec{l} - 3 \frac{l}{r} \cos \alpha \vec{r} \right),$$

або, врахувавши, що $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{l} - 3 \frac{l}{r} \cos \alpha \vec{r} \right). \quad (4)$$

Знайдемо ще вираз для модуля вектора $\vec{E}$.

$$\begin{aligned} E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} &= \sqrt{\left(\frac{kq}{r^3}\right)^2 \left(l_x - 3 \frac{l}{r} \cos \alpha r_x\right)^2 + \left(\frac{kq}{r^3}\right)^2 \left(l_y - 3 \frac{l}{r} \cos \alpha r_y\right)^2} = \\ &= \frac{kq}{r^3} \sqrt{\left(-3l \cos^2 \alpha\right)^2 + \left(l \cos \alpha \sin \alpha\right)^2}. \end{aligned}$$

Після перетворення дістанемо

$$E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Формули (4) і (5) задають напрям і величину вектора $\vec{E}$ в будь-якій точці простору.

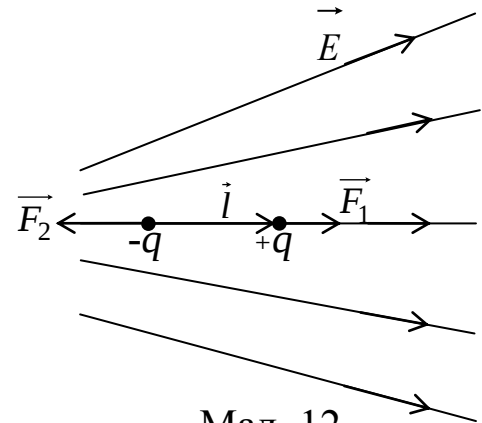
(16) Покажемо, що в неоднорідному електричному полі вільний диполь не буде в стані спокою (на відміну від випадку однорідного поля, де диполь є в стані спокою), а рухатиметься в напрямі зростання поля.

Очевидно, що як тільки диполь потрапить в електричне поле, він розташується вздовж однієї із його силових ліній так, що його дипольний момент буде паралельний до неї (мал. 12).

Біля заряду $-q$ напруженість електричного поля більша, ніж біля заряду $+q$, бо там більша густота силових ліній. Тому рівнодійна сила

$$F = F_1 - F_2 = qE - q(E - \Delta E) = q\Delta E,$$

де ΔE – зміна напруженості поля на відстані l . Представимо цю зміну так: $\Delta E = NdE$, де dE – дуже мала зміна величини вектора $\vec{E}$, яка відбувається на малій відстані dx . Тоді взявши до уваги, що $N = l/dx$, маємо



Мал. 12

$$F = q \frac{dE}{dx} l.$$

Отже, рівнодійна сила, яка діє на диполь, не дорівнює нулеві, і диполь буде рухатися у напрямку зростання поля.

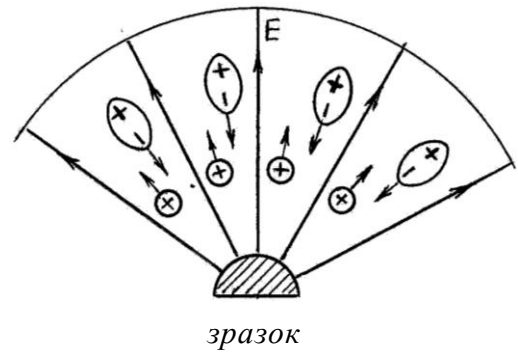
(17) Пояснимо явище притягання дрібних частинок до наелектризованих тіл.

Наприклад, це можуть бути шматочки паперу, які притягаються до наелектризованої пластмасової кулькової ручки або пил до екрана телевізора.

В електричному полі наелектризованого тіла маленькі частинки стають диполями (поляризуються), а оскільки це поле неоднорідне, то як ми вже з'ясували, то вони рухаються у бік його зростання, тобто до тіла.

(18) Пояснимо принцип роботи йонного мікроскопа.

У камері (мал. 13) створюють високий вакуум, а між зразком і стінкою камери прикладають високу напругу. Потім в камеру запускають атоми гелію чи неону. У сильному електричному полі атоми стають диполями і внаслідок неоднорідності цього поля рухаються в бік його зростання, тобто до зразка. Біля поверхні зразка поле стає настільки сильним, що воно йонізує атом, відірвавши від нього електрон. Позитивні йони гелію (чи неону) рухаються до екрана даючи на ньому зображення зразка.



Мал. 13

Тема 6. Потік електричної індукції. Теорема Остроградського – Гауса

Фізичні величини

- Електрична індукція – це вектор

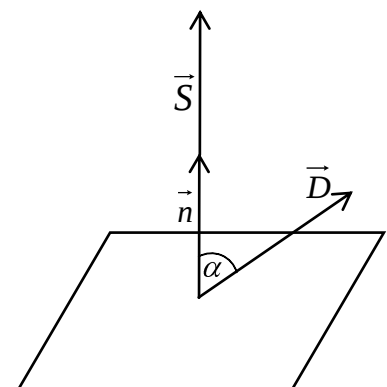
$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E}.$$

- Потік електричної індукції однорідного електричного поля через плоску поверхню – це скалярний добуток вектора електричної індукції на площу цієї поверхні (позначення Φ_D)

$$\Phi_D \equiv \vec{D} \vec{S} \equiv DS \cos \alpha = D_n S,$$

де $\vec{S} = S\vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні (мал. 14).

Аналогічно означається потік напруженості електричного поля.

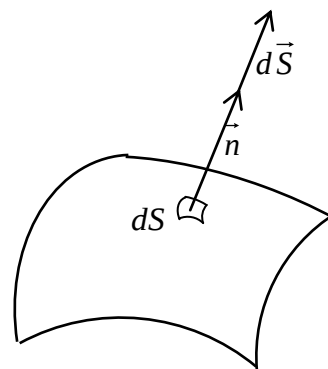


Мал. 14

(19) На основі означення потоку електричної індукції однорідного поля через плоску поверхню виведемо формулу для потоку електричної індукції будь-якого поля через будь яку поверхню.

Розділимо цю поверхню на велику кількість нескінченно малих поверхонь площею dS , які, очевидно, можна вважати плоскими (мал. 15).

Крім того, в межах цієї поверхні поле можна вважати однорідним. Таким чином до цієї нескінченно малої поверхні можна застосовувати означення потоку однорідного поля через плоску поверхню

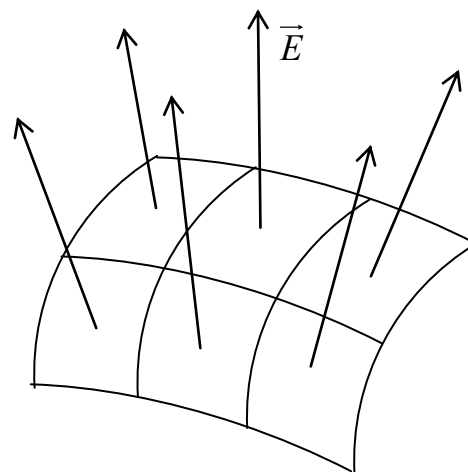


Мал. 15

$$d\Phi_D \equiv \vec{D}d\vec{S}.$$

Очевидно, що потік через всю поверхню буде дорівнювати сумі потоків через всі поверхні площею dS . Тому

$$\Phi_D = \int_S \vec{D}d\vec{S}.$$



Мал. 16

З цього виведення випливає також висновок про те, що потоки можна додавати, тобто оскільки площа поверхні S дорівнює сумі площ складових поверхонь, то потік через цю поверхню дорівнює сумі потоків через ці складові поверхні: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$ (мал. 16).

(20) Доведемо, що потік індукції електричного поля через певну поверхню пропорційний до кількості силових ліній, які її пронизують.

Для доведення скористаємось тим фактом, що величина вектора електричної індукції пропорційна до густоти силових ліній (задача 8), тобто $D \sim n$.

Згідно з означенням потоку, пропорційністю між D і n та означенням густоти силових ліній, маємо:

$$\Phi_D = \int_S D \cos \alpha dS \sim \int_S n \cos \alpha dS = \int_S \frac{dN}{dS \cos \alpha} \cos \alpha dS = \int dN = N.$$

Отже,

$$\Phi_D \sim N,$$

що означає, що кількість силових ліній, які пронизують цю поверхню, вказує на величину потоку електричної індукції через неї. Згадаймо, що в гідроаеродинаміці є подібна ситуація: густота ліній потоку вказує на швидкість потоку, а кількість ліній потоку – на величину потоку, яка дорівнює об'єму рідини чи газу, що перетинає певний переріз за одиницю часу.

(21) Доведемо теорему Остроградського–Гауса: потік електричної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює заряду, який є в об'ємі, обмеженому цією поверхнею, тобто

$$\Phi_D = q, \quad (1)$$

або, застосувавши означення потоку та об'ємної густини заряду,

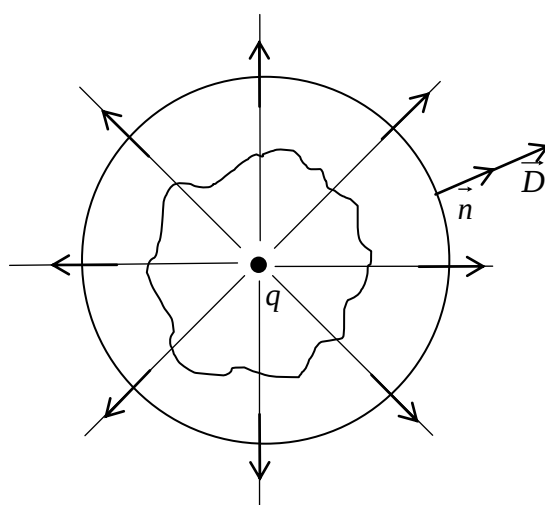
$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (2)$$

Спочатку доведемо це для точкового заряду. Охопимо його сферичною поверхнею з центром в місці знаходження заряду (мал. 17) і обчислимо потік електричної індукції через цю сферу.

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D dS \cos \alpha = D \int_S dS = DS = \\ &= \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = q.\end{aligned}$$

Ми винесли D за знак інтеграла завдяки тому, що модуль вектора $\vec{D}$ є однаковий в усіх точках сферичної поверхні.

З мал. 17 бачимо, що через будь-яку поверхню (не обов'язково сферичну), яка охоплює заряд проходить така ж сама кількість силових ліній, тому і потік через цю поверхню буде такий самий (задача 20), тобто дорівнюватиме заряду q . Крім того, з цих мір-



Мал. 17

кувань впливає, що потік через будь-яку замкнену поверхню не залежить від розміщення заряду в об'ємі, обмеженому цією поверхнею. Це означає, що якщо є не один точковий заряд, то потік буде дорівнювати їхній сумі (інтегралу, якщо їх нескінченно багато), тобто

$$\Phi_D = \int_V \rho dV.$$

(22) Переведемо теорему Остроградського–Гауса з інтегральної в диференціальну форму, тобто в таку форму рівняння, у яку б входили диференціальні характеристики, що означає: характеристики певної точки поля.

Охопимо заряд dq , об'ємна густина якого ρ кубом з ребрами dx , dy , dz , і знайдемо потік електричної індукції через цей куб (мал. 18).

Потік через ліву грань буде рівний $-D_x dydz$ (мінус тому, що проекція вектора D на зовнішню нормаль від'ємна). Потік через праву грань: $D_x + dD_x dydz$. Потік через ці дві грані

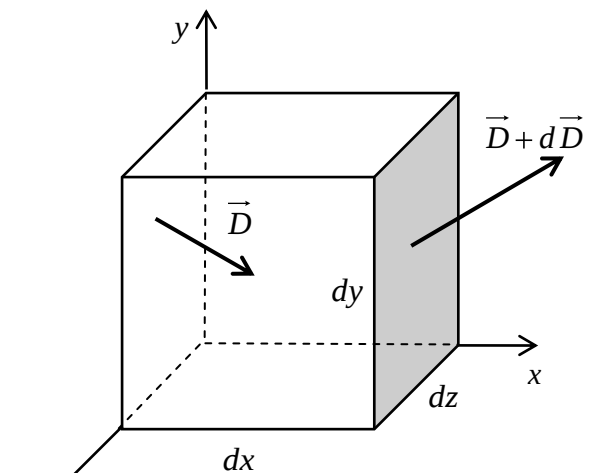
$$\Phi_{D_x} = -D_x dydz + (D_x + dD_x) dydz = dD_x dydz.$$

Аналогічно для потоків через нижню – верхню грані та передню – задню

$$\Phi_{D_y} = dD_y dx dz.$$

$$\Phi_{D_z} = dD_z dx dy.$$

Повний потік через поверхню куба



Мал. 18

$$\begin{aligned} \Phi_D &= \Phi_{D_x} + \Phi_{D_y} + \Phi_{D_z} = \\ &= dD_x dydz + dD_y dx dz + dD_z dx dy. \end{aligned}$$

За теоремою Остроградського–Гауса

$$\Phi_D = dq \equiv \rho dV = \rho dx dy dz.$$

Підставивши сюди знайдений вираз для потоку, і поділивши ліву й праву частини на $dx dy dz$, дістанемо

$$\frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} = \rho.$$

Очевидно, що це частинні похідні, тому

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho,$$

або взявши до уваги, що така сума похідних від координат вектора — це дивергенція цього вектора, можемо написати

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Врахувавши, що

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

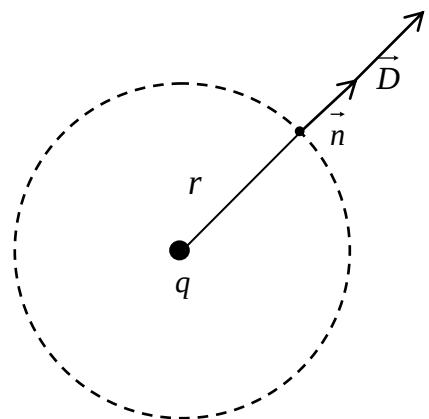
Тема 7. Обчислення напруженостей електричних полів на основі теореми Остроградського–Гауса

Задачі

(23) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля точкового заряду.

Охопимо заряд уявною сферичною поверхнею, яка проходить через точку, в якій ми шукаємо напруженість поля. Знайдемо потік електричної індукції через цю поверхню.

$$\begin{aligned} \Phi_D &= \int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D dS \cos \alpha = \\ &= \int_S D dS = D \int_S dS = 4\pi r^2 D. \end{aligned}$$



Мал. 19

Згідно з теоремою Остроградського–Гауса, прирівняємо отриманий результат до величини заряду q

$$4\pi r^2 D = q,$$

звідки

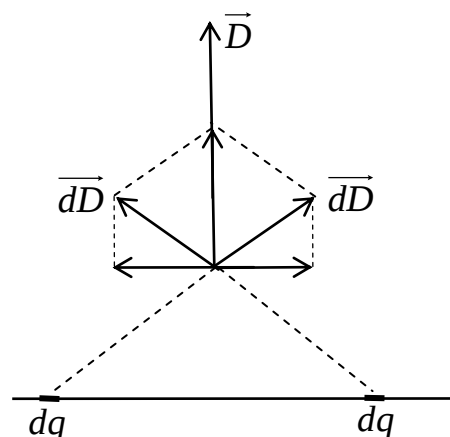
$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

А для вектора $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

(24) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ .

Спочатку встановимо напрям вектора $\vec{D}$ в довільній заданій точці простору, тобто з'ясуємо картину силових ліній поля. Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, вектор $\vec{D}$ буде результатом додавання усіх векторів $d\vec{D}$, створених нескінченно малими ділянками площини. Оскільки площина нескінченна, то для будь-якого електричного заряду dq



Мал. 20

знайдеться симетричний, який дає протилежну проекцію на горизонтальну вісь (мал. 20). Отже, всі горизонтальні проекції будуть скомпенсовані, залишаться тільки вертикальні, що означає, що лінії індукції електричного поля це прямі паралельні до площини.

Охопимо частину площини паралелепіпедом, поверхня якого проходить через задану точку (мал. 21) і знайдемо потік через його поверхню. Очевидно, що потоки через грані, нормальні до площини, дорівнюють нулеві, бо кут α між вектором $\vec{D}$ і нормаллю до поверхні паралелепіпеда дорівнює 90° . Залишаються потоки через грані, паралельні до площини. Згідно з теоремою Остроградського–Гауса, враховуючи, що поле однорідне всюди на грані, маємо:

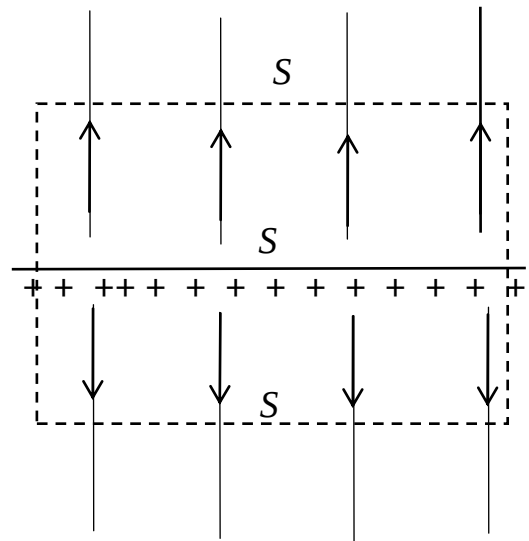
$$2DS = q \equiv \sigma S,$$

звідки:

$$D = \frac{\sigma}{2},$$

і

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$



Мал. 21

Зауважте, що напруженість поля нескінченної площини – це стала величина, яка не залежить від відстані від площини. Якщо площина обмежена, то очевидно ця формула правильна тільки для точок розміщених дуже близько до неї.

(25) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля на поверхні зарядженого провідника.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося тим фактом, що електричне поле всередині провідника відсутнє (надалі ми поставимо перед собою задачу довести це).

Очевидно, що для всіх точок, які лежать дуже близько до поверхні провідника, провідник можна вважати нескінченною площи-

ною, якої б форми він не був. Отже, задача зводиться до попередньої з тією різницею, що поле існує лише поза провідником (мал. 21).

За теоремою Остроградського–Гауса

$$DS = \sigma S,$$

звідки

$$D = \sigma, E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

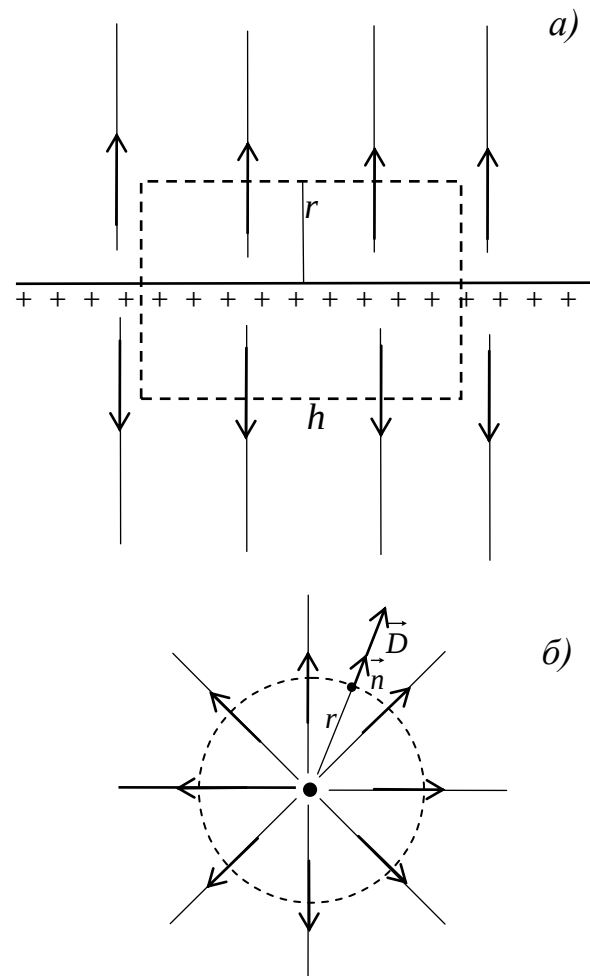
(26) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої нескінченно довгої прямої нитки з лінійною густиною заряду λ .

З міркувань симетрії, подібних до міркувань щодо поля нескінченної площини, знаходимо, що вектор електричної індукції у будь-якій точці є нормальним до нитки (мал. 22, а, б). Охопимо частину нитки уявним циліндром поверхня якого проходить через точку в якій ми шукаємо напруженість поля.

Знайдемо потік електричної індукції через цей циліндр. З малюнка видно, що потік через основи циліндра дорівнює нулеві, бо кут між векторами $\vec{D}$ і $\vec{n}$ прямий.

Потік через бічну поверхню

$$\Phi_D = DS = 2\pi rhD.$$



Мал. 22

Всередині циліндра знаходиться заряд

$$q = \lambda h,$$

тому за теоремою Остроградського–Гауса

$$2\pi r h D = \lambda h,$$

звідки

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r},$$

і

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

(27) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сфери.

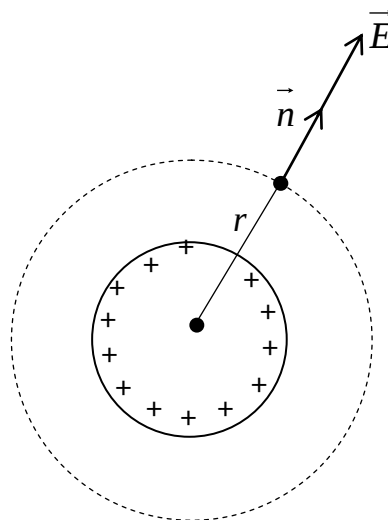
З міркувань симетрії робимо висновок, що вектор $\vec{D}$ в кожній точці простору за сферою спрямований радіально.

Нехай на сфері є сумарний заряд q . Охопимо заряджену сферу ще однією сферою, яка проходить через задану точку (мал. 23). Згідно з теоремою Остроградського–Гауса:

$$DS = q,$$

$$4\pi r^2 D = q,$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Мал. 23

Бачимо, що напруженість поля сфери з зарядом q така ж, як і напруженість поля точкового заряду q поміщеного в центрі цієї сфери.

(28) На основі теореми Остроградського–Гауса встановимо вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого нескінченно довгого циліндра.

Охопимо заряджений циліндр ще одним уявним циліндром, проте таким, який проходить через точку, в якій ми шукаємо напруженість поля. З тих же міркувань, що і для поля нитки, робимо висновок, що лінії напруженості є прямі нормальні до бічної поверхні циліндра (мал. 24, а, б).

Оскільки всюди на поверхні уявного циліндра поле однакове за величиною і спрямоване вздовж нормалі до циліндра, то потік матиме найпростіший вигляд $\Phi_D = DS$ і згідно з теоремою Остроградського–Гауса

$$DS = q,$$

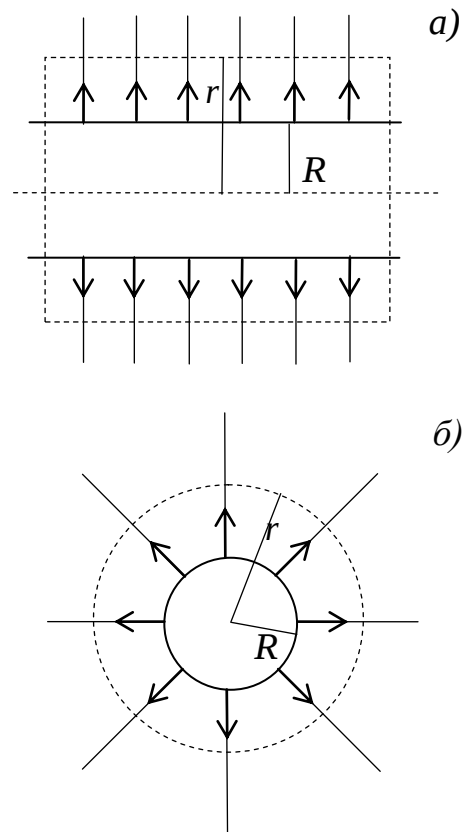
або

$$DS = \sigma S',$$

де q – заряд, який є всередині уявного циліндра, σ – поверхнева густина заряду на циліндрі, S' – площа бічної поверхні реального циліндра.

З малюнка бачимо, що потік через основи циліндра дорівнює нулеві, тому остання формула набуває вигляду:

$$D2\pi rh = \sigma 2\pi Rh,$$



Мал.24

звідки

$$D = \sigma \frac{R}{r},$$

$$E = \sigma \frac{R}{\varepsilon_0 r}.$$

(29) Доведемо, що в об'ємі, обмеженому зарядженою поверхнею, напруженість електричного поля дорівнює нулеві.

Проведемо всередині поверхні уявну поверхню нескінченно близько до зарядженої поверхні (мал. 25). У цьому об'ємі немає зарядів, тому згідно з теоремою Остроградського—Гауса

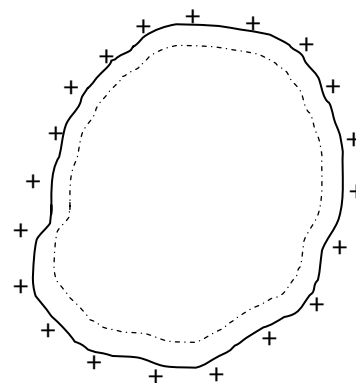
$$\operatorname{div} \vec{D} = 0,$$

звідки:

$$\vec{D} = 0$$

і

$$\vec{E} = 0.$$



Мал. 25

(30) З'ясуємо, для розрахунку яких електричних полів можна ефективно застосовувати теорему Остроградського—Гауса.

По-перше, очевидним є те, що нам має бути відома графічна картина силових ліній цього поля.

По-друге, оскільки індукція (чи напруженість) електричного поля входить у вираз для потоку, то в загальному випадку вона є під знаком визначеного інтеграла в підінтегральному виразі. Для того, щоб проінтегрувати, слід встановити залежності всіх величин (букв)

підінтегрального виразу від змінної інтегрування і винести за знак інтеграла ті величини, які від неї не залежать. Стосовно вектора електричної індукції, це означає, що якщо він залежить від змінної інтегрування S , то, встановивши цю залежність, ми втратимо цю величину (букву D), а щоб вона збереглася у виразі потоку, то має бути незалежною від змінної інтегрування S . Таким чином, робимо висновок, що теорему Остроградського–Гауса варто застосовувати до тих полів, для яких ми можемо віднайти таку уявну замкнену поверхню, на якій величина $D_n = D \cos \alpha$ є всюди однаковою.

Тема 8. Потенціал електростатичного поля

Фізичні величини

• **Потенціал електростатичного поля в певній точці простору** – це відношення роботи, яку слід виконати при переміщенні точкового заряду з цієї точки у нескінченність до величини цього заряду (позначення φ):

$$\varphi = \frac{A}{q_0}.$$

Але згадана робота є потенціальною енергією цієї точки поля W , тому потенціал можна записати і так:

$$\varphi = \frac{W}{q_0}.$$

• **Різниця потенціалів** – різниця між потенціалами двох точок поля (позначення $\Delta\varphi$):

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Задачі

(31) Покажемо, що якщо в заданій точці простору є не одне, а багато полів, то потенціал в цій точці дорівнюватиме сумі потенціалів, створених кожним із полів.

Згідно з принципом суперпозиції полів, можемо вважати, що в цій точці простору присутнє лише одне поле, яке має відповідні характеристики – напруженість та потенціал. Цей потенціал згідно з означенням

$$\varphi = \frac{A}{q_0}.$$

Але роботу A результативного поля можна представити як суму робіт, виконаних окремими полями, тому

$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{q_0} = \frac{A_1}{q_0} + \frac{A_2}{q_0} + \dots + \frac{A_n}{q_0}.$$

Кожен з доданків в останній формулі – це потенціал відповідного поля, тобто

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

Отже, потенціал в певній точці дорівнює сумі потенціалів, створених кожним із полів:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

(32) На основі означення потенціалу встановимо вираз для потенціалу поля точкового заряду q в точці, яка є на відстані r від цього заряду.

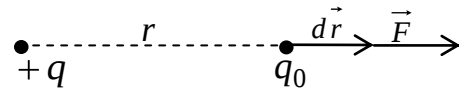
Спочатку обчислимо роботу, яку виконує сила поля (чи зовнішня сила проти поля) при переміщенні пробного заряду q_0 з заданої точки

в нескінченність. Оскільки сила зменшується під час переміщення (бо це сила кулонівської взаємодії між зарядами q та q_0), то застосуємо формулу роботи змінної сили:

$$\begin{aligned} A &= \int_r^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = \int_r^{\infty} F dr \cos \alpha = \int_r^{\infty} F dr = \int_r^{\infty} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_r^{\infty} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}, \end{aligned}$$

де $\cos \alpha = 1$, бо α це кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ (мал. 26).

Згідно з означенням потенціалу



Мал. 26

$$\varphi = \frac{A}{q_0} = \frac{1}{q_0} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

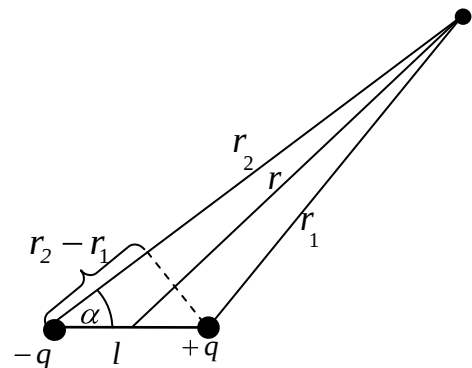
(33) На основі принципу додавання потенціалів та виразу для потенціалу поля точкового заряду встановимо вираз для потенціалу поля точкового диполя.

Потенціали поля зарядів $+q$ та $-q$ відповідно є:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1},$$

та

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2},$$



Мал. 27

де r_1 і r_2 – відстані від відповідних зарядів до заданої точки. Тому потенціал поля диполя:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

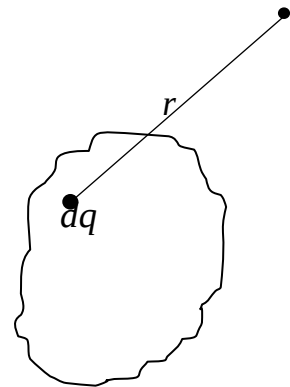
Для точкового диполя потенціал можна виразити через кут α та відстань r від заданої точки до диполя. З мал. 27 видно, що $r_2 - r_1 \approx l \cos \alpha$, $r_1 r_2 \approx r^2$, тому вираз для потенціалу поля точкового диполя буде мати вигляд:

$$\varphi = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha.$$

(34) Знайдемо метод обчислення потенціалу, створеного будь-яким неточковим зарядженим тілом.

Розділимо заряджене тіло на нескінченну кількість нескінченно малих частин і будемо вважати їх точковими зарядами dq . Тоді потенціал в певній точці на відстані r від заряду dq , створений цим точковим зарядом, буде (мал. 28)

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$



Мал. 28

Для того, щоб обчислити потенціал, створений усім тілом, слід, опираючись на принцип додавання потенціалів, додати всі потенціали, створені окремими зарядами dq , що в цій ситуації означає: проінтегрувати по всьому тілу. Тому

$$\varphi = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Проте інтегрувати за зарядами важко, тому перейдемо до інтегрування за об'ємом, представивши dq як ρdV , де ρ – об'ємна густина заряду. Тоді

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_q \frac{\rho dV}{r}.$$

(35) Знайдемо вираз для потенціалу поля, створеного рівномірно зарядженим диском у будь-якій точці на його осі.

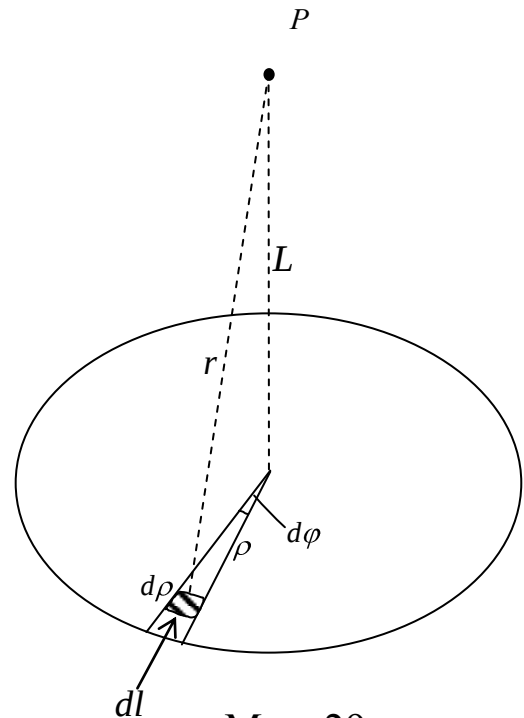
Розділимо диск на нескінченну кількість малих точкових зарядів dq . Тоді кожен з них в заданій точці P буде створювати поле з потенціалом

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Застосувавши принцип додавання потенціалів, та виразивши заряд через його поверхневу густину, потенціал, створений диском, представимо

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r}.$$

Вибираємо довільний елемент площі dS , як показано на мал. 29. Тоді



Мал. 29

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{dl d\rho}{r}.$$

Відстань r від елементарної площі до заданої точки представимо через ρ і L як $\sqrt{\rho^2 + L^2}$, а елемент довжини dl – через кут $d\varphi$ як $\rho d\varphi$. Маємо

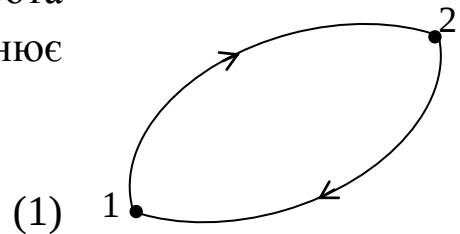
$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} \right) d\varphi = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{d(\rho^2 + L^2)}{\sqrt{\rho^2 + L^2}} \right) d\varphi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + L^2} - L \right).\end{aligned}$$

Тема 9. Потенціальність електростатичного поля

Фізичні поняття

• **Потенціальне поле** – це поле, робота сили якого на замкненій траєкторії дорівнює нулеві (мал. 30):

$$A_{12} + A_{21} = 0,$$



Мал. 30

де A_{12} – робота сили поля при переміщенні з точки 1 в точку 2, A_{21} – те саме з точки 2 в точку 1.

• **Циркуляція будь-якого вектора $\vec{a}$ вздовж замкненого контура L** – це інтеграл вздовж замкненого контура від скалярного добутку цього вектора на елемент довжини цього контура:

$$\mathcal{C} \equiv \oint_L \vec{a} d\vec{l}.$$

• **Ротор будь-якого вектора $\vec{a}$** – це вектор

$$\text{rota} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Задачі

(36) На основі означення потенціалу доведемо, що електростатичне поле є потенціальне.

Нам слід довести, що в електростатичному полі виконується умова (1). Скористаємося означенням потенціалу. Дістанемо

$$\begin{aligned} A_{12} &= q_0 \Delta\varphi = q_0 (\varphi_2 - \varphi_1) = q_0 \varphi_2 - q_0 \varphi_1 = \\ &= A_2 - A_1 = - (A_1 - A_2) = -A_{21}. \end{aligned}$$

(37) На основі означення роботи покажемо, що умовою потенціальності електростатичного поля є рівність нулеві циркуляції вектора його напруженості вздовж будь-якого замкненого контура.

За означенням роботи умова потенціальності (1) матиме вигляд

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} + \int_2^1 \vec{F} d\vec{l} = 0,$$

або

$$\oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

Стосовно електростатичного поля, підставивши $F = q_0 E$, умова (1) виглядатиме так:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (2)$$

Бачимо, що ліва частина рівності – не що інше як циркуляція вектора напруженості електростатичного поля. Тому умовою потенціаль-

ності електростатичного поля є рівність нулевій циркуляції його напруженості вздовж будь-якого замкненого контура.

(38) На основі теореми Стокса подамо умову потенціальності електростатичного поля в диференціальній формі.

Зміст теореми Стокса: циркуляція будь-якого вектора (в тому числі і вектора напруженості електростатичного поля) вздовж замкненого контура дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню, обмежену цим контуром, тобто

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}.$$

На основі цієї теореми умова потенціальності (2) може бути написана так:

$$\int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} = 0,$$

звідки, оскільки $S \neq 0$

$$\text{rot} \vec{E} = 0. \quad (3)$$

Ми отримали ще один запис потенціальності електростатичного поля, а саме диференціальну її форму.

Тема 10. Зв'язок між напруженістю і потенціалом

Фізичні поняття

• **Гradient даної скалярної величини φ** – це вектор, спрямований у бік найбільшого зростання цієї фізичної величини, модуль яко-

го дорівнює відношенню зміни цієї фізичної величини до відстані в цьому напрямі найбільшого зростання, на якій відбулася ця зміна (позначення $\text{grad}\varphi$):

$$\text{grad}\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

• **Еквіпотенціальна поверхня** – поверхня, у кожній точці якої потенціал однаковий.

Задачі

(39) **Установимо зв'язок між напруженістю електростатичного поля та його потенціалом.**

Згідно з означеннями потенціалу та роботи

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{A}{q_0} = \frac{1}{q_0} \int dA = \frac{1}{q_0} \int \vec{F} d\vec{r} = \frac{1}{q_0} \int \left(-q_0 \vec{E} \right) d\vec{r} = \\ &= - \int \left(E_x dx + E_y dy + E_z dz \right) = - \int E_x dx - \int E_y dy - \int E_z dz,\end{aligned}$$

де знак « $-$ », який з'явився при заміні $\vec{F}$ на $q_0 \vec{E}$, вказує на те, що вектор $\vec{E}$ є протилежним до вектора зовнішньої сили $\vec{F}$ (бо пробний заряд q_0 позитивний).

Знайдемо частинну похідну від φ за x

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = - \int \frac{\partial E_x}{\partial x} dx - \int \frac{\partial E_y}{\partial x} dy - \int \frac{\partial E_z}{\partial x} dz.$$

Оскільки $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$ та $\frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$, отримаємо що

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -E_x. \quad (1)$$

Аналогічно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E_y, \quad (2)$$

та

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E_z. \quad (3)$$

Але вектор $\vec{E}$, як і будь-який інший, можна подати як лінійну комбінацію одиничних векторів

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

Взявши до уваги рівності (1), (2), (3), дістанемо

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \equiv -\text{grad} \varphi.$$

З цієї формули бачимо, що оскільки вектор $\text{grad} \varphi$ спрямований у бік найбільшого зростання потенціалу, то вектор $\vec{E}$ – у бік його найбільшого спадання.

(40) З формули зв'язку напруженості і потенціалу та теореми Остроградського–Гауса отримаємо рівняння Пуассона.

Підставимо формулу зв'язку між напруженістю та потенціалом у формулу, яка виражає теорему Остроградського–Гауса в диференціальній формі $\left(\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)$. Дістанемо

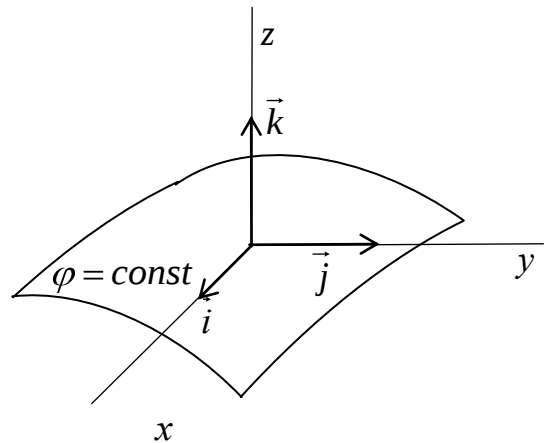
$$\operatorname{div} \vec{\operatorname{grad} \varphi} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

або

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Оскільки операція дивергенції полягає в тому, що слід взяти похідні за x, y і z від компонентів вектора і додати їх, то остання рівність набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$



Мал. 31

або скорочено

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Останнє рівняння називають *рівняннями Пуассона*. За умови $\rho = 0$ це рівняння називають *рівнянням Лапласа*:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

(41) Доведемо, що вектор напруженості електростатичного поля завжди нормальний до екіпотенціальної поверхні.

Виберемо систему координат так, щоб вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ були дотичні до екіпотенціальної поверхні (мал. 31). Тоді в цій точці дотику

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

(Пам'ятаємо, що похідна в будь-якій точці – це кутовий коефіцієнт дотичної в цій точці, а оскільки цей кутовий коефіцієнт дорівнює нулеві, то і похідна дорівнює нулеві).

Тому, згідно з формулою зв'язку напруженості і потенціалу

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dz} \vec{k},$$

що означає, що $\vec{E} \perp \vec{k}$, тобто вектор $\vec{E}$ нормальний до цієї поверхні.

(42) Доведемо теорему про середнє значення потенціалу: потенціал у будь-якій точці простору дорівнює середньому значенню потенціалу на будь-якій уявній сфері з центром в цій точці, яка не охоплює електричних зарядів.

Напишемо формулу для середнього значення потенціалу на сфері

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{S} \int_S \varphi dS$$

і знайдемо похідну від $\bar{\varphi}$ за радіусом сфери r

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{S} \int_S \frac{d\varphi}{dr} dS.$$

Згідно з формулою зв'язку між напруженістю і потенціалом $d\varphi/dr$, це проекція вектора напруженості на радіус E_r , тому

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = \frac{1}{S} \int_S E_r dS,$$

а за теоремою Остроградського–Гауса, оскільки в області обмеженої сферою електричні заряди відсутні, останній вираз дорівнює нулеві. Отже,

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dr} = 0,$$

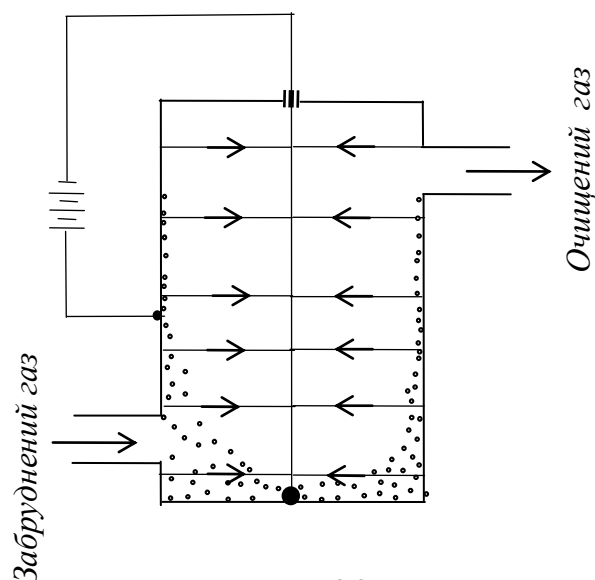
що означає, що $\bar{\varphi}$ не залежить від радіуса сфери, тобто середнє значення потенціалу однакове на всіх сферах, в тому числі і на сфері нескінченно малого радіуса, яка збігається з заданою точкою.

(43) Пояснимо метод електростатичного очищення газів.

Для очищення газів беруть велику металеву бочку з провідником у її центрі, який ізольований від самої бочки (мал. 32).

Цей провід перебуває під високою негативною напругою. Оскільки поблизу проводу висока напруженість поля (велика густота силових ліній), то повітря йонізується і потік електронів та йонів O_2^- електризує частинки домішок, які є в забрудненому газі, негативним зарядом.

Ці негативно наелектризовані частинки починають рухатися проти поля і прилипають до стінок. Тоді їх струшують на дно бочки.



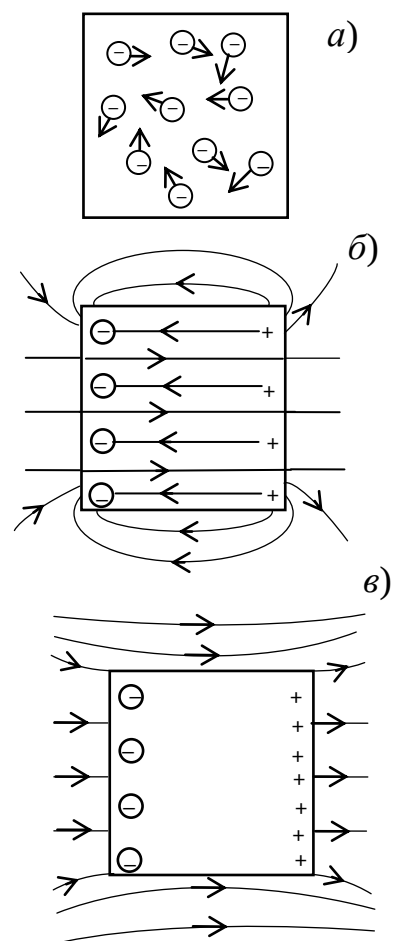
Мал. 32

Тема 11. Провідник в електричному полі

Задачі

(44) Покажемо, що в провіднику, поміщеному в електричне поле, воно дорівнюватиме нулеві, а за межами провідника – зміниться.

Візьмемо конкретний провідник – метал. Відомо, що в ньому є вільні носії заряду – електрони (мал. 33, а), які рухаються хаотично. Як тільки ми включимо електростатичне поле, воно почне діяти на вільні електрони, і вони, маючи негативний заряд, почнуть рухатися проти силових ліній. У результаті їх нагромадження на одній з поверхонь, на протилежній поверхні (а точніше в усьому об'ємі) виникне некомпенсований позитивний заряд, що стане причиною виникнення внутрішнього електричного поля, спрямованого протилежно до зовнішнього (мал. 33, б). Проте в міру нагромадження електронів на поверхні, внутрішнє поле буде зростати і все більше гальмувати інші електрони в їхньому русі проти зовнішнього поля. Коли внутрішнє поле зросте настільки, що воно зрівняється за величиною з зовнішнім, рух електронів припиниться. Оскільки напрями цих полів протилежні, то поле всередині провідника зникне (мал. 33, в). За межами провідника зліва і справа поле індукованих зарядів буде співнаправлене із зовнішнім полем, тому підсилить його. Проте зверху і знизу силові лінії zdeформуються і густота їхня стане меншою, що означає, що там поле послаблюється.



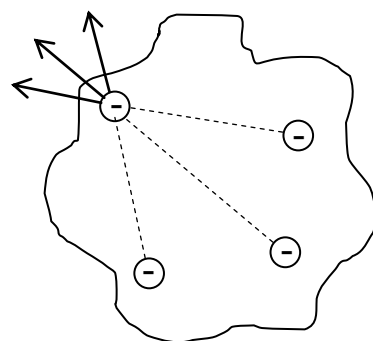
Мал. 33

Очевидно: якщо провідник порожнистий, то нічого від цього не зміниться, поле всередині такої провідної посудини відсутнє.

Це явище використовують для захисту електричних приладів від зовнішнього електричного поля. Для цього прилади поміщають у металеві корпуси.

(45) Покажемо: якщо провіднику надати заряду, то він розміститься на його поверхні.

Припустимо, що заряд розподілився в об'ємі провідника. Тоді на будь-який заряд з боку інших однойменних зарядів буде діяти сила, яка спрямована до поверхні. А оскільки він може вільно переміщуватися, то почне рухатися до поверхні (мал. 34). Те саме станеться і з іншими зарядами. В результаті всі заряди розмістяться на поверхні провідника.



Мал. 34

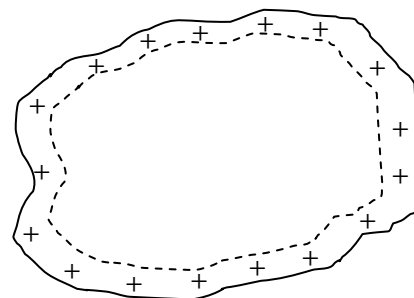
(46) Покажемо, що як заряджений так і електронейтральний провідник є еквіпотенціальним.

Оскільки заряд розміщується на поверхні провідника, то поле всередині провідника відсутнє. Дійсно, виберемо замкнену поверхню всередині провідника (мал. 35). Так як в області, обмеженій цією поверхнею, немає зарядів, то згідно з теоремою Остроградського–Гауса

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = 0,$$

звідки, оскільки $S \neq 0$

$$\vec{E} = 0.$$



Мал. 35

З останньої рівності випливає, що

$$E_x = E_y = E_z = 0.$$

з формули зв'язку напруженості з потенціалом

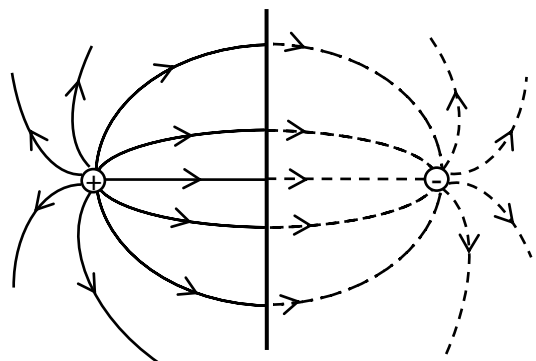
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

звідки робимо висновок, що φ не залежить від координат, тобто всюди всередині зарядженого (чи не зарядженого) провідника $\varphi = \text{const}$.

(47) Доведемо, що електричне поле між точковим зарядом та нескінченною провідною площиною збігається з полем, створеним цим зарядом, та його дзеркальним зображенням у цій площині.

Будемо доводити навпаки, що поле двох точкових різнойменних зарядів (поле диполя) можна замінити на поле одного заряду та провідної не зарядженої площини.

Проведемо одну з екіпотенціальних поверхонь, а саме ту, яка проходить через середину плеча диполя, яка як відомо, є площиною (мал. 36). Замінімо тепер цю екіпотенціальну площину на реальну провідну площину з потенціалом, що дорівнює потенціалу екіпотенціальної площини. Очевидно, що від цього нічого не зміниться, поле залишиться таким самим.



Мал. 36

Бачимо, що таким способом можна встановити картину силових ліній поля, створеного точковим зарядом та незарядженою провідною площиною. Цей спосіб має назву: метод дзеркальних зображень.

Тема 12. Діелектрик в електричному полі

Фізичні явища

• **Поляризація діелектрика** – явище виникнення сумарного ненульового дипольного моменту в кристалі діелектрика під впливом зовнішнього поля.

• **П'єзоелектричний ефект** – явище виникнення різниці потенціалів між поверхнями діелектрика після його деформації.

• **Електрострикція** – явище деформації діелектрика внаслідок прикладання до нього різниці потенціалів. Це явище є оберненим до п'єзоелектричного ефекту.

• **Електретний ефект** – явище незникнення поляризації діелектрика при виключенні електричного поля.

Фізичні поняття

• **Діелектрик** – це речовина, у якій відсутні вільні носії електричного заряду.

• **Полярний діелектрик** – це діелектрик, молекули якого мають дипольний момент (наприклад H_2O , HCl , NH_3 , CH_3Cl).

• **Неполярний діелектрик** – це діелектрик, молекули якого не мають дипольного моменту (наприклад H_2 , N_2 , O_2 , CCl_4).

• **Сегнетоелектрик** – діелектрик, у якому є великі (порівняно з розмірами молекул) області (домени), у яких сумарний дипольний момент усіх молекул не дорівнює нулеві. Проте, оскільки, сумарні дипольні моменти окремих доменів спрямовані хаотично один відносно одного, то дипольний момент всього макрокристалу сегнетоелектрика дорівнює нулеві, як і в будь-якого іншого діелектрика. Прикладами сегнетоелектрика є сегнетова сіль, титанат барію.

Фізичні величини

• **Поляризованість окремої молекули** – це коефіцієнт пропорційності між її наведеним дипольним моментом $\vec{P}_i$ та індукцією елек-

тричного поля $\vec{D}$ всередині діелектрика, яке спричинилось до його виникнення (позначення β)

$$\vec{P}_i = \beta \vec{D}. \quad (1)$$

З цієї формули отримаємо, що одиницею вимірювання β є м³.

• **Поляризованість діелектрика** – це дипольний момент, який припадає на одиницю об'єму діелектрика (позначення $\vec{P}$)

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{P}_i}{V}. \quad (2)$$

Цю величину ще називають *вектором поляризації*. Зауважимо, що поляризованість молекули – це скалярна величина, а поляризованість діелектрика – це вектор.

• **Відносна діелектрична сприйнятливість** – це добуток поляризованості молекули на їхню концентрацію, або іншими словами поляризованість усіх молекул в одиниці об'єму (позначення χ)

$$\chi = \beta n. \quad (3)$$

З цієї формули випливає, що χ є безрозмірною величиною.

• **Відносна діелектрична проникність діелектрика** – це збільшена на одиницю відносна діелектрична сприйнятливість (позначення ε)

$$\varepsilon = 1 + \chi.$$

Задачі

(48) Виразимо поляризованість поміщеного в електричне поле неполярного діелектрика через напруженість електричного поля всередині діелектрика.

Оскільки в неполярному діелектрику дипольні моменти з'являються лише під дією електричного поля, то всі вони паралельні до поля і, відповідно, один до одного, тому

$$\sum_{i=1}^N \vec{P}_i = N \vec{P}_i, \quad (4)$$

де N – кількість молекул у діелектрику.

Згідно з означенням поляризованості (2), і останньою рівністю

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{P}_i}{V} = \frac{N \vec{P}_i}{V} = n \vec{P}_i,$$

де n – концентрація диполів (молекул).

Поляризованість i -тої молекули представимо згідно з її означенням (1). Дістанемо

$$\vec{P} = n \vec{P}_i = n \beta \vec{D} = \chi \vec{D} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (5)$$

де $\chi = n\beta$ згідно з означенням діелектричної сприйнятливості.

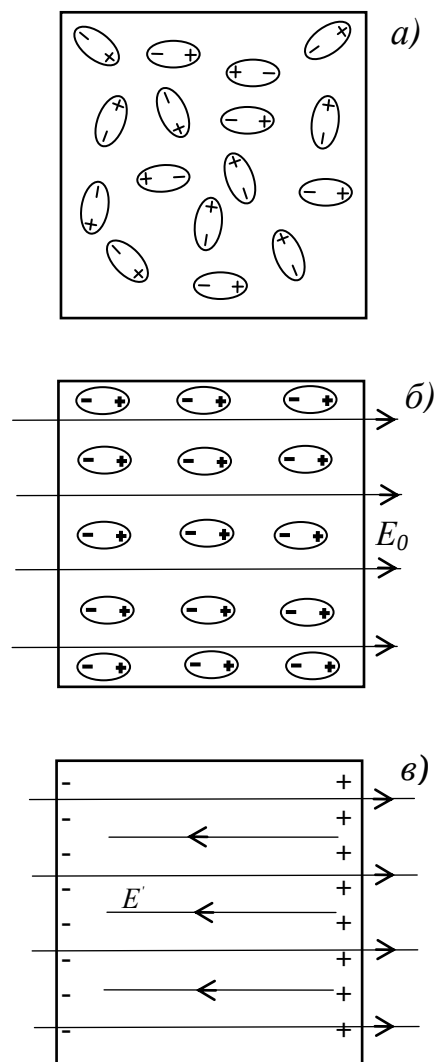
(49) Покажемо, що в діелектрику зовнішнє електричне поле послаблюється.

Помістимо діелектрик (мал. 37, а) у зовнішнє електричне поле з напруженістю $\vec{E}_0$. Якщо цей діелектрик полярний, то поле «вишикує» усі молекули-диполі вздовж поля. Якщо діелектрик неполярний, то ефект буде такий самий, поле спочатку поляризує молекули, а потім

«вишикує» їх уздовж ліній напруженості, як показано на мал. 37, б. З цього малюнка також видно, що всередині діелектрик залишається електронейтральним, а на поверхні виникають некомпенсовані заряди протилежних знаків. Це спричинить виникнення внутрішнього електричного поля $\vec{E}'$, спрямованого проти зовнішнього поля (мал. 37, в), проте на відміну від ситуації у провіднику, де внутрішнє поле зростало доти, доки воно не зрівнялося з зовнішнім, у діелектрику це зростання внутрішнього поля буде обмежене здатністю цього діелектрика до орієнтування молекул-диполів вздовж поля.

Насправді картина, показана на мал. 37, б, дуже ідеалізована, упорядкування диполів буде частковим, бо йому перешкоджатиме хаотичний тепловий рух молекул. Таким чином, внутрішнє поле $\vec{E}'$ буде мати певну величину, меншу за $\vec{E}_0$, причому в кожному діелектрику – свою.

У результаті накладання цих двох полів результативне поле в діелектрику послаблюється, причому в кожному діелектрику на іншу величину.



Мал. 37

(50) Покажемо, що поляризованість діелектрика дорівнює поверхневій густині індукованих на його поверхнях зарядів (поляризаційних зарядів).

Уявімо собі діелектрик як один великий диполь, заряд якого q і плече l (мал. 37, в). Тоді його дипольний момент буде ql і поляризованість згідно з означенням

$$P = \frac{ql}{V} = \frac{q}{S} = \sigma.$$

(51) Покажемо, що електричне поле послаблюється в діелектрику в ε разів.

З мал. 37, в бачимо, що напруженість результативного поля в діелектрику

$$E = E_0 - E'.$$

Але, оскільки поле E' створене поляризаційними зарядами з поверхневою густиною σ , то це поле, створене двома зарядженими площинами. Тому

$$E = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}.$$

Поляризованість діелектрика P ми виразимо через сумарну напруженість поля всередині діелектрика згідно з рівністю (5) і підставивши цю рівність в останню, дістанемо:

$$E = E_0 - \frac{\varepsilon_0 \chi E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E,$$

звідки

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (6)$$

Отже, відносна діелектрична проникність показує, у скільки разів електричне поле послаблюється у діелектрику.

(52) Установимо зв'язок між вектором поляризації та вектором електричної індукції.

Згідно з рівнянням (5), вектор поляризації

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E},$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля в діелектрику, а вона, як відомо, пов’язана з вектором електричної індукції рівністю

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Дістанемо після підстановки

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\chi}{\varepsilon} \vec{D} = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon} \vec{D}.$$

(53) Установимо, який вигляд мають співвідношення електростатики в діелектрику.

Вектор електричної індукції з врахуванням (6)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

закон Кулона:

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = q_0 \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

Теорема Остроградського–Гауса для вакууму:

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Тоді в діелектрику

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

або

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Отже, щоб із співвідношень електростатики для вакууму отримати співвідношення для діелектрика, слід формально зробити заміну ε_0 на $\varepsilon_0 \varepsilon$.

Тема 13. Електричне поле на межі середовищ

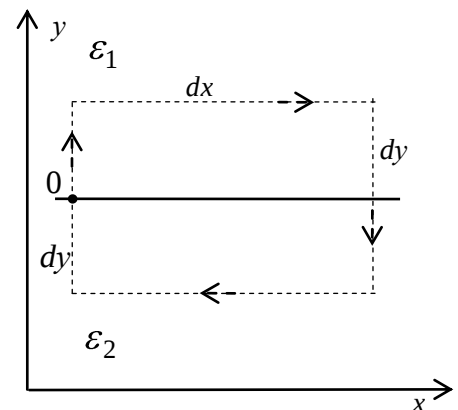
Задачі

(54) На основі властивості потенціальності електричного поля доведемо, що при переході з одного діелектрика в інший тангенціальна (дотична) складова вектора напруженості не змінюється, а така ж складова вектора індукції змінюється пропорційно до діелектричної проникності.

Побудуємо на межі діелектрика прямокутний замкнений контур нескінченно малих розмірів (мал. 38) і застосуємо умову потенціальності електричного поля

$$\oint E_l dl = 0.$$

Починаємо інтегрування з точки O . Оскільки прямокутник нескінченно малий, то інтегрування зводиться до додавання скінченної кількості доданків. Остання рівність буде виглядати так:



Мал. 38

$$E_{1y} dy + E_{1x} dx - E_{1y} dy - E_{2y} dy - E_{2x} dx + E_{2y} dy = 0,$$

де знак плюс ставиться тоді коли напрям обходу контура співпадає з додатнім напрямом осі і мінус – коли вони протилежні. Після спрощень

$$E_{1x}dx - E_{2x}dx = 0,$$

або

$$E_{1x} = E_{2x}.$$

Але E_{1x} і E_{2x} – це дотичні (тангенціальні) складові вектора $\vec{E}$ в кожному з діелектриків, тому позначимо їх відповідно E_{1t} і E_{2t} і останню рівність напишемо так:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (1)$$

Зі співвідношення $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ маємо

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}, \quad (2)$$

або

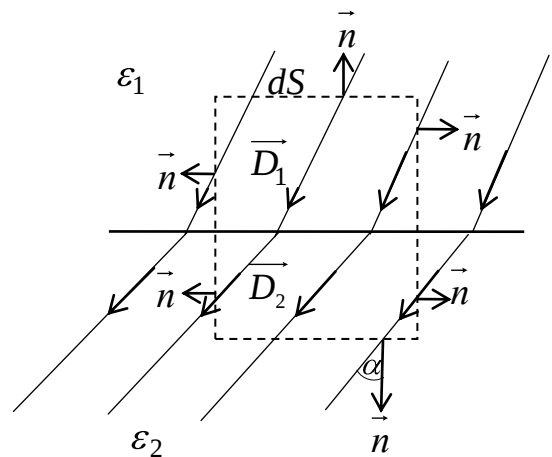
$$D_{2t} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1t}.$$

(55) На основі теореми Остроградського–Гауса доведемо, що при переході з одного діелектрика в інший нормальна складова вектора електричної індукції раптово змінюється на величину поверхневої густини вільних зарядів на межі середовищ.

Виділимо на межі середовищ область, обмежену кубом, грані якого dS . Очевидно, що в межах цього нескінченно малого куба поле можна вважати однорідним.

Знайдемо потік вектора індукції через поверхню куба як суму потоків через його грані.

З мал. 39 бачимо, що потоки через бічні взаємно-протилежні грані однакові за величиною і протилежні за знаком, тому потік через поверхню куба – це потік через його основи. Ці потоки також протилежні за знаком, але вони різні за величиною. За теоремою Остроградського–Гауса



Мал. 39

$$-D_{1n}dS + D_{2n}dS = \sigma_0 dS,$$

де σ_0 – поверхнева густина вільних зарядів на межі середовищ.

З цієї рівності

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

або

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma_0, \quad (3)$$

що означає, що на межі середовищ нормальна складова вектора $\vec{D}$ раптово змінюється на величину σ_0 . Якщо вільних зарядів немає, то, як видно з останнього рівняння, нормальна складова вектора $\vec{D}$ не змінюється, тобто

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (4)$$

У цьому випадку для векторів напруженості маємо співвідношення:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n},$$

тобто нормальна складова вектора напруженості змінюється обернено пропорційно до діелектричної проникності. Дійсно

$$E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n}. \quad (5)$$

(56) Доведемо, що вектор напруженості завжди нормальний до межі провідника з діелектриком.

Нехай перше середовище – це діелектрик, а друге – провідник. Оскільки в провіднику поле відсутнє, то $E_{2t} = 0$ і $D_{2n} = 0$. З рівностей (1) і (3) відповідно маємо: $E_{1t} = 0$ і $D_{1n} = -\sigma_0$, що означає, що вектор напруженості в першому середовищі (діелектрику) є нормальним до межі середовищ. Зауважимо, що σ_0 в цьому випадку не може дорівнювати нулеві, бо на поверхні провідника в електричному полі обов'язково є індукований вільний заряд.

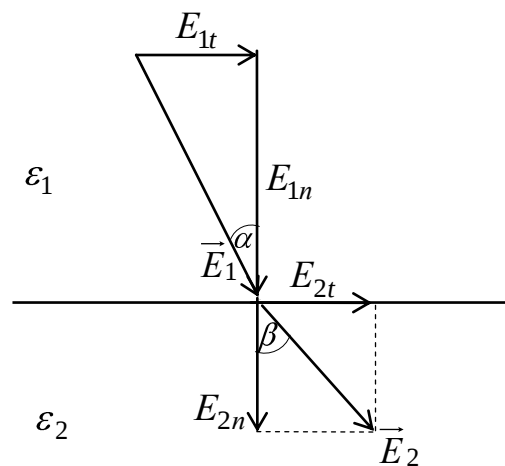
(57) Виведемо закон заломлення силових ліній на межі двох діелектриків.

З рівності (5) видно, що при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $E_{2n} < E_{1n}$, а з рівності (1) $E_{1t} = E_{2t}$, що свідчить про те, що вектор $\vec{E}$ у двох середовищах має різний напрям, тобто силові лінії заломлюються на межі середовищ (мал. 41). Установимо закон цього заломлення.

З малюнка видно, що

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{E_{1t}}{E_{2t}} \frac{E_{2n}}{E_{1n}}.$$

Враховуючи, що $E_{1t} = E_{2t}$, а



Мал. 41

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

маємо:

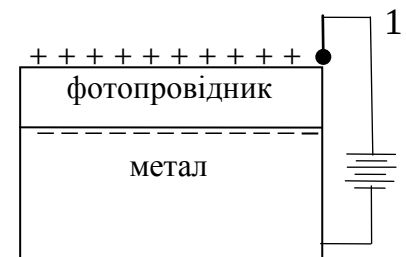
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Порівнюючи цей закон заломлення силових ліній з відомим законом заломлення світла: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$, бачимо, що на відміну від світла, яке за переходу в середовище з більшим показником заломлення заломлюється до нормалі, лінії напруженості за переходу в середовище з більшою діелектричною проникністю заломлюються від нормалі.

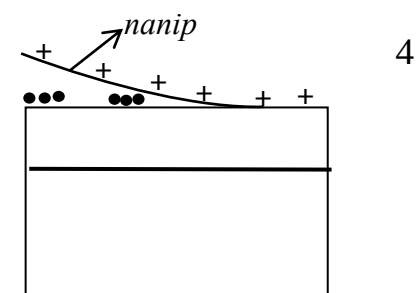
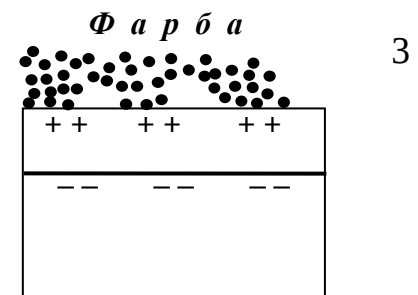
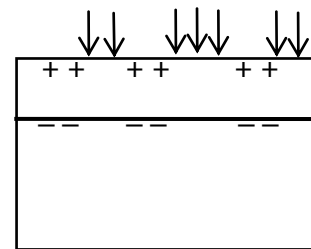
(58) Пояснимо принцип електрофотографування (ксерографія).

Процес електрофотографування можна поділити на чотири етапи (мал. 42).

1. Заряджання фотопровідника. Провід під напругою приблизно +5000 В заряджає фотопровідник-речовину, яка в темноті є діелектриком, а при освітленні стає провідником. На межі металу і фотопровідника виникає індукований негативний заряд.
2. Освітлення фотопровідника відбитим від тексту світлом. При цьому у фото-



Відбите від об'єкта світло 2



Мал. 42

провіднику виникають вільні електрони і дірки, які рухаючись у протилежних напрямках, нейтралізують заряди в місці освітлення.

3. Нанесення на фотопровідник негативно зарядженої фарби. При цьому фарба притягується до областей, де залишився позитивний заряд (неосвітлені області).
4. Прикладання позитивно зарядженого паперу до розфарбованого фотопровідника.

Цей спосіб копіювання винайшов в 1937 році американський винахідник Честер Карлсон. Назва «ксерокопія» походить від назви компанії “Херох”, яка одна з перших розпочала масове виготовлення копіювальних машин.

Тема 14. Електроємність

Фізичні величини

• **Електроємність відокремленого провідника** – це відношення зміни заряду провідника до зміни його потенціалу, яка спричинена цією зміною заряду (позначення C).

$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}. \quad (1)$$

Якщо провідник був незаряджений, то його ємність очевидно означається так

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (2)$$

Фізичні системи й прилади

• **Конденсатор** – система двох електрично ізольованих один від одного провідників.

Задачі

(59) Покажемо, що потенціал відокремленого провідника пропорційний до його заряду.

Відомо, що будь-який провідник, заряджений чи ні, є екіпотенціальний, що означає, що потенціал у всіх його точках однаковий (задача 46). Крім того відомо, що заряд розміщується лише на поверхні провідника (задача 44).

На основі принципу додавання потенціалів, потенціал у будь-якій точці провідника буде дорівнювати сумі потенціалів, створених елементами заряду dq :

$$\varphi = \int_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{\sigma dS}{r},$$

де σ – поверхнева густина заряду на провіднику, S – площа поверхні провідника.

Але поверхнева густина заряду пропорційна до величини заряду q , тобто $\sigma \sim q$ або $\sigma = kq$, де k – коефіцієнт, який не обов'язково є сталим, а може і залежати від S . Тому

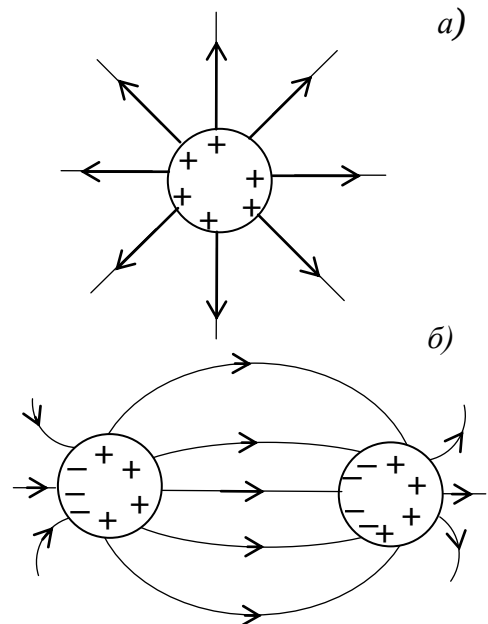
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{k dS}{r}.$$

Оскільки вираз $\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_S \frac{k dS}{r}$ – це число, то $\varphi \sim q$.

(60) Покажемо: якщо поблизу провідника розмістити інший провідник, то його ємність збільшиться.

На мал. 43, (а) показано відокремлений заряджений провідник і його поле. Якщо поблизу цього провідника розмістити інший незаряджений провідник, то внаслідок виникнення на ньому індуко-

ваного заряду поле між провідниками підсилюється, а за ними послаблюється, тому заряд на першому провіднику перерозподілиться (мал. 43, (б)). Щодо потенціалу в будь-якій точці першого провідника (пам'ятаємо, що він всюди однаковий), то бачимо, що згідно з принципом додавання потенціалів, його алгебраїчна сума зменшиться і ємність згідно з її означенням зросте. Очевидно, що цей ефект збільшення ємності провідника під впливом іншого провідника буде тим більший, що ближче будуть один до одного ці провідники і що більші їхні площі будуть розташовані одні навпроти одних. Оскільки така система двох провідників – це конденсатор, то бачимо, що ємність конденсатора може бути значно більшою за ємність відокремленого провідника.



Мал. 43

(61) Установимо вираз для електроємності провідної кулі та сфери і обчислимо ємність Землі.

Якщо кулі надати заряду q , то її потенціал буде φ , причому він буде однаковий в усіх точках кулі (задача 45). Найлегше нам знайти потенціал у центрі кулі. Оскільки заряд розміститься на поверхні кулі (задача 44), то потенціал у її центрі створюється зарядом її поверхні. Кожен елементарний заряд поверхні dq створює у центрі кулі потенціал $d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R}$, де R – радіус кулі, а весь заряд кулі створює потенціал

$$\varphi = \int_S \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Щодо сфери, то заряд на сфері розміститься так само, як і на кулі і потенціал всередині сфери буде такий самий, як і всередині кулі, тому ємність сфери така ж, як і ємність кулі такого ж радіуса.

Якщо сфера заповнена діелектриком з діелектричною проникністю ϵ , то очевидно її ємність:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R.$$

За цією формулою ємність Земної кулі

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,4 \cdot 10^6 \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} = 700 \text{ (мкФ)}.$$

Тема 15. Конденсатори

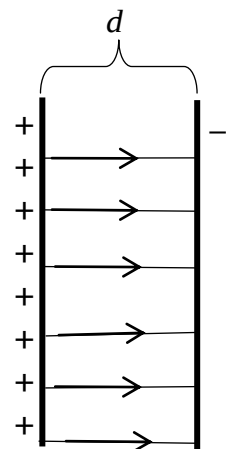
Задачі

(62) Установимо вираз для ємності плоского конденсатора.

Згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi},$$

де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між обкладками конденсатора (мал. 44), яка за формулою зв'язку між напруженістю і потенціалом може бути представлена як Ed . Своєю чергою напруженість електричного поля E між обкладками конденсатора дорівнює $\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ як напруженість поля двох нескінчен-



Мал. 44

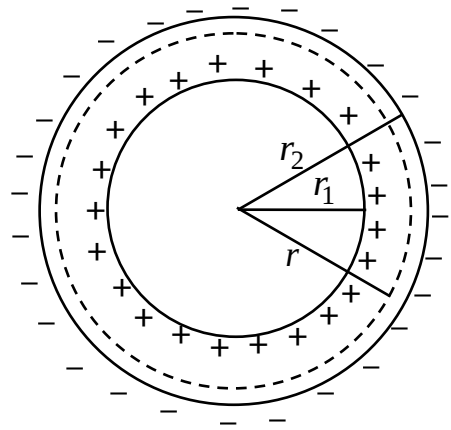
них площин. Отже

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{Ed} = \frac{q\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma d} = \frac{\sigma S\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

де S – площа однієї з обкладок.

(63) Установимо вираз для ємності циліндричного конденсатора довжина якого значно більша за радіуси циліндрів.

Спочатку встановимо вираз для потенціалу будь-якої точки між двома циліндрами (мал. 45). Для цього встановимо вираз для напруженості поля. Напруженість поля в цій точці, створена зовнішнім циліндром згідно з теоремою Остроградського–Гауса дорівнює нулеві, бо потік напруженості електричного поля зовнішнього циліндра дорівнює нулеві тому, що під цією поверхнею немає електричних зарядів. У результаті напруженість поля між циліндрами – це напруженість, створена внутрішнім циліндром, і за тією ж теоремою Остроградського–Гауса (задача 28)



Мал. 45

$$E = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon \varepsilon_0 r}.$$

З формули зв'язку напруженості і потенціалу знайдемо потенціал у цій же точці:

$$d\varphi = -E dr = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon r} dr,$$

звідки

$$\varphi \Big|_{r=r_2}^{r=r} = -\frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ln r + K.$$

Сталу інтегрування K знайдемо з умови $r = r_2$, $\varphi = 0$, тобто приймаємо потенціал одного з циліндрів, а саме зовнішнього за нуль. Після підстановки маємо $K = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ln r_2$ і вираз для потенціалу набирає вигляду:

$$\varphi \Big|_{r=r_2}^{r=r} = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{r_2}{r},$$

звідки потенціал зовнішнього циліндра щодо внутрішнього:

$$\varphi = \frac{\sigma_1 r_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тепер можемо написати і вираз для ємності:

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon q}{\sigma_1 r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon q S_1}{q r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon 2\pi r_1 h}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Очевидно, що ця формула правильна і для коаксіального кабеля.

Розглянемо випадок коли відстань між циліндрами $r_2 - r_1 = d$ значно менша за їхні радіуси.

Скориставшись з наближеної формули для обчислення логаритма, а саме, що за близьких значень r_1 і r_2 : $\ln \frac{r_2}{r_1} \approx \frac{r_2 - r_1}{r_1}$, матимемо

$$C = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon h \frac{r_1}{r_2 - r_1}.$$

Врахувавши те, що $2\pi hr_1$ це площа S однієї з обкладок і $r_2 - r_1 = d$, остаточно маємо:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

як і для плоского конденсатора.

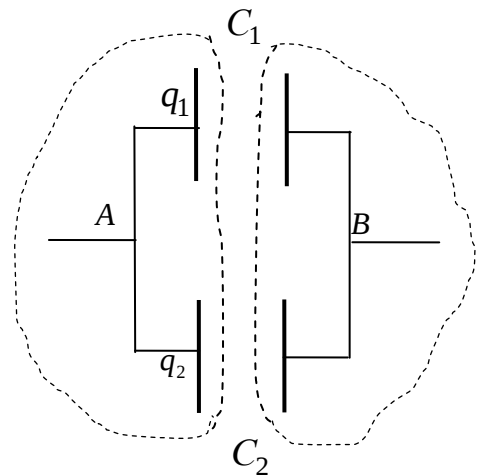
(64) Доведемо, що за паралельного з'єднання двох чи більше конденсаторів ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.

Будемо розглядати цю ділянку кола як один великий конденсатор з двома ізольованими один від одного провідниками A і B (ці провідники обведені на мал. 46 замкнутими штрихованими лініями).

Згідно з означенням ємності, ємність цього конденсатора:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi},$$

де q – заряд на одній з обкладок цього великого конденсатора, $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між його обкладками. Враховуючи очевидні факти, що $q = q_1 + q_2$ і $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B$, дістанемо:



Мал. 46

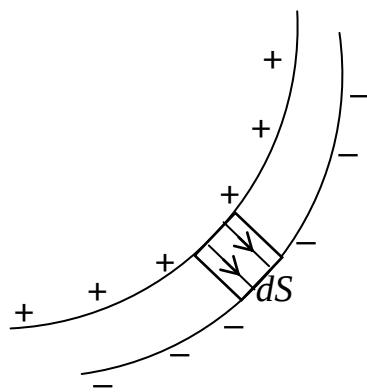
$$C = \frac{q_1 + q_2}{\Delta\varphi} = \frac{q_1}{\Delta\varphi} + \frac{q_2}{\Delta\varphi} = C_1 + C_2.$$

За більшої кількості конденсаторів нічого не зміниться, тому

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

(65) Покажемо, що ємність конденсатора будь-якої форми за умови, що відстань між його обкладками є значно меншою за їхні розміри, дорівнює ємності плоского конденсатора з такою ж площею обкладок і відстанню між ними.

Уявімо конденсатор будь-якої форми як систему паралельно з'єднаних плоских елементарних конденсаторів з площею обкладок dS (мал. 47). Оскільки відстань між обкладками мала, поле в межах одного елементарного конденсатора можна вважати однорідним. Тому ємність кожного елементарного конденсатора dC – це ємність плоского конденсатора



Мал.47

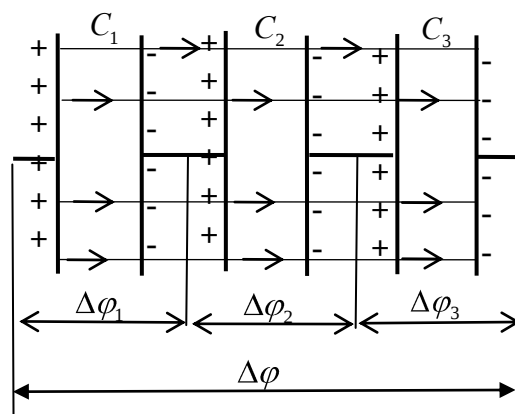
$$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} dS.$$

За паралельного з'єднання ємності додаються, тому

$$C = \int_S \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} dS = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{d} S.$$

(66) Доведемо, що за послідовного з'єднання двох чи більше конденсаторів обернена ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі обернених ємностей окремих конденсаторів.

Якщо в цьому випадку одному конденсатору надати заряду q , то такий самий заряд буде індукований на всіх конденсаторах (мал. 48). Батарею послідовно з'єднаних конденсаторів розглядатимемо як один конденсатор із зарядами обкладок $+q$ та $-q$ (поля



Мал. 48

зарядів усіх інших обкладок компенсують одне одного).

За означенням ємності, ємність батареї

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_n}.$$

За тим самим означенням ємності

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \Delta\varphi_n = \frac{q}{C_n},$$

і тоді

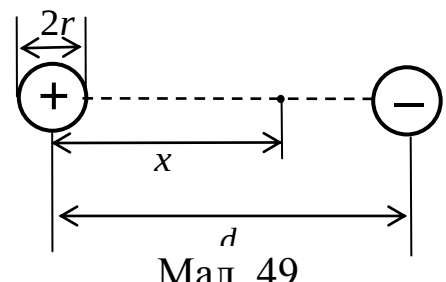
$$C = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}},$$

звідки маємо

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

(67) Установимо вираз для ємності двохпроводної лінії, тобто системи двох паралельних проводів довжиною l радіусами r , відстань між осями яких d , причому розглянемо практичний випадок коли $d \gg r$.

Спочатку знайдемо вираз для напруженості електричного поля, створеного одним з проводів у будь-якій точці на прямій, що з'єднує два проводи, що на відстані x від одного з них (мал. 49). Для цього скористаємося виразом для напруженості поля рівномірно зарядженого циліндра (задача 27) (зауважимо,



що практична рівномірність розподілу заряду на проводі забезпечується умовою $d \gg r$), яка в нашому випадку буде мати вигляд:

$$E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 x},$$

Підставивши в останню рівність вираз для поверхневої густини заряду на циліндрі $\sigma = \frac{q}{2\pi l}$, де l – висота циліндра, а в нашому випадку довільна довжина ділянки двохпровідної лінії, дістанемо

$$E_+ = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l x}.$$

Другий провід, очевидно, створює у цій точці напруженість поля

$$E_- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l (d - x)},$$

Тому сумарна напруженість поля в цій точці

$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right).$$

Підставивши у цей вираз $E = \frac{d\varphi}{dx}$, дістанемо

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right) dx,$$

звідки інтегруванням установимо залежність потенціалу від відстані x :

$$\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln \frac{x}{d - x} + K.$$

Сталу K знайдемо з умови $x = r \quad \varphi = 0$, що означає, що за нуль потенціалу приймемо потенціал на поверхні одного з проводів. Дістанемо $K = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{d-r}{r}$, а після підстановки цього виразу в отриману залежність $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{x(d-r)}{d-xr}.$$

Маючи цю залежність можемо визначити потенціал φ на поверхні другого проводу, тобто потенціал за умови $x = d - r$

$$\varphi(d-r) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{d-r}{r} \approx \frac{q}{\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{d}{r}.$$

Оскільки потенціал першого проводу ми прийняли за нуль, то ця величина є різницею потенціалів між проводами, тому згідно з означенням ємності

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{d}{r}}.$$

Ємність, що припадає на одиницю довжини лінії

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}}.$$

(68) Установимо вираз для ємності однопровідної лінії довжиною l і радіусом проводу r , що знаходиться на висоті h над землею.

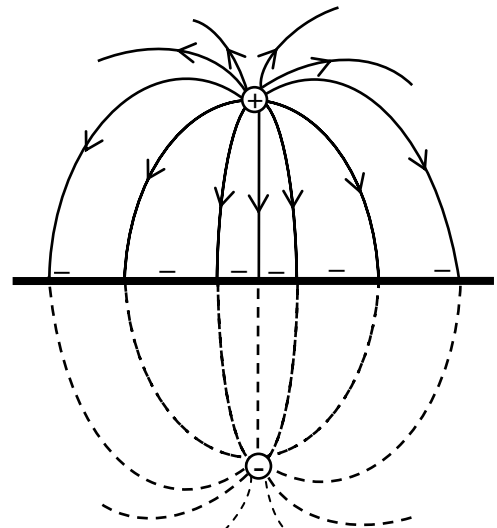
Застосуємо метод дзеркальних зображень. Згідно з цим методом, електричне поле, створене зарядженим проводом та індукованим

зарядом на поверхні землі, співпадає з електричним полем, створеним двома проводами з однаковими за величиною та протилежними за знаками зарядами (мал. 50).

Тому застосуємо вираз для різниці потенціалів між двома проводами (задача 67):

$$\varphi = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 l} \ln \frac{d}{r}.$$

Але нас цікавить різниця потенціалів між проводом та землею і вона, очевидно, дорівнює половині різниці потенціалів між проводом і його зображенням. Тоді, врахувавши це за означенням ємності,



Мал. 50

$$C = 2 \frac{q}{\varphi} = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{2h}{r}}.$$

Ємність одиниці довжини проводу:

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}}.$$

Тема 16. Потенціальна енергія взаємодії точкових зарядів. Енергія електричного поля

Фізичні поняття

• **Потенціальна енергія заряду в заданій точці електричного поля** – це робота, яку слід виконати, щоб перенести цей заряд з цієї точки у нескінченність (позначення W).

Фізичні величини

• **Об'ємна густина енергії електричного поля** – енергія, розрахована на одиницю об'єму зайнятого полем (позначення w).

Задачі

(69) **Установимо вираз для потенціальної енергії взаємодії n точкових зарядів.**

Спочатку розглянемо систему з двох зарядів. Перший заряд q_1 будемо вважати джерелом поля. Тоді потенціальна енергія другого заряду q_2 в полі першого, згідно з означенням потенціалу, буде

$$W = \varphi_1 q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

де замість φ_1 ми підставили відомий вираз для потенціалу поля точкового заряду. З іншого боку, оскільки заряди q_1 та q_2 рівноправні, то вважаючи навпаки другий заряд джерелом поля, отримаємо такий самий вираз

$$W = \varphi_2 q_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Отже, потенціальна енергія другого заряду в полі першого дорівнює потенціальній енергії першого заряду в полі другого, тому її ми можемо трактувати як потенціальну енергію взаємодії двох точкових зарядів. Цю енергію можна подати ще так:

$$W = \frac{1}{2} (\varphi_1 q_2 + \varphi_2 q_1),$$

А для системи n точкових зарядів

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \varphi_i q_k \quad (i \neq k),$$

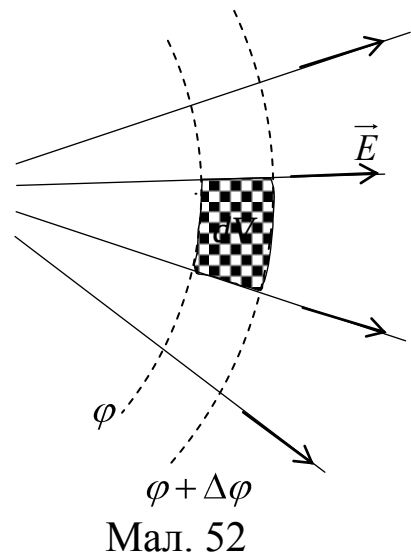
(70) Установимо вираз для густини потенціальної енергії електричного поля.

Спочатку зробимо це для однорідного поля (поля плоского конденсатора). Для цього застосуємо послідовно формулу енергії плоского конденсатора, формулу зв'язку напруженості і напруги та формулу для ємності плоского конденсатора. Отримаємо

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CE^2 d^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Якщо поле неоднорідне, то виділимо в ньому нескінченно малий об'єм, обмежений двома нескінченно близькими еквіпотенціальними поверхнями та площинами нормальними до них, які проходять через силові лінії (мал. 52). Такий об'єм можна вважати плоским конденсатором з обкладками на еквіпотенціальних поверхнях, бо будь-яку еквіпотенціальну поверхню можна замінити на реальну провідну поверхню з тим самим потенціалом. Енергія цього конденсатора



$$dW = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 dV,$$

а енергія електричного поля в об'ємі V

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \int_V E^2 dV.$$

Діленням передостаннього рівняння на dV отримаємо формулу для обчислення об'ємної густини енергії

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}.$$

(71) Установимо вираз для потенціальної енергії зарядженого провідника та конденсатора.

Щоб перенести заряд dq з провідника в нескінченність, слід, згідно з означенням потенціалу, виконати роботу

$$dA = \varphi dq,$$

або представивши φ згідно з означенням ємності $C = \frac{q}{\varphi}$,

$$dA = \frac{q}{C} dq.$$

Щоб перенести весь заряд q , слід виконати роботу:

$$A = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C},$$

яка за означенням потенціальної енергії і є потенціальною енергією зарядженого провідника:

$$W = \frac{q^2}{2C}, \tag{5}$$

або, взявши до уваги означення ємності $C = \frac{q}{\varphi}$,

$$W = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{C \varphi^2}{2}. \quad (6)$$

Розділ II. Постійний електричний струм та контактні явища в металах і напівпровідниках

Тема 1. Електричний струм та його характеристики: сила та густина струму

Фізичні явища

- **Електричний струм (далі: струм)** – це явище упорядкованого руху електричних зарядів.

Фізичні поняття

- **Постійний електричний струм** – це струм, сила струму якого не залежить від часу.

- **Конвекційний струм** – це струм, утворений упорядкованим рухом заряджених макротіл (наприклад, рух заряджених крапель дощу).

- **Струм поляризації** – короткочасний струм у діелектриках внаслідок зміщення зв'язаних електричних зарядів в електричному полі.

- **Дрейфова швидкість** – це швидкість, з якою носій заряду рухається паралельно до ліній електричного поля.

Фізичні величини

- **Сила струму** – це відношення заряду, який пройшов через поперечний переріз провідника за певний час до часу його проходження (позначення I).

$$I \equiv \frac{dq}{dt}.$$

- **Густина струму** – це величина

$$\vec{j} \equiv \frac{dI}{dS} \vec{n},$$

dS – елемент площі поперечного перерізу провідника, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до цієї елементарної площі, dI – зміна сили струму при зміні площі на dS .

Задачі

(72) Покажемо, що сила струму – це потік вектора густини струму.

За означенням густина струму

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \vec{n}.$$

Помножимо це рівняння на $dS \vec{n}$. Дістанемо

$$\vec{j} dS \vec{n} = dI \vec{n} \vec{n}.$$

Врахувавши, що $\vec{n} \vec{n} = 1$, матимемо

$$dI = \vec{j} \vec{n} dS,$$

звідки

$$I = \int_S \vec{j} \vec{n} dS = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

де $\vec{n} dS \equiv d\vec{S}$.

Остання формула вказує на те, що сила струму – це потік вектора густини струму.

(73) Покажемо, що сила постійного струму є однакова в усіх послідовно з'єднаних провідниках.

Згідно з означенням постійного струму

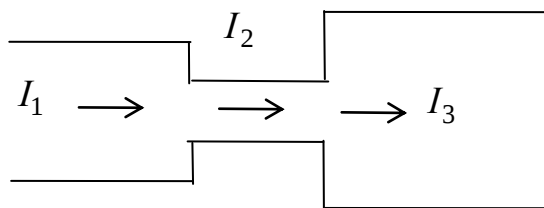
$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Помножимо й поділимо ліву та праву частини цієї рівності на елемент довжини провідника dl .

$$\frac{dI}{dt} \frac{dl}{dl} = 0.$$

Враховуючи те, що $\frac{dl}{dt} = v$, дістанемо

$$v \frac{dI}{dl} = 0.$$



Мал. 53

Оскільки дрейфова швидкість v не дорівнює нулеві, то

$$\frac{dI}{dl} = 0,$$

це означає, що сила струму не залежить від координати l , тобто всюди є однаковою уздовж усіх провідників.

Остання рівність, очевидно, може бути написана і так:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n,$$

де I_n – сила струму в n -ому провіднику (мал. 53).

Будь-яке з двох останніх рівнянь називають *рівнянням неперервності постійного струму*.

(74) На основі теореми Остроградського–Гауса виведемо рівняння неперервності струму.

На основі математичної теореми Остроградського–Гауса для вектора $\vec{j}$

$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Але потік вектора густини струму, який є в лівій частині цієї рівності – це сила струму (задача 72), тому маємо

$$I = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV.$$

Застосувавши до лівої частини цього рівняння послідовно означення сили струму та поверхневої густини заряду, отримаємо

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

чи

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV,$$

звідки

$$\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \vec{j}.$$

Враховуючи, що густина заряду ρ може залежати не тільки від часу, а й від координат, замінимо похідну на частинну похідну. Тоді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}.$$

Це рівняння називають рівнянням неперервності струму.

(75) Доведемо, що провідник зі струмом не є еквіпотенціальним.

Припустимо, що провідник зі струмом є еквіпотенціальним, тобто $\varphi = \text{const}$. Тоді спрямувавши вісь Ox у напрямі струму (у напрямі руху позитивних зарядів), маємо

$$\frac{d\varphi}{dx} = E_x = 0,$$

тобто складова електричного поля в напрямі руху зарядів дорівнює нулеві. Згадавши, що електричне поле виявляє себе за дією на заряд, приходимо до суперечності: електричного поля немає, а дія на заряд є, що означає хибність нашого припущення і тому потенціал провідника зі струмом не може бути всюди однаковий, а напруженість поля не може дорівнювати нулеві.

(76) Покажемо, що в провіднику зі струмом носії заряду дрейфують зі сталою швидкістю.

Будемо вважати, що носій струму із зарядом q рухається під впливом електричного поля в середовищі з коефіцієнтом опору α .

Напишемо основне рівняння динаміки для заряду q , який рухається під дією сили електричного поля qE та сили опору αv , де v – дрейфова швидкість заряду.

$$m \frac{dv}{dt} = qE - \alpha v.$$

Зведемо це диференціальне рівняння до рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{d\nu}{\frac{q}{m}E - \frac{\alpha}{m}\nu} = dt.$$

Проінтегрувавши це рівняння, отримаємо

$$-\frac{m}{\alpha} \ln\left(\frac{q}{m}E - \frac{\alpha}{m}\nu\right) = t + C,$$

де C – стала інтегрування, яку знайдемо з умови, що в початковий момент часу швидкість заряду дорівнювала нулеві, тобто за умови $t = 0$, $\nu = 0$, що після підстановки в останнє рівняння дає результат

$$C = -\frac{m}{\alpha} \ln\left(\frac{q}{m}E\right).$$

Враховуючи цей вираз для C , та зробивши алгебраїчні перетворення у розв'язку диференціального рівняння, дістанемо

$$\nu = \frac{qE}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right). \quad (7)$$

З цієї залежності ν бачимо, що через деякий час після початку руху величина $e^{-\frac{\alpha}{m}t}$ буде значно менша за одиницю і швидкість досягне практично сталого значення, а саме

$$\nu = \frac{qE}{\alpha}.$$

(77) Покажемо, що густина струму залежить від концентрації та дрейфової швидкості носіїв струму і встановимо цю залежність.

Для цього розглянемо елемент провідника довжиною dl і площею поперечного перерізу S , у якому тече струм I (мал. 54).

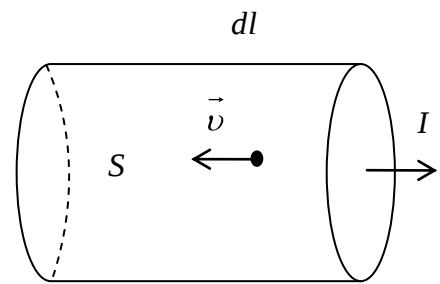
Застосовуючи послідовно означення густини струму, сили струму, концентрації та швидкості, дістанемо

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{dq}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} \left(\frac{dN}{dt} \right) =$$

$$= e \frac{d}{dS} \left(\frac{ndV}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} \left(\frac{nSdl}{dt} \right) = e \frac{d}{dS} (Sv),$$

Враховуючи, що всі величини під знаком похідної можуть залежати від S , знайдемо цю похідну як похідну від добутку. Дістанемо

$$j = e \left(nv + vS \frac{dn}{dS} + nS \frac{dv}{dS} \right).$$



Мал. 54

У випадку коли n і v сталі, тобто не залежать від S маємо, що $\frac{dn}{dS} = 0$ і $\frac{dv}{dS} = 0$ і тоді

$$j = env.$$

Враховуючи, що вектор $\vec{v}$ спрямований туди ж, куди і $\vec{n}$, дістанемо

$$\vec{j} = env\vec{n} = en\vec{v}.$$

(78) Покажемо, що рівняння неперервності постійного струму може бути подане у вигляді $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Рівняння неперервності постійного струму

$$\frac{dI}{dl} = 0$$

поділимо на площу поперечного перерізу провідника S і врахуємо, що $Sdl = dV$. Тоді

$$\frac{dI}{dV} = 0,$$

або врахувавши означення сили струму

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{dq}{dt} \right) = 0,$$

звідки, врахувавши, що $\frac{dq}{dV}$ – це об'ємна густина заряду ρ .

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Взявши до уваги рівняння неперервності струму $\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \vec{j}$, дістанемо

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

(79) Обчислимо силу струму, який створює електрон в атомі водню.

Вважаючи, що електрон обертається зі сталою кутовою швидкістю, можемо написати згідно з означенням сили струму

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi},$$

де e – заряд електрона, T – час протягом якого проходить заряд e , тобто період обертання електрона, який пов'язаний з циклічною частотою ω співвідношенням $T = 2\pi/\omega$. Своєю чергою, ω знайдемо з умови рівності електричної сили притягання між електроном і ядром (протоном) і відцентровою силою інерції.

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m\omega^2 R,$$

де m – маса електрона, R – радіус його орбіти. Підставивши ω з цієї рівності в рівняння для I , дістанемо:

$$I = \frac{e^2}{4\sqrt{\pi^2 \epsilon_0 m R^3}}.$$

Знаючи радіус орбіти електрона в атомі водню $R = 53$ пм, знайдемо числове значення сили струму $I = 6,9 \cdot 10^{-9}$ А.

Тема 2. Закон Ома для ділянки кола. Опір провідника

Фізичні величини

• **Електричний опір провідника** – це величина, обернена до коефіцієнта пропорційності між силою струму в провіднику і напругою між його кінцями (позначення R).

$$R = \frac{U}{I}.$$

• **Питомий опір провідника** – це коефіцієнт пропорційності між опором провідника та відношенням його довжини до площі поперечного перерізу (позначення ρ).

$$\rho = R \frac{S}{l}.$$

• **Питома електропровідність** – це фізична величина, обернена до питомого опору.

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho}. \quad (3)$$

• **Температурний коефіцієнт опору** – це відношення відносної зміни опору провідника до зміни температури, яка спричинила цю зміну опору (позначення α).

$$\alpha = \frac{1}{dT} \frac{d\rho}{\rho_0}.$$

• **Рухливість носія заряду** – це відношення його дрейфової швидкості до напруженості електричного поля, яка спричинила цей дрейф (позначення μ).

$$\mu = \frac{v}{E}.$$

Постулати

➤ **Сила струму в провіднику прямо пропорційна до різниці потенціалів (напруги) на кінцях цього провідника.**

$$I = \frac{1}{R} U,$$

де величина R називається *електричним опором провідника*. Ця рівність називається *законом Ома для ділянки кола*.

Закон Ома, водночас, є означенням електричного опору провідника.

➤ **Опір провідника прямо пропорційний до його довжини і обернено пропорційний до його площі поперечного перерізу.**

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – коефіцієнт пропорційності, який називається *питомим опором провідника*.

Цей емпіричний закон водночас є означенням питомого опору.

Фізичні системи і прилади

- **Додатковий опір** – це резистор, який приєднують послідовно до вольтметра з метою розширення меж його вимірювань.
- **Шунт** – це резистор, який приєднують паралельно до амперметра з метою розширення межі його вимірювань.

Задачі

(80) Представимо закон Ома в диференціальній формі.

Справді закон Ома у формі $I = U/R$ можна назвати інтегральною формою закону Ома, оскільки в неї входять інтегральні величини – сила струму та опір, а інтегральними вони є тому, що стосуються всього провідника, а не окремої його точки.

Представимо закон Ома через диференціальні величини – густину струму, напруженість електричного поля та питомий опір.

Для цього застосуємо послідовно означення густини струму, закон Ома для ділянки кола, означення питомого опору та формулу зв'язку між напруженістю електричного поля та напругою. Дістанемо для величини вектора $\vec{j}$

$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{d}{dS} \left(\frac{U}{R} \right) = \frac{d}{dS} \left(\frac{US}{\rho l} \right) = \frac{U}{\rho l} \frac{dS}{dS} = \frac{1}{\rho} E = \sigma E.$$

Для вектора $\vec{j}$

$$\vec{j} = \sigma E \vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поперечного перерізу, але оскільки $\vec{n}$ і $\vec{E}$ співнаправлені, то $E\vec{n} = \vec{E}$, тому

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Ця формула і є диференціальною формою закону Ома.

(81) Установимо, як питома провідність залежить від параметрів носіїв заряду: їхньої рухливості та концентрації.

Із закону Ома в диференціальній формі та залежності густини струму від концентрації та дрейфової швидкості $\vec{j} = en\vec{v}$, а також означення рухливості маємо

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{en\vec{v}}{E} = en\mu.$$

(82) Установимо залежність питомого опору провідника від температури за умови залежного та незалежного від температури коефіцієнта опору.

З означення температурного коефіцієнта опору маємо

$$d\rho = \alpha \rho_0 dT,$$

де символ α підкреслює, що коефіцієнт опору залежить від температури.

З останнього рівняння

$$\rho = \rho_0 \int \alpha dT.$$

Наголосимо на тому, що інтеграл в останній рівності є невизначеним, тому проінтегрувавши ми отримаємо функцію $\rho(T)$.

Якщо α не залежить від температури, що насправді спостерігається у металах, то він виноситься за знак інтеграла, і тоді

$$\rho = \alpha \rho_0 \int dT,$$

звідки

$$\rho = \alpha \rho_0 T + C.$$

Сталу C знаходимо з умови $T = T_0$, $\rho = \rho_0$, підставленої в останнє рівняння. Дістаємо

$$C = \rho_0 - \alpha \rho_0 T_0.$$

Тепер, підставляючи це значення замість C , дістанемо

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]$$

або позначивши $T - T_0 = \Delta T$,

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T).$$

Отже, за незалежного від температури коефіцієнта опору питомий опір залежить від температури лінійно.

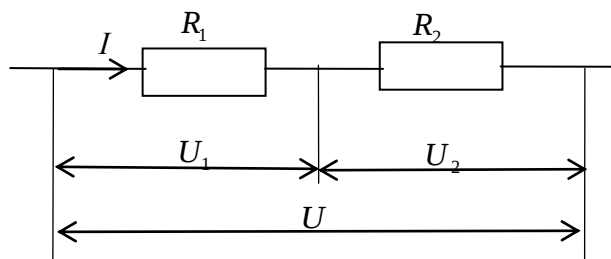
Очевидно, що оскільки опір є пропорційний до питомого опору, то для опору отримаємо таку саму рівність.

(83) На основі рівняння неперервності струму та закону Ома для ділянки кола доведемо, що за послідовного з'єднання опорів, опір ділянки кола дорівнює сумі окремих опорів.

На основі рівняння неперервності струму, струм який тече через опори R_1 і R_2 , однаковий (мал. 55).

Крім того, напруга на ділянці кола дорівнює сумі напруг на опорах

$$U = U_1 + U_2.$$



Мал. 55

За законом Ома для ділянки кола

$$U = IR, U_1 = IR_1, U_2 = IR_2,$$

тому останнє рівняння запишемо так:

$$IR = IR_1 + IR_2,$$

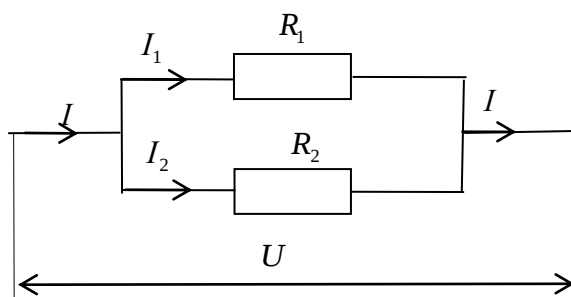
звідки

$$R = R_1 + R_2.$$

(84) Доведемо, що за паралельного з'єднання опорів обернений опір ділянки кола дорівнює сумі обернених опорів.

На основі рівняння неперервності струму (мал. 56)

$$I = I_1 + I_2.$$



Мал. 56

За законом Ома для ділянки кола

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2},$$

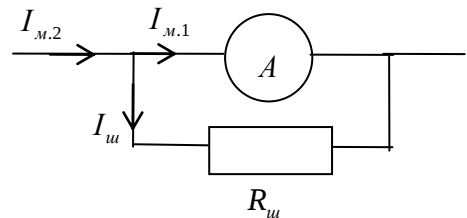
звідки

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

(85) Обчислимо опір шунта, який слід приєднати до амперметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.

Нехай без шунта амперметр вимірює максимальну силу струму I_{m1} . Але нам слід виміряти силу струму в n разів більшу $I_{m2} = nI_{m1}$. Тому паралельно до амперметра включимо шунт – резистор, опір якого $R_{ш}$ (мал. 57), причому його опір має бути таким, щоб струм через амперметр не перевищував максимально допустимий для нього I_{m1} . Згідно з рівнянням неперервності струму

$$I_{m2} = I_{m1} + I_{ш}.$$



Мал. 57

Поділивши це рівняння на I_{m1} , дістанемо:

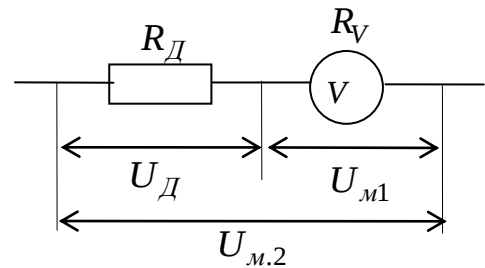
$$n = 1 + \frac{I_{ш}}{I_{m1}}.$$

Підставивши сюди згідно з законом Ома $I_{ш} = U/R_{ш}$ та $I_{m1} = U/R_A$, де R_A – опір амперметра, отримаємо після скорочення на U

$$R_{ш} = \frac{R_A}{n-1}.$$

(86) **Обчислимо додатковий опір, який слід приєднати до вольтметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.**

Нехай без додаткового опору вольтметр вимірює максимальну напругу $U_{м1}$. Але нам слід виміряти напругу в n разів більшу $U_{м2} = nU_{м1}$. Тому послідовно до вольтметра приєднаємо резистор, який називають додатковим опором (мал. 58). З малюнка видно, що напруга, яку слід виміряти



Мал. 58

$$U_{м2} = U_D + U_{м1}.$$

Поділивши це рівняння на $U_{м1}$, дістанемо

$$n = \frac{U_D}{U_{м1}} + 1,$$

звідки за законом Ома для ділянки кола

$$n = \frac{IR_D}{IR_V} + 1,$$

і

$$R_D = R_V (n - 1).$$

(87) **Покажемо, що електропровідність є одним з явищ перенесення.**

Для цього всі рівняння, які описують явища перенесення, приведемо до однакової форми.

1. Відомо, що явище внутрішнього тертя описується формулою Ньютона

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

де F – сила внутрішнього тертя між двома шарами рідини чи газу площею S , dv/dx – градієнт швидкості впоперек потоку, η – коефіцієнт внутрішнього тертя.

Застосувавши основне рівняння динаміки $F = dp/dt$, де p – імпульс, представимо формулу Ньютона так:

$$\frac{dp}{Sdt} = -\eta \frac{dv}{dx},$$

що означає на словах, що густина потоку імпульсу пропорційна до градієнта швидкості.

2. Напишемо відомий закон Фіка для дифузії

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} Sdt,$$

де dM – маса яка переноситься за час dt через площу S , $\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини, D – коефіцієнт дифузії і представимо його у формі, подібній до форми формули Ньютона, а саме

$$\frac{dM}{Sdt} = -D \frac{d\rho}{dx},$$

що означає, що густина потоку маси пропорційна до градієнта густини.

3. Закон Фур'є для теплопровідності напишемо у формі

$$\frac{dQ}{Sdt} = -K \frac{dT}{dx},$$

яка вказує на те, що густина потоку теплоти пропорційна до градієнта температури.

4. Зведемо закон Ома до такої ж форми, як і три попередні. З диференціальної форми цього закону та означень густини струму і сили струму маємо

$$j = \sigma E,$$

$$\frac{I}{S} = \sigma E,$$

$$\frac{dq}{Sdt} = \sigma E.$$

Враховуючи, що $E = -d\varphi/dx$, дістанемо остаточно

$$\frac{dq}{Sdt} = -\sigma \frac{d\varphi}{dx},$$

з чого робимо висновок, що густина потоку заряду (густина струму) пропорційна до градієнта потенціалу, а електропровідність є явищем перенесення заряду.

Тепер усі чотири явища перенесення можемо записати в таблицю.

Явище	Назва закону	Формула	Що переноситься
Внутрішнє тертя	Формула Ньютона	$\frac{dp}{Sdt} = -\eta \frac{dv}{dx},$	Імпульс
Дифузія	Закон Фіка	$\frac{dM}{Sdt} = -D \frac{d\rho}{dx},$	Маса
Теплопровідність	Закон Фур'є	$\frac{dQ}{Sdt} = -K \frac{dT}{dx},$	Кількість теплоти
Електропровідність	Закон Ома в диференціальній формі	$\frac{dq}{Sdt} = -\sigma \frac{d\varphi}{dx}.$	Заряд

Тема 3. Електрорушійна сила (ЕРС). Закон Ома для ділянки кола з ЕРС. Закон Ома для повного кола

Фізичні величини

•Електрорушійна сила – це відношення роботи сторонньої сили, яку вона виконує перемістивши заряд вздовж замкненого контура, до величини цього заряду (позначення $\mathcal{E}$).

$$\mathcal{E} = \frac{A_c}{q}. \quad (1)$$

Задачі

(88) Доведемо, що стороння сила не може бути потенціальною.

Дійсно, якщо б стороння сила була потенціальною, то робота цієї сили на замкненій траєкторії дорівнювала б нулеві, тоді, б і електрорушійна сила згідно, з її означенням (1) дорівнювала б нулеві. Отже

$$A_C = \oint \vec{F}_C d\vec{r} = q \oint \vec{E}_C d\vec{r} \neq 0.$$

Крім того бачимо, що ЕРС може бути представлена так

$$\mathcal{E} = \frac{A_C}{q} = \oint_L \vec{E}_C d\vec{r}.$$

(89) Установимо закон Ома для ділянки кола з електрорушійною силою та для замкненого кола з електрорушійною силою.

Роботу сторонньої сили вздовж замкненого контура представимо як суму робіт на окремих ділянках кола (мал. 59).

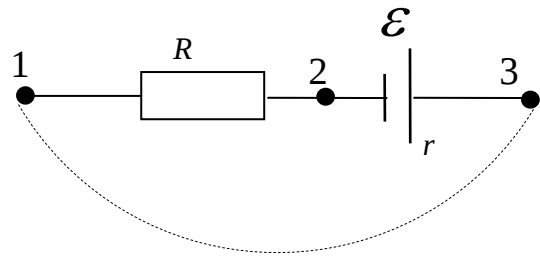
$$A_C = A_{12} + A_{23} + A_{31}$$

і поділимо це рівняння на заряд q . Дістанемо

$$\frac{A_C}{q} = \frac{A_{12}}{q} + \frac{A_{23}}{q} + \frac{A_{31}}{q}.$$

Згідно з означенням ЕРС та потенціалу останнє рівняння набере вигляду:

$$\mathcal{E} = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31},$$



Мал. 59

а на основі закону Ома для ділянки кола у випадку ділянки кола

$$\mathcal{E} = IR + Ir + \varphi_{31},$$

та у випадку замкненого кола, тобто коли $\varphi_{31} = 0$

$$\mathcal{E} = IR + Ir.$$

Останні дві рівності можна подати і так:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \Delta\varphi}{R + r},$$

де $\Delta\varphi = \varphi_{13} = -\varphi_{31}$, та

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Дві останні рівності виражають закон Ома для ділянки кола з ЕРС та замкненого кола з ЕРС відповідно.

Закон Ома для замкненого кола з ЕРС ще називають законом Ома для повного кола.

(90) Установимо вираз для ЕРС, яка виникає при обертанні металевого диска.

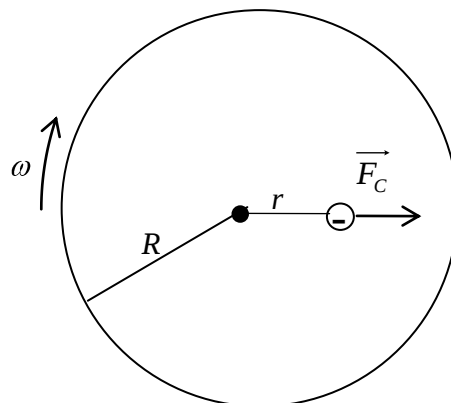
Сторонньою силою в цьому випадку є відцентрова сила інерції, яка діє на електрони (мал. 60)

$$F_C = m\omega^2 r,$$

де m – маса електрона, ω – кутова швидкість диска, r – відстань від електрона до центра диска.

Напруженість поля сторонньої сили

$$E_C = \frac{F}{e} = \frac{m\omega^2 r}{e}$$



Мал. 60

і згідно з означенням ЕРС

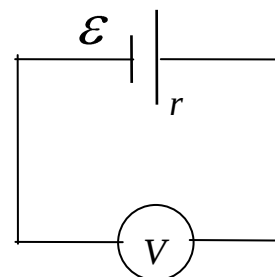
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_C d\vec{r} = \int_0^R \frac{m\omega^2 r}{e} dr = \frac{m\omega^2}{e} \int_0^R r dr = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}.$$

Наприклад, за умови $R=10$ см, $\omega=1000$ рад/с, отримаємо, що $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^{-8}$ В, тобто таке джерело ЕРС не є ефективним.

(91) Обчислимо відносну похибку, яку ми допускаємо, вимірюючи ЕРС джерела постійного струму вольтметром.

Дійсно, вольтметр вимірює не ЕРС, а напругу на ділянці кола, а в цьому випадку, оскільки в колі є лише вольтметр, напругу на самому вольтметрі (мал. 61), яка за законом Ома для ділянки кола

$$U = IR_B,$$



Мал. 61

де R_B – опір вольтметра.

Цю напругу ми вважаємо за ЕРС, проте реальна ЕРС – це величина, отримана з закону Ома для повного кола

$$\mathcal{E} = I(R_B + r)$$

де r – внутрішній опір джерела.

Таким чином, відносна похибка буде:

$$\delta = \frac{|\mathcal{E} - U|}{\mathcal{E}} \cdot 100\% = \frac{IR_B + Ir - IR_B}{I(R_B + r)} \cdot 100\% = \frac{r}{R_B + r} \cdot 100\%.$$

Як бачимо, ця похибка буде менша, що більший опір вольтметра.

Тема 4. Правила Кірхгофа

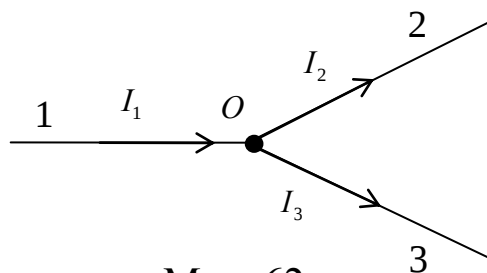
Задачі

(92) На основі рівняння неперервності струму встановимо перше правило Кірхгофа, а саме, що арифметична сума струмів, які входять у вузол, дорівнює арифметичній сумі струмів, які з нього виходять.

Дійсно, перше правило Кірхгофа випливає з рівняння неперервності струму. Нехай в точці O струм I_1 розгалужується на I_2 та I_3 (мал. 62). Провідники 2 і 3 можна розглядати як один провідник, послідовно приєднаний до провідника 1. Тоді згідно з рівнянням неперервності струму

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Очевидно, якщо у вузол входить n струмів, а виходить з нього m струмів, то



Мал. 62

$$\sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^m I_i.$$

(93) На основі закону Ома для ділянки кола з ЕРС установимо друге правило Кірхгофа, а саме, що в будь-якому контурі, виділеному з розгалуженого кола, алгебраїчна сума напруг дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які є в цьому контурі.

Вибираємо довільно в розгалуженому колі напрями струмів в усіх вітках та напрями обходу контурів (мал. 63). Виділимо з цього кола один замкнений контур, наприклад, $ABCA$ і напишемо для кожної його ділянки рівняння згідно з законом Ома для ділянки кола з ЕРС

$$I_1 R_1 = \varphi_B - \varphi_A - \mathcal{E}_1,$$

$$I_1 R_2 = \varphi_C - \varphi_B + \mathcal{E}_2,$$

$$-I_3 R_3 = \varphi_A - \varphi_C.$$

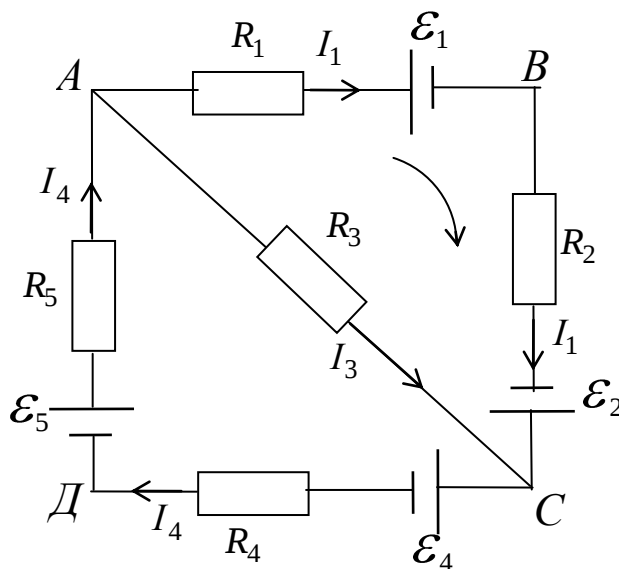
Після додавання цих рівностей дістанемо

$$I_1 R_1 + I_1 R_2 - I_3 R_3 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1,$$

що означає, що алгебраїчна сума напруг на опорах в цьому контурі дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які є в ньому.

Очевидно, що за будь-якої кількості опорів та джерел ЕРС

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_m.$$



Мал. 63

(94) На основі правил Кірхгофа знайдемо опір R_x за допомогою так званої місткової схеми (мал. 64), якщо відомі опори R_1 , R_2 та R_3 підібрані так, що сила струму у вітці BD дорівнює нулеві.

Перед тим як застосувати правила Кірхгофа, зробимо наступні дії:

1. Виберемо напрями струмів в усіх вітках кола.

Очевидно, що в колі є лише три струми: струм I , який тече через джерело струму $\mathcal{E}$, струм I_1 , який тече через опори R_1 і R_x , та струм I_2 , який тече через опори R_2 та R_3 (в точках B і D насправді розгалужень немає, бо у вітці BD струм дорівнює нулеві).

2. Виберемо напрями обходу контурів.

3. Виберемо $n-1$ вузол до яких застосуємо перше правило Кірхгофа та $n-1$ контур до яких застосуємо друге правило Кірхгофа.

Тепер можемо застосувати правила Кірхгофа, зокрема, друге правило до контурів ABD та BCD . Отже, для контура ABD

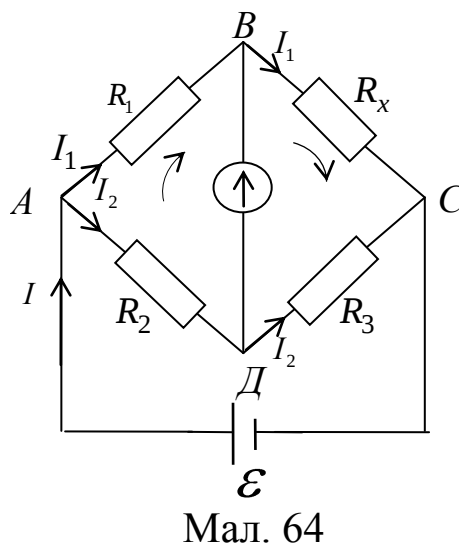
$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

і для контура BCD

$$I_1 R_x - I_2 R_3 = 0.$$

З цих двох рівнянь знаходимо:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_3.$$



Мал. 64

Цей метод вимірювання опорів називається *методом містка Вістона*.

(95) Визначимо ЕРС джерела струму компенсаційним методом.

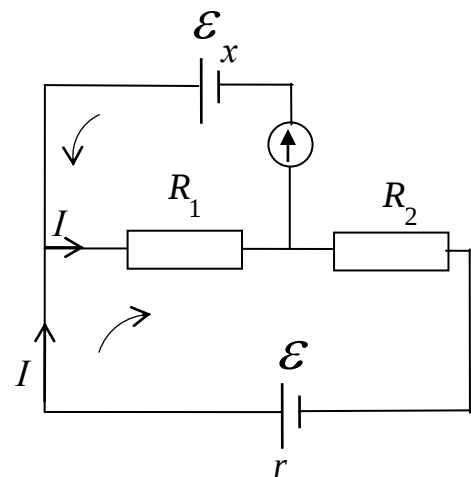
Підберемо опори R_1 і R_2 такими, щоб струм у верхній вітці дорівнював нулеві (на малюнку 65 гальванометр показує нуль).

За другим правилом Кірхгофа для нижнього контура

$$I(R_1 + R_2 + r) = \mathcal{E}_1,$$

а для верхнього контура

$$IR_1 + 0r_x = \mathcal{E}_x.$$



Мал. 65

З цих двох рівнянь знаходимо

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E}.$$

Як бачимо, результат вимірювань не залежить від внутрішнього опору r_x вимірюваного джерела. Крім того, за достатньо великих опорів R_1 і R_2 внутрішній опір еталонного джерела r практично можна не враховувати, бо тоді $r \ll R_1 + R_2$.

Тема 5. Робота і потужність струму

Фізичні поняття

- **Коефіцієнт корисної дії споживача струму** – це відношення корисної роботи, виконаної струмом в приладі, до всієї виконаної роботи струму в цьому ж приладі (позначення η).

$$\eta = \frac{A_k}{A_g}. \quad (1)$$

• **Коротке замикання** – це явище сильного нагрівання джерела ЕРС при його навантаженні споживачем з опором значно меншим за його внутрішній опір.

Задачі

(96) Установимо вираз для роботи, яку виконує постійний струм та вираз його потужності.

Оскільки фізична величина «робота» опирається на таку фізичну величину як сила, то слід з'ясувати, про роботу якої сили піде мова, коли ми говоримо про роботу струму. Очевидно, що це є стороння сила, яка діє на заряди з боку електричного поля, тому виходимо з того, що за переміщення заряду dq від точки до точки це поле виконує роботу, яка згідно з означенням напруги та сили струму

$$dA = U dq = UI dt, \quad (2)$$

звідки

$$A = \int_0^t UI dt,$$

або застосувавши закон Ома

$$A = \int_0^t \frac{U^2}{R} dt = \int_0^t I^2 R dt.$$

Очевидно, що для постійного струму сталі величини винесемо за знак інтеграла і отримаємо

$$A = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt.$$

Для потужності з виразу (2) та означення потужності

$$P = \frac{dA}{dt} = UI$$

і на основі закону Ома

$$P = \frac{U^2}{R} = I^2R.$$

(97) Установимо закон Джоуля-Ленца в інтегральній та диференціальній формах.

Ми встановили, що робота яку виконує постійний струм (насправді роботу виконує електричне поле сторонніх сил, або ще точніше: стороння сила),

$$A = I^2Rt.$$

Згідно з першим законом термодинаміки $Q = \Delta U + A$ за зміни внутрішньої енергії $\Delta U = 0$ (що буде завжди, коли провідник перебуває у середовищі), ця робота буде дорівнювати кількості теплоти, яку віддасть провідник, тобто

$$A = Q = I^2Rt.$$

Ця формула виражає закон Джоуля-Ленца.

Переведемо цей закон в диференціальну форму. Для цього до останнього виразу застосуємо послідовно означення густини струму, закон Ома в диференціальній формі та означення питомого опору. Дістанемо

$$Q = I^2 R t = j^2 S^2 R t = \frac{E^2}{\rho^2} S^2 R t = \frac{E^2}{\rho^2} S^2 \rho \frac{l}{S} t = \frac{E^2}{\rho} V t = \sigma E^2 V t.$$

Поділивши останнє рівняння на Vt , маємо

$$\frac{Q}{Vt} = \sigma E^2.$$

Величина $\frac{Q}{t}$ – це теплова потужність, тому величину $\frac{Q}{Vt}$ можемо назвати *об'ємною густиною теплової потужності* і позначити буквою w . Тоді

$$w = \sigma E^2,$$

або врахувавши, що згідно із законом Ома в диференціальній формі $\sigma E = j$

$$w = jE$$

і оскільки вектори $\vec{j}$ і $\vec{E}$ співнаправлені

$$w = \vec{j} \vec{E}.$$

Це і є закон Джоуля-Ленца в диференціальній формі.

(98) Знайдемо вираз для ККД джерела постійного струму.

Згідно з означенням ЕРС та сили струму, а також за законом Ома для повного кола, робота виконана джерелом струму

$$A_{\text{в}} = \mathcal{E}q = \mathcal{E}It = \frac{\mathcal{E}^2 t}{R + r}.$$

Корисна робота – це робота, виконана струмом на споживачі:

$$A_K = I^2 R t = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r} R t.$$

Тепер залишилось обчислити ККД згідно з його означенням:

$$\eta = \frac{A_K}{A_B} = \frac{R}{R + r}.$$

З цієї формули видно, що за умови $r \ll R$, яка до речі, найчастіше реалізується, ККД приладу може бути близьким до 100 %. Якщо ж навпаки $r \gg R$, то ККД близький до нуля, що означає згідно з означенням ККД (1), що $A_K \ll A_B$, тобто вся робота виконується у самому джерелі струму і згідно з законом Джоуля-Ленца в ньому виділяється вся теплота, яка призводить до сильного перегріву джерела, що, очевидно, є небезпечним для самого джерела. Такого режиму роботи, який називається коротким замиканням, допускати не можна, тобто, по-простому, не можна приєднувати до полюсів джерела струму споживачі з дуже малим опором.

(99) Визначимо кількість теплоти, яка виділиться в провіднику за час τ , протягом якого струм у ньому рівномірно зростає від нуля до величини I_m . Обчислимо також середню потужність за цей час.

Очевидно, що йдеться не про постійний струм. Проте впродовж нескінченно малого проміжку часу dt його можна вважати постійним. Тоді кількість теплоти виділена за час dt згідно з законом Джоуля-Ленца

$$dQ = I^2 R dt$$

звідки

$$Q = \int_0^{\tau} I^2 R dt = R \int_0^{\tau} I^2 dt.$$

Залишилося встановити часову залежність сили струму I . Оскільки струм зростає рівномірно, то ця залежність лінійна

$$I = at + b.$$

Сталі a і b знайдемо з умов: $t = 0, I = 0$ та $t = \tau, I = I_m$. Підставивши ці умови в останнє рівняння, знаходимо, що $b = 0$ та $a = \frac{I_m}{\tau}$. Отже,

$$I = \frac{I_m}{\tau} t.$$

Підставивши цю залежність у підінтегральну функцію, знаходимо

$$Q = R \int_0^{\tau} \left(\frac{I_m}{\tau} t \right)^2 dt = \frac{I_m^2 R}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R \tau.$$

Середнє значення потужності знайдемо за формулою середнього значення функції

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} P dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} I^2 R dt = \frac{R}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{I_m^2}{\tau^2} t^2 dt = \frac{R I_m^2}{\tau^3} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{1}{3} R I_m^2.$$

Тема 6. Класична теорія електропровідності металів

Фізичні поняття

- **Електронний газ** – це ідеальний газ, роль молекул якого відіграють вільні електрони.

Постулати

➤ Метал складається з йонів, які, коливаючись біля своїх вузлів утворюють кристалічну ґратку та вільних електронів, які хаотично рухаються у кристалі.

➤ Сукупність вільних електронів у металі трактується як ідеальний газ.

➤ Під час зіткнення електрона з вузлом кристалічної ґратки електрон цілком передає йому свою енергію дрейфового руху.

Задачі

(100) За допомогою мисленнево проведеного експерименту Толмена і Стюарта підтвердимо наявність у металі вільних електронів та визначимо їхній питомий заряд.

Основний зміст досліду полягає в тому, що за різкого гальмування соленоїда, що швидко обертається, в ньому, виникає струм, причиною якого є рух електронів за інерцією.

Застосуємо до електрона, що внаслідок гальмування соленоїда рухається за інерцією, основне рівняння динаміки в неінерційних системах відліку, яке, як відомо, має вигляд

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a}_0,$$

де $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – сума зовнішніх сил, які діють на тіло (електрон), $\vec{a}_0$ – прискорення, з яким рухається сама система відліку, (у нашому випадку це є соленоїд) та $m\vec{a}_0 = \vec{F}_{in.}$ – сила інерції, яка діє на тіло (електрон) в цій системі відліку.

Оскільки, крім сили інерції інші сили на електрон не діють, то в проекції на вісь, яка збігається з напрямом лінійної швидкості соленоїда, маємо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{in}.$$

Ця сила інерції і є тією сторонньою силою, що спричиняє виникнення ЕРС, вираз якої установемо.

Напруженість поля цієї сторонньої сили

$$E_c = \frac{F_{in}}{e},$$

тому основне рівняння динаміки, в проекції на вісь яка спрямована вздовж дроту соленоїда) набуває вигляду

$$m \frac{dv}{dt} = -eE_c.$$

Помножимо це рівняння на елемент довжини соленоїда і проінтегруємо по всій довжині дроту соленоїда L . Дістанемо

$$\int_0^L \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} dl = - \int_0^L E_c dl.$$

Вираз у правій частині останнього рівняння – це електрорушійна сила $\mathcal{E}$, тому пишемо

$$\mathcal{E} = - \int_0^L \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} dl.$$

Взявши до уваги, що підінтегральний вираз не залежить від l , маємо

$$\mathcal{E} = - \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} \int_0^L dl,$$

звідки проінтегрувавши

$$\mathcal{E} = -\frac{m}{e} \frac{d\nu}{dt} L.$$

Якщо до кінців соленоїда приєднати гальванометр, то через нього потече струм I , який за законом Ома для замкненого кола

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R},$$

де R – опір соленоїда (опором гальванометра нехтуємо).

Підставивши $\mathcal{E}$ з цієї рівності в попередню, маємо:

$$IR = -\frac{m}{e} \frac{d\nu}{dt} L,$$

або

$$Idt = -\frac{mL}{eR} d\nu$$

звідки за означенням сили струму

$$dq = -\frac{mL}{eR} d\nu,$$

а після інтегрування

$$q = -\frac{mL}{eR} \int_{\nu_0}^0 d\nu = -\frac{mL}{eR} \nu_0,$$

де ν_0 – лінійна швидкість дроту соленоїда на початку гальмування, q – заряд, який пройшов через гальванометр за час гальмування соленоїда.

З останньої рівності знаходимо питомий заряд електрона

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0 L}{qR}.$$

Як бачимо, у правій частині цієї рівності залишилися тільки ті величини, які можна виміряти.

Цей експеримент Толмен і Стюарт провели в 1916 році.

(101) Покажемо, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів (КТЕМ) можна вивести закон Ома.

Раніше ми вже довели, що в провіднику зі струмом носії заряду дрейфують зі сталою швидкістю (задача 76). Знайдемо цю швидкість як середню швидкість між двома зіткненнями.

Вважаємо електричне поле в металі постійним. Тоді сила яка діє з боку поля на електрон, буде постійна, а дрейфовий рух електрона між зіткненнями буде рівноприскореним згідно з другим законом Ньютона. Крім того, відомо, що середня швидкість за рівноприскореного руху яка $\bar{v}$ є вищезгаданою сталою дрейфовою швидкістю дорівнює половині кінцевої швидкості, тому

$$v = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{1}{2} a \tau = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \tau,$$

де τ – час вільного пробігу (час релаксації). Враховуючи, що дрейфова швидкість електрона значно менша за середню квадратичну швидкість їх хаотичного руху $\bar{v}$, час вільного пробігу можемо представити у такому вигляді

$$\tau = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}},$$

де $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу електрона.

Тепер рівність для дрейфової швидкості набуде вигляду

$$v = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \bar{\lambda},$$

а відома формула $j = env$ –

$$j = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m} E,$$

тобто ми отримали закон Ома, де

$$\sigma = \frac{e^2 n \bar{\lambda}}{2m} = \frac{e^2 n}{2m} \tau. \quad (1)$$

(102) Покажемо, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів можна вивести закон Джоуля-Ленца.

Згідно з третім постулатом КТЕМ один електрон передає йону енергію

$$\frac{mv_{max}^2}{2},$$

а N електронів –

$$N \frac{mv_{max}^2}{2},$$

причому ця передача енергії відбувається протягом часу вільного пробігу τ , тому енергія, передана ґратці за одиницю часу в одиниці об'єму (густина теплової потужності),

$$w = \frac{N}{V\tau} \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

Підставивши у цю рівність послідовно означення концентрації $n = N/V$, означення прискорення за рівноприскореного руху $a = v_{max}/\tau$, другий закон Ньютона $a = F/m$ та означення напруженості електричного поля $E = F/e$, дістанемо

$$w = \frac{e^2 n \tau}{2m} E^2.$$

Як відомо з попередньої задачі $\sigma = \frac{e^2 n}{2m} \tau$, тому

$$w = \sigma E^2,$$

тобто ми отримали закон Джоуля-Ленца (задача 97).

(103) На основі КТЕМ виведемо емпіричний закон Відемана-Франца, який полягає у тому, що відношення питомої теплопровідності до питомої електропровідності для усіх металів за певної температури є сталою величиною.

$$\frac{K}{\sigma} = A',$$

а за зміни температури це відношення зростає пропорційно до температури

$$\frac{K}{\sigma} = AT.$$

З фізичної кінетики відомо, що коефіцієнт теплопровідності газів

$$K = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V, \quad (2)$$

де ρ – густина газу, c_V – його питома теплоємність за сталого об'єму.

Густина електронного газу ρ представимо згідно з означеннями густини та концентрації:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Mn}{N} = mn,$$

де M – маса електронного газу, V – його об'єм, N – кількість електронів, m – маса електрона, а теплоємність згідно з формулою, яка впливає з першого закону термодинаміки:

$$c_V = \frac{1}{M} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{M} \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} NkT \right) = \frac{3}{2} \frac{Nk}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m},$$

де k – стала Больцмана, а внутрішня енергія U представлена як $\frac{3}{2} NkT$.

Підставивши дві останні рівності в рівність (2), дістанемо

$$K = \frac{1}{2} nk \overline{v} \overline{\lambda}.$$

Поділивши цей вираз на вираз для σ (1), дістанемо

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{km \overline{v}^2}{e^2}$$

і врахувавши, що $\frac{m \overline{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT$, остаточно матимемо

$$\frac{K}{\sigma} = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Бачимо, що $\frac{K}{\sigma}$ пропорційне до температури з коефіцієнтом пропорційності $A = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2$.

(104) Покажемо, що в рамках КТЕМ можна пояснити температурну залежність опору металів.

З формули для питомої електропровідності (1), яка впливає з КТЕМ дістаємо для питомого опору

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\bar{v}}{e^2 n \bar{\lambda}} = \frac{2m}{e^2 n \bar{\lambda}} \sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

що означає, що $\rho \sim \sqrt{T}$, тоді як експеримент показує, що $\rho \sim T$, тобто висновок з КТЕМ нібито суперечить експериментові, якщо не взяти до уваги, що в останній рівності допущена помилка, яка полягає в тому, що середню квадратичну швидкість електронів $\bar{v}$ представлено як $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$, де T – температура кристалічної ґратки. Насправді в останньому виразі мала би бути температура електронного газу T_e відмінна від температури ґратки T .

Проте питомий опір можна представити і через температуру ґратки якщо скористатися тим фактом, що середня довжина вільного пробігу електрона

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{n_\phi}$$

де n_ϕ – концентрація фононів яка в свою чергу пропорційна до температури ґратки, тому

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{T}.$$

З цієї рівності та рівності

$$\rho = \frac{2m\bar{v}}{e^2 n \bar{\lambda}}$$

маємо, що

$$\rho \sim \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} \sim T.$$

Зауважимо, що у $\bar{v}$ немає прихованої залежності від температури ґратки T , вона залежить від температури електронного газу T_e . Остання формула узгоджується з експериментом.

(105) Покажемо, що в рамках КТЕМ можна отримати правильний результат щодо теплоємності електронного газу.

Молярна теплоємність газу згідно з класичною теорією теплоємності дорівнює $i/2 R$, де i – кількість ступенів вільності молекул цього газу, R – універсальна газова стала. Оскільки електронний газ – це одноатомний газ, то $i=3$, і його молярна теплоємність дорівнює $3/2 R$. Крім того, згідно з законом Дюлонга й Петі молярна теплоємність кристалічної ґратки дорівнює $3R$. Отже, молярна теплоємність металу буде $\frac{3}{2} R + 3R = 4,5R$, що суперечить експерименту.

Цієї суперечності КТЕМ також можна уникнути, якщо, дотримуючись концепції ідеального газу і взявши до уваги те, що електронний газ не перебуває в тепловій рівновазі з ґраткою ввести температуру електронного газу T_e , відмінну від температури ґратки T .

(106) Установимо зв'язок концентрації вільних електронів у металі з його густиною і молярною масою.

Згідно з означенням концентрації

$$n = \frac{N}{V},$$

де N – загальна кількість вільних електронів у цьому зразку металу, V – його об'єм.

Оскільки кожен атом постачає z вільних електронів, де z – валентність, а атомів є $N_A \nu$, де N_A – число Авогадро, ν – кількість молів, то

$$N = zN_A \nu.$$

Представивши об'єм V металу через масу й густину металу, а кількість речовини через масу й молярну масу, дістанемо

$$n = \frac{zN_A \nu}{V} = \frac{zm\rho N_A}{\mu m} = N_A \frac{z\rho}{\mu}.$$

Наприклад, для міді

$$n = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{2 \cdot 8,9 \cdot 10^3}{0,0655} = 1,64 \cdot 10^{29} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

Тема 7. Провідність напівпровідників

Фізичні поняття

• **Напівпровідник** – речовина, провідність якої сильно залежить від зовнішніх впливів – нагрівання, опромінення, тиску, вологості, легування (уведення домішок).

• **Власна провідність напівпровідника** – провідність напівпровідника, зумовлена власними носіями заряду.

• **Домішкова провідність напівпровідника** – провідність напівпровідника, зумовлена наявністю у ньому домішок.

• **Дірка** – вільна позитивно заряджена квазічастинка в напівпровіднику, заряд якої дорівнює заряду електрона.

• **Донор** – домішка в напівпровіднику, яка зумовлює його електронну провідність.

• **Акцептор** – домішка в напівпровіднику, яка зумовлює його діркову провідність.

• **Вільна зона (інакше зона провідності)** – зона на енергетичній шкалі, перебуваючи в якій електрон є вільним всередині кристала.

• **Валентна зона** – зона на енергетичній шкалі, перебуваючи у якій електрон не може вільно пересуватися всередині кристала.

• **Заборонена зона** – зона на енергетичній шкалі, в якій не може перебувати електрон, або, інакше, проміжок енергій, яких не може набувати електрон.

• **Енергія йонізації донора** – енергія, яку слід надати електрону домішкового атома, щоб він став вільним електроном.

• **Енергія активації акцептора** – енергія, яку слід надати валентному електрону, щоб він приєднався до акцепторного атома.

• **Ширина забороненої зони** – мінімальна енергія, яку слід надати валентному електрону, щоб він став вільним електроном.

• **Напівпровідник n -типу провідності** – це напівпровідник, в якому основними носіями струму є електрони.

• **Напівпровідник p -типу провідності** – це напівпровідник, в якому основними носіями струму є дірки.

• **p - n - перехід** – межа між напівпровідниками n - та p - типу провідності.

Фізичні величини

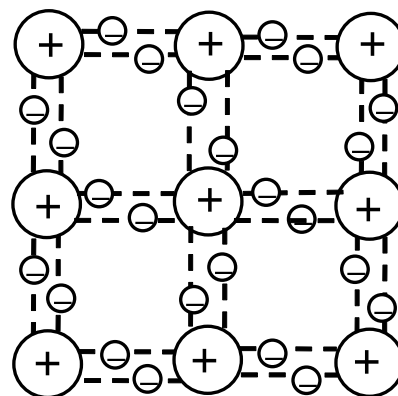
• **Хемічний потенціал** – це темп зміни внутрішньої енергії системи зі зміною числа її частинок.

$$\mu = \frac{dW}{dN}.$$

Задачі

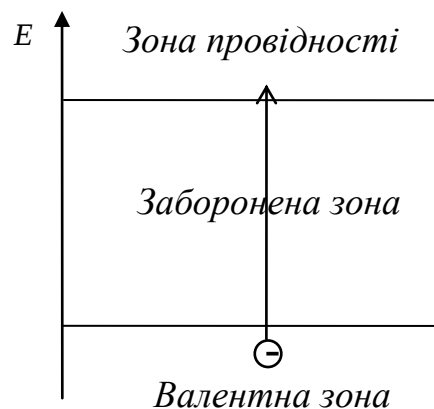
(107) **Покажемо, що власна провідність напівпровідника зумовлена двома типами носіїв заряду – електронами й дірками.**

Якщо немає жодних зовнішніх впливів, то напівпровідник, наприклад, кремній є діелектриком. Дійсно, з малюнка 66 видно, що всі електрони беруть участь в утворенні ковалентних зв'язків.



Мал. 66

За нагрівання чи опромінення будь-який валентний електрон може отримати достатню енергію, щоб відірватися від атома і стати вільним електроном. При цьому його місце залишиться вільним. Оскільки ймовірність появи такого вільного місця однакова біля кожного атома, то це вільне місце може вільно «блукати» всередині кристалу, коли воно буде заповнене електроном, який відірвався від іншого атома. Такий рух вільного місця в напрямі, протилежному до напрямку руху електрона можна вважати рухом позитивної частинки з зарядом $+e$, яка називається *діркою* (дірка, насправді, є квазічастинкою, тобто не-реальною частинкою, бо вона, на відміну від електрона, не може існувати поза кристалом). У зонній моделі це означає, що електрон перейшов з валентної зони в зону провідності (мал. 67). При цьому у



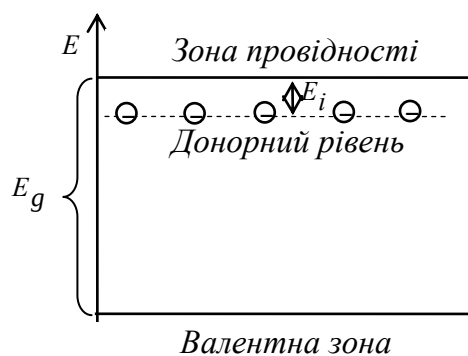
Мал. 67

валентній зоні утворюється дірка, яка може вільно переміщатися всередині кристала.

В електричному полі, очевидно, електрони будуть рухатися проти напрямку силових ліній, а дірки – за напрямом силових ліній, таким чином створюючи електричний струм.

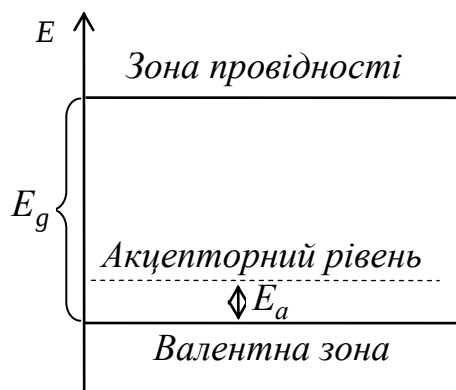
(108) Покажемо, що в напівпровіднику кремнію домішки фосфору, миш'яку та сурми є донорами, а домішки бору, галію та індію – акцепторами.

Оскільки кремній у періодичній системі елементів розміщений у четвертій групі, то в його атомі на зовнішній оболонці є чотири валентних електрони. Також відомо, що ці чотири електрони утворюють парноелектронні (ковалентні) зв'язки з іншими чотирма електронами, які належать до інших чотирьох атомів (мал. 66).



Мал. 68

Якщо до кремнію додати домішки фосфору, миш'яку чи сурми, які є у п'ятій групі, тобто мають по п'ять валентних електронів, то чотири електрони утворять ковалентний зв'язок, а п'ятий залишиться «зайвим» і може легко стати вільним електроном, що означає, що ці атоми в кремнію є донорами. У зонній моделі це виглядає так, що в забороненій зоні близько до зони провідності є енергетичний рівень, який заповнений електронами (мал. 68) і які саме через свою близькість до зони провідності здатні легко постачати електрони в зону провідності.



Мал. 69

Якщо в кремній додати невелику кількість атомів елементів третьої групи (бор, галій, індій чи алюміній), то три

валентні електрони утворюють ковалентні зв'язки, а одне місце залишиться не заповненим, причому якщо домішок небагато, то це незаповнене місце може з однаковою ймовірністю виникнути біля будь-якого атома (коли електрон від іншого атома перейде на вільне місце), тобто воно може вільно «блукати» у кристалі і трактуватися як вільна позитивна частинка яка, як відомо, називається діркою. Заряд дірки, як бачимо, дорівнює зарядові електрона, і є вона квазічастинкою, тобто несправжньою частинкою – вона на відміну від електрона, не може залишити кристал і існувати поза ним.

У зонній моделі це виглядає так: у забороненій зоні (близько до валентної зони) є незаповнений електронами енергетичний рівень (мал. 69), на який може легко перейти електрон з валентної зони, утворивши таким чином у валентній зоні дірку.

(109) Покажемо, що за низьких температур у напівпровідниках переважає домішкова провідність, а за високих – власна.

Власна провідність напівпровідників виникає внаслідок переходів електронів з валентної зони в зону провідності (мал. 67), а домішкова – внаслідок переходів електронів з донорного рівня в зону провідності (мал. 68) або з валентної зони на акцепторний рівень (мал. 69).

Очевидно, для виникнення домішкової провідності потрібна значно менша енергія, бо енергетична відстань від донорного рівня до зони провідності E_i чи від валентної зони до акцепторного рівня E_a значно менша від ширини забороненої зони E_g . Тому за низьких температур коли енергії теплового руху пропорційної до kT достатньо для переходу електрона з донорного рівня в зону провідності або з валентної зони на акцепторний рівень, виникає домішкова провідність.

За високих температур відбуваються переходи електронів з валентної зони в зону провідності, що зумовлює власну провідність. При цьому зі збільшенням температури домішкова провідність зали-

шається. Проте, оскільки концентрація власних атомів напівпровідника значно більша за концентрацію домішкових атомів (кількість електронів у валентній зоні значно більша за їхню кількість на донорному рівні чи за кількість вільних місць на акцепторному рівні), то за високих температур всі електрони переходять з донорних рівнів в зону провідності чи всі вільні місця на акцепторному рівні вже зайняті електронами які прийшли з валентної зони (настає так зване виснаження домішок) і домішкова провідність виявляється значно меншою за власну.

(110) Покажемо, що на відміну від провідників опір напівпровідників зменшується з підвищенням температури.

Справді, з підвищенням температури зростає енергія теплового руху і все більша кількість електронів має можливість переходити з валентної зони чи то в зону провідності (мал. 67) чи то на акцепторний рівень (мал. 69), чи то з донорного рівня в зону провідності (мал. 68).

Таким чином зростає концентрація вільних електронів та дірок, що і є причиною зростання питомої електропровідності яка, як відомо, є пропорційною до концентрації: $\sigma = en\mu$.

Порівняємо цей механізм температурного зростання провідності напівпровідника з механізмом її температурного зменшення у металах, де це зменшення пов'язане зі зменшенням рухливості електронів внаслідок їхніх зіткнень з фононами, концентрація яких зростає з ростом температури. Очевидно, що цей механізм температурного зменшення провідності діє і в напівпровідниках, проте збільшення концентрації вільних носіїв настільки стрімке, що зменшення рухливості практично не впливає на загальне зростання провідності.

Очевидно, що питома провідність напівпровідників є сумою електронної та діркової провідностей

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

де n, μ_n – концентрація та рухливість електронів, p, μ_p – концентрація та рухливість дірок.

(111) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у власному напівпровіднику є приблизно посередині забороненої зони встановимо залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури.

Згідно з розподілом Больцмана концентрація електронів провідності

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu}{kT}},$$

де n_0 – степенева функція від температури; μ – хемічний потенціал, T – абсолютна температура.

Оскільки питома провідність є пропорційною до концентрації, то вона буде залежати від температури за таким самим законом:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\mu}{kT}}.$$

Підставивши в останню рівність $\mu = \frac{1}{2}E_g$, де E_g – ширина забороненої зони, дістанемо

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

Врахуємо також, що степенева залежність є значно слабшою за експонентну, тобто σ_0 можна вважати сталою величиною. Тоді:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_g}{2kT}}.$$

При виведенні цієї формули ми не врахували залежності концентрації дірок від температури, проте, очевидно, що оскільки у власному напівпровіднику вона дорівнює концентрації вільних електронів, то ця залежність також експонентна і на остаточний вигляд залежності питомої провідності від температури це не вплине. Крім того, при виведенні цієї залежності ми знехтували залежністю рухливості від температури з тієї ж причини, що і залежністю σ_0 ; вона значно слабша за експонентну залежність.

Позаяк питомий опір є обернений до питомої провідності, то з останньої формули дістанемо

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

Оскільки опір пропорційний до питомого опору то його температурна залежність така ж сама

$$R = R_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

Зазначимо, що експонентна залежність питомої провідності напівпровідників від температури підтверджується експериментально.

(112) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у домішковому напівпровіднику є приблизно посередині між домішковим рівнем та відповідною зоною (зоною провідності у донорному напівпровіднику чи валентною зоною в акцепторному) установимо температурну залежність домішкової провідності.

Очевидно, що підстановка $\mu = \frac{1}{2}E_a$, де E_a – енергія активації домішкових атомів, у закон розподілу Больцмана подібно (як у випадку власного напівпровідника (задача 111)) приведе до експонентної

залежності питомої провідності, питомого опору та опору від температури

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_a}{2kT}},$$

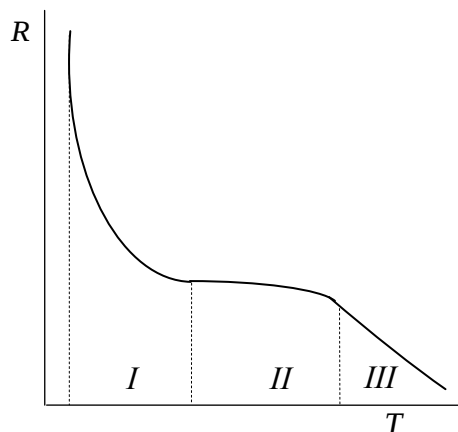
$$\rho = \rho_0 e^{\frac{E_a}{2kT}},$$

$$R = R_0 e^{\frac{E_a}{2kT}},$$

що також добре узгоджується з експериментом.

(113) Пояснимо типову експериментальну залежність опору напівпровідника від температури.

З малюнка 70, де показана типова експериментальна залежність опору напівпровідника від температури бачимо, що в області низьких температур *I* підвищення температури спричиняє стрімке (експонентне) зменшення опору, що пояснюється активними переходами електронів з донорного рівня в зону провідності (мал. 68) чи з валентної зони на акцепторний рівень (мал. 69).



Мал. 70

Опір на цій ділянці підкоряється залежності (задача 112)

$$R = R_0 e^{\frac{E_a}{2kT}}.$$

Далі температурний темп падіння опору сповільнюється навіть до такої міри, що опір перестає залежати від температури (ділянка *II*), що пояснюється тим, що всі електрони з донорного рівня вже перейшли в зону провідності чи всі вільні місця на акцепторному

рівні вже заповнені електронами і наступне підвищення температури вже не збільшує концентрацію електронів в зоні провідності чи дірок у валентній зоні, а температура ще занадто низька для того щоб електрони могли масово долати заборонену зону переходячи в зону провідності безпосередньо з валентної зони. Це область виснаження донорів чи повного насичення акцепторів.

Якщо і далі підвищувати температуру, то очевидно, ймовірність переходу електрона з валентної зони у зону провідності стає все більшою, зона провідності активно заповнюється і опір знову стрімко падає (ділянка III) підкоряючись залежності (задача 111)

$$R = R_0 e^{\frac{E_g}{2kT}}.$$

(114) Покажемо, як на основі експериментальної температурної залежності питомої провідності напівпровідника можна обчислити його ширину забороненої зони E_g та енергію активації домішки E_a .

Будемо базуватися на отриманій нами залежності питомої електропровідності від температури

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

де $\Delta E = E_a$ за низьких температур і $\Delta E = E_g$ за високих.

Перейдемо до залежності питомого опору від температури. Оскільки $\rho = 1/\sigma$, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}},$$

звідки

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}$$

і відповідно опір

$$R = R_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}.$$

Прологаритмувавши останнє рівняння, дістанемо

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{\Delta E}{2kT},$$

звідки бачимо, що залежність

$\ln R$ від $\frac{1}{T}$ є лінійною, причому

ця пряма нахилена до осі $\frac{1}{T}$ під кутом, тангенс якого дорівнює $\frac{\Delta E_g}{2k}$ (мал. 71), а доданок $\ln R_0$ не впливає на цей нахил. Отже

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta E}{2k},$$

звідки

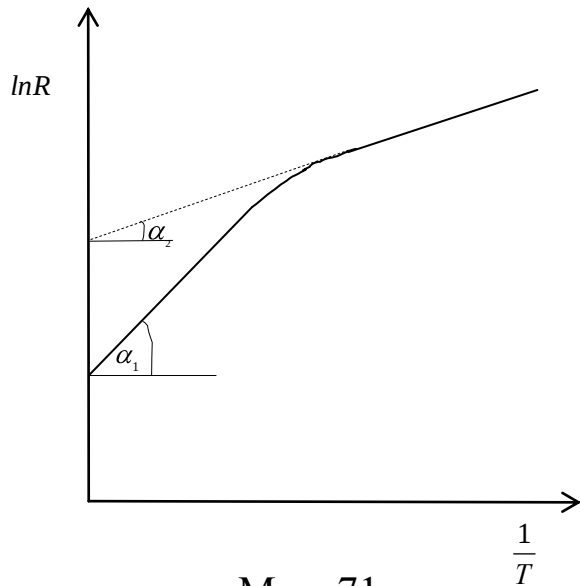
$$\Delta E = 2k \operatorname{tg} \alpha.$$

За високих температур отримуємо ширину забороненої зони

$$E_g = 2k \operatorname{tg} \alpha_1,$$

а за низьких – енергію активації домішки

$$E_a = 2k \operatorname{tg} \alpha_2.$$



Мал. 71

Зауважте, що на графіку $\ln R\left(\frac{1}{T}\right)$ високі температури є ближче до початку відліку, а низькі – далі від нього, а нахил прямої за високих температур стрімкіший ніж за низьких бо $E_g > E_a$.

Отже, вимірявши експериментально залежність опору напівпровідника від температури $R(T)$, можемо знайти ширину забороненої зони цього напівпровідника E_g та енергію активації домішки E_a .

Тема 8. Контактні явища у металах

Фізичні поняття

• **Поверхневий стрибок потенціалу** – різниця потенціалів між поверхнею металу та вакуумом.

• **Робота виходу електрона з металу** – робота, яку слід виконати, щоб перемістити вільний електрон з металу в нескінченність.

• **Зовнішня різниця потенціалів** – це різниця потенціалів, яка виникає на контакті двох металів внаслідок різних робіт виходу електронів з цих металів.

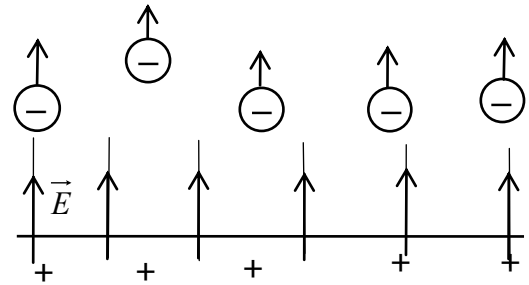
• **Внутрішня різниця потенціалів** – це різниця потенціалів, яка виникає на контакті двох металів внаслідок різної концентрації вільних електронів у цих металах.

Задачі

(115) Покажемо, що між поверхнею металу та вакуумом виникає різниця потенціалів, так званий поверхневий стрибок потенціалу і встановимо її зв'язок з роботою виходу електронів з металу.

Згідно з основними постулатами КТЕМ, вільні електрони рухаються хаотично з великою швидкістю, тому електрон, який є дуже близько до поверхні металу і має в цей момент часу напрям

швидкості в бік поверхні, може вийти з металу. Очевидно, що як тільки якась кількість електронів покине метал, він зарядиться позитивно, бо порушиться електронейтральність, яка була до того, що спричинить виникнення електричного поля (мал. 72), спрямованого від металу. Саме це електричне поле буде перешкоджати новим електронам виходити з металу, бо вони не зможуть рухатися за силовими лініями. Отже, за певної величини цього електричного поля установиться динамічна рівновага, тобто стан, коли кількість електронів, які виходять з металу, дорівнює кількості електронів, які повертаються в метал за одиницю часу. При цьому над металом зависне так звана *електронна хмара*.



метал

Мал. 72

Згідно з означенням потенціалу різниця потенціалів, яка при цьому виникне,

$$\varphi = \frac{A}{e},$$

де A – робота, яку слід виконати, щоб перенести електрон з поверхні металу в нескінченність, тобто робота виходу електрона з металу.

(116) Покажемо, що між двома різними металами виникає зовнішня різниця потенціалів і встановимо вираз для цієї різниці потенціалів.

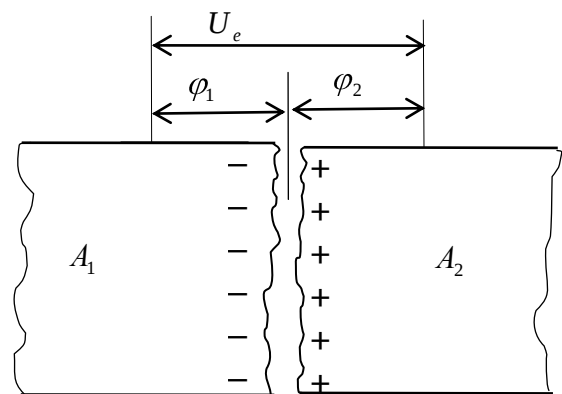
Приведемо в контакт два різні метали. Так само як виникає різниця потенціалів на межі металу з вакуумом (чи повітрям), між ними виникне контактна різниця потенціалів (мал. 73). Дійсно між першим металом і вакуумом виникне різниця потенціалів φ_1 , а між

вакуумом і другим металом – ϕ_2 . Тому різниця потенціалів між двома металами, яку позначимо U_e буде:

$$U_e = \phi_1 - \phi_2 = \frac{A_1}{e} - \frac{A_2}{e} = \frac{A_1 - A_2}{e},$$

де індекс e вказує на зовнішню різницю потенціалів (від англійського слова external, що означає «зовнішній»).

З останньої формули бачимо, що зовнішня різниця потенціалів залежить від різниці робіт виходу електронів з цих металів. Наприклад, якщо $A_1 > A_2$ то U_e є додатною величиною, тому електричне поле спрямоване від другого металу до першого (згадаймо, що електричне поле спрямоване в бік зростання потенціалу). Отже перший метал має негативний заряд, а другий – позитивний, а це означає, що електрони перейшли з другого металу в перший, тобто з того металу, де робота виходу менша в той, де вона більша.



Мал. 73

(117) Вважаючи вільні електрони в металі класичним електронним газом, покажемо, що між двома різними металами виникає внутрішня різниця потенціалів і встановимо, як вона залежить від концентрацій вільних електронів у цих металах та температури.

Внутрішня різниця потенціалів пов'язана з різними концентраціями електронів у двох металах. Дійсно, якщо привести в контакт два метали з різними концентраціями електронів, то тиск електронного газу згідно з постулатами КТЕМ $p = nkT$ буде більший в тому металі, де більша концентрація електронів, тому електрони переходитимуть

через контакт, порушуючи електронейтральність в обидвох металах, що спричинить виникнення нескомпенсованих зарядів і, відповідно, різниці потенціалів.

Установимо вираз для цієї різниці потенціалів на основі КТЕМ. Для цього на межі двох металів розглянемо циліндр з площами основ S і нескінченно малою висотою dx (мал. 74). На цей циліндр зліва буде тиск $p_1 = n_1 kT$, а справа тиск $p_2 = n_2 kT$. Нехай $n_2 > n_1$, тоді різниця тисків буде $\Delta p = p_2 - p_1 = \Delta n kT$.

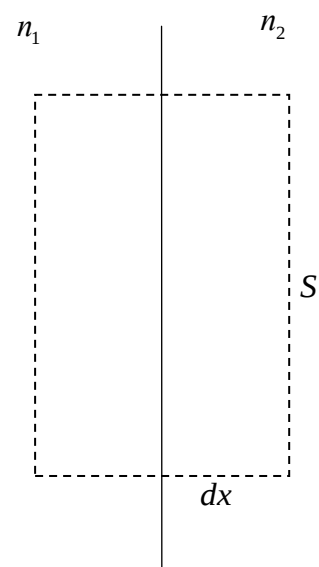
За зміни концентрації на dn , яка станеться внаслідок переходу електронів справа наліво, різниця тисків зміниться на

$$dp = kTdn.$$

При цьому сила, яка діє на електрони

$$dF = Sdp = SkTdn.$$

Але внаслідок переходу електронів порушиться електронейтральність обидвох металів і перший метал зарядиться негативно, а другий позитивно, спричинивши виникнення електричного поля, яке діятиме на електрони в протилежному напрямі з силою:



Мал. 74

$$dF_{ел.} = Edq = EedN = EendV = eEnSdx = -e \frac{d\varphi}{dx} nSdx = -enSd\varphi,$$

де послідовно застосовано: означення напруженості електричного поля, принцип квантованості електричного заряду, означення концентрації та формулу зв'язку напруженості та потенціалу.

Коли сила електричного поля, яка поступово зростає в міру переходу електронів, зрівняється з силою тиску, яка поступово зменшується, рух електронів припиниться. Отже, умова рівноваги

$$dF = dF_{el.},$$

або

$$SkTdn = -enSd\varphi,$$

звідки

$$d\varphi = \frac{kT}{e} \frac{dn}{n}$$

і після інтегрування

$$\varphi = \frac{kT}{e} \ln n + C.$$

Сталу C знаходимо з того, що за умови $n = n_1$, $\varphi = \varphi_1$, звідки дістаємо після підстановки

$$C = \varphi_1 - \frac{kT}{e} \ln n_1.$$

Тепер залежність φ має вигляд

$$\varphi = \frac{kT}{e} \ln \frac{n}{n_1} + \varphi_1.$$

Підставивши сюди $n = n_2$, знаходимо внутрішню контактну різницю потенціалів

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$$

і позначивши її U_i , де індекс i – це перша буква англійського слова internal, що означає внутрішній,

$$U_i = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}.$$

(118) Вважаючи вільні електрони в металі квантовим електронним газом, встановимо залежність внутрішньої контактної різниці потенціалів від концентрації вільних електронів у металах та температури.

Згідно з означенням хемічний потенціал можна трактувати як внутрішню енергію електронного газу яка припадає на один електрон, тому різниця хемічних потенціалів буде визначати різницю енергій електронів у двох металах. Згідно з означенням потенціалу внутрішня контактна різниця потенціалів

$$U_i^{кв.} = \frac{1}{e} (\mu_2 - \mu_1),$$

де μ_1 і μ_2 – хемічні потенціали цих металів.

З квантової статистики відомо, що

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_0} \right)^2 \right),$$

де

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$$

це хемічний потенціал за умови $T = 0$.

Підставивши два останні вирази у вираз для $U_i^{кв.}$, дістанемо

$$U_i^{кв.} = \frac{0,12h^2}{em} \left(n_2^{\frac{2}{3}} - n_1^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{6,8mk^2}{eh^2} \left(n_1^{-\frac{2}{3}} - n_2^{-\frac{2}{3}} \right) T^2.$$

(119) Установимо вирази для контактної різниці потенціалів як в класичній, так і в квантовій моделях і встановимо перший закон Вольта.

Очевидно, що контактна різниця потенціалів між двома металами дорівнює сумі внутрішньої і зовнішньої різниць потенціалів, тобто в класичній моделі

$$U_{кл} = U_e + U_i = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$$

і в квантовій моделі

$$U_{кв} = U_e + U_i^{кв} = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{0,12h^2}{em} \left(n_2^{\frac{2}{3}} - n_1^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{6,8mk^2}{eh^2} \left(n_1^{-\frac{2}{3}} - n_2^{-\frac{2}{3}} \right) T^2.$$

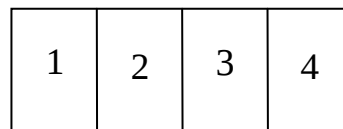
З цих формул видно, що контактна різниця потенціалів залежить від роду металу (концентрації вільних електронів та робіт виходу у двох металах) і від температури. Цей закон був встановлений експериментально (як і саме явище) в 1797 році французьким фізиком Алесандро Вольта.

Крім того, бачимо, що залежно від робіт виходу A_1 і A_2 та концентрацій n_1 і n_2 перший та другий доданки можуть мати як однакові, так і різні знаки, тому величини контактних різниць потенціалів дуже різні і між деякими металами чи сплавами можуть навіть практично дорівнювати нулеві.

(120) Доведемо другий закон Вольта: якщо послідовно привести в контакт багато різних металів, які перебувають за однакової температури, то різниця потенціалів між крайніми металами не залежить від того, які саме метали включені як проміжні у цьому з'єднанні, а залежить лише від типу цих крайніх металів.

Знайдемо різницю потенціалів U між крайніми металами (мал. 75)

$$U = \phi_2 - \phi_1 + \phi_3 - \phi_2 + \phi_4 - \phi_3 = \phi_4 - \phi_1.$$

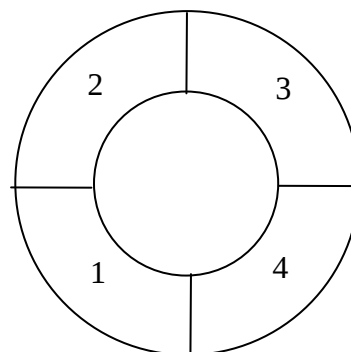


Мал. 75

З цього закону випливає, що якщо скласти замкнене коло з контактів кількох металів, то різниця потенціалів між будь-якими з них дорівнюватиме нулеві.

Дійсно, якщо з'єднати метали 1 і 4 (мал. 76) дістанемо

$$U = \phi_2 - \phi_1 + \phi_3 - \phi_2 + \phi_4 - \phi_3 + \phi_1 - \phi_4 = 0.$$



Мал. 76

(121) Покажемо, що контакт двох металів не має односторонньої провідності.

Для цього оцінимо товщину приконтактного шару, в якому порушена електронейтральність, тобто товщину зарядженого приконтактного діелектричного шару. Ми вже з'ясували, що в приконтактних областях внаслідок переходу електронів з одного металу в інший під впливом двох чинників, з одного боку від контакту виникає нестача, а з другого – надлишок електронів (задачі 116 і 117). Очевидно, що немає чіткої границі між зарядженою і незарядженою обла-

стями, а заряд зменшується поступово в обидвох напрямках від контакту приблизно так, як показано на мал. 77.

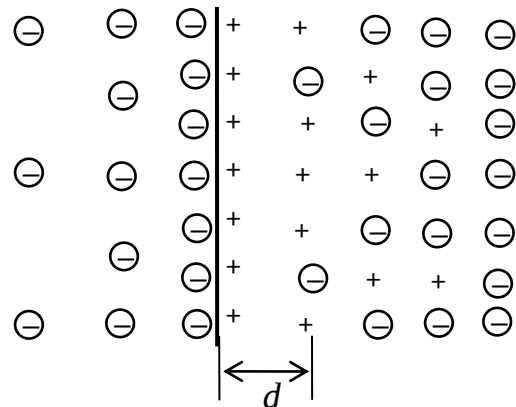
Вважатимемо приконтактну область за плоский конденсатор, відстань між пластинами якого d , а ємність згідно з її означенням

$C = \frac{q}{U}$, де U – контактна різниця потенціалів.

$$U = \frac{q}{C} = \frac{eN}{C} = \frac{enV}{C} = \frac{endSd}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{end^2}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

звідки

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{en}}.$$



Мал. 77

При виведенні цієї формули (крім означення ємності) ми застосували принцип квантованості заряду, означення концентрації та формулу ємності плоского конденсатора.

Для того, щоб зробити обчислення за останньою формулою, слід визначитися з концентрацією зарядів n та діелектричною проникністю ε .

Щодо концентрації зарядів n , то ми можемо стверджувати, що вона не менша за концентрацію вільних електронів в металах.

Про діелектричну проникність такого діелектрика можна лише сказати, що вона не менша за 1 (зауважимо, що в стані, близькому до діелектричного, перебуває лише приконтактна область з боку того металу, який віддав електрони).

Підставивши значення відповідних фізичних величин в останню формулу, дістанемо

$$d \approx \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{28}}} = 7,4 \cdot 10^{-11} \text{ м},$$

тобто товщина діелектричного шару співвимірна з міжатомними відстанями, і оскільки вона є дуже мала то струм через контакт двох металів тече практично без перешкод.

Тема 9. Явища в контактах двох напівпровідників та напівпровідника з металом

Фізичні поняття

- **p - n - перехід** – межа між напівпровідниками n - та p -типу провідності.

Фізичні системи й прилади

- **Напівпровідниковий діод** – прилад який має односторонню провідність завдяки контакту двох напівпровідників з різними типами провідності або напівпровідника з металом.

- **Транзистор** – прилад який має два p - n – переходи і призначений для генерування чи підсилення електричних коливань.

Задачі

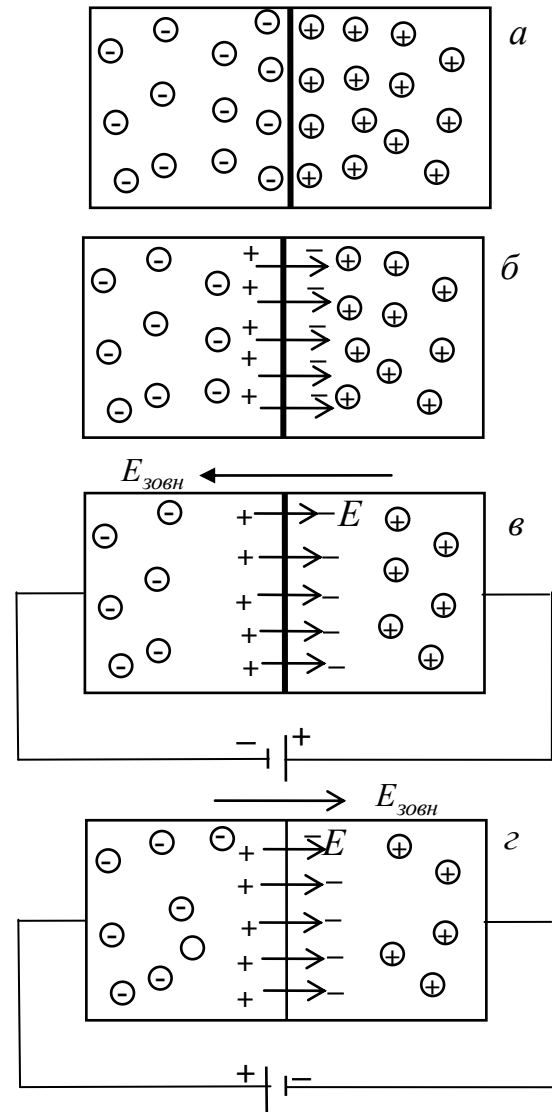
(122) Пояснимо механізм виникнення односторонньої провідності на p - n - переході.

Приведемо в контакт напівпровідник n -типу провідності з напівпровідником p -типу провідності (мал. 78, *a*). Оскільки тиск електронного газу в напівпровіднику n -типу значно більший за тиск в напівпровіднику p -типу, то електрони почнуть рухатися з n -напівпровідника в p -напівпровідник і рекомбінувати з дірками, що приведе до порушення електронейтральності в приконтактних областях з обидвох боків p - n - переходу, а саме в n -напівпровіднику виникне некомпенсований позитивний заряд, а в p -напівпровіднику – негативний заряд, що, своєю чергою, призведе до виникнення електричного поля. Тепер електронам, щоб перейти з n -напівпровідника в p -напівпро-

відник, слід рухатися за силовими лініями, тобто пройти проти сили електричного поля, що можливо лише тоді, коли сила тиску перевищує силу електричного поля. Тому очевидно, що коли напруженість поля зростає до такої величини, що сила цього поля зрівняється з силою тиску, процес переходу електронів і їхньої рекомбінації з дірками припиниться і настане рівноважний стан з певною величиною напруженості внутрішнього електричного поля і, відповідно, контактною різницею потенціалів (мал. 78, б).

Під'єднаємо тепер джерело постійного струму позитивним полюсом до p -напівпровідника, а негативним – до n -напівпровідника (мал. 78, в). Тоді зовнішнє поле, як видно з малюнка, перекомпенсує внутрішнє поле і електрони легко переходитимуть у p -напівпровідник проти поля, а дірки в n -напівпровідник за полем і рухатимуться по колу: в цьому випадку p - n -перехід буде відкритий.

Якщо ж полюси джерела під'єднати навпаки (мал. 78, г), то зовнішнє поле підсилить внутрішнє, не даючи змоги електронам переходити через контакт і струм проходити не буде, тобто p - n -перехід буде практично закритий, а незначний струм буде текти тому, що в напівпровіднику n -типу є незначна кількість дірок, а в напівпровіднику p -типу – електронів, які будуть легко переходити через p - n -перехід.



Мал. 78

(123) Покажемо, що контакт металу з напівпровідником може як мати односторонню провідність, так і її не мати: залежно від природи цього металу і напівпровідника.

Скористаємося формулою товщини діелектричного шару, яку ми отримали, аналізуючи контакт двох металів (задача 121)

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{en}}.$$

Очевидно, що для випадку двох напівпровідників концентрація n має порядок від 10^{17} до 10^{23} м⁻³, тому товщина діелектричного прошарку d буде порядку від 10^{-8} до 10^{-5} м, тобто від 100 до 100000 тисяч міжатомних відстаней, що, своєю чергою, означає виникнення суттєвої перешкоди для електричного струму.

У випадку контакту металу з напівпровідником усе буде залежати від того, куди перейдуть електрони: з металу в напівпровідник чи з напівпровідника у метал. Якщо електрони перейдуть з напівпровідника в метал, то діелектричний прошарок утвориться у напівпровіднику і він, відповідно, будучи широким, виявлятиме односторонню провідність. Якщо ж, навпаки, електрони перейдуть з металу в напівпровідник, і цей прошарок виникне в металі, то будучи вузьким, він не спричинятиме односторонньої провідності. Своєю чергою, електрони будуть переходити туди, де менша концентрація і більша робота виходу, тобто їхній перехід залежатиме від співвідношення концентрацій та різниці робіт виходу.

Тема 10. Термоелектричні явища

Фізичні явища

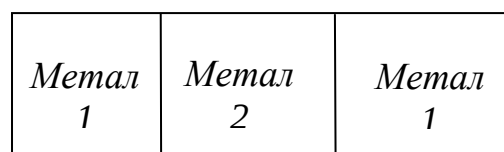
• **Ефект Зеебека (термоелектричний ефект)** – явище виникнення ЕРС між двома контактами двох різних металів, якщо ці контакти мають різну температуру.

• **Ефект Пельтьє** – явище нагрівання одного із спаїв термопари та охолодження іншого за пропускання через них електричного струму. Це явище можна вважати оберненим до термоелектричного ефекту.

• **Ефект Томсона** – явище нагрівання чи охолодження провідника зі струмом, вздовж якого є градієнт температури.

Фізичні системи й прилади

Термопара – два з'єднані між собою контакти двох різних металів (мал. 79). Ці контакти ще називають спаями.



Мал. 79

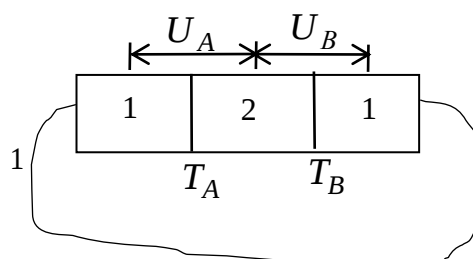
Задачі

(124) Покажемо, якщо контакти (спаї) термопари перебувають за різних температур, то між ними виникає електрорушійна сила, яка пропорційна до цієї різниці температур.

Знайдемо різницю потенціалів на кінцях термопари за умови, що її спаї мають різну температуру (мал. 80)

$$\begin{aligned}
 U &= (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_1' - \phi_2') = U_A + U_B = \\
 &= \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT_A}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} + \frac{A_2 - A_1}{e} + \frac{kT_B}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} = \\
 &= \frac{k}{e} \left(T_A \ln \frac{n_2}{n_1} + T_B \ln \frac{n_1}{n_2} \right) = \frac{k}{e} \left(T_A \ln \frac{n_2}{n_1} - T_B \ln \frac{n_2}{n_1} \right) = \\
 &= \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_A - T_B)
 \end{aligned}$$

Якщо ж кінці термопари замкнуті металом 1, то на відміну від випадку однакових температур спаїв ця різни-



Мал. 80

ця потенціалів не дорівнюватиме нулю (задача 120), а й надалі дорівнюватиме U , тобто таким способом ми отримаємо джерело з ЕРС

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1} (T_A - T_B)$$

Сталу для цих двох металів величину $\frac{k}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}$ позначимо α . Тоді

$$\mathcal{E} = \alpha (T_A - T_B)$$

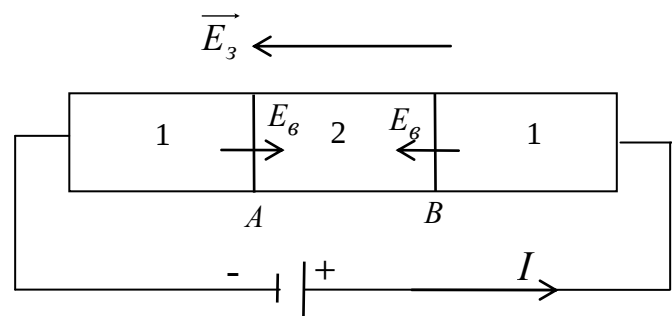
де α має назву коефіцієнта термоелектрорушійної сили.

Експерименти підтверджують цю лінійну залежність у досить широких інтервалах температур.

(125) З'ясуємо природу ефекту Пельтьє на основі класичної теорії електропровідності металів та знайдемо спосіб експериментального вимірювання теплоти Пельтьє.

Уявімо термопару, спаї якої перебувають за однакової температури, і через яку тече струм, створений джерелом ЕРС (мал. 81). Згадаємо, що на кожному зі

спаїв є контактна різниця потенціалів, причому, будучи однаковими за величиною, вони мають протилежні знаки, бо це є контакти тих самих металів 1 і 2. Тому якщо в одному спаї (спаї A) елек-



Мал. 81

трони рухаються за внутрішнім контактним полем, то в другому вони обов'язково рухатимуться проти цього поля. Отже, в контакті A електрони сповільнюються електричним полем джерела, а в контакті B прискорюються, тому контакт A буде охолоджуватися, а контакт B

нагріватися. Експериментально встановлено, що кількість теплоти Пельтьє пропорційна до заряду, який пройшов через спай.

$$Q_{II} = \Pi q = \Pi It,$$

де Π – коефіцієнт Пельтьє.

Зауважимо, що крім теплоти Пельтьє у термопарі виділяється і теплота Джоуля-Ленца Q_D , тому щоб її виміряти, слід виключити теплоту Джоуля-Ленца. Для цього вимірюємо кількість теплоти, яка виділяється в одному з спаїв за двох напрямів струму. У випадку під'єднання джерела, як показано на мал. 81, кількість теплоти, яка виділяється у спаї А: $Q_1 = Q_D - Q_{II}$, а у випадку зміни напрямку струму на протилежний – $Q_2 = Q_D + Q_{II}$. Віднявши дві останні рівності, дістанемо

$$Q_{II} = \frac{Q_2 - Q_1}{2}.$$

Якщо виміряти ще й силу струму I та час t , протягом якого виділилася ця кількість теплоти Q_{II} , можна обчислити і коефіцієнт Пельтьє:

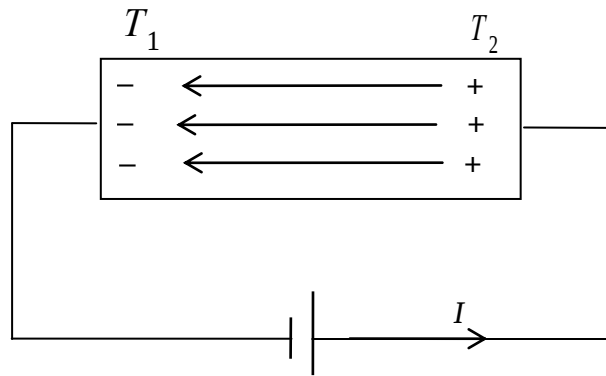
$$\Pi = \frac{Q_{II}}{It}.$$

У металів коефіцієнт Пельтьє має порядок від 0,001 до 0,01 В, а в напівпровідників – від 0,001 до 0,1 В.

(126) З'ясуємо природу ефекту Томсона і вкажемо на спосіб експериментального вимірювання теплоти Томсона.

Будемо пропускати струм через провідник, уздовж якого є градієнт температури (мал. 82). Нехай $T_1 < T_2$. Тоді тиск електронного газу буде більшим на гарячому (правому) кінці і електрони почнуть

рухатися в бік меншого тиску чим порушують електронейтральність на обидвох кінцях, що призведе до виникнення електричного поля всередині провідника. Якщо тепер до кінців цього провідника приєднати джерело струму позитивним полюсом до гарячого кінця, а негативним до холодного, то електрони, рухаючись проти внутрішнього поля, будуть прискорюватися і додатково нагрівати провідник. За зміни полярності джерела, навпаки, електрони, рухаючись за полем, будуть гальмуватися і провідник буде охолоджуватися.



Мал. 82

Експериментально встановлено, що теплота Томсона, що виділяється в одиниці об'єму за одиницю часу

$$\frac{Q}{Vt} = k \frac{dT}{dx} j,$$

де k – коефіцієнт Томсона.

Якщо зміна температури вздовж провідника лінійна, то $\frac{dT}{dx}$ можемо замінити на $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ і отримати

$$Q = k \frac{\Delta T}{\Delta x} jVt = k\Delta TjSt = k\Delta TIt,$$

де замість $\frac{V}{\Delta x}$ ми підставили площу поперечного перерізу S , а $jS = I$.

Очевидно, для того, щоб виміряти теплоту Томсона, слід аналогічно до методу ефекту Пельтьє – виключити теплоту Джоуля-Ленца вимірюванням теплоти за двох протилежних напрямів струму. Вимірявши крім Q силу струму I , різницю температур ΔT та час t ,

протягом якого виділилася ця кількість теплоти, з останньої формули можемо обчислити і коефіцієнт Томсона k .

Тема 11. Електричний струм у вакуумі

Фізичні поняття

- **Струм насичення** – максимальна й незалежна від напруги сила струму.

- **Робота виходу електрона з металу** – робота, яку слід виконати, щоб перенести електрон з металу в нескінченність (практично за межі металу).

Фізичні системи й прилади

- **Вакуумний діод** – герметична скляна посудина з вакуумом і двома вставленими в неї електродами.

Задачі

(127) Доведемо, що дрейфова швидкість електронів між катодом і анодом у вакуумному діоді є практично не залежною від напруги.

Дійсно, в електронному потоці між катодом і анодом присутні лише ті електрони, які вилетіли з катода, а вилетіли з катода ті електрони, теплова швидкість яких всередині катода була напрямлена в бік поверхні катода, тому дрейфова швидкість електронів – це їхня теплова швидкість, яка, як відомо, дуже велика, а її приріст завдяки збільшенню напруги незначний і не має практичного впливу на струм (на відміну від випадку провідника у якому дрейфова швидкість цілком визначається напругою).

Отже, дрейфова швидкість електронів у вакуумному діоді зі збільшенням напруги практично залишається сталою.

(128) Пояснимо природу вольт-амперної характеристики (ВАХ) вакуумного діода і зокрема струму насичення.

На мал. 83 схематично показана експериментальна ВАХ вакуумного діода, з якого бачимо, що струм в діоді з'являється навіть за відсутності напруги, тобто за $U = 0$ $I \neq 0$. Це має місце тому, що внаслідок виходу (емісії) електронів з катода під впливом тепла чи світла деяка їхня кількість досягає анода. Для того, щоб струм не протікав через діод, слід між катодом і анодом створити таку різницю потенціалів U_3 , щоб електрони рухалися за електричним полем і гальмувалися ним, тобто на катоді має бути «плюс», а на аноді «мінус». Ця напруга називається затримуючою.

Тепер прикладемо напругу в прямому напрямі і будемо її збільшувати. Очевидно, що сила струму буде зростати, проте, як бачимо, не лінійно як у провіднику, тобто не підкоряючись закону Ома, а згідно із законом Богуславського-Ленгмюра

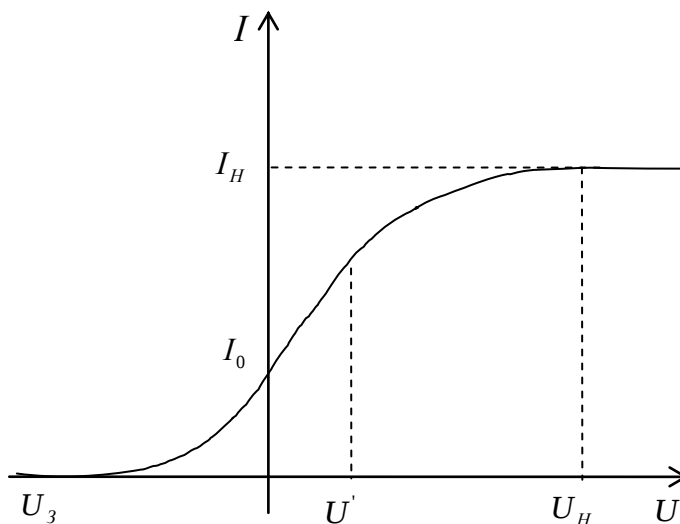
$$I = BU^{\frac{3}{2}},$$

де B – стала величина, яка залежить від форми й розмірів електродів.

Цьому факту є пояснення: якщо в провіднику зі збільшенням напруги зростає лише дрейфова швидкість електронів пропорційно збільшуючи струм згідно з формулою

$j = env$, то у вакуумі те ж саме збільшення напруги приводить до збільшення лише кон-

центрації електронів, причому концентрація електронів збільшується



Мал. 83

зі збільшенням напруги нелінійно. Дійсно, електронна хмара, яка зависає над металом, створюючи поверхневу різницю потенціалів (задача 115), перешкоджає виходу електронів з металу. Прикладена ж між катодом і анодом напруга послаблює цю поверхневу різницю потенціалів, тим самим зменшуючи концентрацію електронів у хмарі, і зі збільшенням напруги все більша кількість електронів, які емітували з катода, досягає анода, тобто зростає концентрація електронів, які беруть участь в провідності.

Закон Богуславського-Ленгмюра виконується лише на невеликій ділянці від U_z до U' , далі зростання сили струму сповільнюється і за певної напруги U_H вона вже не залежить від напруги, досягнувши струму насичення I_H . Це стається тому, що всі електрони, які емітують з катода, досягають анода і наступне збільшення напруги вище U_H не спричиняє до збільшення сили струму. Збільшення ж дрейфової швидкості зі збільшенням напруги, як ми довели (задача 127), незначне і практично не впливає на силу струму.

(129) На основі класичної теорії електропровідності встановимо залежність густини струму насичення у вакуумному діоді від температури катода та роботи виходу електрона з катода (формулу Річардсона).

Ми вже з'ясували, що дрейфова швидкість електронів між катодом і анодом є співвимірною з їхньою тепловою швидкістю в металі (задача 127), тобто

$$v \sim \bar{v} \sim \sqrt{T},$$

тому густина струму насичення

$$j_H = env \sim en\sqrt{T}.$$

Концентрацію електронів між катодом і анодом представимо за законом розподілу частинок за потенціальною енергією (розподілом Больцмана).

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}.$$

Згідно з означенням потенціальної енергії, вона дорівнює роботі, яку слід виконати, щоб вивести електрон за межі металу, тобто роботі виходу, тому $U = A$ і

$$j_H \sim e\sqrt{T} e^{-\frac{A}{kT}},$$

або

$$j_H = C\sqrt{T} e^{-\frac{A}{kT}},$$

де C – стала величина, яка різна для різних металів.

(130) На основі формули Річардсона-Дешмана покажемо, як за допомогою експериментальної залежності густини струму насичення від температури можна обчислити роботу виходу електрона з металу.

Якщо залучити квантову статистику Фермі-Дірака до аналізу струму у вакуумі, то отримаємо формулу, подібну до формули Річардсона – формулу Річардсона-Дешмана

$$j_H = DT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

де $D = 6,02 \cdot 10^5 \frac{A}{K^2 m^2}$ – величина стала для всіх металів (на відміну від сталої C у формулі Річардсона, яка для кожного металу має інше значення).

Прологаритмуємо останню формулу. Дістанемо

$$\ln j_H = \ln \left(\frac{A}{kT^2} \right).$$

Оскільки перший доданок дуже слабо залежить від температури (наприклад за зміни температури від 1000 до 2000 К він змінюється в 1,05 раза), то його можна вважати сталим. Тому

$$\ln j_H = \text{const} - \frac{A}{kT},$$

звідки бачимо, що графік залежності $\ln j_H$ від оберненої температури – це пряма з кутом нахилу α до осі $\frac{1}{T}$, тангенс якого дорівнює $\frac{A}{k}$, тобто

$$A = k \tan \alpha.$$

Для того, щоб побудувати пряму $\ln j_H = f\left(\frac{1}{T}\right)$ досить виміряти густину струму насичення за двох температур.

Тема 12. Електричний струм у рідинах

Фізичні поняття

- **Електроліт** – речовина, яка має йонний механізм провідності.
- **Електролітична дисоціація** – розпад молекул розчиненої речовини на йони.

• **Електроліз** – виділення на електродах атомів, які входять до складу молекул розчиненої речовини.

• **Коефіцієнт дисоціації** – відношення концентрації дисоційованих молекул до їхньої концентрації в розчині.

$$\alpha = \frac{n}{n_0}.$$

Задачі

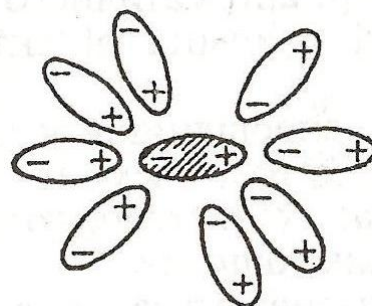
(131) **Наведемо експериментальні факти, які свідчать, що носіями електричного струму в електролітах є йони.**

Той факт, що йони в електроліті існують без прикладання до нього електричного поля довів у 1857 році Клавзіус, який показав, що якби йони утворювалися лише під впливом електричного поля (за гіпотезою Гротгуса, 1805 р.), то в електролітах струм мав би почати текти за певної напруженості поля, причому різній для різних електролітів, чого в експерименті не спостерігається. Крім того, не виконувався би закон Ома, бо зі збільшенням напруги зростала би не тільки дрейфова швидкість, а й концентрація носіїв струму. Проте закон Ома в електролітах виконується.

У 1887 році Арреніус показав, що осмотичний тиск розчиненої речовини значно більший від того, який мав би бути, якщо б молекули в розчині залишалися цілими, що означає що молекули в розчині розпадаються на дрібніші частинки – йони.

(132) **Пояснимо механізм електролітичної дисоціації.**

Відомо, що молекула води – це диполь, тому вона своїм негативним полюсом притягує позитивні йони (наприклад,



Мал. 84

натрію), а позитивним – негативні (наприклад, хлору), тим самим роз’єднуючи атом на йони (мал. 84).

(133) Виведемо формулу розчинення Оствальда та проаналізуємо її в граничних випадках.

Розглянемо бінарний електроліт. Згідно з означенням коефіцієнта дисоціації кількість недисоційованих молекул

$$n_0 - n = n_0 - \alpha n_0 = (1 - \alpha) \bar{n}_0,$$

де n_0 – концентрація молекул в розчині, n – концентрація дисоційованих молекул.

Кількість актів дисоціації в одиниці об’єму за одиницю часу є пропорційною до кількості недисоційованих молекул.

$$\frac{n}{t} = A(1 - \alpha) \bar{n}_0.$$

Кількість актів рекомбінації в одиниці об’єму за одиницю часу є пропорційною як до концентрації позитивних αn_0 , так і до концентрації негативних йонів αn_0 .

$$\frac{n'}{t} = B \alpha^2 n_0^2.$$

У стані динамічної рівноваги

$$\frac{n}{t} = \frac{n'}{t},$$

або

$$A(1 - \alpha) \bar{n}_0 = B \alpha^2 n_0^2,$$

звідки

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \frac{B}{A} n_0.$$

Ми отримали формулу розчинення Оствальда, з якої видно, що якщо $n_0 \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 1$, тобто в слабкому розчині всі молекули дисоційовані, а якщо $n_0 \rightarrow \infty$, то $\alpha \rightarrow 0$, що означає, що в сильному розчині коефіцієнт дисоціації дуже малий.

(134) Покажемо, як на основі закону електролізу Фарадея можна дослідницьким шляхом визначити заряд електрона.

Згідно з законом електролізу Фарадея маса речовини, що виділяється на одному з електродів, пропорційна до заряду q , який пройшов через електроліт.

$$m = \frac{1}{F} \frac{\mu}{z} q,$$

де F – число Фарадея, μ – молярна маса, z – валентність.

З'ясуємо фізичний зміст числа Фарадея.

З закону Фарадея

$$F = \frac{\mu q}{mz} = \frac{q}{\nu z},$$

звідки видно, що за умови $z = 1$ і $\nu = 1$ моль буде чисельна рівність між зарядом та числом Фарадея, тому число Фарадея чисельно дорівнює заряду, який має пройти через електроліт для того, щоб на електроді осів один моль одновалентної речовини, або простіше: число Фарадея дорівнює заряду одного моля одновалентних йонів.

Якщо експериментально виміряти число Фарадея, а це можна зробити за допомогою гальванометра ($F = 9,65 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$), то зможемо визначити заряд одновалентного йона, тобто заряд електрона:

$$e = \frac{q}{N} = \frac{F\nu}{N} = \frac{F}{N_A} = \frac{9,65 \cdot 10^4}{6,025 \cdot 10^{23}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

де послідовно застосовано принцип квантованості заряду, закон Фарадея та означення числа Авогадро.

Саме на основі цього експерименту Стоней у 1874 році вперше показав дискретність електричного заряду і дав оцінку величині елементарного заряду.

(135) Покажемо, що внаслідок нагрівання опір електролітів зменшується.

Відомо, що рух частинки під дією сталої сили та сили опору через деякий час після його початку переходить у рівномірний (задача 76) і ця швидкість рівномірного руху

$$v = \frac{F}{\alpha},$$

де F – стала сила, α – коефіцієнт опору середовища.

Щодо руху йона в електроліті з зарядом q в електричному полі з напруженістю E , ця стала сила дорівнює qE і тоді його швидкість

$$v = \frac{qE}{\alpha}.$$

Коефіцієнт опору виразимо за формулою Стокса

$$\alpha = 6\pi\eta r,$$

де η – коефіцієнт в'язкості електроліту, r – радіус йона.

Дістанемо, що дрейфова швидкість

$$v = \frac{qE}{6\pi\eta r}$$

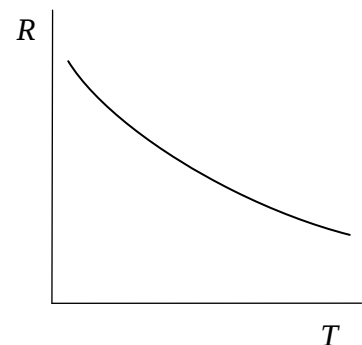
і рухливість

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{q}{6\pi\eta r}.$$

Відомо, що за нагрівання коефіцієнт в'язкості середовища зменшується, тому рухливість йонів зростає і, відповідно, зростає питома провідність, яка у випадку електроліту дорівнює сумі провідностей позитивних і негативних йонів.

$$\sigma = qn(\mu_+ + \mu_-)$$

Крім того, за нагрівання зростає коефіцієнт дисоціації і тому зростає концентрація йонів n , що також спричиняє до збільшення питомої електропровідності. Проте це зростання концентрації йонів за певної ще більш високої температури може спричинити до зменшення рухливості йонів внаслідок частіших їх зіткнень між собою, що приведе до зменшення темпу зміни опору з ростом температури, тобто опір почне зменшуватись нелінійно (мал. 85).



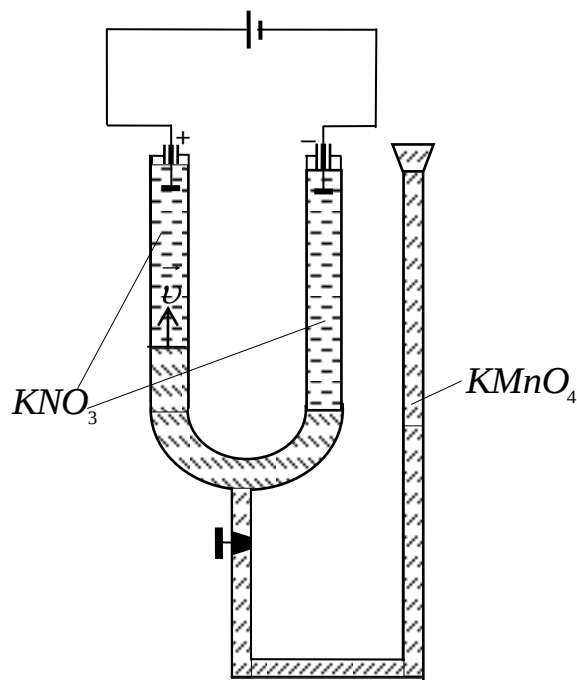
Мал. 85

(136) Доведемо експериментально, що рухливість будь-якого йона в електроліті малої концентрації не залежить від наявності в ньому інших йонів.

Для цього використаємо прилад, що показаний на мал. 86. Закривши кран в U- подібну трубку наливаємо водного розчину азотно-

кислого калію KNO_3 , який є дисоційований на йони K^+ і NO_3^- , а через лійку – водний розчин марганцевокислого калію $KMnO_4$ з йонами K^+ і MnO_4^- , який має фіолетовий колір завдяки йонам MnO_4^- . Відкривши кран і замкнувши коло, побачимо, що межа між фіолетовим і безбарвним розчином повільно рухається до анода. Очевидно, що це відбувається внаслідок руху до анода фіолетових йонів MnO_4^- . Швидкість цього руху і є дрейфовою швидкістю йонів. Якщо ж виконати цей експеримент з додаванням в U-подібну трубку крім KNO_3 ще й іншої солі, то швидкість руху межі за тієї ж напруги не зміниться, що і вказує на незалежність рухливості йонів MnO_4^- від присутності в розчині інших йонів.

Крім того, цей експеримент наочно нас переконує, що дрейфова швидкість йонів в електроліті значно менша за їхню теплову швидкість.



Мал. 86

Тема 13. Контактні явища між металами та електролітами

Фізичні поняття

- **Нормальна концентрація** – концентрація електроліту, який містить один моль йонів на один літр розчину.
- **Водневий електрод** – платиновий електрод, насичений воднем.
- **Електрохімічний потенціал** – потенціал металу відносно електроліту, в який цей метал занурений.

•**Нормальний електрохімічний потенціал** – потенціал певного металу відносно водневого електрода, якщо обидва електроди занурені в розчин солі цього металу нормальної концентрації.

Фізичні системи й прилади

•**Гальванічний елемент** – хімічне джерело ЕРС, яке працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами.

•**Гальванічний елемент Вольта** – гальванічний елемент, який являє собою мідний та цинковий електроди, занурені в слабкий розчин сірчаної кислоти.

•**Гальванічний елемент Даніеля** – гальванічний елемент, який являє собою мідний електрод занурений у водний розчин CuSO_4 та цинковий електрод, занурений у водний розчин ZnSO_4 , причому розчини розділені пористою перегородкою, яка пропускає йони, але не пропускає води.

•**Нормальний елемент Вестона** – гальванічний ртутно-кадмієвий елемент, який має високу стабільність ЕРС і тому використовується у метрології як еталон напруги ($\mathcal{E} = 1,0192 \pm 0,0002 \text{ В}$).

•**Акумулятор** – хімічне джерело ЕРС, яке, як і гальванічний елемент, працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами, але в якому речовини, що витрачаються, попередньо нагромаджуються на електродах за допомогою електролізу.

•**Паливний елемент** – хімічне джерело ЕРС, яке як і гальванічний елемент працює на принципі виникнення електрохімічних потенціалів між металами та електролітами, і в якому витратні речовини безперервно подаються до електродів, а відпрацьовані речовини безперервно виводяться з нього.

(137) Покажемо, якщо занурити метал у воду чи у водний розчин солі цього металу, то між металом і розчином виникає різниця потенціалів.

Справді, після занурення металу у воду чи в розчин солі цього металу, полярні молекули води своїми негативними кінцями будуть витягувати з металу позитивні йони, що порушить електронейтральність як в металі, так і в розчині – метал зарядиться негативно, а розчин – позитивно. Цей процес виходу йонів з металу припиниться, коли сила електричного поля, яке виникло, починає протидіяти виходу йонів з металу, зрівняється з силою притягання до молекул води. Настане стаціонарний стан з певною напруженістю електричного поля і відповідно певною різницею потенціалів, яка і є електрохімічним потенціалом згідно з його означенням. Для прикладу, так виникає електрохімічний потенціал якщо занурити цинк у водний розчин $ZnSO_4$. Можливий і другий випадок, коли з металу в розчин його солі виходять не позитивні йони, а вільні електрони. При цьому, очевидно, метал зарядиться позитивно, а розчин – негативно. Цей випадок має місце якщо занурити мідь у водний розчин $CuSO_4$.

Якщо зафіксувати концентрацію розчину, а саме, взяти розчин нормальної концентрації, то, очевидно, електрохімічний потенціал буде залежати лише від роду металу.

(138) Покажемо, що процес вимірювання електрохімічного потенціалу неминуче впливає на вимірювану величину.

Нехай ми маємо виміряти електрохімічний потенціал U_A між електродом A та електролітом.

Щоб виміряти цей електрохімічний потенціал, слід до вольтметра приєднати ще один електрод і занурити його в розчин (мал. 87). Але між цим електродом і розчином також виникне різниця потенціалів.

лів, яка впливатиме на результат, а саме ми вже будемо вимірювати не різницю потенціалів U_A між електродом A та розчином, а різницю потенціалів U_{AB} між двома електродами A і B .

З малюнка видно, що

$$U_{AB} = U_A + U_B$$

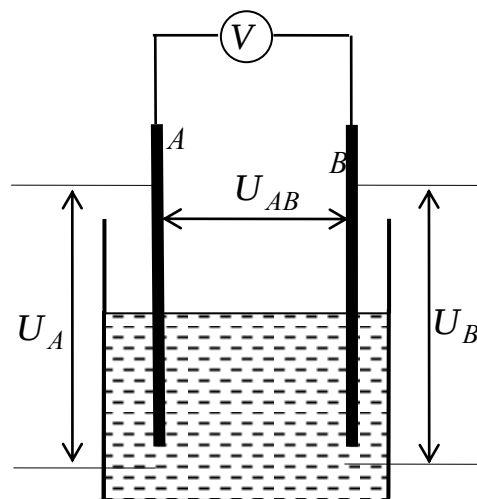
звідки електрохімічний потенціал, який ми намагаємось виміряти,

$$U_A = U_B + U_{AB}, \quad (1)$$

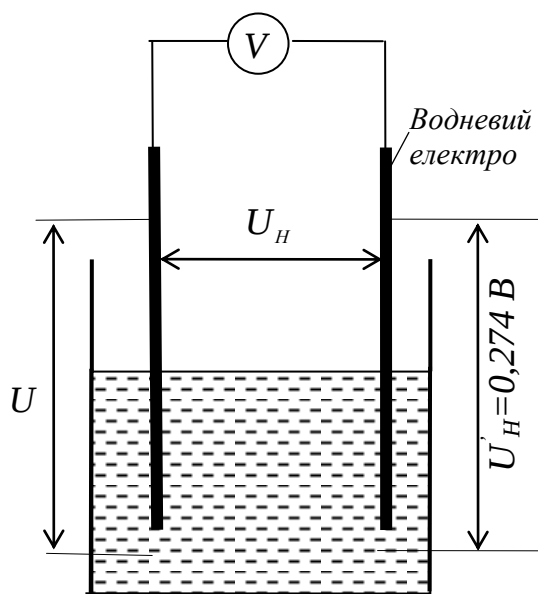
тому щоб визначити його, до показів вольтметра U_{AB} слід додати ще величину U_B , яка очевидно залежить від роду металу B . Отже цей електрод повинен бути еталонним, тобто таким, для якого відома різниця потенціалів між ним і розчином, а таким є водневий електрод. В ролі розчину, очевидно, слід взяти також еталонний розчин, а ним є розчин нормальної концентрації.

(139) Покажемо, як за допомогою еталонного водневого електрода можна вимірювати електрохімічні потенціали.

Будемо базуватися на експериментальному факті, що різниця потенціалів між водневим електродом і розчином нормальної концентрації йонів водню $U'_H = +0,274 \text{ В}$ (мал. 88). Отже, щоб виміряти електрохімічний потенціал між певним електродом та



Мал. 87



Мал. 88

розчином його солі нормальної концентрації U до показів вольтметра U_H слід згідно з формулою (1) додати величину $U'_H = +0,274$ В, тобто $U = U_H + 0,274$ В.

Отже, маючи за еталон водневий електрод, ми можемо вимірювати електрохімічні потенціали будь-яких металів відносно розчинів їхніх солей нормальної концентрації. Дані цих вимірювань для деяких електродів показані в таблиці. Зверніть увагу, що електрохімічні потенціали є як позитивні, так і негативні, що підтверджує той факт (задача 127), що в електроліт з металу можуть виходити не тільки позитивні йони, а й вільні електрони.

Таблиця

Електрохімічні потенціали деяких металів

Електрод	U_H , В	U , В	Електрод	U_H , В	U , В
водневий	0	+0,274	Pb	-0,12	+0,15
Na	-2,72	-2,45	Hg	+0,86	+1,13
K	-2,92	-2,65	Cu	+0,34	+0,61
Mg	-1,55	-1,28	Ag	+0,80	+1,50
Zn	-0,77	-0,50	O ₂	+1,23	1,63
Cd	-0,40	-0,13	Cl ₂	+1,36	+1,50

(140) Покажемо, що в замкненому колі з послідовно з'єднаними металами та електролітами, різниця потенціалів між будь-якими з них не дорівнює нулеві (на відміну від замкненого кола складеного з металів), тобто в такому колі виникає ЕРС.

Розглянемо практичний випадок, коли цинковий та мідний електроди занурені в слабкий розчин сірчаної кислоти (H_2SO_4). Якщо з'єднати між собою електроди, то різниця потенціалів між будь-якими точками кола не дорівнюватиме нулеві як у випадку кола, складеного з металів (задача 119), тобто в колі буде ЕРС

$$\mathcal{E} = U_{Cu} + U_{Zn}$$

яка згідно з таблицею електрохімічних потенціалів у випадку нормальної концентрації розчину сірчаної кислоти

$$\mathcal{E} = 0,61 + 0,50 = 1,1 \text{ (В)}.$$

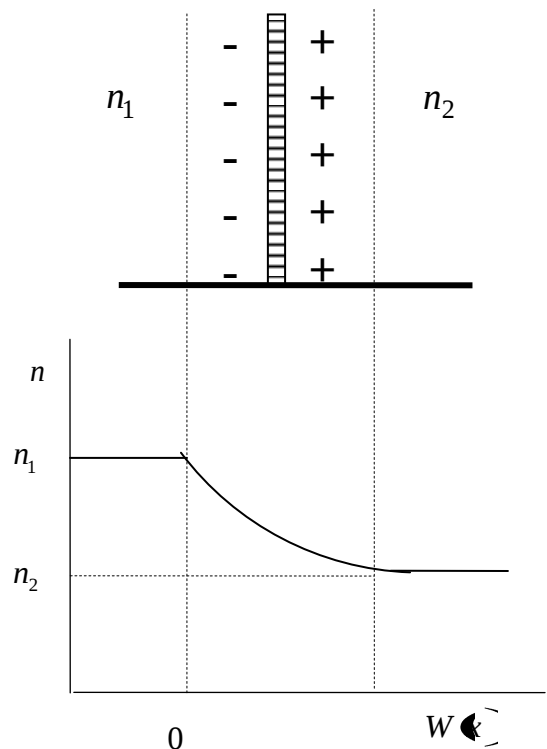
Такий гальванічний елемент називається елементом Вольта.

(141) Покажемо, що між двома електролітами різних концентрацій, розділених пористою перегородкою, виникає різниця потенціалів, і встановимо вираз для цієї різниці потенціалів (формулу Нернста).

Розглянемо електроліт з зарядом йона q , розділений пористою перегородкою, яка пропускає лише один тип йонів, наприклад, позитивні йони і не пропускає розчинника (води). Нехай з одного боку цієї перегородки концентрація електроліту n_1 , а з іншого n_2 ($n_1 > n_2$) (мал. 89).

Під тиском, який є більшим у тому електроліті, де більша концентрація, позитивні йони (йони металу) будуть переходити через перегородку в електроліт з меншою концентрацією. При цьому очевидно, що електронейтральність в обидвох електролітах порушиться, спричинивши виникнення електричного поля і різниці потенціалів.

Установимо залежність цієї різниці потенціалів від концентрації електролітів. Для цього до області з порушеною електронейтральністю застосуємо розподіл Больцмана (за потенціальною енергією)



Мал. 89

$$n = n_1 e^{-\frac{W}{kT}},$$

де W – потенціальна енергія йонів залежно від відстані від початку області порушеної електронейтральності (за нуль потенціальної енергії взято потенціальну енергію на початку цієї області).

Проте такий процес переходу не триватиме до повного вирівнювання концентрацій – він закінчиться, коли сила електричного поля, яке виникло, вирівнюється з силою тиску. Тому порушення електронейтральності та концентрацій станеться в невеликій області біля перегородок, а на більших відстанях від неї концентрації залишаться такі, які були до того. На цій відстані в другому електроліті концентрація буде n_2 , а потенціальна енергія $W = q\varphi$ згідно з означенням потенціалу. Підставивши ці величини в розподіл Больцмана, дістанемо

$$n_2 = n_1 e^{-\frac{q\varphi}{kT}},$$

звідки

$$\varphi = \frac{kT}{q} \ln \frac{n_1}{n_2}.$$

Ми отримали формулу Нернста. Бачимо, що ця формула для однозарядного йона ($q = e$) ідентична до формули для внутрішньої різниці потенціалів на контакті двох металів (задача 117). Очевидно, що і вивід формули Нернста можна зробити на основі міркувань, викладених під час виводу згаданої формули для внутрішньої контактної різниці потенціалів для двох металів, а саме прирівнявши силу тиску йонного газу до сили, яка діє на йони з боку електричного поля, яке виникло внаслідок переходу частини йонів в електроліт з меншою концентрацією.

Розглянутий випадок двох електролітів різної концентрації розділених пористою перегородкою є практичним, оскільки він моделює виникнення трансмембранної різниці потенціалів в клітині живого організму.

Тема 14. Електричний струм в газах. Плазма

Фізичні явища

- **Несамостійний газовий розряд** – явище протікання струму в газі лише за наявності йонізатора (проміння чи джерела тепла).
- **Самостійний газовий розряд** – розряд, який продовжується після виключення йонізатора.
- **Вторинна електронна емісія** – явище виходу електронів з катода внаслідок його бомбардування позитивними йонами.

Фізичні поняття

- **Струм насичення** – це максимальна незалежна від напруги сила струму.
- **Дебаєвська довжина** – це лінійний розмір (довжина ребра куба чи діаметр кулі) такої області в йонізованому газі, в якій потенціальна енергія електрона за повного розділення позитивних та негативних зарядів приблизно дорівнює енергії теплового руху (позначення δ).
- **Плазма** – йонізований газ для якого дебаєвська довжина мала порівняно з розмірами області яку займає газ. Це означення плазми дав Ленгмюр.
- **Ізотермічна плазма** – плазма в якій температури електронного та йонного газів однакові ($T_e = T_{\text{и}}$)
- **Неізотермічна плазма** – плазма в якій температури електронного та йонного газів різні ($T_e \neq T_{\text{и}}$).

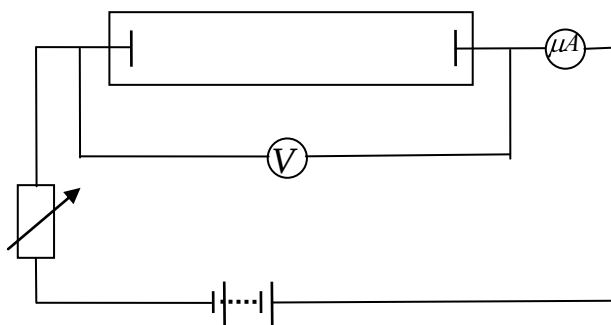
Задачі

(142) Установимо залежність густини струму насичення від швидкості генерації йонів та довжини трубки, і покажемо, що за несамотійного розряду за малих напруг виконується закон Ома, а за великих напруг струм досягає насичення.

Очевидно, що газ як речовина, у якій немає вільних електричних зарядів, не проводить електричного струму. Проте за нагрівання або опромінення ультрафіолетовим чи Х-промінням внаслідок йонізації він стає провідним і в колі з газовою трубкою потече струм (мал. 90).

Швидкість генерації йонів йонізатором – це кількість пар йонів, що виникає в одиниці об'єму за одиницю часу, або концентрація пар йонів, що виникає за одиницю часу. Згідно з цим означенням, позначивши цю величину β , маємо

$$\beta = \frac{N}{Vt} = \frac{n}{t}.$$



Мал. 90

Але внаслідок рекомбінації в одиниці об'єму за одиницю часу зникає певна кількість пар йонів, яку позначимо β_1 і назовемо швидкістю рекомбінації, і яка, очевидно, пропорційна до концентрації позитивних n_+ і до концентрації негативних n_- – йонів.

$$\beta_1 = \alpha n_+ n_- = \alpha n^2$$

де α – коефіцієнт пропорційності.

Крім того, за наявності струму в одиниці об'єму за одиницю часу зникає певна кількість пар йонів β_2 (це йони, які осіли на електродах). Знайдемо вираз для цієї швидкості зникнення йонів.

$$\beta_2 = \frac{N_2}{Vt} = \frac{N_2 I}{Slq} = \frac{I}{Sle} = \frac{j}{el},$$

де S і l – відповідно площа поперечного перерізу та довжина трубки. При виведенні цієї формули застосовано означення швидкості зникнення йонів, означення сили струму, принцип квантованості заряду та означення густини струму.

За умови рівноваги швидкість генерації йонів має дорівнювати сумі швидкостей їх рекомбінації та зникнення, тобто

$$\beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Підставивши сюди знайдені вирази для β_1 і β_2 , дістанемо

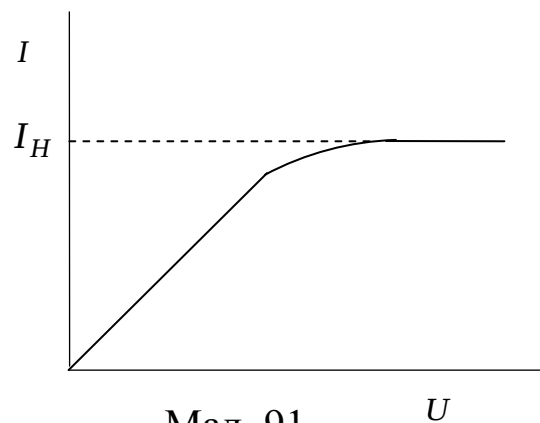
$$\beta = \alpha n^2 + \frac{j}{el}. \quad (1)$$

За малих густин струму $\frac{j}{el} \ll \alpha n^2$ і тому

$$n = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},$$

звідки видно, що концентрація є сталою величиною і відповідно питомою провідністю

$$\sigma = e \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} (\mu_+ + \mu_-),$$



Мал. 91

де μ_+ і μ_- – рухливості відповідно позитивних і негативних йонів, також є сталою величиною, що свідчить про лінійну залежність густини струму від напруженості електричного поля

$$j = \sigma E,$$

тобто про виконання закону Ома.

За великих густин струму $\frac{j}{el} \gg \alpha n^2$, тому нехтуючи першим доданком у формулі (1), дістанемо

$$j = e\beta l,$$

звідки бачимо, що густина струму буде сталою, тобто струм досягне насичення.

Зауважимо, що експериментальна ВАХ несамоостійного розряду (мал. 91) підтверджує ці висновки: спочатку вона лінійна згідно з законом Ома, а потім досягає насичення.

(143) Установимо часову залежність концентрації йонів у газорозрядній трубці після вимкнення йонізатора.

Зменшення концентрації йонів за одиницю часу пропорційне до концентрації і позитивних і негативних йонів, тобто

$$\frac{dn}{dt} \sim n_+ n_- = \alpha n^2,$$

або

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n^2,$$

де α – коефіцієнт рекомбінації, а знак «–» вказує на зменшення концентрації. Представимо останню рівність у вигляді

$$\frac{dn}{n^2} = -\alpha dt$$

і проінтегруємо. Отримаємо

$$-\frac{1}{n} = -\alpha t + C.$$

У початковий момент часу $t = 0$, $n = n_0$ тому $C = -\frac{1}{n_0}$ і останнє рівняння набуває вигляду

$$n = \frac{n_0}{1 + \alpha n_0 t}.$$

(144) Встановимо залежність сили струму та потоку електронів від відстані в електронній лавині, яка має місце в самостійному розряді.

Розглянемо самостійний розряд, тобто розряд, який продовжується після виключення йонізатора. Це відбувається внаслідок йонізації атомів електронами, які вийшли з катода. Своєю чергою ці електрони вийшли з катода внаслідок його бомбардування позитивними йонами, які утворилися через йонізацію атомів електронами. У результаті розряд підтримує сам себе вже без зовнішнього йонізатора: на місце електронів, які пішли до анода, приходять нові – ті, які вийшли з катода.

Нехай катод емітує за одиницю часу $n_0 = \frac{N_0}{t}$ електронів, які рухаючись в електричному полі, йонізують молекули газу причому кожен електрон створює на одиниці довжини свого шляху α нових електронів і йонів (α пар електрон-йон), тобто

$$\alpha = \frac{1}{N} \frac{dN}{dx},$$

де dN – загальна кількість електронів на відстані dx (приріст електронів на відстані dx), N – загальна кількість електронів на відстані x від катода.

Приріст електронів dN на відстані dx приведе до приросту сили струму dI . Тоді $\frac{dI}{dN}$ – сила струму, створена одним електроном і

$$\frac{dI}{dN} N = I \alpha x,$$

сила струму на відстані x . Підставивши сюди вираз для α , дістанемо

$$\frac{dI}{I} = \alpha dx,$$

звідки після інтегрування

$$\ln I = \alpha x + C$$

Біля катода, тобто за умови $x = 0$ сила струму $I = I_0$, тому після підстановки цих початкових умов в останнє рівняння дістаємо, що $C = \ln I_0$ і отримуємо залежність сили струму від відстані

$$I = I_0 e^{\alpha x}.$$

Виразимо I_0 і I через відповідні потоки електронів n_0 і n .

$$I_0 = \frac{q_0}{t} = \frac{eN_0}{t} = en_0.$$

Аналогічно

$$I = en.$$

Підставивши дві останні рівності у залежність сили струму від відстані, дістанемо залежність потоку електронів від відстані

$$n = n_0 e^{\alpha \cdot x}.$$

Зауважимо, що буквою n тут позначено потік електронів $n = \frac{N}{t}$ (кількість електронів які проходять через поперечний переріз за одиницю часу), що не слід плутати з концентрацією яку позначають тією ж буквою $n = \frac{N}{V}$ (кількість електронів в одиниці об'єму).

(145) Установимо умову самостійного розряду, тобто умову, за якої струм буде підтримуватися у відсутності зовнішнього йонізатора.

Очевидно, що незалежно від того, яким способом вибиваються електрони з катода, їхній потік описується рівнянням (задача 144)

$$n(x) = n_0 e^{\alpha \cdot x},$$

звідки потік біля анода

$$n(l) = n_0 e^{\alpha \cdot l},$$

де l – довжина трубки, n_0 – кількість електронів, вибитих йонами з катода за одиницю часу.

Ці йони з'являються внаслідок потоку електронів $n(x)$. Їх кількість – це кількість нових пар електрон-йон за одиницю часу на відстані l , яка, очевидно, дорівнює

$$n - n_0 = n_0 e^{\alpha \cdot l} - n_0 = n_0 (e^{\alpha \cdot l} - 1),$$

Але кількість вибитих електронів не обов'язково дорівнює кількості йонів, які обрушилися на катод, тому кількість вибитих електронів буде

$$n_0 (e^{\alpha \cdot l} - 1),$$

де γ – коефіцієнт пропорційності, який показує, скільки електронів вибиває один йон (зверніть увагу, що коефіцієнт α навпаки показує, скільки йонів на одиниці довжини спричиняє один електрон). Для того, щоб підтримувався струм, ця кількість вибитих електронів має бути не меншою n_0 , тобто

$$n_0 (\gamma^{\alpha \cdot l} - 1) \geq n_0,$$

звідки отримуємо умову самостійного розряду

$$\gamma^{\alpha \cdot l} - 1 \geq 1.$$

Очевидно, що коефіцієнти γ і α залежать від прикладеної напруги, тому ця умова буде виконана за певної напруги – напруги запалювання газового розряду.

Розглянута тут теорія належить Дж-Тавзенду. Очевидно, що в ній не все враховано, а саме:

- а) електрони можуть вибиватися з катода не тільки йонами а й випромінюванням самого розряду, тобто за допомогою фото-ефекту;
- б) електрони можуть не тільки вибиватися з катода, а й з'являтися в об'ємі трубки внаслідок зіткнень атомів з позитивними йонами;
- в) електричне поле між катодом і анодом не є однорідним внаслідок зарядів які виникають в усьому об'ємі трубки.

(146) Покажемо, що за низького тиску плазма є ближчою до неізо-термічної, а за високого – до ізотермічної.

За низького тиску число зіткнень за одиницю часу електронів з йонами невелике, а оскільки вони обмінюються енергією з йонами порціями (квантами) то за певної ймовірності обміну в одному зіт-

кненні, інтенсивність цього обміну незначна. Таким чином електронна температура є вищою за йонну.

За умови високого тиску внаслідок більшої кількості зіткнень електронів з йонами інтенсивність обміну енергією між електронами та йонами зростає, що спричиняє до їх вирівнювання і, відповідно, до вирівнювання йонної та електронної температур.

З класичної точки зору це виглядає так, що в одному акті зіткнення електрона з йоном швидкість електрона зменшується згідно з законами збереження імпульсу та кінетичної енергії, звідки, внаслідок великої різниці мас електрона і йона, на величину приблизно $2v_{iy}$, де v_{iy} – швидкість йона, тобто на незначну величину.

Тому за низького тиску внаслідок малої частоти зіткнень це зменшення незначне і температура електронного газу залишається вищою за температуру йонного, а за високого тиску, внаслідок значної частоти зіткнень швидкість електрона зменшуючись у кожному зіткненні може зменшитись до такої величини, що його середня кінетична енергія спаде до кінетичної енергії йонів, що означатиме рівність електронної та йонної температур.

(147) Встановимо зв'язок дебаївської довжини з температурою та концентрацією заряджених частинок одного знаку.

Згідно з означенням дебаївської довжини прирівняємо потенціальну енергію електрона до енергії теплового руху

$$eU = kT,$$

де, очевидно, U – це різниця потенціалів між поверхнями області повного розділення зарядів, тобто різниця потенціалів на дебаєвській довжині. Тоді за формулою зв'язку напруженості й потенціалу

$$eE\delta = kT_e, \tag{1}$$

де T_e – електронна температура.

Очевидно, що напруженість електричного поля E залежить від концентрації заряджених частинок, тому виразимо напруженість електричного поля через концентрацію. Для цього застосуємо теорему Остроградського–Гауса у диференціальній формі

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Вважаючи заряджені частинки однозарядними, об'ємну густину заряду представимо як

$$\rho = \frac{Ne}{V} = ne,$$

а дивергенцію вектора $\vec{D}$ наближеним виразом

$$\operatorname{div} \vec{D} = \frac{D}{\delta}.$$

Тоді теорема Остроградського–Гауса буде мати вигляд

$$\frac{D}{\delta} = ne$$

або

$$\frac{\varepsilon \varepsilon_0 E}{\delta} = ne,$$

звідки

$$E = \frac{ne\delta}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Підставивши цей вираз для E в рівність (1) остаточно отримаємо

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{n e^2}}.$$

Слід зауважити, що взагалі температури електронного та йонного газів у плазмі не однакові. Як правило електронна температура T_e є вищою за йонну T_i . Згадаймо подібну ситуацію для електронного та йонного «газу» в металах.

З останньої формули та Ленгмюрового означення плазми бачимо, що стан плазми досягається за високих температур та малих концентрацій заряджених частинок.

(148) На основі припущення про флуктуації заряду в плазмі та виразу для дебаївської довжини встановимо вираз для плазмової (ленгмюрової) частоти.

Плазмову частоту ω_0 знайдемо як величину обернену до часу життя областей повного розділення зарядів τ . Оскільки розмір цих областей є дебаївською довжиною, то

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{v_e}{\delta},$$

де v_e – середня квадратична швидкість електронів. Підставивши ви-

раз для цієї швидкості $v_e = \sqrt{\frac{3kT_e}{m_e}}$, а також вираз для дебаївської довжини (задача 147) дістанемо

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3ne^2}{\varepsilon \varepsilon_0 m_e}}.$$

(149) Вважаючи рух електрона в плазмі під дією електричного поля рівномірним, покажемо, що для струму в плазмі викону-

ється закон Ома і встановимо вираз для питомої електропровідності плазми.

Будемо також вважати, що електропровідність плазми визначається електропровідністю електронів оскільки їх рухливість значно більша за рухливість йонів.

Дійсно, рівномірність напрямленого руху електронів вздовж електричного поля в плазмі можна довести подібно як це зроблено для електронів в металах (задача 76). А за рівномірного руху як впливає з основного рівняння динаміки сума сил, що діють на електрон дорівнює нулеві. Оскільки, на електрон діють лише дві сили: сила електричного поля eE та сила опору F_{on} які направлені протилежно, то

$$eE = F_{on}. \quad (1)$$

Силу опору F_{on} знайдемо з тих міркувань, що в кожному зіткненні електрон цілком втрачає свій імпульс напрямленого руху, подібно до того, як це є для електронного газу в металі, згідно з постулатом класичної теорії електропровідності металів (тема 6), тобто імпульс електрона зменшується на величину $m_e u$, де u – швидкість напрямленого руху електрона під дією електричного поля (зауважте, що в задачі 146 коли йшлося про зменшення швидкості електрона на $2v_{\bar{u}}$ то йшлося про швидкість хаотичного руху електрона).

Тепер, застосувавши основне рівняння динаміки у формі, де зміна імпульсу матеріальної точки дорівнює імпульсу сили, можемо написати

$$F_{on}\tau = m_e u$$

де τ – середній час між двома зіткненнями електрона з йоном, звідки

$$F_{on} = \frac{m_e u}{\tau}.$$

Підставивши цей вираз в (1) дістанемо

$$u = \frac{eE\tau}{m_e}$$

і для густини струму

$$j = enu = \frac{e^2 n \tau}{m_e} E.$$

Останнє рівняння, як бачимо, є законом Ома для плазми, де величина

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{m_e},$$

це її питома електропровідність.

Розділ III. Магнетне поле

Тема1. Закон Ампера. Індукція магнетного поля.

Провідник зі струмом у магнетному полі

Фізичні поняття

• **Магнетне поле** – це субстанція, яка створюється електричними струмами й виявляє себе за дією на електричний струм.

• **Елемент струму** – це добуток сили струму I на елемент довжини провідника $\vec{dl}$.

• **Сила Ампера** – це сила, яка діє з боку магнетного поля на провідник зі струмом.

• **Силовa лінія магнетного поля** – це лінія, вздовж якої вистрояться дуже малі магнетні стрілки, якщо ними щільно заповнити простір, де є магнетне поле (інакше кажучи, це лінія, у кожній точці якої вектор магнетної індукції є дотичним до цієї лінії).

Фізичні величини

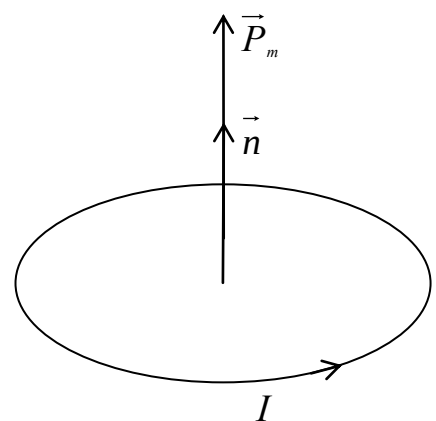
• **Індукція магнетного поля** – це вектор $\vec{B}$, модуль якого

$$B = \frac{dF}{I \cdot dl \sin \alpha},$$

де dF – модуль сили, з якою магнетне поле діє на елемент струму $I\vec{dl}$, α – кут між векторами $\vec{dl}$ і $\vec{B}$, а напрям вектора $\vec{B}$ такий, що векторний добуток $\vec{dl} \times \vec{B}$ співнапрямлений з вектором $\vec{dF}$.

• **Магнетний момент замкненого струму** – це вектор

$$\vec{P}_m = IS\vec{n},$$



Мал. 92

де S – площа обмежена струмом, $\vec{n}$, – одиничний вектор нормалі до S , напрям якого визначається правилом правого гвинта (мал. 92).

Фізичні системи й прилади

• **Магнетна стрілка** – це стрілка з магнетним моментом, спрямованим уздовж неї.

Постулати

➤ **Закон Ампера:** сила, з якою магнетне поле з індукцією $\vec{B}$, діє на елемент струму $I d\vec{l}$:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

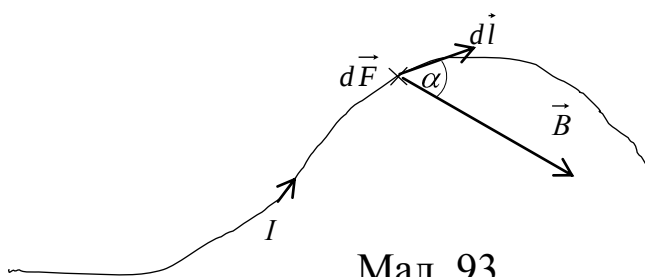
Закон Ампера водночас є означенням індукції магнетного поля (так як другий закон Ньютона є означенням сили).

Очевидно, що як і будь-який постулат, закон Ампера встановлений експериментально.

Задачі

(150) **Знайдемо метод обчислення сили, яка діє з боку магнетного поля на провідник зі струмом довільної форми.**

Закон Ампера дає нам можливість обчислити силу, яка діє з боку поля лише на один елемент струму, тобто силу $d\vec{F}$, яка діє на нескінченно малий елемент довжини провідника зі струмом $d\vec{l}$ (мал. 93). Очевидно, що для того, щоб обчислити силу, з якою магнетне поле діє на весь провідник чи його частину скінченної довжини, слід додати всі елементарні сили $d\vec{F}$, тобто проінтегрувати за всією довжиною провідника



Мал. 93

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}.$$

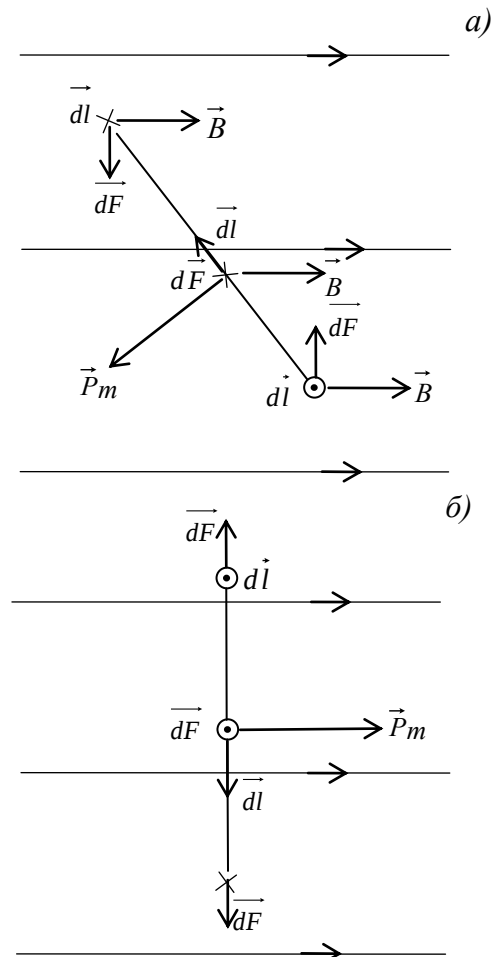
(151) Установимо, як зорієнтується вільний контур зі струмом в однорідному магнетному полі.

На мал. 94 (а) показаний прямокутний чи круглий контур зі струмом (промінь зору паралельний до площини контура), який довільно зорієнтований щодо силових ліній магнетного поля. З цього малюнка видно, що згідно з законом Ампера, напрям сили, з якою поле діє на кожну сторону контура, різний, причому сили, які діють на сторону, яку ми бачимо і протилежну до неї, рівні за величиною і протилежні за напрямом – вони стискають контур.

Сили, які діють на дві сторони, паралельні до променя зору створюють обертальний момент. Тому контур буде обертатися проти годинникової стрілки, доки його площа не стане нормальною до ліній індукції $\vec{i}$, відповідно, вектор магнетного моменту $\vec{P}_m$

паралельним до них (мал. 94 (б)). У цьому стані на контур діятиме лише сила, яка його розтягає. Причому цей стан рівноваги є стійким, тобто за найменшого відхилення від нього виникають сили, які повертають контур у стан рівноваги.

Отже, підсумовуючи, можна стверджувати, що як би не був початково розміщений вільний контур зі струмом в однорідному магнетному полі, він повернеться так, що його магнетний момент буде



Мал. 94

співнапрямленим з вектором магнетної індукції. Крім того, з мал. 94 (а) і закону Ампера випливає, що момент сил, який повертає контур, є найбільшим тоді, коли площа контура паралельна до вектора індукції (магнетний момент контура нормальний до вектора індукції).

(152) Знайдемо вираз для моменту сили, який обертає коловий контур зі струмом у випадку, коли площа контура паралельна до ліній магнетної індукції.

Виберемо на контурі довільний елемент струму $I\vec{dl}$ (мал. 95). Згідно з законом Ампера, модуль сили, яка діє з боку поля на цей елемент струму

$$dF = IBdl \sin \alpha.$$

Ця елементарна сила створює момент

$$dM = dFr = IBr \sin \alpha dl.$$

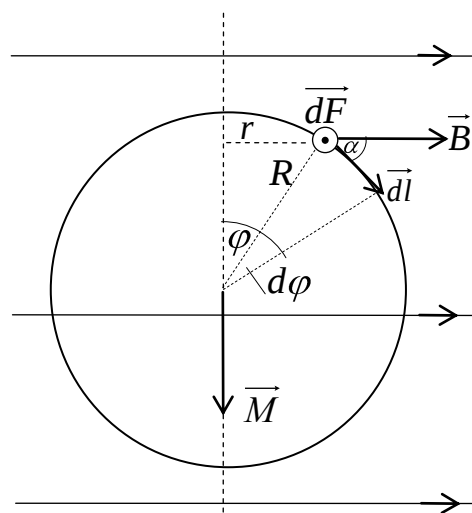
Додавши всі елементарні моменти, дістанемо момент, який повертає контур

$$M = \int_L IBr \sin \alpha dl,$$

де L — довжина контура.

Від інтегрування за довжиною перейдемо до інтегрування за кутом φ . З малюнка видно, що $\sin \alpha = \sin \varphi$, $r = R \sin \varphi$ і $dl = R d\varphi$. Підставивши ці вирази в останній інтеграл, дістанемо

$$M = \int_0^{2\pi} IBR^2 \sin^2 \varphi d\varphi = IBR^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi =$$



Мал. 95

$$= \frac{1}{2} I B R^2 \int_0^{2\pi} -\cos 2\varphi \, d\varphi = \pi I B R^2 = S I B.$$

Оскільки вектор моменту сили $\vec{M}$ спрямований вздовж осі обертання (за правилом правого гвинта), тобто туди ж, куди і векторний добуток $\vec{S} \times \vec{B}$, то

$$\vec{M} = I \vec{S} \times \vec{B},$$

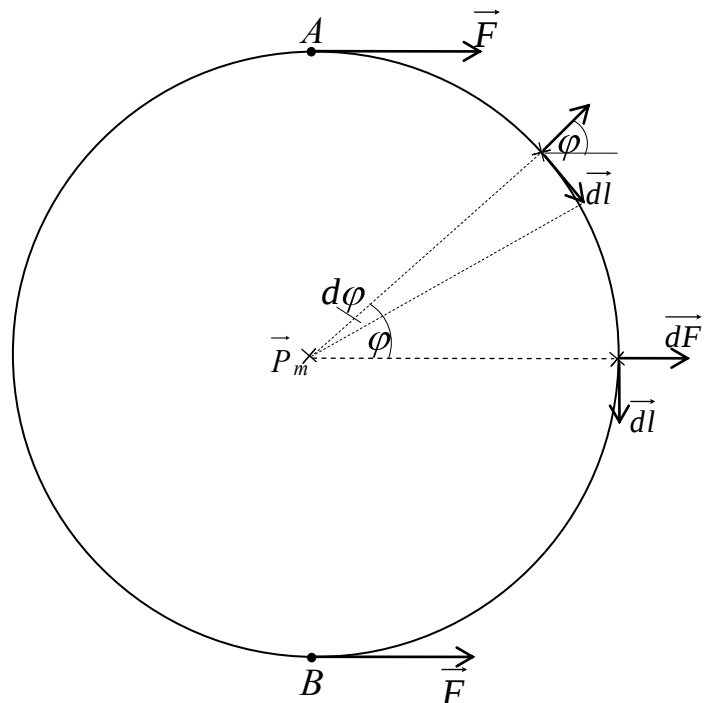
або врахувавши означення магнетного моменту

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}.$$

(153) Знайдемо силу, яка розтягає (стискає) коловий контур зі струмом, магнетний момент якого паралельний (антипаралельний) до вектора індукції однорідного магнетного поля.

Ми вже з'ясували (задача 151), що вільний контур зі струмом в однорідному магнетному полі повертатиметься доти, доки його магнетний момент не буде паралельним до вектора магнетної індукції, після чого обертальний момент зникне і залишиться лише сила, яка розтягає контур.

На мал. 96 показана ця ситуація так, що вектор індукції нормальний до площини малюнка. Бачимо, що в



Мал. 96

кожній точці контура сила Ампера спрямована вздовж радіуса назовні, тобто вона розтягає його. Величина цієї сили розрахована на одиницю довжини, згідно з законом Ампера

$$\frac{dF}{dl} = IB \sin \alpha,$$

Оскільки кут α між вектором $\vec{dl}$ і $\vec{B}$ прямий, то

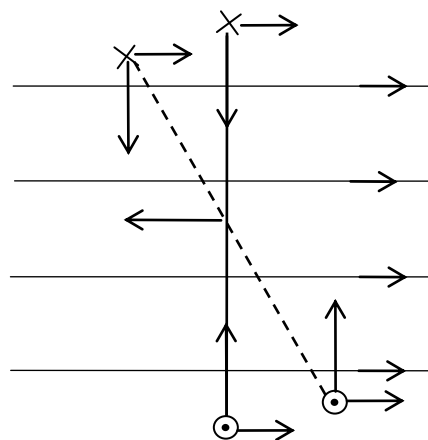
$$\frac{dF}{dl} = IB.$$

Сила натягу яка розтягує кільце в будь-якій його точці (в точці А) – це проекція всіх сил Ампера прикладених до півкільця, на вісь нормальну до напрямку АВ.

$$\begin{aligned} F &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dF \cos \varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} IB dl \sin \alpha \cos \varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} IB R \cos \varphi d\varphi = \\ &= 2IBR \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 2IBR. \end{aligned}$$

(154) Покажемо, що можливий стан рівноваги контура зі струмом за антипаралельного напрямку його магнетного моменту щодо напрямку зовнішнього однорідного магнетного поля, проте, цей стан рівноваги не є стійким.

Дійсно, якщо розмістити контур так, що його магнетний момент буде антипаралельним до вектора індукції (мал. 97), то сила

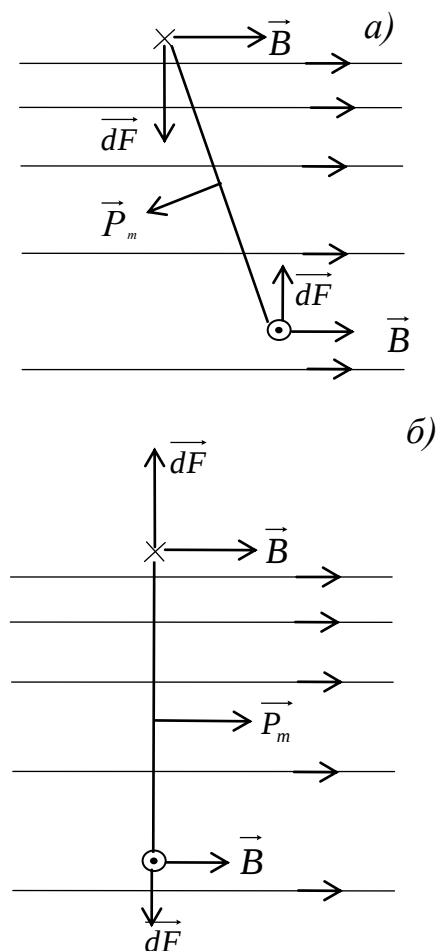


Ампера буде лише стискати контур і він буде нерухомим. Проте за найменшого відхилення контура від цього стану виникне момент сил Ампера, який буде лише збільшувати це відхилення, повертаючи контур, як вже нам відомо (задача 151), у стійкий стан з паралельним напрямом його магнетного моменту щодо зовнішнього магнетного поля.

(155) Покажемо, що в неоднорідному магнетному полі контур зі струмом не набуде стану спокою, а буде переміщуватися в область сильнішого поля.

Розглянемо випадок магнетного поля, для якого вектор індукції всюди однаковий за напрямом, але різний за величиною. Графічно таке поле зображується паралельними прямими, густота яких різна в різних областях простору (мал. 98 (а)). Бачимо, що контур, як і у випадку однорідного поля, повертатиметься, доки його вектор магнетного моменту не буде співнаправлений з вектором індукції (мал. 98 (б)). Проте наступна його поведінка відрізнятиметься від поведінки в однорідному полі, а саме, внаслідок різної індукції поля у різних місцях контура сила Ампера буде різною (більшою в області сильнішого поля), їхня рівнодійна не дорівнюватиме нулеві і, як наслідок, контур буде переміщуватися в область сильнішого поля.

Ця поведінка контура зі струмом в неоднорідному магнетному полі нагадує нам поведінку диполя в неоднорідному електричному полі (розділ 1, задача 16).



Мал. 98

(156) Знайдемо вираз для величини орбітального магнетного моменту електрона в атомі.

Справді, орбітальний рух електрона в атомі можна трактувати як струм, тому цей рух створює магнетний момент, величина якого

$$P_m = IS.$$

Згідно з означенням сили струму, в цьому випадку

$$I = \frac{e}{T},$$

де T – період обертання електрона навколо ядра (за час T через поперечний переріз уявного провідника проходить заряд, який дорівнює заряду електрона).

З останніх двох формул та формули зв'язку між періодом та циклічною частотою дістанемо

$$P_m = \frac{e}{T} S = \frac{e\omega}{2\pi} S = \frac{e\omega}{2\pi} \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} e\omega r^2,$$

або на основі формули зв'язку між кутовою та лінійною швидкостями

$$P_m = \frac{1}{2} e v r,$$

де r – радіус орбіти електрона.

(157) Установимо вираз для магнетного моменту рівномірно зарядженого зарядом q стержня довжиною L , який обертається з кутовою швидкістю ω .

Кожен елементарний струм dI створює магнетний момент (мал. 99)

$$dP_m = SdI = \pi r^2 dI.$$

Оскільки цей струм dI створюється обертальним рухом заряду dq , який є на елементі радіуса стержня dr , то з означенням сили струму

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\omega \lambda dr}{2\pi},$$

де T – період обертання стержня, $\lambda = \frac{dq}{dr}$ – лінійна густина заряду стержня.

Тепер елементарний магнетний момент

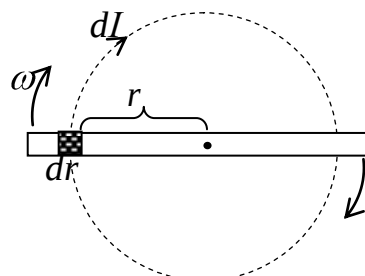
$$dP_m = \pi r^2 \frac{\omega \lambda}{2\pi} dr = \frac{1}{2} \omega \lambda r^2 dr,$$

і повний магнетний момент

$$\begin{aligned} P_m &= 2 \int_0^{\frac{L}{2}} dP_m = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \omega \lambda r^2 dr = \\ &= \frac{1}{3} \omega \lambda r^3 = \frac{1}{24} \omega \lambda L^3 = \frac{1}{24} \omega q L^2, \end{aligned}$$

де замість λ ми підставили $\frac{q}{L}$.

Незаряджений стержень, навіть металевий, не створює при обертанні магнетного моменту, хоча, на перший погляд, видається, що струм, створений упорядкованим рухом електронів, мав би спричинювати магнетний момент. Проте цей струм є скомпенсований таким же за величиною і протилежно спрямованим струмом позитивних йонів.



Мал. 99

Тема 2. Закон Біо-Савара-Лапласа

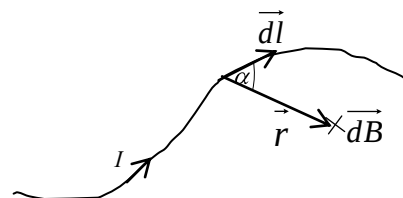
Фізичні системи й прилади

- **Нормальний соленоїд** – дротяна котушка, висота якої значно більша за радіус витків.
- **Плоский соленоїд** – дротяна котушка, висота якої значно менша за радіус витків.
- **Тангенс-гальванометр** – плоский соленоїд, у центрі якого розміщена магнетна стрілка.
- **Тороїд** – дротяна котушка, вісь якої має форму кола.

Постулати

➤ **Закон Біо-Савара-Лапласа:** кожен елемент струму $I d\vec{l}$ в будь-якій точці простору, яка розміщена на відстані r від нього, створює магнетне поле, індукція якого

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} I d\vec{l} \times \vec{r},$$



Мал. 100

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від елемента струму до заданої точки, $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ – магнетна стала (мал. 100).

Очевидно, що модуль вектора $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I dl \sin \alpha,$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

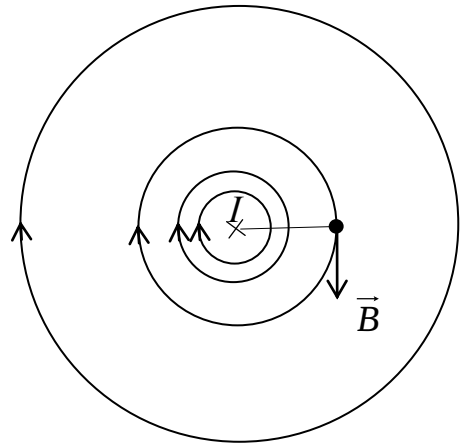
➤ **Принцип лінійної суперпозиції магнетних полів:** якщо в заданій точці простору діє багато магнетних полів з індукціями $\vec{B}_1, \vec{B}_2 \dots \vec{B}_n$, то вектор індукції в цій точці $\vec{B}$ дорівнює сумі векторів індукції кожного з полів

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n.$$

Задачі

(158) Установимо картину ліній індукції магнетного поля прямого, колового та соленоїдного струмів.

Нехай прямий струм спрямований в площину малюнка (мал. 101). У довільно вибраній точці будь-який елемент цього струму буде створювати, згідно з законом Біо-Савара-Лапласа та правилом знаходження напрямку векторного добутку, магнетне поле $d\vec{B}$, яке буде спрямоване вздовж дотичної до кола з центром, який лежить на струмі, тому, відповідно до означення ліній індукції, ця дотична і є силовою лінією.

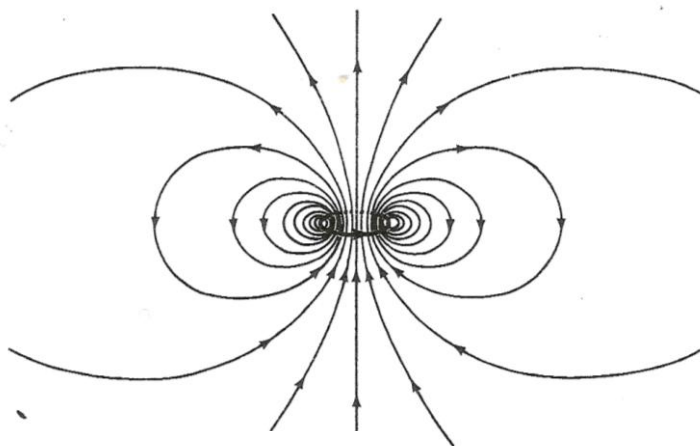


Мал. 101

Отже, лінії індукції поля прямого струму – це концентричні кола навколо струму.

Візьмемо будь-яку точку на осі колового струму (мал. 102). Кожен елемент струму $I d\vec{l}$ створить в цій точці, згідно з законом Біо-Савара-Лапласа, елементарне поле $d\vec{B}$. Усі вектори $d\vec{B}$ утворять конус, вісь якого збігається з віссю колового струму, тому сумарний вектор $\vec{B}$ буде спрямований вздовж цієї осі. Отже, одна з ліній індукції колового струму збігається з його віссю. Очевидно, що далі від осі сумарний вектор поля буде відхилений від осі, бо різні елементи струму даватимуть різний вклад і лінія індукції набуде вигляду замкненої кривої.

Звернемо увагу, що картина ліній індукції колового струму така ж, як і картина еквіпотенціальних поверхонь електричного поля диполя. Саме тому коловий струм називають *магнетним диполем*.



Щодо поля соленоїда, то воно, будучи результатом накладання полів колових струмів, буде подібним до поля колового струму, проте витягнутим вздовж осі соленоїда.

Картини цих магнетних полів можна зробити видимими за допомогою залізних ошурків, які вишиковуються уздовж силових ліній. Подібні експерименти підтверджують з'ясовані нами картини силових ліній.

(159) Установимо вираз для індукції магнетного поля, створеного в довільній точці простору прямим нескінченно довгим провідником зі струмом.

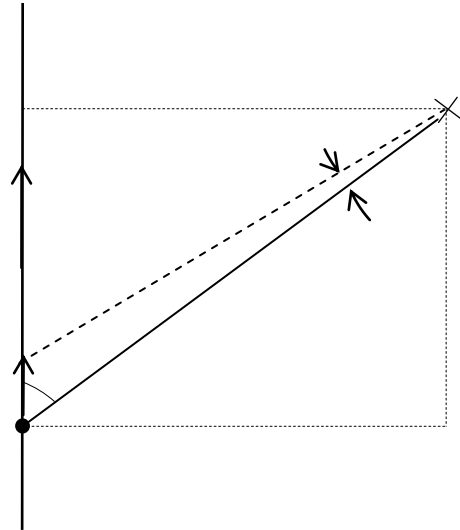
Оскільки магнетна індукція – це вектор, то нам слід установити як модуль цього вектора, так і його напрям.

Очевидно, що для того, щоб знайти магнетну індукцію в заданій точці, створену цілим провідником, слід додати магнетні індукції, створені в цій точці всіма елементами струму, а, оскільки цих елементів струму є безліч, то ця сума – це не що інше, як інтеграл.

Спочатку з'ясуємо напрям цього сумарного вектора індукції. Згідно з правилом знаходження напрямку векторного добутку (правилом правого гвинта), вектор $\vec{dB}$, створений елементом струму $I\vec{dl}$, є спрямованим у площину малюнка (мал. 103).

З малюнка також видно: якщо вибрати будь-який інший елемент струму, то створений ним вектор $\vec{dB}$ матиме іншу величину, проте такий самий напрям, тому і сумарний вектор $\vec{B}$ буде спрямований у площину малюнка.

Оскільки всі вектори $\vec{dB}$ мають один і той самий напрям, то модуль вектора $\vec{B}$ дорівнює сумі модулів векторів $\vec{dB}$, тобто



$$B = \int dB = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \sin \alpha dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl.$$

З мал. 103 видно, що $dl \sin \alpha = r d\alpha = \frac{R}{\sin \alpha} d\alpha$, тому

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \alpha}{R} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

(160) Встановимо вираз для індукції магнетного поля на осі колового струму.

Щоб знайти індукцію у будь-якій точці на осі колового струму, слід додати всі елементарні поля $\vec{dB}$, створені всіма елементами струму $I \vec{dl}$ цього кільця. З мал. 104 бачимо, що різні елементи струму, згідно з законом Біо-Савара-Лапласа, будуть створювати в заданій точці осі магнетні поля, однакові за величиною, але різні за напрямом.

Якщо переміщувати елемент струму вздовж кільця, то вектор $\vec{dB}$ опише конус навколо осі y .

Через те, що вектори $\vec{dB}$ мають різний напрям, ми не можемо обчислити модуль сумарного вектора $\vec{B}$ як суму модулів векторів $\vec{dB}$, тобто рівність $B = \int dB$, яку ми застосували для прямого струму (задача 159), в цьому випадку застосована бути не може і правильною є лише векторна рівність

$$\vec{B} = \int d\vec{B}.$$

Розклавши вектор $\vec{dB}$ на складові по осях x та y , останню рівність представимо

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int (dB_x \vec{i} + dB_y \vec{j}) = \vec{i} \int dB_x + \vec{j} \int dB_y.$$

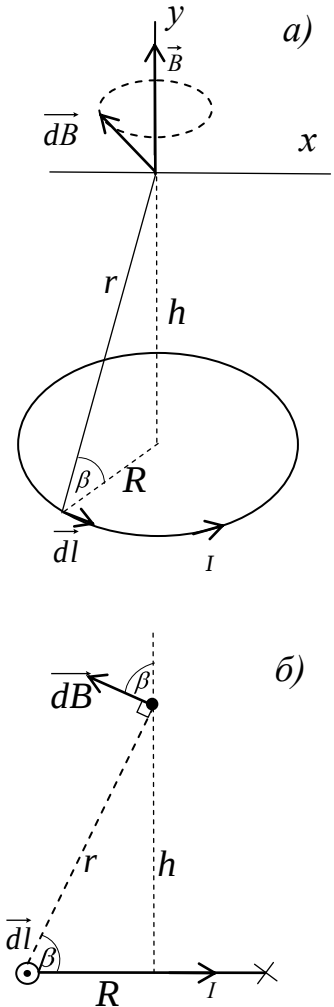
Перший інтеграл – це сума проекцій вектора $\vec{dB}$ на вісь x . З малюнка бачимо, що для кожної такої проекції є протилежна до неї, тому цей інтеграл дорівнює нулеві і

$$\vec{B} = \vec{j} \int dB_y,$$

що означає, що сумарний вектор $\vec{B}$ спрямований вздовж осі y , тобто вздовж осі кільця. Модуль цього вектора

$$B = \int dB_y,$$

бо модуль вектора $\vec{j}$ дорівнює одиниці. З малюнка бачимо, що $dB_y = dB \cos \beta$, тому



Мал. 104

$$B = \int dB \cos \beta = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \beta dl.$$

Підставивши сюди $\cos \beta = \frac{R}{r}$ і $r = \sqrt{R^2 + h^2}$ і винісши незалежні від змінної інтегрування l величини за знак інтеграла, дістанемо

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

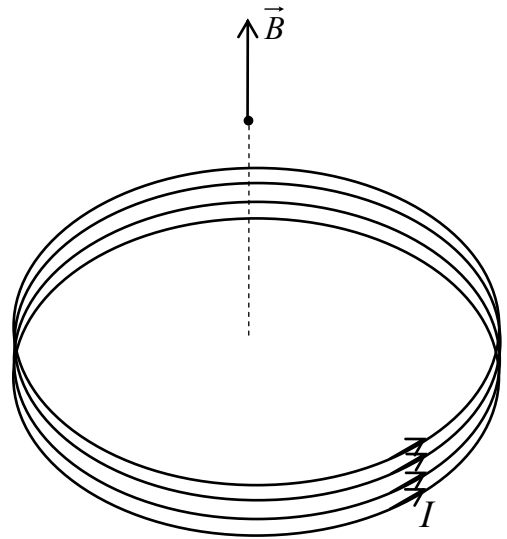
(161) Установимо вираз для індукції магнетного поля на осі плоского соленоїда.

Оскільки відстань від заданої точки осі плоского соленоїда до будь-якого витка (кільця) плоского соленоїда є практично однаковою, то індукцію поля в цій точці можемо розглядати як індукцію, створену N кільцевими струмами, де N – кількість витків плоского соленоїда (мал. 105). Тому

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} N,$$

а спрямований вектор $\vec{B}$, як і у випадку кільцевого струму, – вздовж осі. З останньої формули для поля в центрі соленоїда, тобто за умови $h=0$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} N.$$



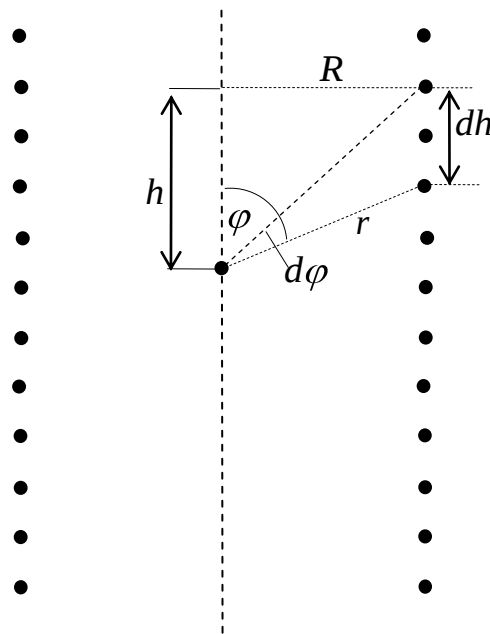
Мал. 105

(162) Установимо вираз для індукції магнетного поля на середині осі нормального соленоїда.

Для цього в соленоїді виділимо вузьку смужку витків (мал. 106) висотою dh і введемо поняття густоти витків n як кількості витків на одиницю довжини соленоїда, тобто

$$n = \frac{dN}{dh}.$$

Індукцію поля в центрі соленоїда будемо шукати як суму індукцій, створених плоскими соленоїдами висотою dh , які мають dN витків, а позаяк всі вектори індукції, створені цими плоскими соленоїдами, співнаправлені, то модуль сумарного вектора дорівнює сумі модулів векторів суми, тобто



Мал. 106

$$B = \int dB,$$

де dB – індукція поля, створена елементарним плоским соленоїдом, яка, згідно з отриманим раніше результатом (задача 161) є

$$dB = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} dN.$$

Застосувавши означення густоти витків, дістанемо

$$dB = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} ndh$$

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I n}{2} \int \frac{dh}{R^2 + h^2},$$

де всі незалежні від h величини винесені за знак інтеграла.

Щоб простіше обчислити цей інтеграл, перейдемо від лінійної змінної h до змінної φ .

З мал. 106 бачимо, що $dh \sin \varphi = r d\varphi$, де $r = \frac{R}{\sin \varphi}$, звідки

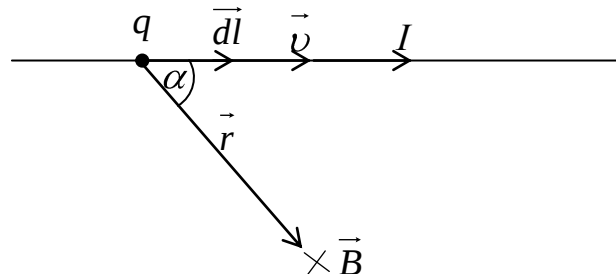
$$dh = \frac{R}{\sin^2 \varphi}. \text{ Крім того, } R^2 + h^2 = r^2 = \frac{R^2}{\sin^2 \varphi}.$$

Підставивши дві останні рівності в підінтегральний вираз дістанемо

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \mu_0 n I.$$

(163) Установимо вираз для індукції магнетного поля, створеного точковим зарядом q , який рухається зі швидкістю U .

Розглянемо струм, створений N точковими зарядами величиною q . Згідно з законом Біо-Савара-Лапласа, він створює поле (мал. 105)



Мал. 105

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha.$$

Представивши силу струму, згідно з її означенням, дістанемо

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} dl \sin \alpha =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} v dq \sin \alpha,$$

де $v = \frac{dl}{dt}$ – швидкість зарядів q . Заряд dq представимо як $q dN$ і, поділивши ліву й праву частини рівності на dN , дістанемо

$$\frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q v \sin \alpha,$$

де $\frac{dB}{dN} = B$ – індукція, створена одним зарядом. Тоді

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q v \sin \alpha.$$

З малюнка бачимо, що напрями векторів $\vec{B}$, $\vec{v}$ і $\vec{r}$ підкоряються правилу векторного добутку, тому

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} q \vec{v} \times \vec{r}.$$

Підставивши сюди радіус-вектор $\vec{r}$ з формули для напруженості електричного поля точкового заряду, а саме

$$\vec{r} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^3}{q} \vec{E},$$

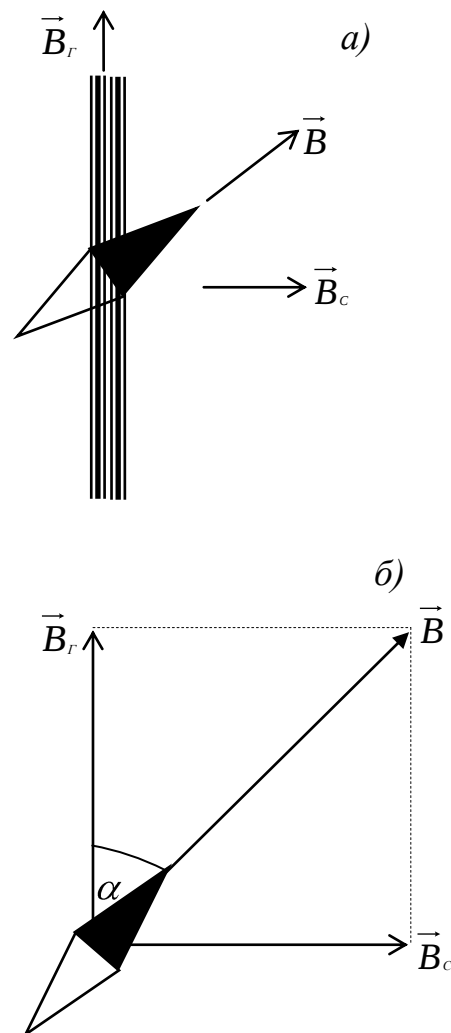
дістанемо

$$\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

(164) Знайдемо спосіб визначення горизонтальної складової магнетного поля Землі за допомогою тангенс-гальванометра.

Установимо площину плоского соленоїда тангенс-гальванометра в площині магнетного меридіана, тобто в площині, яка проходить через вектор горизонтальної складової магнетного поля Землі $\vec{B}_c$ і центр Землі. На напрям магнетного меридіана вкаже магнетна стрілка, яка встановлена в центрі плоского соленоїда. Якщо включити струм I через соленоїд, то він створить своє магнетне поле $\vec{B}_c$ (мал. 106 а) і магнетна стрілка зорієнтується вздовж вектора $\vec{B} = \vec{B}_c + \vec{B}_z$. Помірявши кут α між напрямом магнетної стрілки і площиною соленоїда і застосувавши формулу для індукції поля в центрі плоского соленоїда (задача 161) $B_c = \frac{\mu_0 I}{2R} N$ з векторної діаграми (мал. 106 (б)) знайдемо горизонтальну складову магнетного поля Землі.



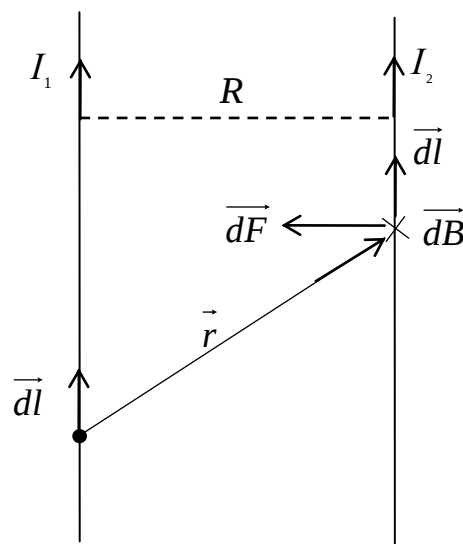
Мал. 106

$$B_z = \frac{B_c}{\tan \alpha} = \frac{\mu_0 I N}{2R \tan \alpha}.$$

(165) На основі законів Ампера та Біо-Савара-Лапласа доведемо, що два паралельні проводи зі струмами одного напрямку притягаються, а протилежних – відштовхуються.

Один провід будемо трактувати як джерело магнетного поля, а другий – як такий, що розміщений в цьому полі (мал. 107).

Виберемо на першому проводі елемент струму $I_1 \vec{dl}$ і знайдемо ін.-дукцію поля $\vec{dB}$, створену ним в одній з точок простору, де і є другий провід. Згідно з законом Біо-Савара-Лапласа і правилом визначення напрямку векторного добутку (правилом правого гвинта), він спрямований у площину малюнка. Це поле, згідно з законом Ампера, діє на елемент струму



Мал.107

му $I_2 \vec{dl}$ з силою $\vec{dF}$, яка, згідно з цим же правилом правого гвинта, спрямована в бік першого проводу. Всі інші елементи струму першого проводу в цій точці створюють таке ж поле за напрямом, тому викликають силу Ампера того ж напрямку, які, додаючись, утворюють сумарний вектор сили притягання до першого проводу. В усіх інших точках другого проводу ситуація така сама.

Якщо проводи поміняти ролями, тобто другий вважати джерелом поля, а перший як такий, який розміщений в цьому полі, то, очевидно, нічого не зміниться: перший провід буде з такою ж силою притягатися до другого, тобто між проводами виникне взаємна сила притягання.

Аналогічними міркуваннями та побудовами можна показати, що у випадку струмів протилежних напрямів між проводами виникне така ж сила відштовхування.

Тема 3. Циркуляція і потік вектора індукції магнетного поля

Фізичні поняття

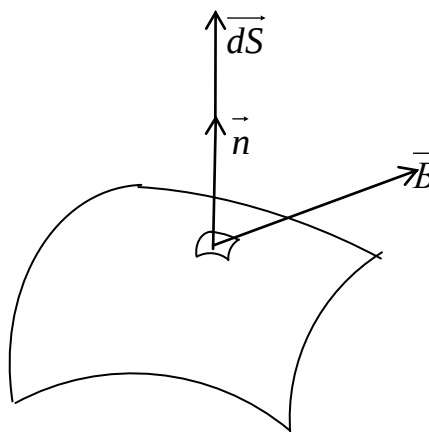
• **Циркуляція вектора магнетної індукції вздовж замкненого контура довжиною L** – це вираз

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l},$$

де $d\vec{l}$ – елемент довжини контура.

• **Потік вектора магнетної індукції через поверхню площею S** – це величина

$$\Phi_B = \oint_L \vec{B} d\vec{l},$$



Мал. 108

(мал. 108).

Постулати

➤ **Теорема про циркуляцію вектора магнетної індукції:** циркуляція вектора магнетної індукції вздовж будь-якого замкненого контура пропорційна до потоку вектора густини струму через поверхню, обмежену цим контуром

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

де μ_0 – магнетна стала.

➤ **Теорема Остроградського-Гауса для магнетного поля:** потік вектора індукції магнетного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулеві, тобто

$$\oint_L \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Основні одиниці фізичних величин

• **Один ампер** – це сила такого постійного струму, який, протікаючи у двох паралельних нескінченно довгих та нескінченно тонких прямих проводах, що є у вакуумі на відстані 1 метр один від одного, спричиняє силу їхньої взаємодії на одиницю довжини $2 \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$.

Задачі

(166) На основі означення одиниці фізичної величини ампера визначимо числове значення магнетної сталої.

Ми вже показали (задача 165), що два паралельні нескінченно довгі провідники з струмами притягуються або відштовхуються.

Для того, щоб знайти величину цієї сили, розраховану на одиницю довжини провідників, напишемо вираз індукції поля прямого нескінченно довгого струму I_1 в точці, що розміщена на відстані R від нього (задача 159)

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}.$$

Тоді сила Ампера, яка діє з боку цього поля на другий провід

$$dF = I_2 B dl \sin \alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl,$$

звідки

$$\mu_0 = \frac{2\pi R}{I_1 I_2} \frac{dF}{dl}.$$

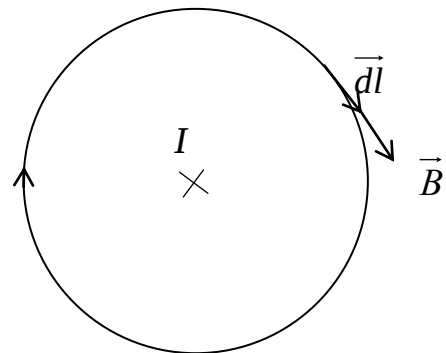
З означення одного ампера випливає, що за умови $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$, $R = 1 \text{ м}$, – сила взаємодії, що припадає на одиницю довжини має бути $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$, тому

$$\mu_0 = \frac{2\pi \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ А} \cdot 1 \text{ А}} 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Як бачимо, числове значення магнетної сталої буде різним у різних системах одиниць, бо вона залежить від основних одиниць: одиниці сили струму, довжини, маси та часу.

(167) Перевіримо теорему про циркуляцію вектора магнетної індукції для прямого струму.

Спочатку розглянемо частковий випадок замкненого контура, який збігається з однією з силових ліній магнетного поля цього струму (мал. 109). Обчислимо циркуляцію магнетної індукції вздовж цього контура.

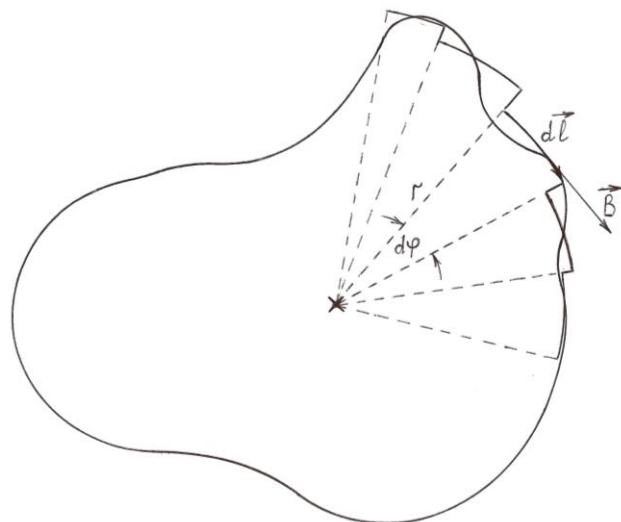


Мал. 109

Раніше ми з'ясували (задача 158), що будь-яка силова лінія прямого струму – це коло з центром на прямій, вздовж якої тече струм i , відповідно, вектор $\vec{B}$ є дотичним до нього. Оскільки вектор елемента довжини кола $\vec{dl}$ також дотичний до цього кола, то скалярний добуток $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$ і застосувавши формулу індукції поля прямого струму (задача 159), дістанемо

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L Bdl = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I.$$

Ми отримали, що циркуляція вектора магнетної індукції прямого струму вздовж замкненого контура, який збігається з будь-якою із силових ліній, пропорційна до сили струму, а оскільки сила струму – це потік вектора густини струму (задача 72 з розділу 2), то ця циркуляція пропорційна до потоку густини струму, причому з коефіцієнтом пропорційності μ_0 в повній від-



Мал. 110

повідності до постулату про циркуляцію вектора магнетної індукції.

Тепер розглянемо більш загальний випадок, тобто коли прямий струм охоплено будь-яким проте плоским контуром (мал. 110).

Представимо цей контур як послідовність нескінченної кількості колових дуг та радіальних відрізків. Очевидно, що циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж радіальних відрізків дорівнює нулеві, бо скалярний добуток $\vec{B}d\vec{l}$ там дорівнює нулеві як скалярний добуток взаємно-нормальних векторів. Для колових дуг $\vec{B}d\vec{l} = Bdl = Brd\varphi$, тому

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \int_0^{2\pi} Brd\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Якщо контур не плоский, то результат буде такий самий – усі відрізки, паралельні до струму, будуть нормальними до вектора індукції і не вноситимуть вкладу в інтеграл, тобто циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж такого контура така ж як і вздовж його проекції на площину нормальну до струму.

Отже, ми довели, що для прямого струму теорема про магнетну циркуляцію дійсно має місце. Зауважимо, що ця теорема насправді є постулатом, вона ще має назву: закон Ампера.

(168) На основі теореми про магнетну циркуляцію покажемо, що для випадку струмів будь-якої форми, які течуть у проводах

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

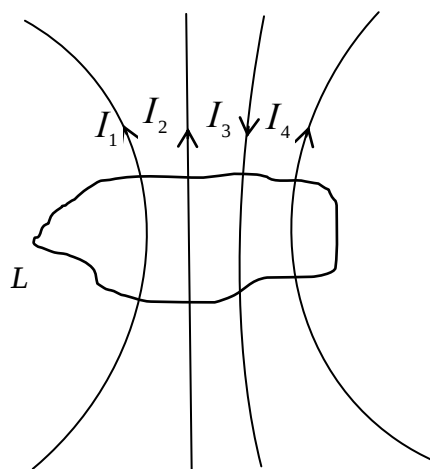
де $\sum_{i=1}^n I_i$, – алгебраїчна сума струмів, яка охоплена будь-яким контуром довжиною L .

Дійсно, для скінченної кількості струмів (мал. 111) інтеграл переходить в алгебраїчну суму, тобто

$$\int \vec{j} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{j}_i \vec{S}_i = \sum_{i=1}^n I_i$$

і теорема про магнетну циркуляцію набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$



Мал. 111

(169) Представимо теорему про магнетну циркуляцію у диференціальній формі.

Для цього застосуємо теорему Стокса, яка стверджує, що циркуляція будь-якого вектора вздовж замкненого контура дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню, обмежену цим контуром. Дістанемо

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S}.$$

Звідси та згідно з теоремою про магнетну циркуляцію

$$\int_S \text{rot} \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S}.$$

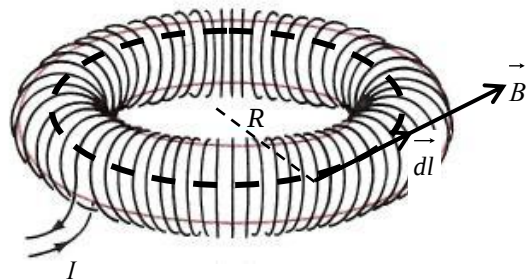
Оскільки в обидвох частинах рівності є поверхневі інтеграли по одній і тій же поверхні, то мають бути рівними й підінтегральні вирази, тобто

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Це рівняння є диференціальною формою теореми про магнетну циркуляцію.

(170) За допомогою теореми про магнетну циркуляцію знайдемо вираз для індукції магнетного поля тороїда.

Нехай тороїд має радіус R і кількість витків N (мал. 112). Виберемо замкнений контур так, щоб він збігся з осьовою лінією тороїда. Оскільки вектор $\vec{B}$ в усіх точках вибраного нами контура однаковий і спрямований вздовж дотичної до нього, то $\vec{B} d\vec{l} = B dl$ і



Мал. 112

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi R B.$$

Цей контур охоплює N струмів однакового напрямку і величини I , тому, згідно з теоремою про магнетну циркуляцію,

$$2\pi RB = \mu_0 NI ,$$

звідки

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} ,$$

або враховуючи, що $\frac{N}{2\pi R}$ – це густота витків n

$$B = \mu_0 nI .$$

Бачимо, що магнетне поле всередині тороїда таке ж за величиною, як і всередині нормального соленоїда з такою ж густотою витків (задача 162). Це і не дивно, бо тороїд можна сконструювати згинанням нормального соленоїда так, щоб його вісь набула форми кола.

Щодо напрямку вектора індукції, то всередині соленоїда воно практично однорідне (однакове як за величиною так і за напрямом) а в тороїді однакове лише за величиною.

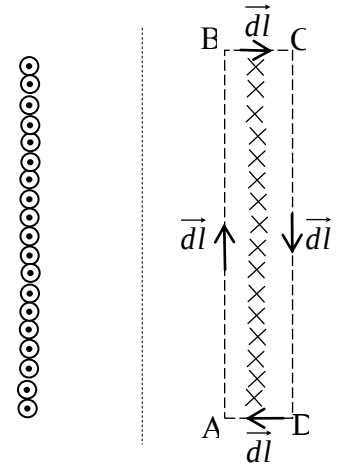
(171) На основі теореми про магнетну циркуляцію знайдемо вираз для індукції магнетного поля всередині нормального соленоїда.

Ми вже отримали формулу для індукції поля на осі нормального соленоїда на основі закону Біо-Савара-Лапласа (воно практично однакове всюди всередині соленоїда). Покажемо, що це можна зробити за допомогою теореми про магнетну циркуляцію, причому простіше. Щоб застосувати згадану теорему, нам слід вибрати замкнений контур, який охоплює всі струми величиною I . У ролі цього контура візьмемо контур $ABCD$ (мал. 113) і обчислимо циркуляцію вектора $\vec{B}$ вздовж нього. Оскільки в області відрізків BC і DA вектор індукції є практично нормальним до $d\vec{l}$, то відповідні скалярні

добутки $\vec{B}d\vec{l}$ дорівнюють нулеві і тому циркуляція вектора $\vec{B}$ вздовж цих відрізків дорівнює нулеві. Щодо циркуляції вздовж відрізка CD , то вона значно менша за циркуляцію вздовж відрізка AB , бо поле за межами соленоїда значно слабше, ніж всередині. Тому циркуляція по всьому контуру зводиться до циркуляції вздовж відрізка AB і за теоремою про магнетну циркуляцію

$$\int_{AB} \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 NI.$$

Позаяк на відрізку AB вектори $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ паралельні, то $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$ і враховуючи однорідність поля всередині соленоїда маємо



Мал. 113

$$B \int_{AB} dl = \mu_0 NI,$$

або

$$BL = \mu_0 NI,$$

де L — довжина соленоїда, N — кількість його витків. З останньої рівності

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I,$$

або

$$B = \mu_0 nI,$$

де n — густина витків соленоїда.

(172) Представимо теорему Остроградського-Гауса для магнетного поля в диференціальній формі.

Для цього застосуємо математичну теорему, яка також називається теоремою Остроградського-Гауса і яка, по суті, переводить поверхневий інтеграл в об'ємний.

$$\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{a} dV,$$

тобто потік будь-якого вектора $\vec{a}$ через замкнену поверхню дорівнює інтегралу від дивергенції цього вектора за об'ємом, обмеженим цією поверхнею.

Згідно з цією теоремою, теорема Остроградського-Гауса для магнетного поля набуває вигляду

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 = \int_V \text{div} \vec{B} dV,$$

звідки, оскільки $V \neq 0$,

$$\text{div} \vec{B} = 0.$$

Остання рівність представляє ту ж саму теорему Остроградського-Гауса для магнетного поля, проте в диференціальній формі.

(173) Покажемо, що теорема Остроградського-Гауса для магнетного поля свідчить про замкненість силових ліній магнетного поля, що, своєю чергою, може трактуватися як відсутність у природі магнетних зарядів.

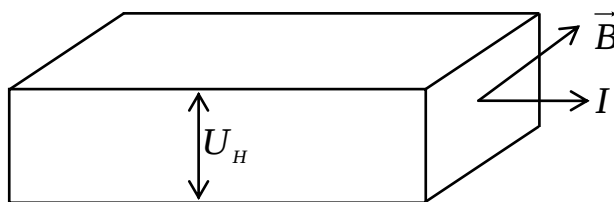
Дійсно, рівність нулеві потоку вектора магнетної індукції через будь-яку замкнену поверхню говорить про те, що кожна силова лінія, яка входить в область, обмежену цією поверхнею, мусить вийти з цієї

області, тому ця силова лінія має бути замкненою, що, зі свого боку означає, що ніде немає її джерела, тобто немає магнетного заряду.

Тема 4. Сила Лоренца

Фізичні явища

• **Ефект Голла** – це явище виникнення різниці потенціалів між двома протилежними поверхнями провідника чи напівпровідника зі струмом паралельним до цих поверхонь у магнетному полі яке нормальне до струму і паралельне до цих поверхонь (мал. 114).



Мал. 114

• **Магнетоопір (магнеторезистивний ефект)** – це явище зміни опору провідника чи напівпровідника в магнетному полі.

• **Циклотронний резонанс** – це раптове зростання магнетоопору провідника чи напівпровідника за умови збігу циклотронної частоти носіїв струму з частотою фотона.

Фізичні поняття

• **Сила Лоренца** – це сила, яка діє на точковий заряд з боку електричного та магнетного полів (позначення $\vec{F}_L$).

• **Питомий заряд частинки** – це відношення заряду частинки до її маси.

• **Циклотронна частота** – це частота обертання зарядженої частинки навколо вектора індукції магнетного поля.

Фізичні системи й прилади

• **Сенсор Голла** – прилад, який працює за принципом ефекту Голла й призначений для вимірювання індукції магнетного поля.

• **Мас-спектрометр** – прилад, який працює на основі закономірностей руху заряджених частинок в електричному й магнетному полях і призначений для вимірювання мас йонів з метою установлення хемічного складу певного зразка.

• **Прискорювачі заряджених частинок** – прилади, за допомогою яких заряджені частинки прискорюються в електричному та магнетному полях до великих швидкостей.

• **Магнетогідродинамічний (МГД) генератор** – генератор постійної ЕРС, дія якого базується на розділенні електричних зарядів магнетним полем.

Задачі

(174) Установимо вираз для сили Лоренца.

З означення сили Лоренца та принципу суперпозиції сил випливає, що вона дорівнює сумі сил, які діють на точковий заряд з боку електричного $\vec{F}_e$ та магнетного $\vec{F}_m$ полів.

$$\vec{F}_L = \vec{F}_e + \vec{F}_m$$

Вираз для сили з боку електричного поля нам відомий: $\vec{F}_e = q\vec{E}$, тому нам залишилось віднайти вираз для сили з боку магнетного поля.

Розглянемо конкретний точковий заряд – електрон. Силу, яка діє з боку магнетного поля на цей електрон, знайдемо як силу, яка діє з боку цього поля на всі рухомі електрони, які є в заданому відрізку провідника, поділену на їхню кількість.

Сила, яка діє з боку магнетного поля на всі електрони відрізка провідника зі струмом dl , – це сила Ампера, вираз якої, як нам відомо, має вигляд

$$dF = IBdl \sin \alpha.$$

Представивши силу струму згідно з її означенням як $\frac{dq}{dt}$, а заряд dq як edN , де dN – кількість електронів в елементі довжини провідника dl , дістанемо

$$dF = \frac{dq}{dt} B dl \sin \alpha = \frac{edN}{dt} B dl \sin \alpha.$$

Враховуючи, що $\frac{dl}{dt}$ – це дрейфова швидкість електрона, маємо

$$dF = edNvB \sin \alpha.$$

Поділивши ліву й праву частину цієї формули на dN , дістанемо силу, яка діє на один електрон

$$\frac{dF}{dN} = evB \sin \alpha.$$

або

$$F_m = evB \sin \alpha.$$

Оскільки вектор дрейфової швидкості електрона $\vec{v}$ є протилежним до елемента струму $\vec{dl}$, то

$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Для будь-якого точкового позитивного заряду q

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

і вираз для сили Лоренца

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

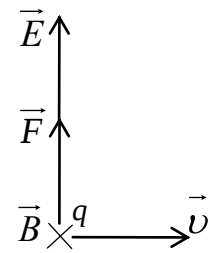
(175) Вкажемо на відносність магнетного поля.

Нехай позитивний точковий заряд рухається зі швидкістю $\vec{v}$ відносно спостерігача в лабораторній системі відліку в магнетному полі (для простоти нормально до силових ліній (мал. 115)). Очевидно, що на нього діятиме сила цього поля $\vec{B}$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Спостерігач, який рухається із зарядом, зафіксує ту ж саму силу, проте заряд відносно нього буде нерухомим, тому, з погляду цього спостерігача, це сила електричного поля, напруженість якого

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$



Мал. 115

і силові лінії якого є нормальними до силових ліній магнетного поля, яке бачить спостерігач у лабораторній системі.

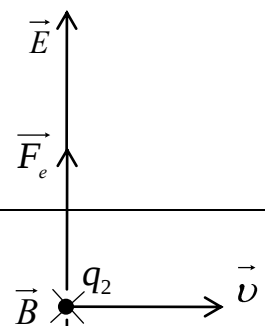
Отже, спостерігач у лабораторній системі сприймає поле як магнетне, тоді як спостерігач у системі, зв'язаній з зарядом, як електричне.

(176) Порівняємо силу електричної та магнетної взаємодії між двома точковими зарядами.

Розглянемо два точкові позитивні заряди, які рухаються зі швидкістю $\vec{v}$ в лабораторній системі відліку (мал. 116). На другий заряд, з боку магнетного поля, створеного першим зарядом, діє сила

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B},$$

де $\vec{B}$ – індукція магнетного поля першого заряду, яка, як відомо (задача 163)



$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E},$$

де $\vec{E}$ – напруженість електричного поля цього заряду.

Отже, сила магнетної взаємодії цих двох зарядів

$$\vec{F}_m = \frac{q}{c^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}),$$

а її модуль

$$F_m = \frac{v^2}{c^2} qE.$$

Водночас сила електричної взаємодії

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

і її модуль

$$F_e = qE.$$

Порівнюючи ці дві сили, маємо

$$\frac{F_m}{F_e} = \left(\frac{v}{c} \right)^2,$$

що означає, що за малих порівняно зі швидкістю світла швидкостей сила електричної взаємодії набагато більша за силу магнетної взаємодії, і для того, щоб ці дві сили зрівнялися, заряди мали би рухатися зі швидкістю світла.

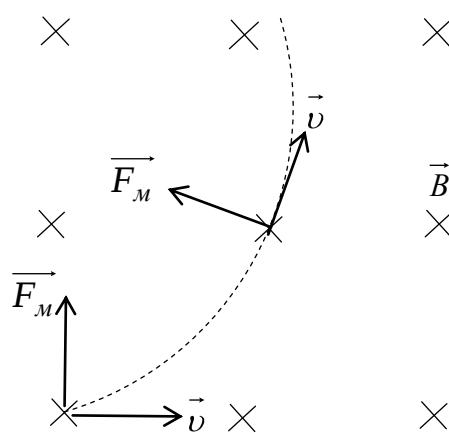
Крім того, бачимо, що спостерігач у системі відліку, зв'язаній з зарядами, фіксує тільки електричне поле і, відповідно, електричне відштовхування між зарядами, тоді як спостерігач у лабораторній системі – як електричне, так і магнетне поле і, відповідно, силу елек-

тричного відштовхування та силу магнетного притягання, тобто рівнодійну цих сил, модуль якої з двох останніх рівнянь

$$F = F_e - F_m = qE \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

(177) Знайдемо циклотронну частоту точкового заряду, який потрапив у магнетне поле нормально до його силових ліній.

Як тільки заряджена частинка потрапить у магнетне поле, на неї почне діяти сила з боку цього поля яка, згідно з правилом правого гвинта для векторного добутку, буде спрямована нормально як до вектора індукції, так і до вектора швидкості (мал. 117). Це спричинить зміну траєкторії частинки, що, своєю чергою, спричинить зміну напрямку швидкості і, відповідно, напрямку сили.



Мал. 117

Так частинка буде рухатися дугою кола, радіус якого знайдемо з умови рівності відцентрової сили інерції, яка при цьому виникла, силі магнетного поля.

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \sin \alpha,$$

звідки, враховуючи що $\alpha = 90^\circ$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

і на основі формули зв'язку лінійної і кутової швидкостей $v = \omega R$

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Як бачимо, циклотронна частота не залежить від швидкості, з якою частинка влетіла в магнетне поле, а лише від її маси та індукції магнетного поля.

(178) Знайдемо радіус і крок гвинтової лінії, вздовж якої буде рухатися заряджена частинка, яка потрапила в магнетне поле під довільним кутом α до його силових ліній.

Спочатку покажемо, що сила магнетного поля визначається лише нормальною до магнетного поля складовою вектора швидкості заряду. Для цього розкладемо вектор швидкості на дві складові (мал. 118): нормальну й паралельну до поля та напишемо вираз для сили магнетного поля

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = \\ &= q(\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}.\end{aligned}$$

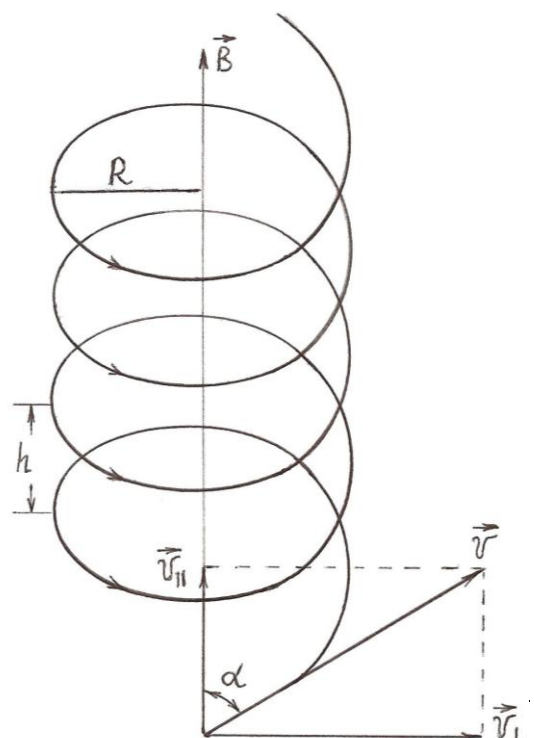
Аналогічно можемо показати, що сила магнетного поля визначається нормальною до вектора швидкості складовою вектора $\vec{B}$.

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v} \times (\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}) = q\vec{v} \times \vec{B}_{\perp}.$$

Радіус гвинтової лінії знайдемо з умови рівності сили магнетного поля відцентровій силі інерції

$$qv_{\perp}B = \frac{mv^2}{R},$$

звідки



$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB},$$

або, підставивши $v_{\perp} = v \sin \alpha$,

$$R = \frac{mv}{eB} \sin \alpha.$$

Крок h гвинтової лінії знайдемо з умови, що за один період заряд, рухаючись вздовж поля зі швидкістю $v_{\parallel}$, проходить вздовж поля саме цю відстань, тобто

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \alpha \frac{2\pi}{\omega} = v \cos \alpha \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m v}{eB} \cos \alpha.$$

(179) Визначимо питомий заряд електрона, якщо він, будучи прискореним різницею потенціалів U потрапивши в нормальне до його швидкості магнетне поле з індукцією $\vec{B}$, відхилився на відстань d , пройшовши відстань l (мал. 119).

Потрапивши в магнетне поле, електрон рухатиметься дугою кола так, що відцентрова сила інерції дорівнюватиме силі магнетного поля.

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

звідки питомий заряд електрона

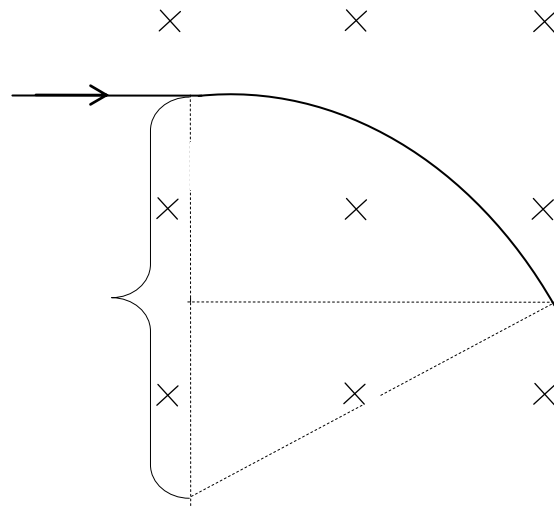
$$\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}.$$

Швидкість електрона v визначається прискорювальною напругою U з рівності

$$\frac{mv^2}{R} = eU,$$

звідки

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$



а радіус кола R з рівності

$$R^2 = (R - d)^2 + l^2,$$

звідки

$$R = \frac{l^2 + d^2}{2d}.$$

Підставивши знайдені вирази для v і R у вираз для питомого заряду, дістанемо

$$\frac{e}{m} = \frac{8d^2U}{(l^2 + d^2)^2 B^2}.$$

(180) Визначимо питомий заряд електрона методом Томсона, а саме: якщо він, рухаючись нормально до силових ліній взаємно-нормальних та однорідних електричних та магнетних полів, не зазнав відхилення.

Той факт, що електрон, незважаючи на присутність електричного та магнетного полів, не зазнав їхньої дії, означає, що сили, які на нього діють з боку цих полів, однакові за величиною та протилежні за напрямом, тобто

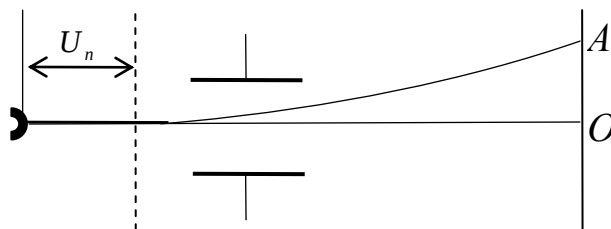
$$F_m = F_e,$$

або, враховуючи вирази цих сил

$$e\nu B = eE,$$

звідки швидкість, з якою електрон має прийти в область дії цих двох полів

$$\nu = \frac{E}{B}.$$



Мал. 120

Ця швидкість задається прискорювальною напругою U_n .

$$\frac{m\nu^2}{2} = eU_n.$$

З двох останніх рівностей

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2B^2U_n}.$$

Якщо електричне поле створюється конденсатором, відстань між пластинами якого d і напруга на них U , а магнетне поле – соленоїдом з густотою витків n і силою струму I , то підставивши в останню формулу

$$E = \frac{U}{d},$$

$$B = \mu_0 n I$$

дістанемо

$$\frac{e}{m} = \frac{U^2}{2\mu_0^2 n^2 I^2 d^2 U_n} = \frac{1}{2U_n} \left(\frac{U}{\mu_0 n I d} \right)^2.$$

Практично це робиться так: в електронно-променевій трубці (мал. 120) за відсутності електричного та магнетного полів пучок електронів прискорений напругою U_n потрапляє, очевидно, в центр екрана (точка O). Далі включають магнетне поле і пучок електронів відхиляється у точку A . Після того включають електричне поле такої напруженості, щоб пучок електронів знову повернувся у центр екрана. Це буде означати, що сили, які діють на електрони з боку обидвох полів, компенсують одна одну. Вимірявши прискорювальну напругу U_n , відстань між пластинами конденсатора d та напругу на них U , силу струму в соленоїді I та густоту його витків n за останньою формулою, можемо обчислити питомий заряд електрона.

(181) Знайдемо масу однозарядного йона, який потрапив на фотопластинку у масс-спектрографі Бейнбріджа на відстані L від щілини.

На мал. 121 схематично показано масс-спектрометр Бейнбріджа. Електричне поле $\vec{E}$ та магнетне поле $\vec{B}$ відіграють роль селектора, який відбирає (пропускає в отвір) лише ті йони, швидкість яких задовольняє умову

$$F_M = F_E,$$

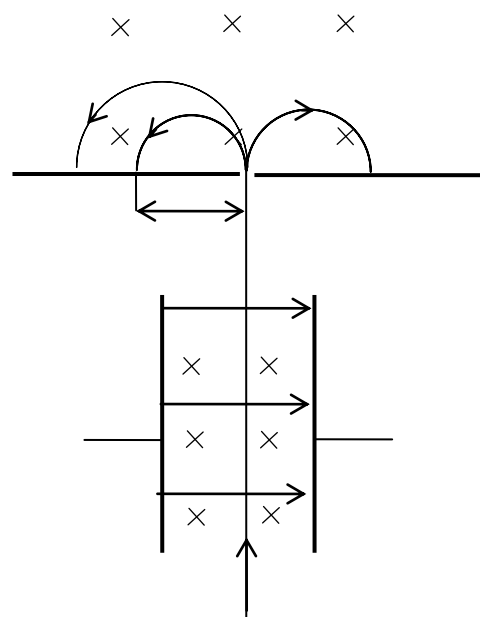
або

$$evB = eE.$$

Усі інші йони будуть відхилені цими полями.

Отже, йони зі швидкістю

$$v = \frac{E}{B}$$



потрапляють в магнетне поле $\vec{B}'$, де на них діє сила цього магнетного поля, і під дією якої вони описують дугу кола, радіус якого знаходимо з умови рівності цієї сили відцентровій силі інерції

$$\frac{mv^2}{R} = e v B',$$

звідки, а також з формули для v

$$m = \frac{Re B'}{v} = \frac{Re B' B}{E} = \frac{Le B' B}{2E}.$$

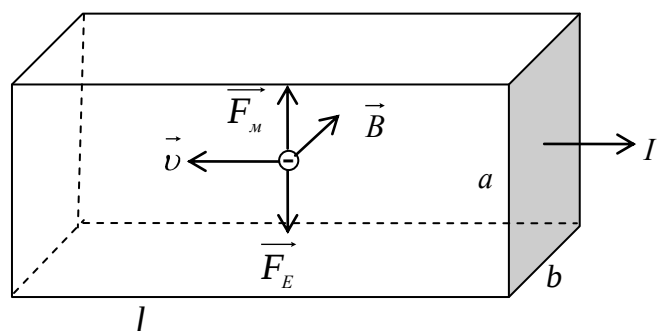
За напрямом дуги (вліво чи вправо), згідно з правилом правого гвинта для векторного добутку векторів, визначаємо також знак йона.

(182) Пояснимо механізм виникнення ефекту Голла і виразимо напругу Голла через індукцію магнетного поля і силу струму.

Помістимо метал чи напівпровідник зі струмом у магнетне поле, лінії індукції якого нормальні до струму (мал. 122).

Нехай основні носії заряду в цьому матеріалі – електрони. На них почне діяти сила магнетного

поля яка відхилятиме їх до верхньої грані що порушить електронейтральність в усьому об'ємі зразка і спричинить виникнення електричного поля, спрямованого від нижньої до верхньої грані. Це поле діятиме на електрони з силою протилежною за напрямом до сили магнетного поля, причому воно зростатиме в міру нагромадження електронів на верхній грані. За умови



Мал. 122

протилежною за напрямом до сили магнетного поля, причому воно зростатиме в міру нагромадження електронів на верхній грані. За умови

рівності цих сил процес розділення зарядів припиниться. Напишемо цю умову

$$e\nu B = eE,$$

або, представивши E через напругу Голла U_H , дістанемо

$$\nu B = \frac{U_H}{a},$$

звідки

$$U_H = a\nu B.$$

Представивши дрейфову швидкість електронів через густину струму й концентрацію, а густину струму через силу струму та розміри зразка, дістанемо

$$U_H = \frac{I}{ebn} B.$$

(183) Покажемо, що вимірявши експериментально напругу Голла можна визначити концентрацію та рухливість носіїв струму в металі чи напівпровіднику.

З формули для напруги Голла

$$U_H = \frac{I}{ebn} B$$

бачимо, що вимірявши силу струму I , індукцію поля B , розмір зразка b в напрямі магнетного поля та напругу Голла U_H , можна обчислити концентрацію носіїв струму

$$n = \frac{IB}{ebU_H},$$

а також їхню рухливість

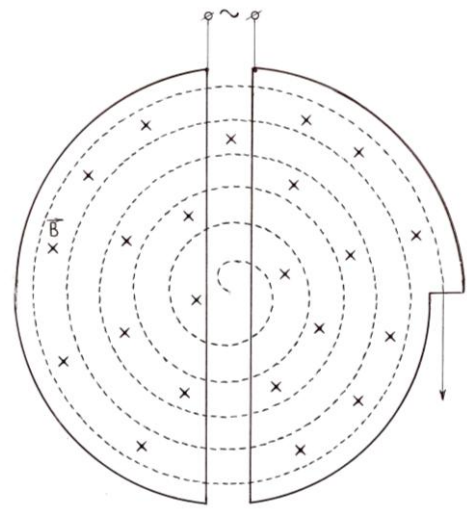
$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{j}{enE} = \frac{Il}{abenU},$$

де U – напруга на його кінцях.

(184) Пояснимо роботу прискорювача заряджених частинок – циклотрона.

В основі принципу роботи циклотрона лежить той факт, що частота обертання зарядженої частинки навколо вектора індукції магнетного поля, а це, як відомо, циклотронна частота, не залежить від її швидкості (задача 177).

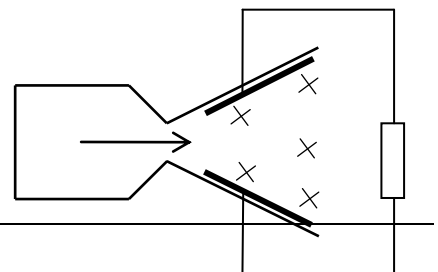
Циклотрон (мал. 123) складається з двох металевих півколових посудин з вакуумом, які називають дуантами. Однорідне магнетне поле нормальне до площини дуантів. Джерело заряджених частинок розміщене в центрі циклотрона. Якщо до дуантів приєднати джерело змінної ЕРС з частотою, яка збігається з циклотронною частотою, то частинка почне свій рух в електричному полі, яке буде її прискорювати незалежно від того, де вона є. З кожним обертом частота залишається сталою, а швидкість та радіус орбіти зростають (задача 177). У результаті частинка з великою швидкістю вилітає з циклотрона.



Мал 123

(185) Пояснимо роботу магнетогідродинамічного генератора (МГД-генератора).

У камері (мал. 124) робоче тіло нагрівається до температури приблизно 3000 К, тобто до стану плазми, і через сопло



Мал. 124

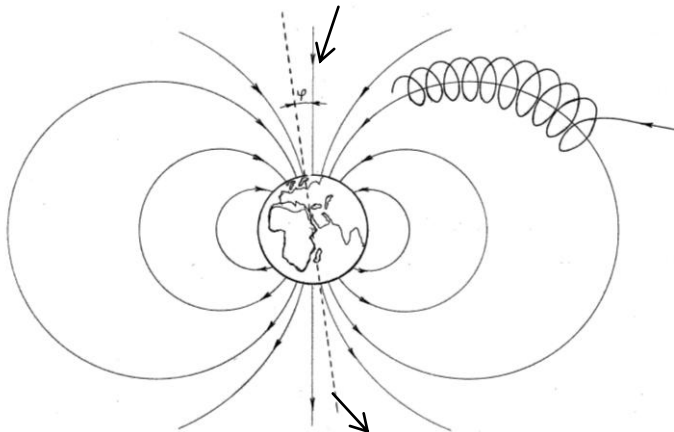
виривається у канал, у якому є магнетне поле, нормальне до напрямку руху плазми. Під дією сили магнетного поля позитивно заряджені частинки відхилятимуться до верхнього електрода, а негативно заряджені – до нижнього. Якщо до електродів приєднати споживача, то в колі потече струм, причому, оскільки процес розділення зарядів безперервний, то на місце носіїв струму, які втратили на споживачі свою енергію дрейфового руху, приходять нові, тобто ми маємо джерело ЕРС.

Явище розділення зарядів у МГД- генераторі подібне до ефекту Голла з тією різницею, що в МГД- генераторі як позитивний, так і негативний заряди рухаються в одному напрямі, а в провіднику зі струмом – в протилежних. Це приводить до того, що різнойменні заряди в МГД- генераторі відхиляються до протилежних електродів, тоді як у провіднику зі струмом в магнетному полі – до одного і того ж електрода.

(186) Пояснимо, як виникає явище “північне сяйво”.

Відомо, що Сонце, крім світла та іншого електромагнетного випромінювання, випромінює потік частинок – електронів, протонів та йонів, – який дістав назву “сонячний вітер”. Відбувається це внаслідок високої температури Сонця – кінетична енергія частинок настільки велика, що вона перевищує роботу виходу за межі тяжіння Сонця (це та сама термoeмісія з тією різницею, що частинка мусить долати не тільки силу затримуючого електричного поля, а й силу тяжіння).

Якщо б цей “сонячний вітер” проник до нас, то життя на Землі було б неможливим, а захищає нас від цього



убивчого потоку кор.пускул магнетне поле Землі. Дійсно, заряджена частинка, наприклад, електрон потрапивши в магнетне поле Землі (мал. 125) під кутом до силової лінії, почне рухатися гвинтовою лінією навколо цієї силової лінії (задача 178). Коли вона досягає атмосфери Землі, а це, як видно з малюнка, відбувається біля магнетних полюсів, то, бомбардуючи атоми, спричиняє їх світіння.

Тема 5. Електромагнетна індукція

Фізичні явища

• **Електромагнетна індукція** – це явище виникнення ЕРС в замкненому контурі, який обмежує поверхню, що пронизується змінним магнетним потоком.

• **Самоіндукція** – явище виникнення ЕРС в замкненому провідному контурі внаслідок зміни сили струму в цьому ж контурі.

• **Взаємоіндукція** – явище виникнення ЕРС в провіднику внаслідок зміни сили струму в іншому провіднику.

• **Скін-ефект** – це явище тенденції протікання змінного струму ближче до поверхні провідника.

Фізичні поняття

• **Вихрові струми (струми Фуко)** – струми, які виникають у провідниках недротоподібної форми внаслідок явища електромагнетної індукції.

Фізичні величини

• **Індуктивність провідника** – це відношення магнетного потоку через поверхню, обмежену провідником, до сили струму в провіднику, що спричинив цей магнетний потік (позначення L)

$$L = \frac{\Phi_B}{I}.$$

Фізичні системи й прилади

• **Флюксометр** – маленький плоский соленоїд (діаметром приблизно 1см) приєднаний до гальванометра. Прилад призначений для вимірювання індукції магнетного поля.

Постулати

➤ **Закон електромагнетної індукції (Фарадея):** якщо магнетний потік, крізь поверхню, яка обмежена замкненим провідним контуром, змінюється у часі, то в цьому контурі виникає ЕРС, що дорівнює темпу зміни цього магнетного потоку, причому індукований в контурі струм має такий напрям, що створений ним магнетний потік прагне компенсувати ту зміну магнетного потоку, яка його спричинила.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

➤ **Закон електромагнетної індукції (Максвелла):** змінне магнетне поле спричиняє виникнення вихрового електричного поля, циркуляція напруженості якого вздовж будь-якого замкнутого контура (уявного чи реального) дорівнює темпу зміни магнетного потоку крізь довільну поверхню, що обмежена цим контуром.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Задачі

(187) **Перевіримо закон електромагнетної індукції Фарадея для відрізка проводу, який рухається в однорідному магнетному полі нормально до його силових ліній.**

Перевірка закону електромагнетної індукції в цьому випадку зводиться до того, що слід показати, що в проводі виникне ЕРС, яка дорівнює темпу зміни магнетного потоку.

Як тільки провід почне рухатися в магнетному полі з певною швидкістю v (мал. 126), то з боку цього поля на електрони почне діяти сила $\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B}$, напрям якої, згідно з правилом правого гвинта, буде вниз, що спричинить рух електронів до цього кінця проводу. Цей рух, своєю чергою, призведе до порушення електронейтральності в провіді і, як наслідок, до виникнення електричного поля, спрямованого від верхнього кінця проводу до нижнього. Коли напруженість електричного поля зросте до такої величини, що його сила $\vec{F}_e = e\vec{E}$ зрівняється з силою магнетного поля, рух електронів до нижнього кінця проводу припиниться.

Умова цього стану

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0,$$

або

$$e\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{E},$$

а для модулів цих векторів

$$evB = -eE,$$

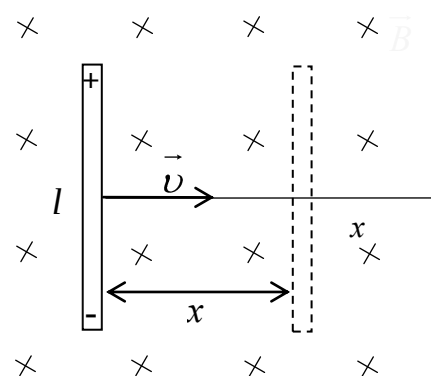
звідки

$$E = -vB,$$

або

$$\frac{\mathcal{E}}{l} = -vB,$$

$$\mathcal{E} = -vlB.$$



Мал. 126

Зазначимо, що оскільки процес розділення зарядів у проводі безперервний то різниця потенціалів між його кінцями є насправді електрорушійною силою, тобто

$$\mathcal{E} = -v l B.$$

Представивши далі швидкість v як $\frac{dx}{dt}$ і внісши під знак похідної сталі l і B , дістанемо

$$\mathcal{E} = -\frac{dx}{dt} l B = -\frac{d(lB)}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Застосувавши означення ЕРС та магнетного потоку, останню рівність можемо представити

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

(188) З'ясуємо, у чому полягає різниця між формулюваннями закону електромагнетної індукції Фарадея та Максвелла.

Закон електромагнетної індукції Фарадея передбачає існування провідного контура, у якому має виникнути струм внаслідок виникнення в ньому ЕРС індукції, тоді як це й же закон у формулюванні Максвелла стверджує, що наявність провідного контура не обов'язкова, вихрове електричне поле виникає незалежно від його існування, а цими контурами є замкнені силові лінії вихрового електричного поля.

(189) На основі закону електромагнетної індукції Фарадея та означення магнетного потоку проаналізуємо способи, якими можна отримати ЕРС індукції.

Згідно з законом електромагнетної індукції та означенням магнетного потоку для випадку однорідного (не обов'язково стаціонарного) магнетного поля

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} (BS \cos \alpha),$$

де S – площа обмежена контуром, α – кут між вектором індукції магнетного поля $\vec{B}$ та нормаллю до цієї поверхні $\vec{n}$.

З останньої формули бачимо, що є принаймні три способи отримання ЕРС:

- 1) змінювати в часі індукцію магнетного поля $\vec{B}$,
- 2) змінювати площу S , обмежену контуром,
- 3) змінювати кут α між векторами $\vec{B}$ і $\vec{n}$, наприклад, обертаючи контур.

Найбільш практичним є третій спосіб. Саме принцип обертання контура в магнетному полі міститься в основі роботи генераторів змінної ЕРС, які генерують електричний струм на теплових, водних, атомних, вітрових та припливних електростанціях, і забезпечують на нинішній день основну частку електроенергії, яку споживає людство.

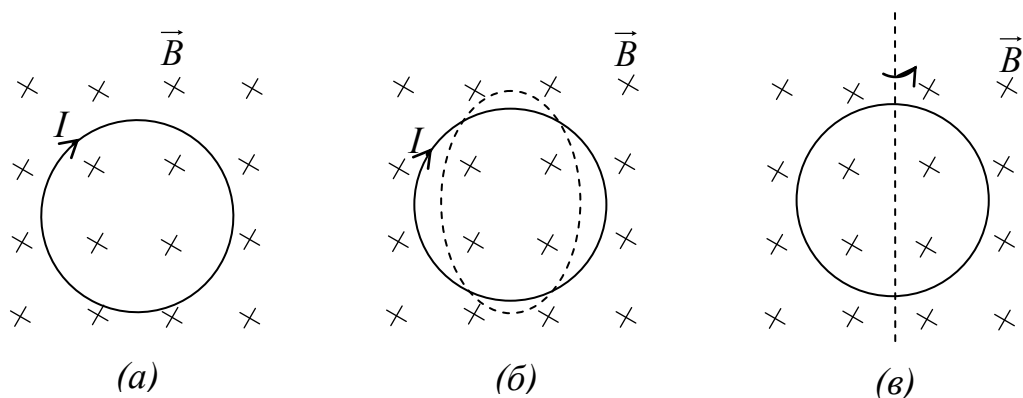
(190). Знайдено напрям індукованого струму у таких випадках електромагнетної індукції: а) провідний коловий контур є в однорідному магнетному полі, індукція якого зменшується (мал. 127, (а)); б) провідний коловий контур деформують в постійному однорідному магнетному полі (мал. 127, (б)); в) провідний контур рівномірно обертається в постійному однорідному магнетному полі (мал. 127, (в)).

а) Внаслідок зміни магнетного потоку через поверхню, обмежену контуром у ньому виникає ЕРС згідно з законом електромагнетної індукції. Струм, який потече в ньому, має два можливі напрями – за годинниковою стрілкою чи проти. Припустимо, що він тече за годин-

никовою стрілкою. Тоді створене ним магнетне поле в області, обмежній контуром, буде співнаправлене з зовнішнім полем, яке спричинило цей струм, тобто магнетний потік індукованого струму підтримуватиме магнетний потік зовнішнього поля, компенсуючи його від'ємну зміну, що цілком відповідає закону електромагнетної індукції.

Отже, напрям індуктивного струму вибрано правильно. Очевидно, якщо б зовнішнє магнетне поле зростало, то струм потік би в протилежному напрямі. Зазначимо, що ту частину закону електромагнетної індукції Фарадея, яка говорить про напрям індукваного струму, називають *правилом Ленца*.

б) Оскільки площа контура зменшується, то магнетний потік крізь поверхню, обмежену ним, також зменшується і зміна магнетного потоку від'ємна (наступне значення магнетного потоку є меншим за попереднє). Згідно з правилом Ленца, магнетний потік індукованого струму повинен компенсувати цю від'ємну зміну магнетного потоку, тобто магнетне поле індукованого струму повинно бути співнаправлене із зовнішнім магнетним полем, а для цього струм, згідно з Законом Біо-Саваро-Лапласа, має текти за годинниковою стрілкою.



Мал. 127

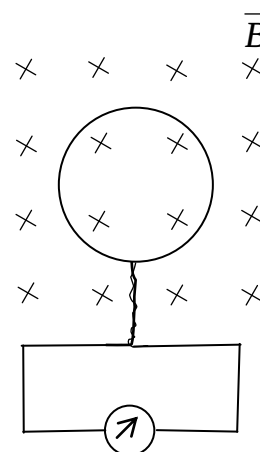
в) За обертання контура в магнетному полі (мал. 127, (б)) за першу чверть періоду обертання магнетний потік буде зменшуватися внаслідок збільшення кута між вектором індукції та вектором нормалі до площини контура. При цьому, очевидно, індукований струм потече за годинниковою стрілкою, тобто так, щоб його

магнетний потік підтримував магнетний потік зовнішнього поля (або інакше кажучи протидіяв від'ємній зміні магнетного потоку зовнішнього поля).

У другій чверті періоду обертання контура магнетний потік знову зростатиме і струм потече в протилежній бік, тобто проти годинникової стрілки, компенсуючи, згідно з правилом Ленца, додатну зміну магнетного потоку. У наступних чвертях періоду струм знову змінюватиме свій напрям.

(191) Пояснимо, як вимірюють індукцію магнетного поля флюксометром.

Помістимо плоский соленоїд флюксометра, який має N витків, в ту область магнетного поля, де ми хочемо виміряти його індукцію нормально до його силових ліній, тобто так, щоб магнетний потік через нього був максимальним (мал. 128). Далі слід зробити так, щоб магнетний потік зменшився до нуля. Це, очевидно, можна зробити, виключивши струм, який створює це поле, або повернувши соленоїд на 90° . При цьому внаслідок електромагнетної індукції через гальванометр пройде заряд



Мал. 128

$$q = \int_0^t Idt = \int_0^t \frac{\varepsilon}{R} dt = -\frac{1}{R} \int_0^t \frac{d\Phi}{dt} dt =$$

$$= -\frac{1}{R} \int_0^t d\Phi = \frac{\Phi}{R} = \frac{NBS}{R}.$$

Унаслідок проходження цього заряду стрілка гальванометра відхилиться на кут α , який пропорційний до цього заряду, тобто

$$\alpha = bq = \frac{bNS}{R} B = aB,$$

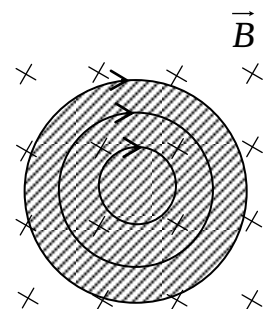
де b – коефіцієнт пропорційності між α і q , a – коефіцієнт пропорційності між α і B .

З останньої формули видно, що кут відхилення стрілки гальванометра пропорційний до індукції магнетного поля з коефіцієнтом пропорційності a , який називають сталою флюксометра (коефіцієнт пропорційності b називають сталою гальванометра). Сталу флюксометра знаходять експериментально, вимірявши кут α відхилення стрілки гальванометра, в ході описаного вище експерименту в магнетному полі з відомим значенням B .

З останньої формули також видно, що, знаючи сталу флюксометра, шкалу гальванометра можна проградувати в одиницях індукції магнетного поля, тобто в теслах.

(192) Пояснимо механізм виникнення вихрових струмів (струмів Фуко).

Розглянемо металеву пластину в магнетному полі (мал. 129). Нехай магнетний потік крізь цю пластину змінюється в часі. Тоді в кожному уявному контурі цієї пластини, згідно з законом електромагнетної індукції, виникає ЕРС, а оскільки ці контури провідні, то в них виникають струми, які будуть себе виявляти передовсім нагріванням пластини. Крім того, якщо пластина була нерухома (зміна магнетного потоку забезпечується, наприклад, зміною індукції магнетного поля), то вона може почати рухатися під дією сил Ампера, які почнуть діяти на вихрові струми з боку магнетного поля. Якщо ж зміна магнетного потоку забезпечується, наприклад, обертанням пластини в магнетному полі, то вона буде гальмуватись і т.п, тобто крім ефекту нагрівання можуть виникати різні механічні ефекти, пов'язані з дією магнетного поля на вих-



Мал. 129

рові струми. Якщо в пластині зробити прорізи, наприклад, у радіальному напрямі, то вихрових струмів буде значно менше.

Вихрові струми є шкідливими в осердях електромагнетів та трансформаторів. Щоб їх зменшити, ці осердя роблять не з суцільного куска сталі, а з пластин, розміщених паралельно до магнетного поля і склеєних між собою діелектриком.

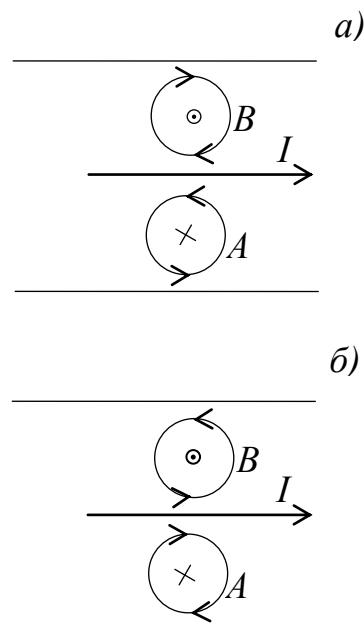
Вихрові струми використовують у роторах асинхронних електродвигунів та в індукційних печах для нагрівання чи плавлення металів, а також у фізіотерапії для нагрівання органів та тканин людей (індуктотермія).

(193) Пояснимо механізм виникнення скін-ефекту.

Розглянемо змінний в часі струм, який тече в провіднику, і в якийсь момент часу він для прикладу, зростає (мал. 130, а). Тоді зростає і магнетне поле цього струму. Це зростаюче магнетне поле спричиняє до виникнення ЕРС в будь-якому контурі, що пронизується цим магнетним полем (контури A і B). Згідно з правилом Ленца, індукований струм потече так, що він підсилюватиме струм по краях і послаблюватиме його всередині.

Коли струм в провіднику спадає (мал. 130, б), вихрові струми потечуть так, що підсилюватимуть струм всередині, тобто не даватимуть йому спадати і послаблюватимуть по краях, тобто сприятимуть його спаданню.

Отже, як у випадку зростання струму, так і у випадку його спадання, опір провідника буде більшим всередині і меншим по його краях. Очевидно, що цей ефект буде більшим, що більша буде частота зміни струму (бо тоді більшим буде темп зміни магнетного поля і, відповідно, більшими вихрові струми).



Мал. 130

(194) Пояснимо природу явища самоіндукції і встановимо вираз для ЕРС самоіндукції.

Уявимо собі замкнений контур (чи соленоїд), у якому тече змінний струм. Оскільки струм змінюється з часом, то поверхня, обмежена цим контуром, пронизується змінним магнетним потоком, що спричиняє виникнення ЕРС і, як наслідок, струму. Цей новий струм залежить не від величини струму, який тече в контурі, а від темпу його зміни. Дійсно, магнетний потік крізь поверхню, обмежену контуром, пропорційний до індукції поля струму, яке, своєю чергою, пропорційне до сили струму.

$$\Phi_B \sim B \sim I,$$

тобто

$$\Phi_B \sim I.$$

Коефіцієнт пропорційності між цими величинами позначають буквою L і називають *індуктивністю*, тобто

$$\Phi_B = LI.$$

Згідно з законом електромагнетної індукції

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d \underbrace{LI}_{\text{}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

(195) Представимо закон електромагнетної індукції у диференціальній формі.

Виходимо з інтегральної форми закону електромагнетної індукції:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Циркуляцію, у лівій частині цієї рівності, представимо згідно з теоремою Стокса, яка стверджує, що циркуляція якогось вектора вздовж будь-якого замкненого контура дорівнює потоку ротора цього вектора крізь будь-яку поверхню, яка спирається на цей контур, тобто $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$ замінимо на $\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}$. Дістанемо

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Переставивши місцями операції інтегрування та диферентціювання в правій частині цієї рівності, маємо

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{S}.$$

Оскільки тепер обидва інтеграли – це інтеграли за однією і тією ж поверхнею S , то їхня рівність означає рівність підінтегральних виразів, а саме

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ми отримали диференціальну форму закону електромагнетної індукції.

(196) Знайдемо вираз для індуктивності нормального соленоїда, тобто виразимо цю величину через геометричні розміри соленоїда та густоту витків.

Згідно з означенням, індуктивність – це відношення магнетного потоку до сили струму, яка є причиною цього магнетного потоку, тому

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{BSN}{I} = \frac{\mu_0 I n S N}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V,$$

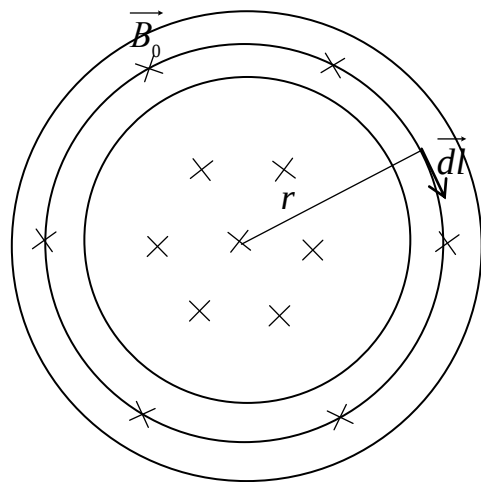
де ми, крім означення індуктивності, застосували послідовно означення магнетного потоку, формулу магнетної індукції нормального соленоїда, та означення густоти витків нормального соленоїда.

(197) Розкриємо принцип роботи прискорювача заряджених частинок бетатрона та встановимо умову, за якої заряджена частинка буде утримуватися в бетатроні на сталій орбіті.

У бетатроні заряджені частинки прискорюються у порожнистому відпомпованому тороїді, який поміщений в неоднорідне і змінне в часі магнетне поле, що слабшає від центру до країв (мал. 131). Неоднорідність магнетного поля забезпечується зрізанням країв полюсів електромагнета.

Змінне магнетне поле, згідно з законом електромагнетної індукції, спричиняє виникнення вихрового електричного поля, лінії напруженості якого замкнені й нормальні до силових ліній магнетного поля. Одна з таких силових ліній у випадку спадання магнетного поля показана на мал. 131. Це вихрове електричне поле і прискорює заряджені частинки.

Покажемо, що для того, щоб заряджені частинки оберталися на сталій орбіті, магнетне поле дійсно має бути неоднорідним, і встановимо нас-



Мал.131

кільки. Очевидно, що для сталого обертання частинки відцентрова сила інерції має компенсуватись силою магнетного поля, яка виникне, як тільки вона почне рухатись, тобто

$$qv v_0 = \frac{mv^2}{r},$$

звідки

$$rqB_0 = mv,$$

де B_0 – індукція магнетного поля в області тороїда, r – радіус тороїда.

Продиференціюємо останню рівність за часом

$$rq \frac{dB_0}{dt} = m \frac{dv}{dt}.$$

Згідно з основним рівнянням динаміки

$$m \frac{dv}{dt} = qE$$

тому

$$rq \frac{dB_0}{dt} = qE,$$

звідки

$$E = r \frac{dB_0}{dt}, \tag{1}$$

де E – напруженість прискорювального вихрового електричного поля, яку знайдемо із закону електромагнетної індукції

$$\int_l \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Інтеграл зліва дорівнює EL , де L – довжина кола, а справа $B_C S$, де S – площа круга, а B_C – середнє значення індукції магнетного поля в межах цього круга, тобто неоднорідне поле ми уявно замінили на однорідне, яке створює такий самий потік і має індукцію B_C . Отже, остання рівність виглядає так:

$$EL = S \frac{dB_C}{dt},$$

звідки

$$E = \frac{S}{L} \frac{dB_C}{dt} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} \frac{dB_C}{dt} = \frac{r}{2} \frac{dB_C}{dt}.$$

Підставивши отриманий вираз для E у формулу (1), дістанемо

$$\frac{r}{2} \frac{dB_C}{dt} = r \frac{dB_0}{dt}.$$

Звідки

$$B_0 = \frac{1}{2} B_C,$$

що означає, що для забезпечення стабільності орбіти зарядженої частинки індукція магнетного поля в області орбіти частинки має дорівнювати половині середнього значення магнетного поля по області, обмеженій цією орбітою.

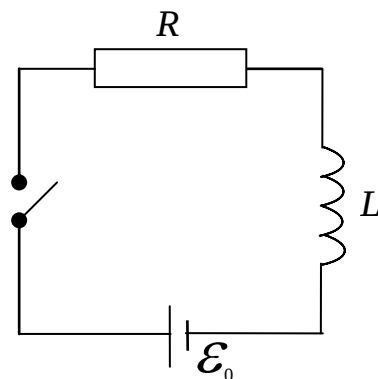
Зверніть увагу також на те, що для того, щоб прискорювати негативно заряджені частинки, магнетне поле має бути спадним, бо при цьому сила з боку магнетного поля буде протидіяти відцентрованій

силі. Для прискорення позитивних частинок, навпаки, магнетне поле має зростати.

(198) Установимо закон спадання сили струму після розмикання кола постійного струму.

Якщо розімкнути коло постійного струму, то струм, спадаючи, спричинить виникнення ЕРС самоіндукції вираз якої $-L \frac{dI}{dt}$, де L – індуктивність кола (мал. 132).

Згідно з другим правилом Кірхгофа, яке, очевидно, можна застосовувати не тільки до постійного струму, а й до будь-якого миттєвого значення змінного струму



Мал. 132

$$-L \frac{dI}{dt} = IR,$$

де IR – напруга в колі.

Розв’язок останнього диференціального рівняння

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + C,$$

де C – стала, яку знаходимо з умови, що в початковий момент часу $t=0$, тобто в момент розмикання кола, сила струму мала певне початкове значення I_0 . Підставивши ці значення в розв’язок, дістанемо $C = \ln I_0$ і остаточний розв’язок

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

або врахувавши закон Ома для замкненого кола

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Як бачимо, темп падіння сили струму залежить від параметрів кола R і L – зі збільшенням R сила струму спадає швидше, а зі збільшення L – повільніше.

Зауважимо, що як опір R , так і індуктивність L , не обов'язково мають бути відокремленими в якомусь елементі кола, а можуть бути розподілені по колі.

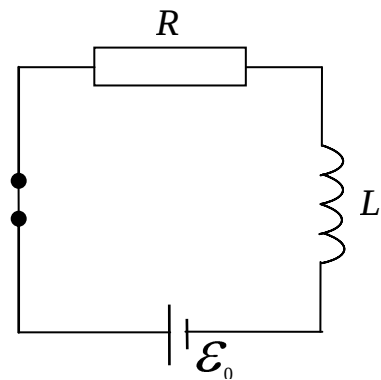
(199) Установимо закон зростання сили струму після замикання кола постійного струму.

Після замикання кола постійного струму (мал. 133), як і після його вимикання (задача 198), виникне ЕРС самоіндукції, і тому в колі буде дві ЕРС – ЕРС самоіндукції та ЕРС джерела. Згідно з другим правилом Кірхгофа

$$IR = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

або

$$IR + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0.$$



Мал. 133

Розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння першого порядку складається з розв'язку відповідного однорідного рівняння та свого частинного розв'язку. Частинний розв'язок цього рівняння знаходиться легко, бо шукаємо його як сталу величину для якої, очевидно, $\frac{dI}{dt} = 0$. З цієї умови з ос-

таннього рівняння частинний розв'язок – це стала $\frac{\varepsilon_0}{R}$. Отже, загальний розв'язок

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Підставивши початкові умови, а саме $t=0$ та $I=0$, визначивши за цих умов

$$C = -\frac{\varepsilon_0}{R},$$

дістанемо

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

(200) Виразимо енергію магнетного поля через силу струму, який є джерелом цього поля.

Енергію магнетного поля будемо шукати, як роботу сторонніх сил, яку вони виконують, щоб подолати ЕРС самоіндукції, яка виникає при вмиканні джерела постійної ЕРС.

За означенням потужності елементарна робота

$$dA = Pdt,$$

де P – потужність джерела ЕРС самоіндукції. Підставивши в цей вираз $P = \varepsilon I$ і враховуючи, що $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$ дістанемо

$$dA = \varepsilon I dt = -L \frac{dI}{dt} I dt = -L I dI,$$

$$A = \int_0^I -LIdI = -\frac{LI^2}{2}.$$

Отже, енергія магнетного поля створеного струмом I

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

(201) Виразимо густину енергії магнетного поля через індукцію цього поля.

Зробимо це для поля нормального соленоїда. В останній вираз для енергії магнетного поля підставимо вираз для індуктивності нормального соленоїда і отримаємо з цієї формули вираз для енергії магнетного поля цього соленоїда.

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 n^2 V I^2}{2} = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 V,$$

звідки, поділивши ліву й праву частину цієї рівності на об'єм соленоїда V , дістанемо густину енергії магнетного поля

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2,$$

або

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B\mu_0 H = \frac{1}{2} BH.$$

Оскільки вектори $\vec{B}$ і $\vec{H}$ співнаправлені, то

$$w = \frac{1}{2} \vec{B}\vec{H}.$$

Тема 6. Магнетне поле в речовині

Фізичні явища

- **Механомагнетний ефект (Ефект Барнета)** – це явище намагнення тіла внаслідок його обертання.
- **Магнетомеханічний ефект (ефект Ейнштейна-де-Гааза)** – це явище обертання тіла внаслідок його намагнення.
- **Електронний парамагнетичний резонанс(ЕПР)** – це явище поглинання парамагнетиком в магнетному полі електромагнетної хвилі з частотою, яка дорівнює частоті Лармора всіх електронів атома.
- **Ядерний магнетний резонанс (ЯМР)** – це явище поглинання магнетиком у магнетному полі електромагнетної хвилі з частотою, яка дорівнює ларморівській частоті ядра.
- **Циклотронний резонанс (ЦР)** – це явище поглинання вільними електронами твердого тіла в магнетному полі електромагнетної хвилі (фотонів) з частотою, яка дорівнює циклотронній частоті.
- **Магнетофононний резонанс (МФР)** – це явище поглинання вільними електронами твердого тіла в магнетному полі теплової хвилі (фононів) з частотою, яка дорівнює циклотронній частоті.

Фізичні поняття

- **Орбітальний магнетний момент електрона** – магнетний момент, який виникає внаслідок орбітального руху електрона в атомі.
- **Спіновий магнетний момент електрона** – магнетний момент, яким володіє кожен електрон (вільний чи зв'язаний з атомом).
- **Магнетон Бора** – це найменше значення орбітального магнетного моменту електрона (позначення μ_B).
- **Гіромагнетне відношення** – це відношення орбітального магнетного моменту електрона до його орбітального моменту імпульсу.
- **Спінове гіромагнетне відношення** – це відношення спінового магнетного моменту електрона до його власного моменту імпульсу.

- **Діамагнетик** – речовина, у якій кожен атом чи молекула не мають магнетного моменту.

- **Парамагнетик** – речовина, у якій кожен атом чи молекула мають магнетний момент, проте будь-який зразок цієї речовини не має магнетного моменту.

- **Феромагнетик** – речовина, кожен атом чи молекула якої має магнетний момент, і в якій існують мікрообласті (домени) з ненульовим магнетним моментом. Макрозразок цієї речовини може мати або не мати магнетного моменту залежно від його історії перебування в магнетних полях.

- **Частота Лармора** – це величина, на яку змінюється частота обертання електрона навколо ядра під впливом зовнішнього магнетного поля.

- **Магнетний гістерезис** – це явище залежності зміни намагнетченості феромагнетика в зовнішньому магнетному полі від його історії намагнетчення.

- **Точка Кюрі** – температура, за якої феромагнетик переходить у парамагнетик.

- **Намагнетченість (вектор намагнетченості)** – це магнетний момент одиниці об'єму магнетика (позначення j)

$$j \equiv \frac{dP_m}{dV}.$$

- **Магнетна сприйнятливість магнетика** – це відношення його намагнетченості до напруженості зовнішнього магнетного поля, яка її спричинила (позначення χ).

$$\chi \equiv \frac{j}{H_0}.$$

- **Відносна магнетна проникність магнетика** – це збільшена на одиницю його магнетна сприйнятливість (позначення μ)

$$\mu \equiv \chi + 1.$$

- **Антиферромагнетик** – речовина, в доменах якої атоми мають попарно протилежні магнетні моменти, а напрями магнетних моментів атомів у різних доменах різні.

- **Феримагнетик** – це некомпенсований антиферромагнетик (в межах домена є атоми двох сортів з попарно протилежними за напрямом магнетними моментами, які мають різну величину).

- **Множник Ланде (g - фактор)** – величина, яка показує, у скільки разів гіромагнетне відношення електрона в атомі є більшим за спінове гіромагнетне відношення.

- **Ефективна маса вільного електрона в твердому тілі** – це маса такої частинки з зарядом електрона, яка під дією заданої зовнішньої сили набуває такого ж прискорення, як і вільний електрон у твердому тілі під впливом тієї ж зовнішньої сили.

Задачі

(202) Знайдемо відношення орбітального магнетного моменту електрона в атомі P_{m_0} до його орбітального моменту імпульсу L_0 (орбітальне гіромагнетне відношення).

Оскільки орбітальний момент імпульсу електрона

$$L_0 = m \nu r,$$

то магнетний момент представимо також через радіус орбіти r та швидкість електрона на орбіті ν .

Згідно з означенням магнетного моменту

$$P_{m_0} = IS.$$

Оскільки струм I створюється одним електроном, то через поперечний переріз уявного провідника за період T проходить заряд e , тому, згідно з означенням сили струму

$$I = \frac{e}{T}.$$

З двох останніх рівностей дістанемо

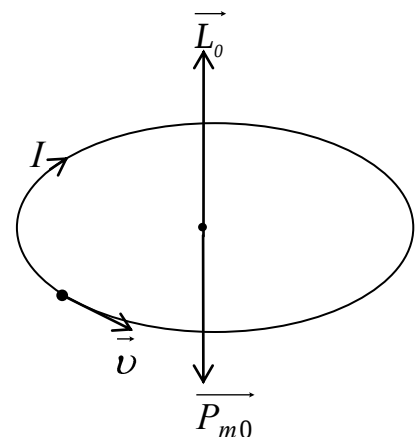
$$P_{m0} = \frac{e}{T} S = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr.$$

Звідси і з рівності для L_0 маємо шукане відношення

$$G_0 = \frac{P_{m0}}{L_0} = \frac{e}{2m}.$$

(203) Покажемо, що вектор моменту імпульсу електрона в атомі протилежний до вектора його орбітального магнетного моменту.

Вектор моменту імпульсу спрямований за поступальним рухом правого гвинта, якщо гвинт крутити в напрямі руху електрона (мал. 134), а вектор магнетного моменту знаходимо за тим самим правилом правого гвинта, коли гвинт крутити в напрямі струму. А оскільки еквівалентний руху електрона струм тече проти напрямку його руху, то вектор магнетного моменту є протилежним до вектора моменту імпульсу.



Мал. 134

(204) Знайдемо числове значення магнетона Бора (на основі квантованості моменту імпульсу).

3 гіромагнетного відношення

$$P_{m0} = \frac{e}{2m} L_0.$$

Оскільки орбітальний момент імпульсу квантований $L_0 = n\hbar$, де $\hbar$ – стала Планка, то і магнетний момент квантований

$$P_{m0} = \frac{e}{2m} n\hbar,$$

і найменше його значення буде за умови $n=1$. Це значення і є магнетоном Бора згідно з його означенням, тобто

$$\mu_B = \frac{e}{2m} \hbar = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Отже, магнетон Бора є квантом магнетного моменту.

(205) На основі того факту, що електрон має власний момент імпульсу $L_S = \pm \frac{\hbar}{2}$ та власний (спіновий) магнетний момент, який дорівнює магнетону Бора, знайдемо спінове гіромагнетне відношення.

Отже, спінове гіромагнетне відношення

$$\Gamma_S = \frac{P_{ms}}{L_S} = \frac{e\hbar}{2m} \frac{2}{\hbar} = \frac{e}{m}.$$

Очевидно, що, як і для орбітальних моментів, вектори $\vec{L}_S$ та $\vec{P}_{ms}$ взаємнопротилежні.

(206) Установимо, з яких складових складається магнетний момент атома та цілого магнетика.

Очевидно, що магнетний момент атома як векторна величина складається з векторної суми магнетних моментів усіх електронів та ядра. Нагадаємо, що магнетний момент окремого електрона, своєю чергою дорівнює сумі орбітального та спінового магнетних моментів.

Магнетний момент ядра також складається з його орбітального магнетного моменту (ядра насправді обертаються навколо спільного з електронами центра мас), власного магнетного моменту ядра та власних магнетних моментів нуклонів. Проте оскільки магнетний момент ядра на три порядки менший за магнетний момент електронів (ядерний магнетон $\frac{e\hbar}{2m_p}$ є меншим за магнетон Бора $\frac{e\hbar}{2m_e}$ в $\frac{m_p}{m_e} \approx 1837$ разів) то в багатьох задачах ним можна нехтувати.

Також очевидно, що магнетний момент магнетика (мактротіла) дорівнює сумі магнетних моментів усіх його атомів та вільних електронів (якщо такі є), кожен з яких володіє спіновим магнетним моментом.

(207) Покажемо, що гіромагнетне відношення електрона в атомі не дорівнює ні спіновому, ні орбітальному гіромагнетному відношенню.

Очевидно, що для вільного електрона, який має лише спіновий момент імпульсу та спіновий магнетний момент, гіромагнетне відношення дорівнює спіновому гіромагнетному відношенню, тобто $\frac{e}{m}$.

Для електрона в атомі як момент імпульсу дорівнює векторній сумі орбітального та спінового моментів імпульсу, так і магнетний момент дорівнює векторній сумі орбітального та спінового магнетних моментів. Це означає, що гіромагнетне відношення електрона в атомі не

дорівнює ні орбітальному $\frac{e}{2m}$, ні спіновому $\frac{e}{m}$, а якомусь проміжному значенню, яке залежить від кута між векторами орбітального та спінового моментів імпульсу, тобто

$$\Gamma = \frac{P_m}{L} = g \frac{e}{2m} = g\Gamma_s,$$

де g – множник Ланде (g – фактор), який для електрона в атомі $1 \leq g \leq 2$.

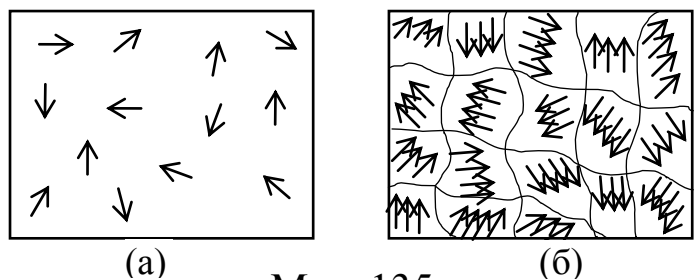
Якщо в атомі не один електрон, то це гіромагнетне відношення яке тепер дорівнює відношенню сумарного магнетного моменту всіх електронів до такого ж сумарного моменту імпульсу можна трактувати як гіромагнетне відношення атома (якщо знехтувати магнетним і механічним моментом ядра).

(208) Покласифікуємо всі магнетики на діа- пара- та феромагнетики з погляду наявності магнетних моментів у їхніх електронів, атомів, мікро- та макрообластей.

В атомі може скластися така ситуація, що його сумарний магнетний момент дорівнюватиме нулеві (орбітальні магнетні моменти скомпенсовані спіновими). Такі речовини і є діамагнетиками.

Зрозуміло, що оскільки в атомів відсутні магнетні моменти, то речовина загалом також не має магнетного моменту.

Якщо ж кожен атом магнетика має магнетний момент, то це ще не означає, що магнетик має магнетний момент. Дійсно, внаслідок того, що магнетні моменти атомів спрямовані хаотично, то їхня сума величезної кількості доданків практично дорівнює нулеві, що озна-



Мал. 135

часе, що парамагнетик, як і діамагнетик загалом, не має магнетного моменту (мал. 135 (а)).

У феромагнетику, на відміну від парамагнетика, немає цілковитого хаосу в напрямках магнетних моментів атомів – там є цілі мікробласті (домени), у яких магнетні моменти атомів упорядковані (мал. 135 (б)). Проте оскільки магнетні моменти окремих доменів спрямовані хаотично, то феромагнетик загалом, як і діа- та парамагнетик, не має магнетного моменту.

(209) З'ясуємо механізм виникнення доменів у феромагнетику.

Цей механізм подібний до механізму виникнення доменів у сегнетоелектрику.

Може статися так, що в якийсь момент часу магнетні моменти двох сусідніх атомів виявляться співнапрямленими. При цьому магнетне поле, створене відповідними молекулярними струмами цих атомів, підсилить. Тоді під впливом цього поля упорядкується третій, четвертий і п'ятий атом, причому, що більше магнетних моментів упорядкується, то стійкішою стає ця система й активніше спонукає до упорядкування інші атоми.

На перший погляд видається, що це упорядкування магнетних моментів має поширитися на весь кристал. Проте взявши до уваги те, що в інших областях кристалу виникають подібні флуктуації магнетного моменту, які поводяться так само, доходимо висновку, що весь кристал буде поділений на області з упорядкованими магнетними моментами, причому їхні напрями будуть різні в різних областях (доменах). Очевидно, що розміри цих областей будуть більші, що менша ймовірність виникнення флуктуації магнетного моменту.

(210) Покажемо, як за приблизними розмірами домену у феромагнетику можна знайти ймовірність його виникнення і навпаки.

За означенням ймовірності, ймовірність виникнення домену

$$P = \frac{1}{N},$$

де N – кількість атомів у домені, тобто в одному випадку з N виникає флуктуація магнетного моменту, яка спричиняє виникнення домену. Представимо кількість атомів N через концентрацію n та об'єм V . Дістанемо

$$P = \frac{1}{nV},$$

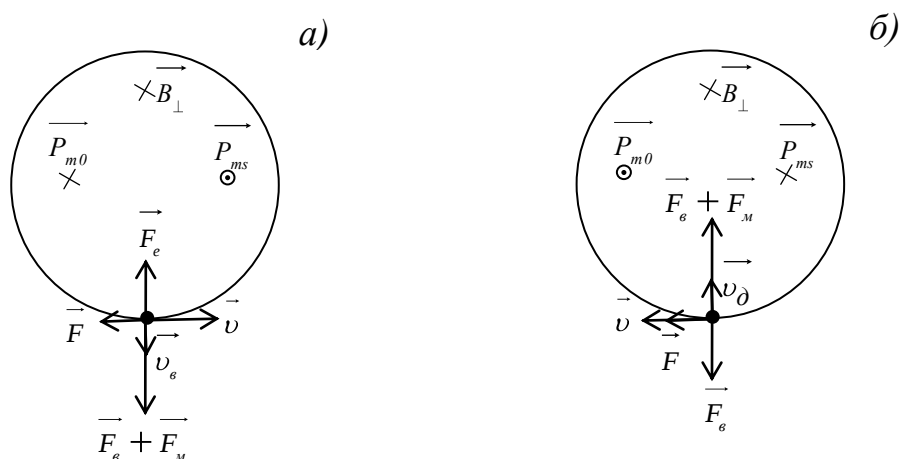
звідки бачимо, що більша ймовірність виникнення домену, то менший його об'єм.

(211) З'ясуємо природу діамагнетного ефекту, тобто покажемо, що діамагнетик намагнечується проти зовнішнього магнетного поля, що означає, що магнетне поле в діамагнетику послаблюється.

Спочатку покажемо, що в магнетному полі електрони в одних атомах діамагнетика сповільнюють свою орбітальну швидкість, а в інших – прискорюють.

Для цього поділимо атоми діамагнетика, який потрапив у магнетне поле, на два типи: ті, для яких нормальна до площини орбіти складова вектора індукції зовнішнього магнетного поля $B_{\perp}$ співнапрямлена з його орбітальним магнетним моментом (мал. 136, (а)), і ті, для яких ця складова спрямована проти орбітального магнетного моменту, тобто за напрямом спінового магнетного моменту (мал. 136, (б)), оскільки в електрона в атомі діамагнетика орбітальний та спіновий магнетні моменти однакові й протилежні за напрямом.

З мал. 136 видно, що орбітальна швидкість електрона в атомі



Мал. 136

першого типу зменшується, а другого – збільшується. Дійсно, в магнетному полі до електричної сили притягання до ядра F_e та відцентрової сили інерції F_B додається ще сила магнетного поля F_M , яка в першому випадку спрямована від центра, а в другому – до центра. Тоді рівнодійна сила вже не дорівнює нулеві і електрон починає сходити з орбіти: в першому випадку від ядра, а в другому – до нього. Як видно з того ж малюнка, це сходження з орбіти спричиняє виникнення рівнодійної сили $\vec{F}$, яка в першому випадку гальмує орбітальний рух електрона, а в другому – прискорює. Це гальмування в першому випадку (мал. 136, а) приводить до зменшення орбітального магнетного моменту, а оскільки спіновий магнетний момент залишається незмінним, то результативний магнетний момент спрямований в бік спінового, тобто проти поля. У другому випадку (мал. 136, б) орбітальний магнетний момент зростає і результативний магнетний момент спрямований в бік орбітального, тобто знову ж таки проти зовнішнього поля (пам'ятаємо, що напрям орбітального магнетного моменту знаходимо, як напрям нормалі до площини струму). Отже, магнетне поле в діамагнетику послаблюється.

Насправді електрон не сходить зі своєї орбіти, це забороняється квантовою фізикою, тому єдиним результатом дії магнетного поля є сповільнення чи прискорення його орбітального руху саме для того,

щоб відцентрова сила інерції своїм зменшенням чи збільшенням забезпечила рівність нулевій рівнодійній силі.

Ті електрони які рухаються під кутом до силових ліній очевидно мають рухатися гвинтовими лініями (задача 178). Проте, вони водночас рухаються навколо ядра атома. Оскільки електрон в атомі не може плавно змінити своєї орбіти (це заборонено квантовою механікою), то результатом цих двох рухів є поворот цілої площини орбіти електрона – так звана прецесія орбіти. При цьому вектор орбітального магнетного моменту описує конус навколо вектора індукції зовнішнього магнетного поля.

(212) Знайдемо вираз для зміни орбітальної частоти електрона в зовнішньому магнетному полі (частоти Лармора).

Для цього напишемо основне рівняння динаміки в неінерційних системах відліку (НСВ) за відсутності та присутності магнетного поля.

За відсутності магнетного поля сила електричного притягання електрона до ядра зрівноважується відцентровою силою інерції

$$F_e = F_g,$$

або

$$eE = m\omega_0^2 r, \quad (1)$$

де ω_0 – циклічна орбітальна частота електрона за відсутності магнетного поля.

Як ми вже з'ясували (попередня задача), у зовнішньому магнетному полі орбітальна частота електрона змінюється. Позначимо її ω і напишемо основне рівняння динаміки в НСВ для цього випадку

$$F_e = F_g + F_M,$$

або

$$eE = m\omega^2 r + e\nu B.$$

Представивши лінійну швидкість через кутову, маємо

$$eE = m\omega^2 r + e\omega r B. \quad (2)$$

Віднявши рівняння (1) і (2), дістанемо

$$e\omega B = m(\omega_0^2 - \omega^2);$$

Оскільки ω мало відрізняється від ω_0 , то

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\Delta\omega\omega,$$

тоді

$$e\omega B = 2m\Delta\omega\omega,$$

звідки

$$\Delta\omega = \frac{eB}{2m}.$$

Це і є зміна орбітальної частоти електрона в зовнішньому магнетному полі, або інакше: величина, на яку зменшується чи збільшується орбітальна частота електрона під впливом зовнішнього магнетного поля.

Цікаво приблизно обчислити цю зміну частоти в магнетному полі і порівняти її з частотою за відсутності поля. Для $B = 1$ Тл дістаємо

$\Delta\omega = 10^{11}$ Гц, тоді як $\omega_0 \approx 10^{15}$ Гц, тобто $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 10^{-4}$, що означає, що

орбітальна частота електрона в магнетному полі змінюється на 0,01%.

Очевидно, що так само мало змінюється і орбітальний магнетний момент електрона.

(213) Знайдемо зміну орбітального магнетного моменту електрона в магнетному полі.

Зміна орбітальної частоти електрона спричиняє зміну його орбітального магнетного моменту. До внесення в магнетне поле, цей магнетний момент

$$P_{m0} = \frac{1}{2} e \nu_0 r = \frac{1}{2} e \omega r^2.$$

Після зміни частоти на $\Delta\omega$ він зміниться на величину

$$\Delta P_{m0} = \frac{1}{2} e \Delta\omega r^2.$$

Підставивши сюди вираз для частоти Лармора $\Delta\omega = \frac{eB}{2m}$ дістанемо зміну орбітального моменту електрона в магнетному полі.

$$\Delta P_{m0} = \left(\frac{er}{2} \right)^2 \frac{B}{m}.$$

Відносна його зміна

$$\frac{\Delta P_{m0}}{P_{m0}} = \frac{eB}{2m\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Бачимо, що зміна орбітального магнетного моменту така ж, як і зміна частоти обертання електрона, а оскільки вона дуже мала (попередня задача), то діамагнетний ефект є дуже слабкий.

(214) Покажемо, що в пара- та феромагнетику магнетне поле підсилюється.

Дійсно, атоми пара - чи феромагнетика володіють магнетним моментом, тому їхні магнетні моменти орієнтуються за силовими лініями поля, тим самим підсиливши його (задача 151 про вільний контур зі струмом в магнетному полі).

Очевидно, що в пара - чи феромагнетику, як і в діамагнетику, також відбувається зміна орбітальної частоти електрона, проте вона, як ми показали (попередня задача), є дуже малою і тому практично не впливає на загальний ефект.

(215) Покажемо, що у феромагнетику на відміну від діа- чи парамагнетика, після виключення зовнішнього магнетного поля упорядкованість магнетних моментів не зникає цілком, тобто їм властиве явище гістерезису.

Згадаємо механізм утворення домену: в деякій точці феромагнетика виникає досить сильна флуктуація магнетного поля унаслідок випадково однакової орієнтації двох чи більше магнетних моментів. У цьому полі магнетні моменти інших атомів також повертаються у напрямі поля і це поле стає ще сильнішим. Тоді воно легко зорієнтує інші магнетні моменти і т.д. Цей процес поширюється у речовині, доки не натрапить на межу іншого домена. У межах одного домена напрям магнетних моментів не змінюється з часом, тобто він є стійким.

Коли включається магнетне поле, магнетні моменти всіх доменів повертаються в напрямі поля, тобто весь магнетик стає одним великим доменом. Але як ми з'ясували, напрям магнетного моменту в домені є стійким і без поля, тому він залишається таким і після виключення зовнішнього магнетного поля. Проте ця упорядкованість буде частковою внаслідок руйнівної дії хаотичних теплових рухів атомів.

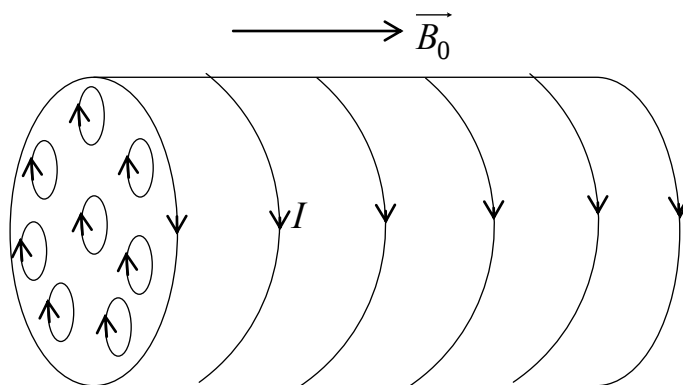
(216) Покажемо, що пара- та ферромагнетику властиве насичення магнетного моменту в зовнішньому магнетному полі, тобто явище незростання магнетного моменту, починаючи з певних значень напруженості зовнішнього магнетного поля.

Магнетний момент магнетика дорівнює сумі магнетних моментів усіх атомів або всіх доменів у випадку ферромагнетика, тому коли зовнішнє магнетне поле є достатньо сильним, щоб зорієнтувати магнетні моменти цих усіх атомів чи доменів в одному напрямі, то наступне збільшення індукції зовнішнього магнетного поля вже не приводить до збільшення магнетного моменту.

(217) Покажемо, що в магнетиках зовнішнє магнетне поле підсилюється в μ разів.

Розглянемо магнетик у вигляді циліндра, що розміщений в зовнішньому магнетному полі B_0 , паралельному до його осі (мал. 137).

Під впливом зовнішнього магнетного поля його магнетні моменти будуть упорядковані, тому і площини відповідних мікрострумів будуть упорядковані.



Мал. 137

Згідно з принципом суперпозиції полів, індукція магнетного поля всередині магнетика $\vec{B}$ дорівнює сумі індукції зовнішнього $\vec{B}_0$ та внутрішнього $\vec{B}'$ магнетних полів.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (1)$$

З малюнка видно, що магнетні поля мікрострумів всередині магнетика компенсують один одного, а по краях – ні, тому весь магнетик ми можемо розглядати, як соленоїд з одним шаром витків зі струмом I , і густотою витків n . Тому

$$\begin{aligned} B' &= \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} \frac{P_m}{SN} = \mu_0 \frac{P_m}{V} = \mu_0 J = \\ &= \mu_0 \chi H_0 = \mu_0 \chi \frac{B}{\mu_0} = \chi B_0, \end{aligned}$$

де ми послідовно застосували формулу магнетного поля соленоїда, означення густоти витків, означення магнетного моменту, означення намагнетченості, означення магнетної сприйнятливості та формулу зв'язку між напруженістю та індукцією магнетного поля.

Для вектора $\vec{B}'$

$$\vec{B}' = \chi \vec{B}_0,$$

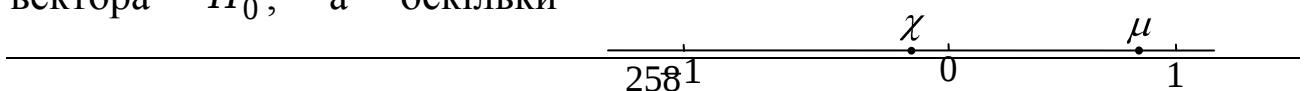
Підставивши останню формулу в (1), дістанемо

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \chi \vec{B}_0 = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0,$$

звідки бачимо, що в діамагнетиках, оскільки $0 \leq \mu \leq 1$, магнетне поле послаблюється, а в пара- та феромагнетиках, оскільки $\mu > 1$, – підсилюється, причому у феромагнетиках, для яких $\mu \gg 1$, в кілька порядків, разів.

(218) Оцінимо межі, у яких лежать магнетні сприйнятливості різних магнетиків.

Нам відомо, що діамагнетики намагнетчуються проти зовнішнього магнетного поля (задача 211), тобто вектор $\vec{J}$ є протилежним до вектора $\vec{H}_0$, а оскільки



$\vec{J} = \chi \vec{H}_0$, то $\chi < 0$. Крім того, відомо, що цей ефект дуже слабкий (задача 213) тобто вектор $\vec{J}$ за своєю величиною значно менший за $\vec{H}_0$, тобто $|\chi| \ll 1$. Число χ знаходиться на числовій прямій зліва від нуля проте близько до нього, а число $\mu = 1 + \chi$ справа від нуля і близько до 1 (мал. 138).

Парамагнетики намагнечуються у напрямі зовнішнього магнетного поля (задача 210), тому для них $\chi > 0$ і, відповідно, $\mu > 1$.

Те ж саме стосується і феромагнетиків лише з тією різницею, що оскільки атоми феромагнетиків мають значний магнетний момент, то $\mu \gg 1$.

(219) Пояснимо експериментальну криву магнетного гістерезису.

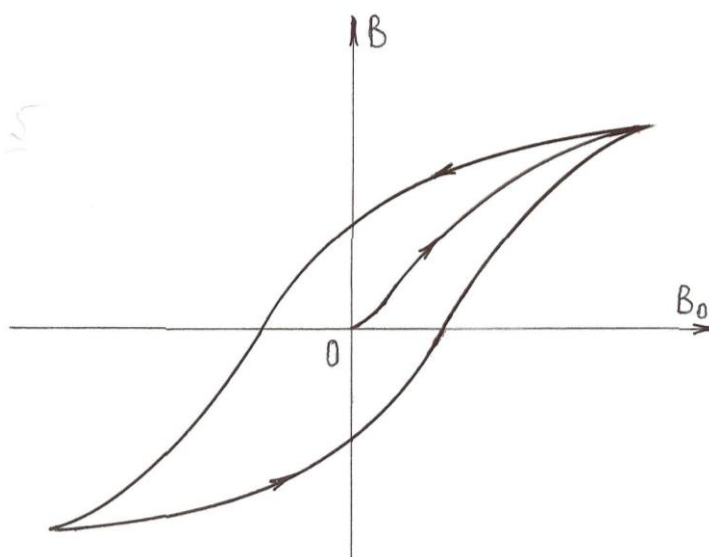
На мал. 139 показана експериментальна крива магнетного гістерезису, тобто експериментальна залежність намагнеченості J від напруженості зовнішнього магнетного поля H_0 (чи індукції магнетного поля в магнетику B від індукції зовнішнього магнетного поля B_0).

З цього графіка видно, що зі збільшенням індукції зовнішнього магнетного поля намагнеченість зростає, причому нелінійно, що говорить про те, що магнетна проникність не є сталою величиною (згадаємо, що $B = \mu B_0$).

Отже, для феромагнетика

$$B = \mu B_0$$

тобто магнетна проникність μ не є константою, а функцією від зовнішнього поля, причому за кожного значення індукції цього поля магнетна проникність дорівнює



Мал. 139

тангенсу кута нахилу дотичної в цій точці до осі B_0 і, як бачимо з графіка, вона спочатку зростає до точки перегину кривої намагнення, а потім спадає до свого мінімального для феромагнетика значення $\mu = 1$, за якого індукція поля всередині феромагнетика практично досягає насичення (задача 216). Дійсно, оскільки

$$\mu = 1 + \chi = 1 + \frac{J}{H_0},$$

то за умови насичення ($J = \text{const}$), якщо $H_0 \rightarrow \infty$ то $\mu \rightarrow 1$. На перший погляд видається, що тоді $B = B_0$, тобто B зростає пропорційно до B_0 , то жодного насичення не може бути, проте порівняно з попереднім зростанням з коефіцієнтом пропорційності $\sim 10, 10^2, 10^3$ чи 10^4 цим зростанням можна знехтувати і вважати, що практично $B = \text{const}$.

Якщо після досягнення насичення почати зменшувати індукцію зовнішнього поля, то ми бачимо, що крива не буде повертатися назад тим самим шляхом, а розміститься вище від кривої першого намагнення. Це відбувається тому, що упорядкованість магнетних моментів доменів не зникає цілком, бо магнетним моментом доменів властива стійкість (задача 215). Коли зовнішнє магнетне поле зменшити до нуля, то поле в феромагнетиках не дорівнюватиме нулю (залишкова намагненість). Для того, щоб поле у феромагнетиках зменшилось до нуля, до нього слід прикласти зовнішнє поле протилежного напрямку певної величини (коерцитивна сила). Якщо і надалі збільшувати зовнішнє поле в цьому напрямі, то поле у феромагнетиках знову досягне насичення і за наступного зменшення зовнішнього поля все буде повторюватись – крива замкнеться (петля гістерезису). Якщо припинити змінювати зовнішнє поле в точці $B_0 = 0$, то феромагнетик залишиться постійним магнетом. Для того, щоб повернутися в точку 0, слід до феромагнетика прикласти зовнішнє поле протилежного

напряму до поля в ньому, яке створить поле всередині феромагнетика такої ж величини і тоді виключити зовнішнє поле.

Як бачимо, намагнеченість феромагнетика залежить від того, в якому зовнішньому полі він перебував до того, тобто залежить від його історії намагнечення.

(220) Покажемо, що існує певна температура, за якої феромагнетик переходить у парамагнетик.

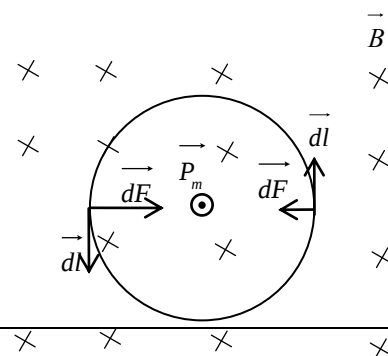
Очевидно, що з підвищенням температури все більше проявлятиме себе руйнівна дія хаотичного теплового руху атомів і за певної температури упорядкованість магнетних моментів у доменах буде цілком зруйнована, тобто домени практично зникнуть і феромагнетик перетвориться на парамагнетик. Ця температура називається точкою Кюрі. Наприклад, для нікелю точка Кюрі становить 358°C , для заліза – 780°C , для кобальту – 1150°C .

Ідея експериментального вимірювання точки Кюрі полягає в тому, що коли нагрівати феромагнетний стержень, який є осердям трансформатора, то за температури Кюрі магнетний потік в трансформаторі різко знизиться і сила струму у вторинній обмотці різко впаде.

(221) Покажемо, що в неоднорідному магнетному полі парамагнетик рухається в бік сильнішого поля, тоді як діамагнетик – в бік слабшого поля (виштовхується з магнетного поля).

Раніше ми вже показали (задача 155), що магнетний диполь (коловий струм), як і електричний, в неоднорідному магнетному полі рухається в бік сильнішого поля. Оскільки парамагнетик і є системою замкнених мікрострумів, то на них діє сила в бік сильнішого поля, що і виявляє себе, як дія на весь парамагнетик.

Щодо діамагнетика, то він, як відомо, намагнечується проти зовнішнього магнетного поля, а це можна трактувати, як появу замкнених струмів (мал. 140) площини



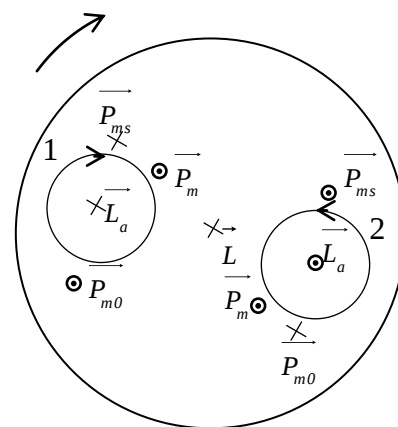
яких є нормальними до зовнішнього магнетного поля, причому напрями цих струмів такі, що їхні магнетні моменти спрямовані проти цього поля. З малюнка видно, що сила Ампера $\overrightarrow{dF}$, яка діє на елемент струму в області сильнішого поля напрямлена в область слабшого поля і вона є більшою за ту ж силу, яка діє на елемент струму в області слабшого поля, тому рівнодійна цих сил спрямована в область слабшого поля, тобто діамагнетик виштовхується з магнетного поля.

Описані явища підтверджуються експериментально.

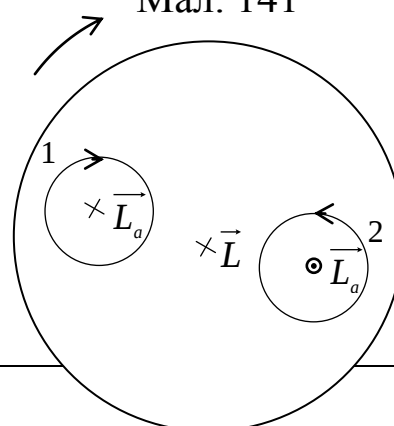
Подібними міркуваннями можна також довести, що в однорідному магнетному полі парамагнетний стержень витягнеться вздовж поля, а діамагнетний – нормально до нього.

(222) Покажемо, що обертання магнетика приводить до його намагнетчення (механомагнетний ефект, Барнет, 1909 р.) і, навпаки, намагнетчення магнетика викликає його обертання (магнетомеханічний ефект, Айнштайн і де-Гааз, 1915 р.).

Нехай діамагнетик у вигляді циліндра обертається (мал. 141). Тоді його момент імпульсу $\vec{L}$ спрямований в площину малюнка. Усі атоми цього тіла можна поділити на дві групи: 1) ті, у яких вектор їхнього орбітального моменту імпульсу проектується на напрям $\vec{L}$ за вектором $\vec{L}$; 2) ті, у яких – проти вектора $\vec{L}$. Покажемо, що як в перших, так і в других атомів з'явиться магнетний момент, причому однакового напрямку. Дійсно, момент імпульсу атома $\vec{L}_a$



Мал. 141



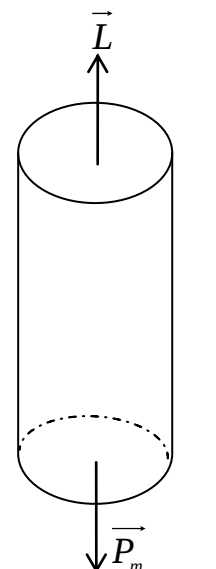
Мал. 142

збільшиться на величину моменту імпульсу тіла, що спричинить збільшення його орбітального магнетного моменту, оскільки вони пов'язані гіромагнетним відношенням (задача 202). Як видно з малюнка цей сумарний момент імпульсу спрямований в площину малюнка, тому орбітальний магнетний момент – з площини малюнка. Але оскільки він збільшився, то він вже не є скомпенсований спіновим магнетним моментом (пам'ятаємо, що йдеться про діамagnetик) і результативний магнетний момент вже не дорівнює нулеві і має напрям з площини малюнка.

Щодо атома типу 2, то його момент імпульсу, який напрямлений до нас, зменшиться на величину моменту імпульсу тіла, що спричинить зменшення орбітального магнетного моменту, який напрямлений від нас. Але тепер спіновий магнетний момент, який напрямлений до нас, вже не скомпенсований орбітальним, тому результативний магнетний момент спрямований, як і в атома типу 1, до нас.

Розглянемо тепер парамагнетний циліндр. Парамагнетизм означає наявність в атомів магнетних моментів. Якщо циліндр у стані спокою (мал. 142), то магнетні моменти атомів типу 1 і 2 є взаємно протилежними (нехай магнетний момент атома визначається орбітальним магнетним моментом). Коли циліндр обертається, то в атома типу 1 внаслідок зростання моменту імпульсу, зростає і орбітальний магнетний момент, який спрямований проти моменту імпульсу (на мал. 142 до нас). Водночас в атома типу 2 момент імпульсу зменшується тому зменшується і магнетний момент, який спрямований від нас. У результаті сумарний магнетний момент атомів 1 і 2 вже не дорівнює нулеві, а має певну величину й напрям до нас, тобто проти вектора моменту імпульсу, викликаного обертанням парамагнетика.

Для феромагнетика міркування аналогічні, з тією різницею, що роль атомів типу 1 і 2 будуть відігравати домени типу 1 і 2.



Очевидно, що вільні електрони також вноситимуть свій вклад у механомагнетний ефект у магнетиках, оскільки вони внаслідок обертання тіла також обертатимуться, що спричинить виникнення магнетного моменту, пов'язаного з цим обертанням, причому напрям цього магнетного моменту буде протилежним до вектора $\vec{L}$. З мал. 141 та 142 також видно, що пов'язані з обертанням тіла магнетні моменти ядер послаблюють механомагнетний ефект.

Отже, можна зробити висновок, що внаслідок обертання всі магнетики намагнетчуються в напрямі, протилежному до вектора моменту імпульсу, зв'язаного з цим обертанням (мал. 143).

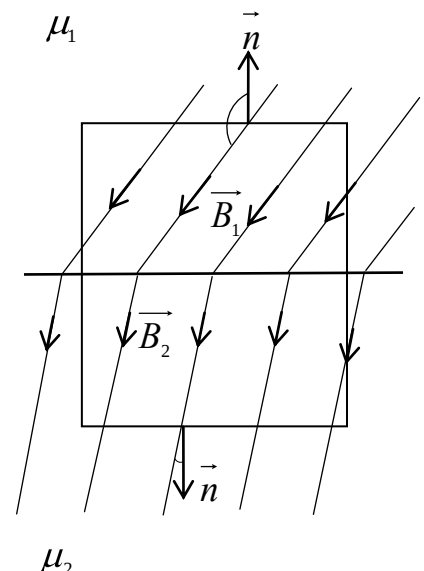
Якщо ж, навпаки, намагнетити магнетик, то кожен атом, отримавши додатковий магнетний момент, отримає і додатковий момент імпульсу, – виникне магнетомеханічний ефект.

(223) На основі закону відсутності в природі магнетних зарядів доведемо, що на межі двох магнетиків нормальна складова вектора індукції не змінюється.

Подібно до того, як ми це робили для електростатичного поля (задача 55), виділимо на межі середовищ область, обмежену нескінченно малим кубом, площа грані якого dS (мал. 144). Очевидно, що в межах цього нескінченно малого куба магнетне поле можна вважати однорідним, тому ми можемо скористатися формулою потоку однорідного поля крізь плоску поверхню. Врахувавши, що потоки через бічні взаємно протилежні грані однакові за величиною і протилежні за знаком, робимо висновок, що потік через куб – це сума потоків через верхню та нижню грані.

За теоремою Остроградського-Гауса для магнетного поля

$$-B_{1n}dS + B_{2n}dS = 0,$$



де B_{1n} , B_{2n} – нормальні до межі середовищ складові вектора $\vec{B}$ в першому та другому середовищі (знак мінус біля B_{1n} тому, що кут між вектором $\vec{B}$ і вектором зовнішньої нормалі в першому середовищі тупий і косинус цього кута відповідно від'ємний).

З останньої рівності маємо

$$B_{1n} = B_{2n},$$

а для вектора $\vec{H}$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n},$$

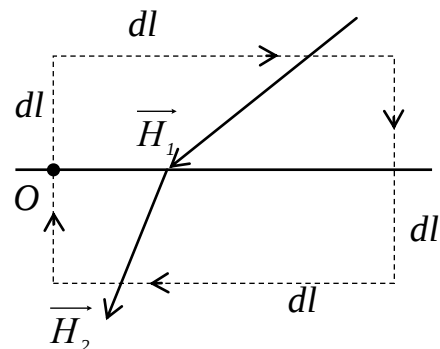
або

$$H_{2n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{1n},$$

що означає, що в середовищі з більшою відносною магнетною проникністю нормальна складова вектора $\vec{H}$ менша.

(224) На основі теореми про магнетну циркуляцію доведемо, що на межі двох магнетиків тангенціальна складова вектора напруженості не змінюється.

Подібно до того як ми це робили для електростатичного поля (задача 54) побудуємо на межі магнетиків прямокутний замкнений контур зі сторонами dl і $2dl$ (мал. 145). Оскільки поле в межах цього нескінченно малого контура однорідне, то циркуляція вектора $\vec{H}$ вздовж будь-якої сторони контура є добутком проекції вектора $\vec{H}$ на цю сторону на довжину сторони. Тому, вибравши обхід за



Мал. 145

контуром за годинниковою стрілкою, знаходимо вираз для циркуляції вектора $\vec{H}$ вздовж нього:

$$-H_{1n}dl - H_{1t}dl + H_{1n}dl + H_{2n}dl + H_{2t}dl - H_{2n}dl,$$

де індекси n і t означають нормальну й тангенціальну до межі середовищ складову вектора $\vec{H}$.

Згідно з теоремою про магнетну циркуляцію, знайдена нами циркуляція $-H_{1t}dl + H_{2t}dl$ дорівнює струму, який пронизує поверхню, обмежену цим контуром, тобто

$$-H_{1t}dl + H_{2t}dl = dI.$$

У випадку відсутності струмів

$$-H_{1t}dl + H_{2t}dl = 0,$$

звідки

$$H_{1t} = H_{2t},$$

тобто тангенціальна складова вектора $\vec{H}$ при переході через межу середовищ залишається незмінною. А щодо вектора $\vec{B}$, то з останньої рівності

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2},$$

або

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t},$$

тобто за умови переходу в середовище з більшою відносною магнетною проникністю тангенціальна складова вектора $\vec{B}$ збільшується.

(225) **Виведемо закон заломлення силових ліній на межі двох магнетиків.**

Нехай для однозначності $\mu_1 < \mu_2$. Оскільки нормальна складова вектора $\vec{B}$ є однаковою в цих двох середовищах (задача 223), а тангенціальна його складова в другому середовищі більша ніж в першому (задача 224), то він має заломитися від нормалі (мал. 146).

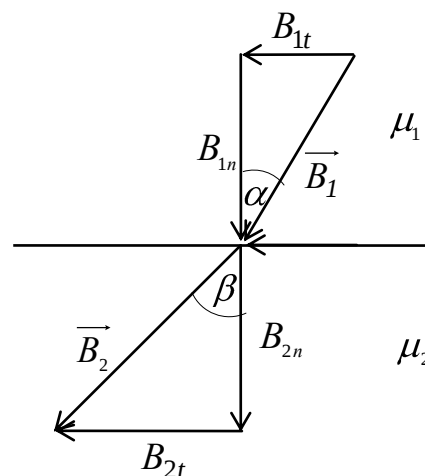
Знайдемо відношення тангенсів кутів α і β .

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{B_{1t}}{B_{2n}} \frac{B_{2n}}{B_{2t}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

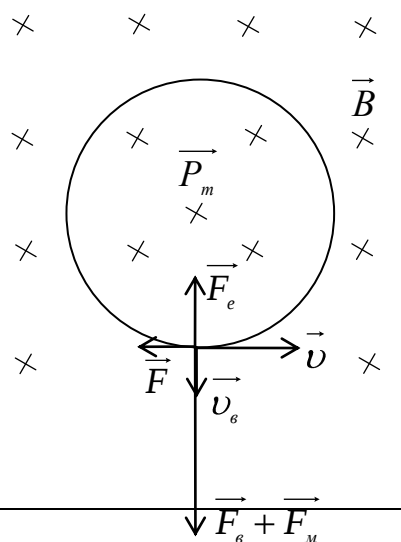
тобто відношення тангенса кута падіння до тангенса кута заломлення дорівнює відношенню відповідних магнетних проникностей.

(226) **Розкриємо природу виникнення електронного парамагнетного резонансу (ЕПР).**

Якщо помістити парамагнетик у магнетне поле, то магнетні моменти атомів будуть зорієнтовані за напрямом поля (задача 151). Якщо магнетний момент атома визначається орбітальним магнетним моментом (сумарний орбітальний магнетний момент більший за сумарний спіновий), то в магнетному полі орбітальна частота, яка пов'язана



Мал. 146



Мал. 147

з магнетним моментом, зменшується. Дійсно, додаткова сила з боку зовнішнього магнетного поля спричиняє сходження електрона зі своєї орбіти (мал. 147), що надалі зумовлює виникнення сили $\overline{F}$, яка гальмує його орбітальний рух, зменшуючи його частоту на величину частоти Лармора.

Якщо тепер через цей парамагнетик пропустити електромагнетну хвилю різних частот у напрямі магнетного поля, то поглинатися буде лише хвиля тієї частоти ω , яка дорівнює частоті Лармора $\Delta\omega$, тобто умовою резонансу є рівність $\omega = \Delta\omega$, або

$$\omega = g \frac{eB}{2m}.$$

Якщо ж магнетний момент атома визначається спіновим магнетним моментом (що і є насправді), то в цьому випадку важко дати класичне пояснення, бо тоді слід прийняти, що спіновий магнетний момент електрона пов'язаний з його обертанням і частота Лармора – це зміна частоти обертання самого електрона навколо своєї осі, що не має підтвердження.

Більш адекватно відображає дійсність квантовий підхід, який полягає в наступному: кожен енергетичний рівень атома в магнетному полі розщеплюється на два рівні, відстань між якими визначається частотою Лармора

$$\Delta E = \hbar \Delta\omega = \hbar g \frac{eB}{2m} = \mu_B g B.$$

Тоді атом має можливість поглинати енергію електромагнетної хвилі (інакше: енергію фотона), що дорівнює цій різниці енергії. Ця енергія фотона

$$E_{\text{фот.}} = \hbar \varpi_{\text{фот.}}$$

тому його частота

$$\varpi_{\text{фот.}} = \frac{E_{\text{фот.}}}{\hbar} = g \frac{eB}{2m}.$$

Якщо електромагнетна хвиля монохроматична, то її поглинання буде відбуватися у магнетному полі індукцією

$$B = \frac{2m\varpi_{\text{фот.}}}{eg}.$$

Цю індукцію поля можна встановити експериментально, вимірюючи коефіцієнт поглинання парамагнетика за різних значень індукції магнетного поля, – за цієї індукції поля він буде максимальним. Маючи це експериментальне значення резонансного поля, можна обчислити фактор Ланде атома g .

(227) Розкриємо природу ядерного магнетного резонансу (ЯМР).

Згадаємо, що ядро також може мати магнетний момент. Це ядра з непарною кількістю нуклонів. Магнетні моменти таких ядер у зовнішньому магнетному полі будуть зорієнтовані за полем, що спричинить зменшення частоти еквівалентного обертання на величину частоти Лармора. Отже, зразок може поглинати електромагнетну хвилю з частотою, рівною частоті Лармора, тобто умова ЯМР така ж, як і для ЕПР:

$$\hbar\omega_{\text{фот.}} = \mu_B g B.$$

Очевидно, що зафіксувати ЯМР можна як і ЕПР за зміною коефіцієнта поглинання електромагнетної хвилі, проте це можна зробити і інакше: якщо припинити дію електромагнетної хвилі, то ядра почнуть випромінювати поглинуту енергію у вигляді електромагнетної хвилі, яка в соленоїді, що охоплює зразок, буде індукувати ЕРС, яку можна зафіксувати.

ЯМР широко застосовують у діагностиці ракових пухлин. Тут використовують той факт, що тканини пухлин намагнетчуються сильніше, ніж здорові тканини.

(228) Розкриємо природу виникнення циклотронного та магнетофононного резонансу (ЦР та МФР).

Нам відомо, що вільний електрон, потрапивши в магнетне поле, починає рухатися колом навколо вектора $\vec{B}$ (якщо це поле нормальне до його швидкості), або гвинтовою лінією навколо вектора $\vec{B}$ (якщо поле спрямоване під кутом до його швидкості) з частотою, яка називається циклотронною (задачі 177 і 178)

$$\omega_c = \frac{eB}{m}.$$

Якщо тепер спрямувати на зразок вздовж вектора $\vec{B}$ електромагнетну хвилю з частотою, яка дорівнює циклотронній, то ця хвиля буде поглинатися, що можна зафіксувати в зміні коефіцієнта поглинання. Але оскільки це поглинання здійснюється вільними електронами, то його можна зафіксувати інакше, а саме – в зміні магнетоопору зразка.

Отже, умовою резонансу є рівність частоти фотона циклотронній частоті

$$\omega_{\text{фот}} = \frac{eB}{m}.$$

З цієї рівності бачимо, що для монохроматичної хвилі резонансне поглинання буде відбуватись за певного значення індукції магнетного поля

$$B = \frac{m\omega_{\text{фот}}}{e}.$$

Бачимо також, що, вимірюючи експериментально це резонансне значення магненого поля та частоту фотона, можемо знайти величину m , яка в твердому тілі не є масою вільного електрона, а так званою ефективною масою.

Розглянемо природу магнетофононного резонансу (МФР). За умови, що циклотронна частота дорівнює частоті фонона, електрон поглинатиме фонона, тобто умова МФР така ж, як і ЦР з тією різницею, що замість частоти фотона є частота фонона

$$\omega_{\text{фон}} = \frac{eB}{m}.$$

Зауважимо, що МФР є внутрішнім резонансом, бо фонони є в самому зразку, їх не потрібно, як фотони постачати ззовні. Тому МФР, на відміну від ЦР, можна спостерігати лише за змінами магнетоопору. З останньої формули бачимо, що за даними МФР і ЦР можна обчислити ефективну масу електрона, яка, зауважимо, є інша в кожному твердому тілі.

Розділ IV. Електричні коливання і електромагнетні хвилі

Тема 1. Змінний струм

Фізичні явища

- **Синусоїдний змінний струм** – змінний струм, сила якого змінюється з часом за синусоїдним законом.

- **Ефективне (діюче) значення змінного струму** – це таке значення сили постійного струму, за якого його середня теплова потужність така ж, як і за цього змінного струму (інакше кажучи: це таке значення сили постійного струму, який дає такий самий тепловий ефект, як і цей змінний струм).

- **Квазістаціонарне коло змінного струму** – це таке коло змінного струму, розміри якого значно менші за довжину електромагнетної хвилі, яка поширюється вздовж кола.

- **Активний опір** – це векторна складова повного опору кола змінного струму, яка спричинена наявністю опору провідників.

- **Ємнісний опір** – це векторна складова повного опору кола змінного струму, яка спричинена наявністю в цьому колі ємності (позначення X_C)

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

- **Індуктивний опір** – це векторна складова повного опору кола змінного струму, спричинена наявністю в цьому колі індуктивності (позначення X_L).

$$X_L = \omega L.$$

- **Коефіцієнт трансформації** – це відношення напруг у вторинній та первинній обмотках трансформатора (позначення k).

$$k = \frac{U_2}{U_1}.$$

- **Повний опір** – це величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

• **Резонанс напруг** – це явище різкого зростання струму в нерозгалуженому колі змінного струму за умови рівності ємнісного та індуктивного опорів.

• **Резонанс струмів** – це явище різкого зменшення сили струму в нерозгалуженій ділянці розгалуженого кола за умови рівності ємнісного та індуктивного опорів.

Фізичні поняття

• **Фазна напруга** – це напруга між нульовим і фазним проводом трифазного генератора.

• **Лінійна напруга** – це напруга між будь-якими двома фазними проводами трифазного генератора.

Фізичні системи й прилади

• **Трансформатор** – це прилад для підвищення чи зниження напруги змінного струму.

• **Генератор змінного струму** – прилад, який генерує змінну електрорушійну силу.

• **Асинхронний двигун** – це електричний двигун трифазного змінного струму, в якому обертове магнетне поле статора індукуює в роторі струм, який, своєю чергою зазнаючи дії цього магнетного поля, спричиняє обертання ротора.

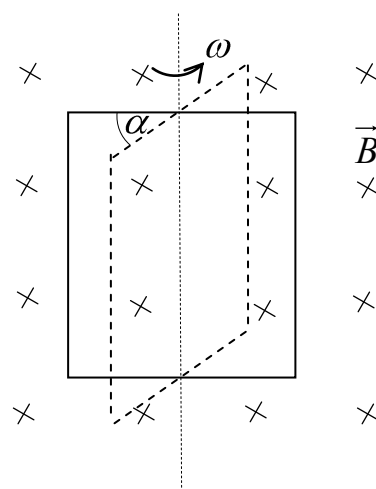
Задачі

(229) На основі закону електромагнетної індукції встановимо часову залежність ЕРС індукції, яка виникає в контурі площею S , що обертається з кутовою швидкістю ω в однорідному магнетному полі з індукцією $\vec{B}$.

Унаслідок обертання контура в магнетному полі в ньому виникає ЕРС індукції, спричинена зміною магнетного потоку крізь цей контур (мал. 148). Оскільки поле однорідне, а контур плоский, то магнетний потік $\Phi_B = BS \cos \alpha$ і тоді, згідно з законом електромагнетної індукції

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} [BS \cos \alpha]$$

Враховуючи, що B і S – це сталі величини, а кут α , будучи кутом між вектором $\vec{B}$ і нормаллю до площини контура, водночас є кутом між початковим та наступним станом площини, причому, згідно з означенням кутової швидкості $\alpha = \omega t$, дістанемо



Мал. 148

$$\mathcal{E} = -BS \frac{d \cos \alpha}{dt} = -BS \frac{d \cos \omega t}{dt} = -BS \omega \sin \omega t.$$

Величина $-BS\omega$ має розмірність ЕРС і є її максимальним значенням, тому позначимо її $\mathcal{E}_m$. Дістанемо закон зміни ЕРС у контурі

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t,$$

тобто рівномірне обертання контура в постійному магнетному полі спричиняє виникнення в ньому синусоїдної ЕРС. Це явище і закладено в основу роботи генераторів синусоїдної ЕРС.

(230) Доведемо, що середнє значення синусоїдної змінної ЕРС за період дорівнює нулеві.

За формулою середнього значення функції

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_m \sin \omega t dt = -\frac{\mathcal{E}_m}{T\omega} \cos \omega t \Big|_0^T = \\ &= -\frac{\mathcal{E}_m}{T\omega} (\cos \omega T - 1) = -\frac{\mathcal{E}_m}{2\pi} (\cos 2\pi - 1) = 0.\end{aligned}$$

Очевидно, що середнє значення змінної ЕРС і за будь-який проміжок часу, що дорівнює великій кількості періодів, дорівнює нулю. Проте це не означає, що змінний струм не здатний виконувати роботу.

(231) Покажемо, що середнє значення теплової потужності змінного струму за період не дорівнює нулеві.

Середнє значення теплової потужності змінного струму за період (чи багато періодів)

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt,$$

де P – миттєве значення потужності, яке як і для постійного струму

$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$ (очевидно, що миттєве значення змінного струму можна вважати постійним). Після підстановки цього виразу в останню рівність дістанемо

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt = \frac{1}{RT} \int_0^T \mathcal{E}_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2RT} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \\ &= \frac{\mathcal{E}_m^2}{2RT} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2RT} \left(T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T \right) = \frac{\mathcal{E}_m^2}{2R} = \frac{I_m^2 R}{2},\end{aligned}$$

звідки бачимо, що середнє значення теплової потужності змінногo струму не дорівнює нулевi (на вiдмiну вiд середньогo значення змiнногo струму).

(232) Знайдено зв'язок між ефективним та максимальним значенням змiнної ЕРС.

Згiдно з означенням ефективного значення змiнногo струму, нам слiд прирiвняти середнє значення теплової потужності змiнногo струму за перiод до теплової потужності постійногo струму, величина якого дорiвнює ефективному значенню цього змiнногo струму.

У результатi розв'язання попередньої задачі ми знайшли, що середнє значення теплової потужності змiнногo струму

$$\bar{P} = \frac{I_m^2 R}{2}.$$

Потужність постійногo струму з ефективним значенням цього змiнногo струму

$$P = I_{ef}^2 R.$$

Прирiвнявши $\bar{P}$ до P , дiстанемо

$$I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

тобто ефективне значення змiнногo струму є меншим за його максимальне (амплітудне значення) в $\sqrt{2}$ рази, що означає: для того, щоб вiд змiнногo струму отримати такий самий тепловий ефект, як i вiд заданогo постійногo струму, його амплітудне значення має бути в $\sqrt{2}$ рази бiльшим за цей постійний струм.

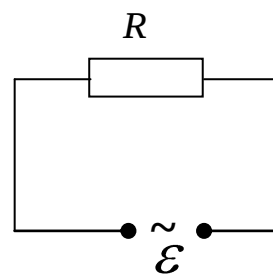
(233) Обґрунтуємо застосовність закону Ома та правил Кірхгофа до миттєвих, амплітудних та ефективних значень сили струму й напруги.

Дійсно, оскільки миттєві значення сили струму та напруги можна вважати постійними, до них можна застосувати закон Ома та правила Кірхгофа. Амплітудне значення сили струму чи напруги – це одне з миттєвих значень, а ефективне значення – це зменшене в $\sqrt{2}$ рази амплітудне, тому до них також застосовні згадані закони.

(234) Доведемо, що в активному резисторі сила змінного струму збігається за фазою з напругою.

Розглянемо коло, у якому є синусоїдна ЕРС та активний опір R (мал. 149). Згідно з законом Ома, сила струму в колі

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \sin \omega t.$$



Мал. 149

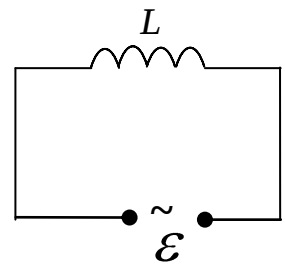
Величина $\frac{\mathcal{E}_m}{R}$ має одиницю виміру сили струму і є її максимальним значенням, тому позначимо її I_m . Дістанемо закон зміни сили струму

$$I = I_m \sin \omega t,$$

звідки бачимо, що під знаком синуса у виразі для струму як і у виразі для ЕРС одна і та ж величина ωt , тобто фази сили струму і напруги збігаються.

(235) Доведемо, що в індуктивному резисторі сила струму відстає від напруги за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Розглянемо коло, у якому є лише синусоїдна ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ та соленоїд з індуктивністю L (мал. 150).



Мал. 150

Застосуємо до цього кола друге правило Кірхгофа. Оскільки в колі є дві електрорушійні сили – ЕРС джерела та ЕРС самоіндукції, яка виникає внаслідок протікання змінного струму через соленоїд (задача 194) і немає напруг (бо немає активного опору), то згідно з другим правилом Кірхгофа

$$0 = \mathcal{E}_m \sin \omega t - L \frac{dI}{dt},$$

звідки

$$dI = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \sin \omega t dt.$$

Після інтегрування

$$I = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \cos \omega t + C.$$

Для того, щоб порівняти фази сили струму та ЕРС, слід останній вираз для сили струму представити через функцію $\sin$, як і вираз для ЕРС.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \cos \omega t + C = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right) + C = \\ &= -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + C = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

де $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L}.$

З отриманої рівності для сили струму $I = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + C$ та рівності для ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ бачимо, що сила струму відстає за фазою від ЕРС на $\frac{\pi}{2}$. Стала інтегрування C очевидно не впливає на фазу.

Крім того, в ході цього виводу ми отримали, що максимальне значення сили струму

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega L},$$

звідки бачимо, що величина ωL має зміст опору. Цю величину називають *індуктивним опором* $X_L = \omega L$. Бачимо, що він є більшим, що більші частота змінного струму та індуктивність соленоїда (насправді індуктивність всього кола). Причиною виникнення цього опору є явище самоіндукції.

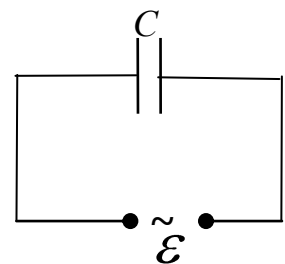
(236) Доведемо, що в ємнісному резисторі сила струму випереджає

напругу за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Розглянемо коло, у якому є, крім змінної ЕРС, тільки конденсатор з ємністю C (мал. 151). У цьому колі є одна ЕРС – це ЕРС джерела $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ та одна напруга – це напруга на конденсаторі U_C , тому, згідно з другим правилом Кірхгофа

$$U_C = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

Напругу U_C представимо через заряд на конденсаторі та його ємність C .



Мал. 151

$$\frac{q}{C} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$$

звідки

$$q = \mathcal{E}_m C \sin \omega t.$$

Для того, щоб отримати вираз для сили струму, продиференціюємо останню рівність за часом.

$$\frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_m \omega C \cos \omega t,$$

або

$$I = \mathcal{E}_m \omega C \cos \omega t.$$

Представимо останню рівність через функцію $\sin$

$$I = \mathcal{E}_m \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

звідки, а також з закону зміни ЕРС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega t$ бачимо, що сила струму випереджає ЕРС за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Представимо закон зміни сили струму так $I = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, де

$I_m = \mathcal{E}_m \omega C$, звідки бачимо, що величина $\frac{1}{\omega C}$ має зміст опору, її називають *ємнісним опором* і позначають X_C .

(237) Розкриємо геометричний спосіб додавання гармонічних коливань (векторна модель додавання гармонічних коливань).

Нехай нам слід додати декілька величин, які змінюються за гармонічним законом (наприклад, напруг, сил струмів чи величин будь-

якої іншої природи). Для простоти візьмемо два гармонічні коливання

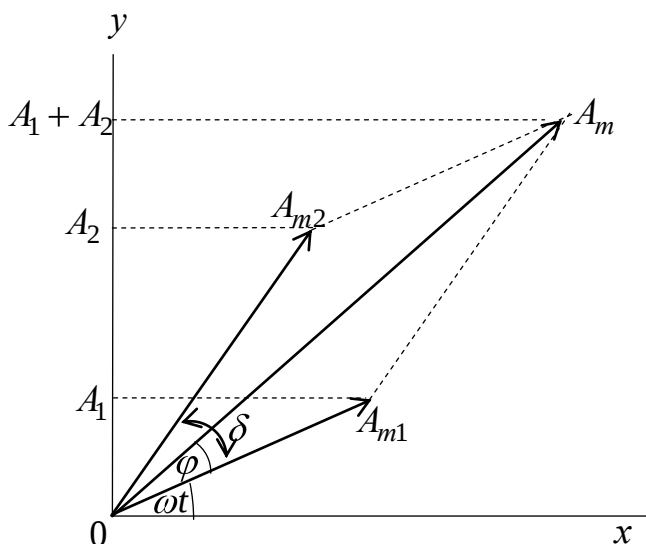
$$A_1 = A_{m1} \sin \omega t$$

$$A_2 = A_{m2} \sin (\omega t + \delta)$$

де δ – різниця фаз між цими коливаннями.

Під кутом ωt до осі x відкладемо вектор довжиною A_{m1} , а під кутом $\omega t + \delta$ – вектор довжиною A_{m2} (мал. 152).

З малюнка бачимо, що проекція вектора $\overrightarrow{A_{m1}}$ на вісь y – це є величина A_1 , проекція вектора $\overrightarrow{A_{m2}}$ – величина A_2 , а проекція суми цих векторів – сума величин A_1 і A_2 , тобто



Мал. 152

$$A_{m1} \sin \omega t + A_{m2} \sin (\omega t + \delta) = A_m \sin (\omega t + \varphi)$$

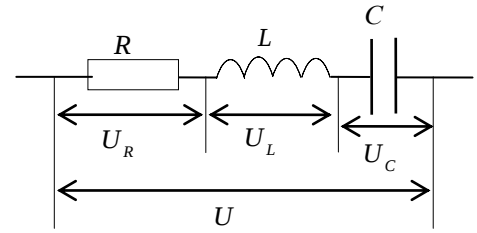
Отже, сумою двох чи більше гармонічних величин є гармонічна величина, амплітуду і фазу якої можна знайти геометрично.

Додавання гармонічних коливань зводиться до додавання векторів, довжини яких дорівнюють амплітудам цих гармонічних коливань, а кут між цими векторами дорівнює різниці фаз між цими коливаннями. Слід зауважити, що згадані вектори не представляють відповідні фізичні величини, а представляють коливання фізичних величин, причому як векторних, так і скалярних.

(238) Користуючись векторною моделлю додавання гармонічних коливань виведемо закон Ома для ділянки кола змінного струму.

Нехай на ділянці кола є послідовно з'єднані всі три типи опорів – активний, індуктивний та ємнісний (мал. 153).

Силу струму, яка є однаковою всюди на цій ділянці кола, зобразимо вектором вздовж осі x (мал. 154). Оскільки напруга на активному опорі збігається за фазою з силою струму (задача 234), то вектор $\vec{U}_R$ відкладаємо співнапрямленим з вектором $\vec{I}$. Напруга на індуктивному опорі випереджає

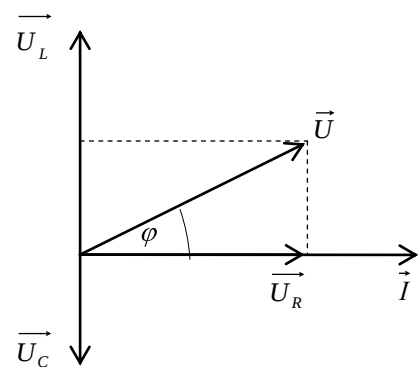


Мал. 153

силу струму на $\frac{\pi}{2}$ (задача 235), тому вектор $\vec{U}_L$ відкладаємо під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора $\vec{I}$ в бік випередження, тобто проти годинникової стрілки. Напруга на ємнісному опорі відстає від сили струму на $\frac{\pi}{2}$ (задача 236) і тому вектор $\vec{U}_C$ відкладаємо під кутом $\frac{\pi}{2}$ до вектора $\vec{I}$ за годинниковою стрілкою.

Напруга на ділянці кола U зобразиться вектором, який є сумою векторів $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ та $\vec{U}_C$. З малюнка бачимо, що

$$U^2 = (U_L - U_C)^2 + U_R^2.$$



Мал. 154

Згідно з законом Ома, для ділянки кола $U_L = IX_L$, $U_C = IX_C$, $U_R = IR$, тому

$$U^2 = (X_L - X_C)^2 I^2 + I^2 R^2,$$

звідки

$$I = \frac{U}{\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}},$$

або підставивши $X_L = \omega L$ та $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}.$$

Ця рівність і є законом Ома для ділянки кола змінного струму. Якщо величину $\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$ позначити буквою Z і назвати *повним опором*, то закон Ома для ділянки кола змінного струму набуде вигляду

$$I = \frac{U}{Z}.$$

Зауважимо, що при побудові векторної діаграми ми зображали не амплітудні значення відповідних величин, як це мало би бути згідно з векторною моделлю гармонічних коливань (задача 237), а ефективні їхні значення. Проте це нічого не змінює, бо ефективні значення відрізняються від амплітудних лише множником $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(239) Установимо умову, за якої сила струму в нерозгалуженому колі змінного струму буде максимальною (умову резонансу напруг).

Із закону Ома для ділянки кола змінного струму маємо, що за умови

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

тобто за умови рівності ємнісного та індуктивного опорів, сила струму на цій ділянці кола буде максимальною

$$I = \frac{U}{R}.$$

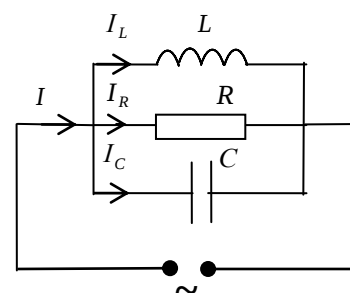
Крім того бачимо, що за умови резонансу напруг повний опір ділянки кола є мінімальним і дорівнює активному опору.

(240) Установимо умову, за якої сила струму в розгалуженому колі змінного струму буде максимальною (умову резонансу струмів).

Розглянемо коло з паралельно з'єднаними R , L і C (мал. 155).

Скористаємось векторною моделлю додавання гармонічних коливань.

Оскільки напруга на всіх трьох опорах однакова, то вздовж осі x відкладаємо вектор напруги (мал. 156). Вектор, який представляє силу струму в активному опорі I_R , відкладаємо паралельно до вектора напруги внаслідок збігу їхніх фаз (задача 234). Оскільки сила струму в ємнісному опорі випереджає напру-



Мал. 155

гу на $\frac{\pi}{2}$, то вектор I_C відкладаємо під прямим кутом до вектора U в бік випередження (задача 236). Вектор I_C відкладаємо під прямим кутом в бік відставання (задача 235). Вектор сили струму в нерозгалуженій ділянці кола є сумою векторів I_R , I_L та I_C . З трикутника на мал. 156 маємо

$$I = \sqrt{I_C^2 - I_L^2 + I_R^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{X_L} - \frac{U}{X_C}\right)^2 + \frac{U^2}{R^2}} =$$

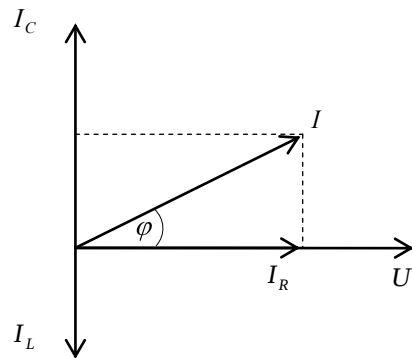
$$= U \sqrt{\left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2 + \frac{1}{R^2}} = U \sqrt{\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 + \frac{1}{R^2}},$$

звідки бачимо, що за умови

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C$$

сила струму в нерозгалуженій ділянці кола буде мінімальною.

$$I = \frac{U}{R}.$$



Мал. 156

Якщо ж вилучити опір R ($R = \infty$), то ця сила струму дорівнюватиме нулеві.

(241) Установимо зв'язок середньої потужності змінного струму з ефективними значеннями сили струму та напруги.

Згідно з виразом середнього значення функції, знайдемо середнє значення потужності змінного струму за період.

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt,$$

де P – миттєве значення потужності, яке, очевидно, пов'язане з миттєвими значеннями сили струму і напруги такою ж формулою, як і для постійного струму

$$P = IU = I_m \sin \omega t U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

де φ – зсув фаз між струмом і напругою, який в колі з різними типами опорів не дорівнює ні нулеві, ні $\frac{\pi}{2}$, ні $-\frac{\pi}{2}$ (дивись мал. 154 та 156).

Підставивши останній вираз замість підінтегральної функції та інтегруючи, дістанемо

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t U_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{I_m U_m}{T} \int_0^T \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) dt = \\ &= \frac{I_m U_m}{T} \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt + \frac{I_m U_m}{T} \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = \\ &= \frac{I_m U_m}{T} \cos \varphi \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt + \frac{I_m U_m}{T} \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = \\ &= \frac{I_m U_m}{T} \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T + \frac{I_m U_m}{2T\omega} \sin \varphi \sin^2 \omega t \Big|_0^T = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi,\end{aligned}$$

і врахувавши формулу зв'язку між максимальними та ефективними значеннями як сили струму, так і напруги

$$\bar{P} = I_{ef} U_{ef} \cos \varphi.$$

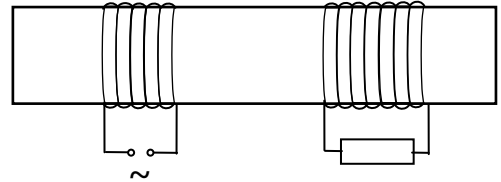
Як бачимо, потужність змінного струму залежить не тільки від ефективних значень сили струму та напруги, а й від зсуву фаз між ними φ . Величину $\cos \varphi$ ще називають *коефіцієнтом потужності*, який намагаються зробити якомога більшим, тобто кут φ якомога меншим. У промисловості мінімальне допустиме значення $\cos \varphi = 0,85$.

(242) Покажемо, що коефіцієнт трансформації трансформатора дорівнює відношенню кількості витків вторинної та первинної обмотки.

Якщо до однієї з обмоток трансформатора (первинної) приєднати джерело змінного струму, то цей струм створить змінний магнетний потік через площу контурів як первинної, так і вторинної обмоток (мал. 157), що, своєю чергою, згідно з законом електромагнетної індукції, спричинить виникнення ЕРС в обидвох обмотках.

$$\mathcal{E}_1 = -n_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -n_2 \frac{d\Phi_B}{dt}.$$



Мал. 157

З цих двох формул

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Покажемо, що для ненавантаженого трансформатора ЕРС $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$ практично дорівнюють напругам.

За законом Ома для ділянки кола з ЕРС

$$I_1 = \frac{U_1 + \mathcal{E}_1}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_2 + \mathcal{E}_2}{R_2},$$

звідки

$$U_1 = I_1 R_1 - \mathcal{E}_1$$

$$U_2 = I_2 R_2 - \mathcal{E}_2.$$

Для ненавантаженого трансформатора $I_2 = 0$, а $I_1 R_1 \ll \mathcal{E}_1$ через мале значення сили струму I_1 , що спричинене великим індуктивним опором первинної обмотки, тому

$$U_1 \approx \mathcal{E}_1$$

$$U_2 \approx \mathcal{E}_2.$$

З цих рівностей та рівності (1)

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

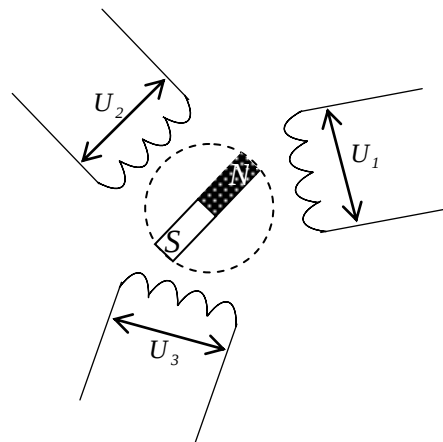
Вважаючи потужності в обидвох обмотках однаковими, дістанемо з формули потужності для $\cos\varphi = 1$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

(243) Покажемо, як принципово можна отримати трифазний струм і напишемо закон його зміни з часом.

Згадаємо, що однофазну змінну ЕРС отримують обертанням дротяної рамки чи обмотки в магнетному полі (задача 228).

Трифазну ЕРС можна отримати обертанням магнетного поля зі сталою кутовою швидкістю ω відносно нерухомих обмоток, розміщених одна відносно одної під кутом 120° . Очевидно, що в кожній з обмоток внаслідок явища електромагнетної індукції виникне ЕРС, яка зміщена відносно іншої за фазою на 120° (мал. 158).



Мал. 158

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \sin \omega t;$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_m \sin \left(\omega t - 120^\circ \right);$$

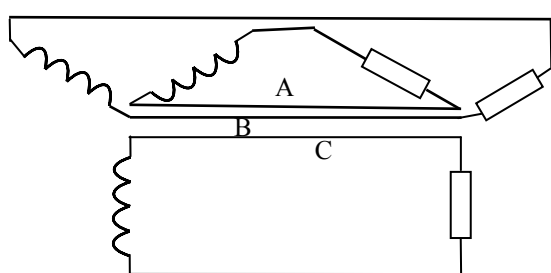
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_m \sin \left(\omega t - 240^\circ \right);$$

(244) За допомогою векторної діаграми для трифазних напруг встановимо співвідношення між лінійною та фазною напругами.

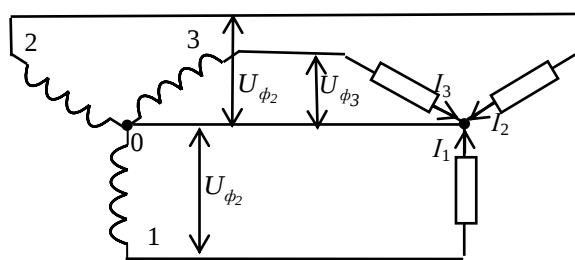
З мал. 158 бачимо, що трифазний генератор забезпечує ЕРС для трьох кіл змінного струму, які схематично показані на мал. 159 (а).

З'ясуємо, які напруги ми будемо мати, якщо з'єднати проводи А, В і С в один провід, який називають *нульовим* (мал. 159 (б)).

Напруги між нульовим і кожним із фазних проводів 1, 2 і 3 називаються *фазними*, а напруги між самими проводами 1, 2 і 3 – *лінійними*. Установимо зв'язок між амплітудними значеннями лінійної та фазної напруг.



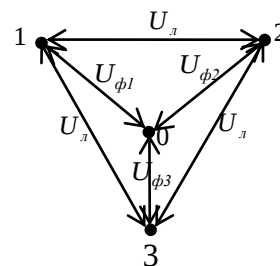
(а)



(б)

Мал. 159

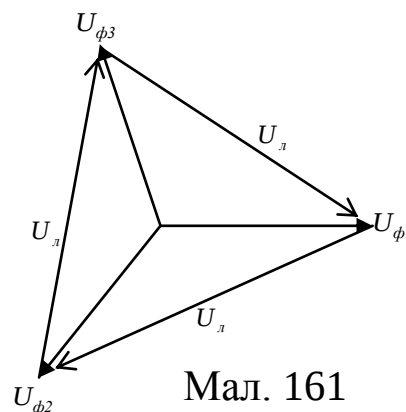
На мал. 160 показані нульовий та фазний проводи так, що вони спрямовані в площину малюнка. З цього малюнка бачимо, що



Мал. 160

$$U_{\phi 1} - U_{\phi 2} = U_{\phi}$$

Згідно з векторною моделлю додавання гармонічних коливань, і враховуючи, що фази напруг $U_{\phi 1}$, $U_{\phi 2}$ та $U_{\phi 3}$ зміщені одна відносно одної на 120° , зобразимо ці напруги векторами, кут між якими дорівнює 120° (мал. 161).



Мал. 161

З трикутника, складеного з двох фазних та однієї лінійної напруги, дістанемо зв'язок між їхніми амплітудними значеннями

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}}.$$

Очевидно, що такий самий зв'язок буде і між ефективними значеннями цих напруг.

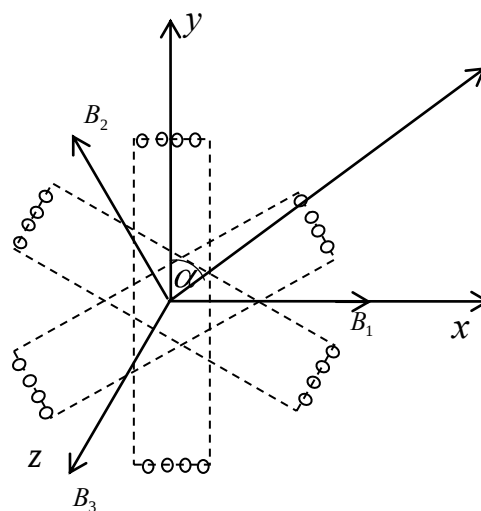
(245) Доведемо, що магнетне поле створене трифазним змінним струмом в трьох соленоїдах розміщених під кутом 120° один до одного еквівалентне постійному полю з індукцією $\frac{3}{2}B_m$, яке обертається з кутовою швидкістю, що дорівнює циклічній частоті змінного струму.

Для цього знайдемо часову залежність результативного поля. На мал. 161 показані три соленоїди які розміщені один до одного під кутом 120° . Оскільки зсув фаз між струмами в кожному соленоїді становить 120° , то такий самий зсув фаз виникає і у відповідних магнетних полях тобто

$$\begin{aligned} B_1 &= B_m \sin \omega t; \\ B_2 &= B_m \sin (\omega t - 120^\circ); \\ B_3 &= B_m \sin (\omega t - 240^\circ), \end{aligned}$$

де B_1, B_2, B_3 – магнетні поля створені відповідними соленоїдами.

Виберемо систему координат як показано на мал. 162 і знайдемо відповідні проекції цих полів на вісь x .



Мал. 162

$$B_{1x} = B_1 = B_m \sin \omega t;$$

$$B_{2x} = -B_2 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} B_2 = -\frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$B_{3x} = -B_3 \cos 60^\circ = -\frac{1}{2} B_3 = -\frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - 240^\circ),$$

а також x - проекцію результативного поля

$$\begin{aligned} B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} &= B_m \sin \omega t - \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - 120^\circ) - \\ &- \frac{1}{2} B_m \sin(\omega t - 240^\circ) = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

Подібними діями отримаємо

$$B_y = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t.$$

і далі величину результативного поля

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m,$$

звідки бачимо, що величина поля стала, проте напрям вектора $\vec{B}$ безперервно змінюється, причому так, що

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_x}{B_y} = -\operatorname{tg} \omega t,$$

звідки

$$\alpha = -\omega t,$$

що означає, що результативний вектор індукції магнетного поля рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω .

Цю властивість трифазного струму створювати обертове магнетне поле використовують в трифазних двигунах, який вигідно вирізняється тим, що до рухомої його частини (якоря) не треба підводити струм (тому в ньому немає щіток), бо струм в ньому індукується цим обертовим полем. Далі цей індукований струм зазнає з боку обертового поля дії сили Ампера, яка і крутить якір.

Саме через те, що в асинхронних двигунах немає щіток які іскрять їх потужність може бути будь-якою великою.

Тема 2. Електричні коливання

Фізичні явища

- **Гармонічні коливання** – це коливання які відбуваються за гармонічним законом (законом синуса або косинуса).

- **Власні коливання** – це коливання які відбуваються з власною частотою.

- **Згасальні коливання** – це коливання амплітуда яких зменшується з часом.

- **Релаксаційні коливання** – це коливання за яких протягом періоду коливань розсіюється вся енергія системи, тобто за один період вони б цілком згасли якби не підтримувалися зовні.

Фізичні поняття

- **Гармонічний осцилятор** – система, яка здійснює гармонічні коливання.

- **Логаритмічний декремент згасання** – це логаритм відношення двох послідовних амплітуд згасальних коливань (позначення λ)

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}},$$

де T – період коливань.

• **Добротність коливального контура** – це величина обернена до логаритмічного декременту згасання і збільшена в π разів (позначення Q)

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

• **Ідеальний коливальний контур** – це коливальний контур опір якого дорівнює нулеві.

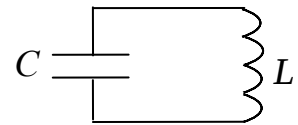
Фізичні системи й прилади

• **Коливальний контур** – це коло складене з конденсатора та соленоїда.

Задачі

(246) **На основі другого правила Кірхгофа встановимо закон коливання заряду в ідеальному коливальному контурі.**

Згідно з другим правилом Кірхгофа сума напруг (а це напруга на конденсаторі) має дорівнювати сумі електрорушійних сил (а це електрорушійна сила самоіндукції) (мал. 163).



Мал. 163

$$U_C = -L \frac{dI}{dt}.$$

Згідно з означенням ємності підставимо

$$U_C = \frac{q}{C},$$

де q – заряд в конденсаторі, C – його ємність, а згідно з означенням сили струму

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Дістанемо

$$\frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2},$$

або

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Позначивши

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань (в математиці: лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку) розв'язок якого

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

За цим законом і коливається заряд у конденсаторі. Очевидно, що циклічна частота цих коливань є ω_0 .

(247) Встановимо закон зміни сили струму в ідеальному коливальному контурі.

Продиференціювавши закон коливань заряду в ідеальному коливальному контурі отриманий в попередній задачі дістанемо закон коливань сили струму

$$I = \frac{dq}{dt} = q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Очевидно, що величина $q_m \omega_0$ має розмірність сили струму (бо $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ є величина безрозмірна) і крім того є максимальним його значенням (тоді коли $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 1$). Позначивши її I_m дістанемо закон коливань струму

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

(248) Покажемо, що сила струму в ідеальному коливальному контурі і напруга на конденсаторі цього коливального контура зсунуті за фазою на $\frac{\pi}{2}$.

Для того щоб отримати закон коливань напруги на конденсаторі поділимо закон коливань заряду (задача 246) на його ємність

$$\frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Позначивши згідно з означенням ємності $\frac{q}{C} = U$, $\frac{q_m}{C} = U_m$, маємо

$$U = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

З цього рівняння та рівняння для сили струму (задача 247) бачимо, що напруга коливається за законом синуса, а сила струму за законом косинуса, тобто вони є зсунутими за фазою на $\frac{\pi}{2}$. Це означає, що коли напруга на конденсаторі максимальна, то сила струму в колі дорівнює нулю і навпаки, коли напруга дорівнює нулю, сила струму максимальна. Зауважимо, що функція косинус також є розв'язком диференціального рівняння гармонічних коливань, тому

коливання заряду і напруги можуть так само описуватися функцією косинус. Тоді сила струму буде виражена через функцію синус і зсув фаз між ними залишиться тим самим.

(249) Покажемо, що сума енергій електричного і магнетного полів ідеального коливального контура є сталою в часі величиною.

Знайдемо вираз для енергії електричного поля

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{Cq^2}{2C^2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \sin^2 \varphi_0 t + \varphi_0$$

та вираз енергії магнетного поля

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{Lq_m^2 \omega_0^2}{2} \cos^2 \varphi_0 t + \varphi_0 = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \varphi_0 t + \varphi_0$$

де за I ми підставили закон зміни сили струму в ідеальному коливальному контурі (задача 247), а за ω_0^2 підставили $\frac{1}{LC}$ (задача 246).

Тепер знаходимо суму енергій електричного та магнетного полів

$$W = W_e + W_m = \frac{q_m^2}{2C} \left(\sin^2 \varphi_0 t + \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 t + \varphi_0 \right) = \frac{q_m^2}{C}.$$

Бачимо, що ця сума є сталою і визначається зарядом та ємністю конденсатора.

(250) На основі другого правила Кірхгофа встановимо закон коливання заряду в реальному коливальному контурі.

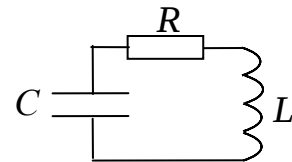
На відміну від ідеального коливального контура в цьому контурі є опір, тому крім напруги на конденсаторі є ще напруга на цьому опорі (мал. 164).

Згідно з другим правилом Кірхгофа

$$U_C = IR = -L \frac{dI}{dt},$$

або

$$\frac{q}{C} + IR + L \frac{dI}{dt} = 0.$$



Мал. 164

Підставивши $I = \frac{dq}{dt}$ дістанемо диференціальне рівняння згасальних коливань

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Позначивши

$$\frac{R}{L} = 2\beta,$$

де β – коефіцієнт згасання і

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

отримаємо його у вигляді

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0.$$

Зауважимо, що це рівняння є подібним до диференціального рівняння механічних згасальних коливань з тією різницею, що замість заряду q там є координата x .

Розв'язок цього лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

$$q = q_m e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi).$$

Бачимо, що амплітуда коливань $q_m e^{-\beta t}$ дійсно зменшується з часом. З цього розв'язку також бачимо, що величина $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ відіграє роль частоти коливань, тому позначимо її ω і назовемо *циклічною частотою* згасальних коливань. Отже,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

З цього рівняння бачимо, що за умови $\omega_0^2 \gg \beta^2$ або що одне і теж $R \ll \sqrt{\frac{4L}{C}}$, тобто за малого коефіцієнта згасання

$$\omega = \omega_0,$$

тобто коливання відбуваються з такою частотою яка би була якби не було опору (в ідеальному коливальному контурі), а саме з власною частотою.

За умови $\omega_0^2 < \beta^2$ під коренем буде від'ємне число і рівняння дійсного розв'язку не має, це означає, що немає і коливань – конденсатор розрядиться без жодного коливання заряду. Це нагадує нам механічну систему з великим коефіцієнтом згасання коли система повертається в стан рівноваги не зробивши жодного коливання (як приклад демпферний механізм амортизатора автомобіля).

(251) На основі означення логаритмічного декременту та закону згасальних коливань встановіть зв'язок логаритмічного декременту та добротності з параметрами коливального контура.

Згідно з означенням логаритмічний декремент згасання

$$\lambda = \ln \frac{q_t}{q_{t+T}}.$$

Підставивши замість q_t та q_{t+T} закон згасальних коливань (задача 250) дістанемо

$$\begin{aligned} \lambda &= \ln \frac{q_m e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi)}{q_m e^{-\beta(t+T)} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} (t+T) + \varphi)} = \beta T = \\ &= \frac{R}{2L} T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

і добротність

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \sqrt{\frac{L}{CR^2} - \frac{1}{4}}.$$

З останніх двох рівнянь бачимо, що більший коефіцієнт згасання β , то більший логаритмічний декремент згасання і менша добротність коливального контура. В свою чергу коефіцієнт згасання буде більший, що більший опір коливального контура $\left(\beta = \frac{R}{2L} \right)$.

(252) На основі другого правила Кірхгофа встановіть закон вимушених коливань в коливальному контурі під дією гармонічної ЕРС.

В цьому колі є дві напруги, а саме напруга на опорі IR та на конденсаторі $\frac{q}{C}$ та дві ЕРС, а саме самоіндукції $L \frac{d^2 q}{dt^2}$ та ЕРС джерела $\mathcal{E}_m \sin \omega t$, тому друге правило Кірхгофа матиме вигляд

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} + \mathcal{E}_m \sin \omega t.$$

Зведемо це рівняння до вигляду

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \sin \omega t$$

і позначимо як і до того

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad \frac{R}{L} = 2\beta.$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, розв'язком якого є

$$q = q_m \sin(\omega t + \varphi),$$

де

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{L \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$\varphi = \arctg \left(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

(253) **На основі закону вимушених коливань заряду в коливальному контурі встановіть зв'язок резонансної частоти з параметрами коливального контура.**

З виразу для амплітуди вимушених коливань (з виразу для q_m з попередньої задачі) видно, що в контурі будуть відбуватися гармонічні коливання заряду з частотою ω змушуючої ЕРС, причому амплітуда цих коливань q_m залежить від цієї частоти (на мал. 165 показаний схематичний графік цієї залежності).

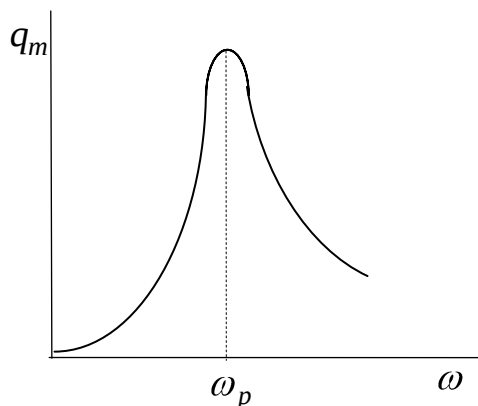
Знайдемо частоту за якої амплітуда q_m має максимум – так звану резонансну частоту. Для цього продиференціюємо підкореневий вираз у знаменнику виразу для q_m , а саме вираз $\omega_0^2 - \omega^2 + 4\beta^2\omega^2$ за частотою і

прирівняємо його до нуля. Дістанемо

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0,$$

звідки

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$



Мал. 165

Позначивши цю резонансну частоту через ω_p і підставивши вирази для ω_0 та β : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $\beta = \frac{R}{2L}$ дістанемо зв'язок резонансної частоти з параметрами коливального контура

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}.$$

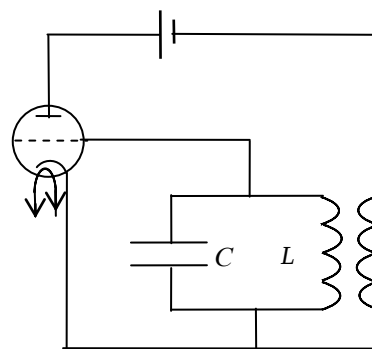
З цієї формули видно, що за малого коефіцієнта згасання $\beta = \frac{R}{2L}$ резонансна частота є близькою до власної частоти коливань

контура $\sqrt{\frac{1}{LC}}$. Нагадаємо, що за цієї ж умови частота згасальних коливань є близькою до власної частоти (задача 251).

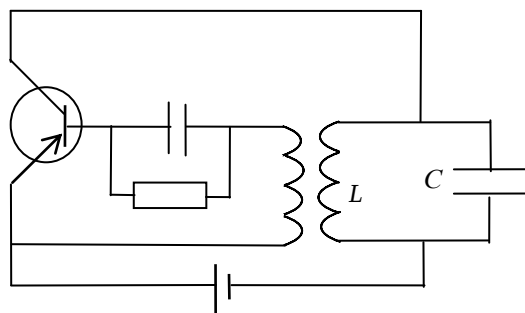
(254) Намалюємо схему та пояснимо роботу лампового (транзисторного) генератора електричних коливань.

Вимушені електричні коливання отримують за допомогою генератора основними елементами якого є: коливальний контур та тріод або транзистор.

Спрощену схему лампового генератора показано на мал. 166. Коли ми увімкнемо джерело постійної ЕРС то в коливальному контурі виникнуть коливання. Такі самі коливання напруги виникнуть між катодом і сіткою (вони приєднані до обкладок конденсатора). В ті проміжки часу коли на сітці потенціал буде більшим ніж на катоді, електрони з катода легко рухатимуться проти електричного поля і досягатимуть анода, тобто в колі анода йтиме струм. Цей час триватиме половину періоду коливань напруги в коливальному контурі. Другу половину періоду на сітці буде менший потенціал щодо катода і струм через тріод не проходитиме. Таким чином, в колі анода виникне синусоїдний змінний струм, який створить в соленоїді анодного кола змінний магнетний потік, котрий, своєю чергою, спричинить в соленоїді коливального контура змінний струм цієї ж частоти і таким чином підтримуватиме коливання в коливальному контурі.



Мал. 166

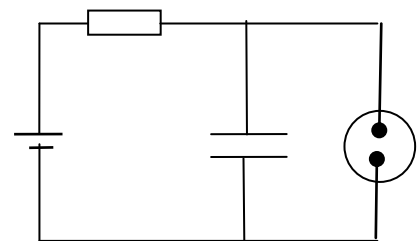


Мал. 167

В напівпровідникових генераторах замість вакуумного тріода використовується напівпровідниковий тріод, інакше кажучи транзистор. Схема такого генератора з транзистором $n-p-n$ – типу показана на мал. 167. Коли потенціал бази є нижчим за потенціал емітера, то струм через транзистор проходить і заряджає конденсатор коливального контура C поповнюючи енергією коливальний контур. Другу половину періоду струм через транзистор не проходить, а конденсатор коливального контура розряджається. Коливання в коливальному контурі індуктивно передаються на базу.

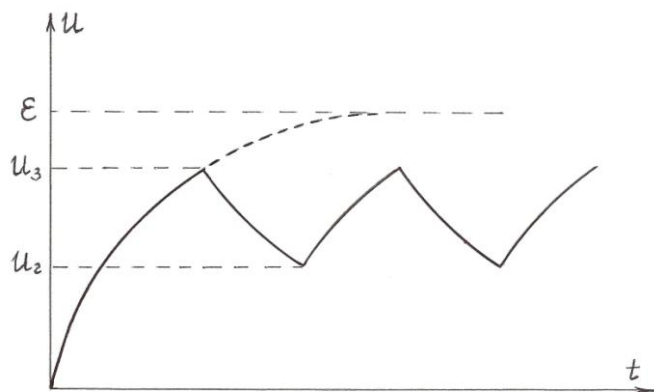
(255) Намалюємо схему та пояснимо роботу релаксаційного генератора електричних коливань.

На мал. 168 показана схема такого генератора. В цьому генераторі немає коливального контура. Якщо ввімкнути джерело постійної ЕРС то конденсатор починає заряджатись. Проте за певної напруги U_3 в неоновій лампі яка



Мал. 168

ввімкнена паралельно до конденсатора відбудеться газовий розряд, тобто лампа запалиться. При цьому її опір різко зменшиться і конденсатор почне розряджатися через лампу. Розрядження конденсатора спричинить зменшення напруги на його обкладках і,



Мал. 169

відповідно, на лампі, що спричинить до погасання лампи за напруги U_2 і різкого зростання її опору. Далі, очевидно, що конденсатор почне знову заряджатися і все повториться. Ці коливання не будуть гармонічними, а матимуть пилкоподібну форму (мал. 169). На цьому

графіку штрихованою лінією показано хід напруги за відсутності лампи. Бачимо, що напруга на конденсаторі в цьому випадку зростає до тих пір, поки не досягне величини ЕРС джерела $\mathcal{E}$.

Тема 3. Електромагнетне поле. Струми зміщення.

Фізичні поняття

- **Струм зміщення** – це темп зміни потоку електричної індукції

$$I_z = \frac{d\Phi_D}{dt}.$$

- **Вихрове електричне поле** – це електричне поле яке виникає внаслідок зміни в часі магнетного поля.

- **Магнеторушійна сила** – це циркуляція вектора напруженості магнетного поля вздовж замкненого контура

$$\mathcal{E}_m = \oint_L \vec{H} d\vec{l}.$$

- **Хвильове рівняння** – це рівняння яке має вигляд

$$\nu^2 \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

де ν – стала величина, ∇^2 – оператор Лапласа.

- **Рівняння хвилі** – це функція від координати і часу яка є розв'язком хвильового рівняння.

- **Вектор Пойтінга** – це вектор напрям якого вказує на напрям перенесення енергії електромагнетною хвилею, а величина дорівнює потужності яка припадає на одиницю площі хвильового фронту.

Постулати

➤ **Закон повного струму:** циркуляція вектора напруженості магнетного поля вздовж будь-якого замкненого контура дорівнює сумі потоку вектора густини струму та потоку темпу зміни вектора електричної індукції через поверхню, яка спирається на цей контур.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Якщо використати означення магнеторушійної сили, струму провідності та струму зміщення, то цей постулат можна сформулювати простіше, а саме: **магнеторушійна сила, яка виникає в певному замкненому контурі дорівнює сумі струмів провідності та зміщення що проходять через будь-яку поверхню, яка спирається на цей контур.**

$$\mathcal{E}_m = I + I_z.$$

Задачі

(256) **За допомогою теореми Стокса подамо закон повного струму в диференціальній формі.**

Теорема Стокса стверджує, що циркуляція будь-якого вектора вздовж певного замкненого контура дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню, яка спирається на цей контур.

Згідно з цією теоремою

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S},$$

а закон повного струму набирає вигляду

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

або

$$\int_S \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int_S \left(\vec{j} d\vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \right).$$

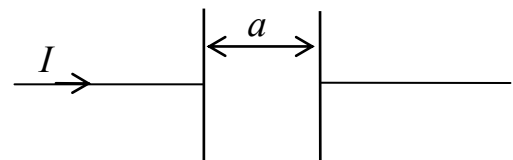
Оскільки інтегрування в лівій і правій частинах цієї рівності відбувається в одній і тій же області, то з їх рівності випливає рівність підінтегральних виразів, тобто

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Ми отримали диференціальну форму закону повного струму. Другий доданок в цій формулі – це густина струму зміщення.

(257) На основі означень струму провідності та струму зміщення покажемо, що на ділянці кола змінного струму, що містить конденсатор, сила струму в провідниках дорівнює силі струму зміщення між обкладками конденсатора.

До ділянки кола з конденсатором (мал. 170) застосуємо послідовно означення сили струму, означення ємності, зв'язок напруженості електричного поля з напругою, формулу ємності плоского конденсатора, зв'язок між напруженістю та індукцією електричного поля та індукцією електричного поля та означенням потоку. Дістанемо



Мал. 170

$$\begin{aligned}
I &= \frac{dq}{dt} = \frac{d \oint \vec{C} U}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d \oint \vec{E} a}{dt} = \\
&= aC \frac{dE}{dt} = \frac{aC}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{dD}{dt} = \frac{a \varepsilon \varepsilon_0 S}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{dD}{dt} = \\
&= S \frac{dD}{dt} = \frac{d \oint \vec{S} D}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt}.
\end{aligned}$$

Ми отримали, що струм провідності в провідниках дорівнює струму зміщення. Очевидно, що цей струм зміщення оскільки він є темпом зміни потоку вектора електричної індукції локалізований між обкладками конденсатора.

(258) Покажемо, що з рівнянь Максвелла випливає хвильове рівняння.

Про диференціюємо закон повного струму за часом (у відсутності струмів провідності).

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

Підставивши сюди

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \\
\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},
\end{aligned}$$

дістанемо

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

В це рівняння підставимо закон електромагнетної індукції

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Застосувавши формулу

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \nabla^2 \vec{E},$$

і врахувавши, що в заданій області простору відсутні не тільки струми провідності, а й електричні заряди ($\rho = 0$ тому $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ згідно з теоремою Остроградського-Гауса) дістанемо хвильове рівняння

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Як і для механічних хвиль можемо позначити

$$\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu = \frac{1}{v^2}.$$

Тоді хвильове рівняння набуває вигляду

$$v^2 \nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Очевидно, що в скалярній формі це рівняння має вигляд

$$\begin{cases} v^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} \\ v^2 \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \vec{E}_y}{\partial t^2} \\ v^2 \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 \vec{E}_z}{\partial t^2} \end{cases}$$

і якщо вектор $\vec{E}$ залежить лише від координати x , хвильове рівняння має вигляд

$$v^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Для вектора $\vec{B}$ отримаємо таке саме рівняння. Для цього слід зі згаданих двох рівнянь Максвелла виключити вектор $\vec{E}$ (продиференціювати закон електромагнетної індукції і підставити в нього закон повного струму).

(259) Доведемо, що будь-яка функція аргументом якої є $x - vt$ або $x + vt$ є розв'язком хвильового рівняння.

Отже функція має вигляд

$$E = f(x \pm vt),$$

або узагальнюючи

$$y = f(x \pm vt).$$

Знаходимо похідні які фігурують у хвильовому рівнянні (задача 258)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial (x \pm vt)} \cdot \frac{\partial (x \pm vt)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial (x \pm vt)}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm vt)^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial (x \pm vt)} (\pm v) = \pm v \frac{\partial f}{\partial (x \pm vt)}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \pm v \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm vt)^2} (\pm v) = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm vt)^2}. \end{aligned}$$

Підставимо отримані другі похідні у хвильове рівняння. Дістанемо тотожність

$$v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm vt)^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x \pm vt)^2}$$

яка свідчить, що дійсно функція $f(x \pm vt)$ є розв'язком хвильового рівняння.

(260) Представимо рівняння електромагнетної хвилі у вигляді $E = E_m \sin(kx - \omega t)$.

Оскільки будь-яка функція аргументом якої є $x - vt$ є розв'язком хвильового рівняння, то і функція

$$E = E_m \sin(kx - \omega t) \quad (1)$$

де k – стала величина, є його розв'язком, тобто є вона рівнянням хвилі.

Встановимо як пов'язана стала k з параметрами хвилі.

Міркуємо так. Напруженість поля електромагнетної хвилі набуває свого максимального значення за умови

$$kx_1 - \omega t = \frac{\pi}{2}.$$

Умова сусіднього максимуму є

$$kx_2 - \omega t = \frac{\pi}{2} + 2\pi.$$

Віднявши від другої рівності першу дістанемо

$$x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k}.$$

Але $x_2 - x_1$ — це відстань між двома сусідніми максимумами, тобто довжина хвилі λ , тому

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Підставивши цей вираз в рівняння хвилі (1), дістанемо

$$E = E_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt),$$

або

$$E = E_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{\lambda} vt \right).$$

Застосуємо означення періоду хвилі T як часу протягом якого хвиля проходить відстань λ , тобто $\lambda = vT$. Тепер рівняння хвилі дістає вигляд

$$E = E_m \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right),$$

або

$$E = E_m \sin (kx - \omega t).$$

Оскільки хвильове рівняння для вектора $\vec{B}$ електромагнетної хвилі таке ж як і для вектора $\vec{E}$, то розв'язок цього хвильового рівняння також є рівнянням хвилі, тобто рівняння

$$B = B_m \sin (kx - \omega t)$$

також є рівнянням електромагнетної хвилі причому фази векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$ в електромагнетній хвилі однакові.

(261) На основі закону повного струму в диференціальній формі доведемо, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно – нормальні.

Спрямуємо вісь z вздовж вектора $\vec{H}$ (мал. 172) і обчислимо його ротор.

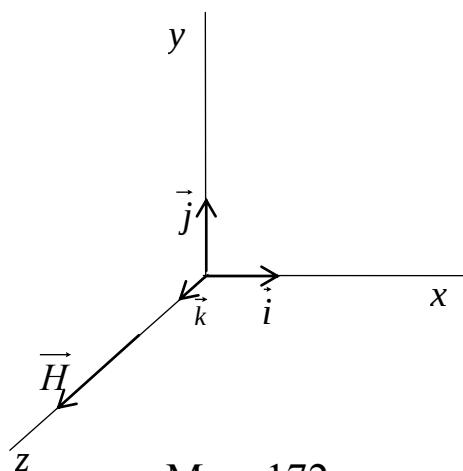
$$\text{rot}\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial H}{\partial x} \vec{j}.$$

Оскільки вектори $\vec{i}$ та $\vec{j}$ лежать в площині xy то і вектор $\text{rot}\vec{H}$ лежить в цій площині як їх лінійна комбінація, тобто він є нормальним до вектора $\vec{H}$. Але згідно з законом повного струму

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

тому вектор $\vec{H}$ є нормальним до вектора $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, який своєю чергою співнап-

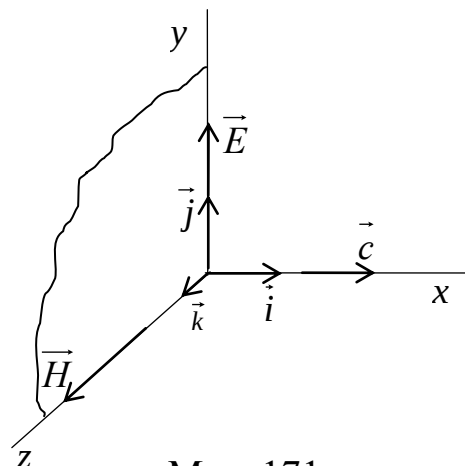
рямлений з вектором $\vec{D}$. Отже вектор $\vec{H}$ є нормальним до вектора $\vec{D}$ і вектора $\vec{E}$.



Мал. 172

(262) На основі двох рівнянь Максвела, а саме закону електромагнетної індукції та закону повного струму знайдемо числове значення швидкості електромагнетної хвилі у вакуумі.

Поглянемо на хвильовий фронт плоскої електромагнетної хвилі яка поширюється у вакуумі вздовж осі x і візьмемо до уваги, що всі три вектори $\vec{c}$, $\vec{E}$ і $\vec{H}$ є взаємно-нормальні (мал. 171).



Мал. 171

Застосуємо до цієї хвилі диференціальну форму рівнянь Максвелла.

Позаяк струми провідності відсутні, то закон повного струму має вигляд

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

Знайдемо по черзі ліву і праву частини цієї рівності

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial H}{\partial x} \vec{j}.$$

Оскільки вектор $\vec{D}$ напрямлений туди куди і вектор $\vec{E}$, то

$$\vec{D} = D \vec{j}$$

і

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} \vec{j}.$$

Тепер рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial H}{\partial x} \vec{j} = \frac{\partial D}{\partial t} \vec{j}.$$

Ця рівність, очевидно, можлива лише за умови $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$. З цієї умови і останньої рівності дістанемо

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

звідки

$$\partial H = \frac{\partial x}{\partial t} \partial D,$$

або

$$\partial H = c \partial D. \quad (2)$$

Закон електромагнетної індукції в диференціальній формі має вигляд

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (3)$$

Знову знайдемо окремо ліву і праву частини цієї рівності

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = - \frac{\partial E}{\partial z} \vec{i} - \frac{\partial E}{\partial x} \vec{k}.$$

Представивши вектор $\vec{B}$ як $B \vec{k}$ дістаємо, що

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} \vec{k}$$

і на основі закону електромагнетної індукції (3)

$$-\frac{\partial E}{\partial z}\vec{i} - \frac{\partial E}{\partial x}\vec{k} = -\frac{\partial B}{\partial t}\vec{k}.$$

Ця рівність можлива лише за умови $\frac{\partial E}{\partial z} = 0$, і тоді

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t},$$

звідки

$$\partial E = \frac{\partial x}{\partial t} \partial B$$

або

$$\partial E = c \partial B.$$

З цієї рівності, і рівності (2) та формул зв'язку між векторами напруженості та індукції електричного та магнетного полів дістанемо

$$c = \frac{\partial E}{\partial B} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial D}{\partial H} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 c},$$

звідки

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{1,257 \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}.$$

(263) На основі двох рівнянь Максвела, а саме закону електромагнетної індукції та закону повного струму знайдемо вираз для швидкості електромагнетної хвилі в середовищі.

Оскільки згадані рівняння Максвела однакові як у вакуумі так і в середовищі, то вивід формули для швидкості електромагнетної хвилі в середовищі буде такий самий як і для вакууму (попередня задача) аж до того моменту, коли нам слід буде використати формули зв'язку між величинам векторів напруженості та індукції відповідних полів, а саме

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E,$$

$$B = \mu_0 \mu H.$$

Таким чином формула для швидкості електромагнетної хвилі в середовищі буде мати вигляд

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Позаяк для будь-якого середовища $\mu > 1$ та $\varepsilon > 1$, то швидкість електромагнетної хвилі в середовищі менша ніж у вакуумі.

Величину $\sqrt{\mu \varepsilon}$ позначають n і називають показником заломлення середовища. Бачимо, що показник заломлення

$$n = \frac{c}{v}$$

показує в скільки разів швидкість електромагнетної хвилі у вакуумі більша ніж в розглядуваному середовищі.

(264) На основі формул для густини енергії електричного та магнетного полів знайдемо вираз потужності яка припадає на одиницю площі фронту електромагнетної хвилі.

Оскільки електричне і магнетне поле електромагнетної хвилі перебувають в одній і тій же фазі, то енергія цієї хвилі дорівнює сумі

енергій електричного та магнетного полів, а об'ємна густина енергії дорівнює сумі відповідних об'ємних густин

$$w = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}HB.$$

Згідно з означенням об'ємної густини енергії

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}HB.$$

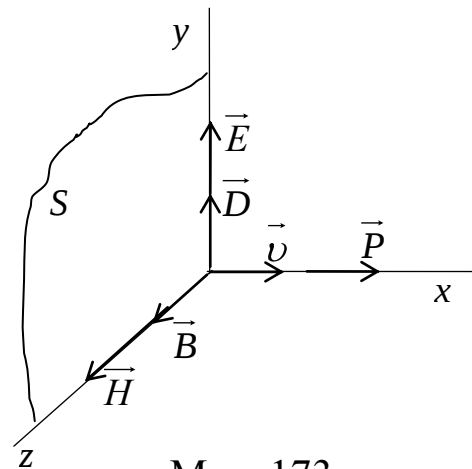
Підставивши сюди $dV = Sdx$, де S – площа хвильового фронту (мал. 173), помноживши отриману рівність на dx і поділивши на dt дістанемо

$$\frac{dW}{Sdt} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}H + EH \right) \frac{dx}{dt}.$$

Врахувавши, що $\frac{dx}{dt} = v$, $Bv = E$ і

$Dv = H$ маємо

$$\frac{dW}{Sdt} = \frac{1}{2} \left(\vec{E}D + HB \right) \frac{dx}{dt} = EH.$$



Мал. 173

Ліва частина цього рівняння – це потужність яка припадає на одиницю площі фронту хвилі. Позначивши її буквою P маємо

$$P = EH.$$

Введемо вектор

$$\vec{P} = P\vec{n},$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильового фронту і назвемо його вектором Пойтінга. Бачимо, що вектор Пойтінга напрямлений як і вектор $\vec{v}$ тому він задовольняє обидвом ознакам вектора який є векторним добутком двох векторів, а саме векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ (довжина його дорівнює площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а напрям задовольняє правилу знаходження напрямку вектора, який є векторним добутком двох векторів). Отже

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Очевидно, що напрям вектора Пойтінга вказує на напрям в якому переноситься енергія.

Додатки

Формули з алгебри і геометрії

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha \\
 \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \\
 \sin 2x &= 2 \sin x \cdot \cos x & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 \sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) & \cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \\
 \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \\
 \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Формули для наближених обчислень

Якщо $a \ll 1$, то у першому наближенні можна прийняти:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 \pm a} &\approx 1 \mp a & \frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} &\approx 1 \mp \frac{1}{2}a \\
 (1 \pm a)^n &\approx 1 \pm na & e^a &\approx 1 + a \\
 \sqrt{1 \pm a} &\approx 1 \pm \frac{1}{2}a & \ln(1 \pm a) &\approx \pm a
 \end{aligned}$$

Якщо кут α малий ($\alpha < 5^\circ$ чи $\alpha < 0,1$ радіана) та виражений у радіанах, то у першому наближенні можна вважати:

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha \quad \cos \alpha \approx 1$$

Десяткові приставки до назв одиниць

М – мега (10^6)	м – мілі (10^{-3})
к – кіло (10^3)	мк – мікро (10^{-6})
с – санти (10^{-2})	н – нано (10^{-9})

Основні фізичні константи

Величина	Числові значення
Стала Больцмана	$k=1,38066 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Стала Планка	$h=6,6262 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Число Авогадро	$N=6,022 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Гравітаційна стала	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Газова стала	$R=8,3144$ Дж/моль·К
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma=5,6703 \cdot 10^{-8}$ Вт/м ² ·К ⁴
Стала Віна	$b=2,8978 \cdot 10^{-3}$ м·К
Заряд електрона	$e=1,6022 \cdot 10^{-19}$ Кл
Маса спокою електрона	$m_e=0,9109 \cdot 10^{-30}$ кг
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнетна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Ядерний магнетон	$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ А} \cdot \text{м}^2$

Формули диференціального та інтегрального числення

$\frac{d(uv)}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$	$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$	$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$
$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$
$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$	$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$
$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x}$

$\int x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + C, \text{ при } m \neq -1$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \sin x dx = -\cos x$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int e^x dx = e^x$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right $	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $
$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$	$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$	$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$
$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$	$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2}$
$\int_0^\infty x^{1/4} e^{-ax} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-5/2}$	$\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$
$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} a^{-5/2}$	$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2,405$
$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$	$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$	$\int_0^1 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 0,225$
$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$	$\int_0^1 \frac{x^3}{e^x - 1} dx = 1,18$

Список задач

Розділ І. Електростатика

Тема 1. Електричний заряд

- (1) Вкажіть на один з методів перевірки принципу інваріантності заряду..... 8
- (2) Покажіть, що сила гравітаційного притягання електрона до ядра в атомі водню не спроможна втримати електрон в атомі, тому повинна існувати ще одна сила негравітаційної природи. 8
- (3) Установіть, який заряд на сьогодні є елементарним. 10

Тема 2. Закон Кулона

- (4) Установіть одиницю фізичної величини k 11
- (5) Вкажіть на ідею визначення електричної сталої ε_0 12

Тема 3. Електричне поле і його напруженість

- (6) Знайдіть заряд електрона в ході мислено проведеного дослідів Мілікена. 14
- (7) На основі означення напруженості електричного поля та закону Кулона установіть вираз для напруженості поля точкового заряду. 15
- (8) Установіть картину силових ліній поля точкового заряду. 16
- (9) Покажіть, що густина ліній напруженості електричного поля точкового заряду в певній області простору вказує на величину напруженості електричного поля в цій області.... 17

Тема 4. Принцип суперпозиції електричних полів

- (10) Вкажіть на метод знаходження напруженості електричного поля зарядженого тіла, яке не можна вважати точковим зарядом. 18
- (11) Установіть вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого кільця радіусом R і лінійною густиною заряду λ на осі кільця на відстані L від його центру... 19
- (12) Знайдіть вираз для напруженості поля рівномірно зарядже-

	ного поверхневою густиною заряду σ диска радіусом R на осі диска на відстані L від його центра.	21
(13)	Знайдіть середнє значення напруженості електричного поля точкового заряду в межах майданчика у вигляді диска, якщо заряд є на осі цього диска.	23
	Тема 5. Диполь	
(14)	Установіть, який стан займе вільний диполь, який потрапив в однорідне електричне поле.	25
(15)	Установіть вираз для напруженості електричного поля точкового диполя з плечем $\vec{l}$ в точці на відстані r від середини плеча диполя, яку видно під кутом α до плеча диполя.	26
(16)	Покажіть, що в неоднорідному електричному полі вільний диполь не буде в стані спокою (на відміну від випадку однорідного поля, де диполь є в стані спокою).	28
(17)	Поясніть явище притягання дрібних частинок до наелектризованих тіл.	29
(18)	Поясніть принцип роботи йонного мікроскопа.	29
	Тема 6. Потік електричної індукції. Теорема Остроградського-Гауса	
(19)	На основі означення потоку електричної індукції однорідного поля через плоску поверхню виведіть формулу для потоку електричної індукції будь-якого поля через будь-яку поверхню.	31
(20)	Доведіть, що потік індукції електричного поля через певну поверхню пропорційний до кількості силових ліній, які її пронизують.....	32
(21)	Доведіть теорему Остроградського-Гауса: потік електричної індукції через будь-яку замкнену поверхню дорівнює заряду, який є в об'ємі, обмеженому цією поверхнею, тобто $\Phi_D = q$, або застосувавши означення потоку та об'ємної густини заряду, $\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$	32

- (22) Переведіть теорему Остроградського–Гауса з інтегральної в диференціальну форму, тобто в таку форму рівняння, у яку б входили диференціальні характеристики, що означає: характеристики певної точки поля. 33

Тема 7. Обчислення напруженостей електричних полів на основі теореми Остроградського–Гауса

- (23) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля точкового заряду. 35
- (24) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої площини з поверхневою густиною заряду σ . 36
- (25) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля на поверхні зарядженого провідника..... 37
- (26) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої нескінченно довгої прямої нитки з лінійною густиною заряду λ 38
- (27) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сфери..... 39
- (28) На основі теореми Остроградського–Гауса встановіть вираз для напруженості електричного поля рівномірно зарядженого нескінченно довгого циліндра..... 40
- (29) Доведіть, що в об'ємі, обмеженому зарядженою поверхнею, напруженість електричного поля дорівнює нулеві. 41
- (30) З'ясуйте, для розрахунку яких електричних полів можна ефективно застосовувати теорему Остроградського–Гауса. 41

Тема 8. Потенціал електростатичного поля

- (31) Покажіть, що якщо в заданій точці простору є не одне, а багато полів, то потенціал в цій точці дорівнюватиме сумі потенціалів, створених кожним із полів..... 43
- (32) На основі означення потенціалу встановіть вираз для по-

	тенціялу поля точкового заряду q в точці, яка є на відстані r від цього заряду.....	44
(33)	На основі принципу додавання потенціалів та виразу для потенціялу поля точкового заряду встановіть вираз для потенціялу поля точкового диполя.....	44
(34)	Знайдіть метод обчислення потенціялу, створеного будь-яким неточковим зарядженим тілом.....	45
(35)	Знайдіть вираз для потенціялу поля, створеного рівномірно зарядженим диском у будь-якій точці на його осі.....	46
	Тема 9. Потенціальність електростатичного поля	
(36)	На основі означення потенціялу доведіть, що електростатичне поле є потенціальне.....	48
(37)	На основі означення роботи покажіть, що умовою потенціальності електростатичного поля є рівність нулевій циркуляції вектора його напруженості вздовж будь-якого замкненого контура.....	48
(38)	На основі теореми Стокса подайте умову потенціальності електростатичного поля в диференціальній формі.....	49
	Тема 10. Зв'язок між напруженістю і потенціалом	
(39)	Установіть зв'язок між напруженістю електростатичного поля та його потенціалом.	50
(40)	З формули зв'язку напруженості і потенціялу та теореми Остроградського–Гауса отримайте рівняння Пуассона.....	52
(41)	Доведіть, що вектор напруженості електростатичного поля завжди нормальний до еквіпотенціальної поверхні.....	53
(42)	Доведіть теорему про середнє значення потенціялу: потенціал у будь-якій точці простору, дорівнює середньому значенню потенціялу на будь-якій уявній сфері з центром в цій точці яка не охоплює електричних зарядів.....	53
(43)	Поясніть метод електростатичного очищення газів...	54
	Тема 11. Провідник в електричному полі	
(44)	Покажіть, що в провіднику, поміщеному в електричне по-	

	ле, воно дорівнюватиме нулеві, а за межами провідника – зміниться.....	55
(45)	Покажіть: якщо провіднику надати заряду, то він розміститься на його поверхні.	56
(46)	Покажіть, що як заряджений так і електронейтральний провідник є екіпотенціальним.	56
(47)	Доведіть, що електричне поле між точковим зарядом та нескінченною провідною площиною збігається з полем, створеним цим зарядом, та його дзеркальним зображенням у цій площині.....	57
	Тема 12. Діелектрик в електричному полі	
(48)	Виразіть поляризованість поміщеного в електричне поле неполярного діелектрика через напруженість електричного поля всередині діелектрика.	60
(49)	Покажіть, що в діелектрику зовнішнє електричне поле послаблюється.....	60
(50)	Покажіть, що поляризованість діелектрика дорівнює поверхневій густині індукованих на його поверхнях зарядів (поляризаційних зарядів).....	61
(51)	Покажіть, що електричне поле послаблюється в діелектрику в ε разів.....	62
(52)	Установіть зв'язок між вектором поляризації та вектором електричної індукції.....	62
(53)	Установіть, який вигляд мають співвідношення електростатики в діелектрику.....	63
	Тема 13. Електричне поле на межі середовищ	
(54)	На основі властивості потенціальності електричного поля доведіть, що при переході з одного діелектрика в інший тангенціальна (дотична) складова вектора напруженості не змінюється, а така ж складова вектора індукції змінюється пропорційно до діелектричної проникності.....	64
(55)	На основі теореми Остроградського–Гауса доведіть, що при переході з одного діелектрика в нормальна складова	

	вектора електричної індукції раптово змінюється на величину поверхневої густини вільних зарядів на межі середовищ.....	65
(56)	Доведіть, що вектор напруженості завжди нормальний до межі провідника з діелектриком.....	67
(57)	Виведіть закон заломлення силових ліній на межі двох діелектриків.....	67
(58)	Поясніть принцип електрофотографування (ксерографія).	68
	Тема 14. Електроємність	
(59)	Покажіть, що потенціал відокремленого провідника пропорційний до його заряду.....	70
(60)	Покажіть: якщо поблизу провідника розмістити інший провідник, то його ємність збільшиться.....	70
(61)	Установіть вираз для електроємності провідної кулі та сфери і обчисліть ємність Землі.....	71
	Тема 15. Конденсатори	
(62)	Установіть вираз для ємності плоского конденсатора.....	72
(63)	Установіть вираз для ємності циліндричного конденсатора довжина якого значно більша за радіуси циліндрів...	73
(64)	Доведіть, що за паралельного з'єднання двох чи більше конденсаторів ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.....	75
(65)	Покажіть, що ємність конденсатора будь-якої форми за умови, що відстань між його обкладками є значно меншою за їхні розміри, дорівнює ємності плоского конденсатора з такою ж площею обкладок і відстанню між ними.....	76
(66)	Доведіть, що за послідовного з'єднання двох чи більше конденсаторів обернена ємність цієї ділянки кола дорівнює сумі обернених ємностей окремих конденсаторів.....	76
(67)	Установіть вираз для ємності двохпровідної лінії, тобто системи двох паралельних проводів довжиною l радіусами r , відстань між осями яких $d \gg r$	77

(68)	Установіть вираз для ємності однопровідної лінії довжиною l і радіусом проводу r , що знаходиться на висоті h над землею.....	79
(69)	Установіть вираз для потенціальної енергії взаємодії n точкових зарядів.....	81
(70)	Встановіть вираз для густини потенціальної енергії електричного поля.....	82
(71)	Установіть вираз для потенціальної енергії зарядженого провідника та конденсатора.....	83

Розділ II. Постійний електричний струм та контактні явища в металах та напівпровідниках.

Тема 1. Електричний струм та його характеристики: сила та густина струму

(72)	Покажіть, що сила струму – це потік вектора густини струму.....	86
(73)	Покажіть, що сила постійного струму є однакою в усіх послідовно з'єднаних провідниках.....	87
(74)	На основі теореми Остроградського–Гауса виведіть рівняння неперервності струму.....	88
(75)	Доведіть, що провідник зі струмом не є еквіпотенціальним.	89
(76)	Покажіть, що в провіднику зі струмом носії заряду дрейфують зі сталою швидкістю.....	89
(77)	Покажіть, що густина струму залежить від концентрації та дрейфової швидкості носіїв струму і встановіть цю залежність.....	91
(78)	Покажіть, що рівняння неперервності постійного струму може бути подане у вигляді $\text{div } \vec{j} = 0$	92
(79)	Обчисліть силу струму, створену електроном в атомі водню.....	92

Тема 2. Закон Ома для ділянки кола. Опір провідника

(80)	Представте закон Ома в диференціальній формі.....	95
(81)	Установіть, як питома провідність залежить від параметрів	

	носіїв заряду: їхньої рухливості та концентрації.....	96
(82)	Установіть залежність питомого опору провідника від температури умови залежного та незалежного від температури коефіцієнті опору.....	96
(83)	На основі рівняння неперервності струму та закону Ома для ділянки кола доведіть, що за послідовного з'єднання опорів, опір ділянки кола дорівнює сумі окремих опорів...	98
(84)	Доведіть, що за паралельного з'єднання опорів обернений опір ділянки кола дорівнює сумі обернених опорів.....	98
(85)	Обчисліть опір шунта, який слід приєднати до амперметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.....	99
(86)	Обчисліть додатковий опір, який слід приєднати до вольтметра, щоб розширити межу його вимірювань у n разів.	100
(87)	Покажіть, що електропровідність є одним з явищ перенесення.....	100
	Тема 3. Електрорушійна сила (ЕРС). Закон Ома для ділянки кола з ЕРС. Закон Ома для повного кола	
(88)	Доведіть, що стороння сила не може бути потенціальною.	103
(89)	Установіть закон Ома для ділянки кола з електрорушійною силою та для замкненого кола з електрорушійною силою.	103
(90)	Установіть вираз для ЕРС, яка виникає при обертанні металевого диска.....	105
(91)	Обчисліть відносну похибку, яку ми допускаємо, вимірюючи ЕРС джерела постійного струму вольтметром.....	105
	Тема 4. Правила Кірхгофа	
(92)	На основі рівняння неперервності струму встановіть перше правило Кірхгофа, а саме, що арифметична сума струмів, які входять у вузол, дорівнює арифметичній сумі струмів, які з нього виходять.....	106
(93)	На основі закону Ома для ділянки кола з ЕРС установіть друге правило Кірхгофа, а саме, що в будь-якому контурі, виділеному з розгалуженого кола, алгебраїчна сума напруг дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС, які є в цьому контурі.....	107

- (94) На основі правил Кірхгофа знайдіть опір R_x за допомогою так званої місткової схеми, якщо відомі опори R_1 , R_2 та R_3 підібрані так, що сила струму у вітці BD дорівнює нулеві. 108
- (95) Визнать ЕРС джерела струму компенсаційним методом. 109
- Тема 5. Робота і потужність струму**
- (96) Установіть вираз для роботи, яку виконує постійний струм та вираз його потужності..... 110
- (97) Установіть закон Джоуля-Ленца в інтегральній та диференціальній формах..... 111
- (98) Знайдіть вираз для ККД джерела постійного струму..... 112
- (99) Визначіть кількість теплоти, яка виділиться в провіднику за час τ , протягом якого струм у ньому рівномірно зростає від нуля до величини I_m . Обчисліть також середню потужність за цей час..... 113
- Тема 6. Класична теорія електропровідності металів**
- (100) За допомогою мислено проведеного експерименту Толмена і Стюарта підтвердіть наявність у металі вільних електронів та визначте їхній питомий заряд..... 115
- (101) Покажіть, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів можна вивести закон Ома..... 118
- (102) Покажіть, що з основних постулатів класичної теорії електропровідності металів можна вивести закон Джоуля-Ленца..... 119
- (103) На основі КТЕМ виведіть емпіричний закон Відемана-Франца, який полягає у тому, що відношення питомої теплопровідності до питомої електропровідності для усіх металів за певної температури є сталою величиною $\frac{K}{\sigma} = A'$, а за зміни температури це відношення зростає пропорційно до температури $\frac{K}{\sigma} = AT$ 120
- (104) Покажіть, що в рамках КТЕМ можна пояснити темпера-

турну залежність опору металів.....	122
(105) Покажіть, що в рамках КТЕМ можна отримати правильний результат щодо теплоємності електронного газу.....	123
(106) Установіть зв'язок концентрації вільних електронів у металі з його густиною і молярною масою.....	124
Тема 7. Провідність напівпровідників	
(107) Покажіть, що власна провідність напівпровідника зумовлена двома типами носіїв заряду – електронами й дірками.	125
(108) Покажіть, що в напівпровіднику кремнію домішки фосфору, миш'яку та сурми є донорами, а домішки бору, галію та індію – акцепторами.....	127
(109) Покажіть, що за низьких температур у напівпровідниках переважає домішкова провідність, а за високих – власна.	128
(110) Покажіть, що на відміну від провідників опір напівпровідників зменшується з підвищенням температури.....	129
(111) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у власному напівпровіднику знаходиться приблизно посередині забороненої зони встановіть залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури.....	130
(112) На основі розподілу Больцмана та того факту, що хемічний потенціал у домішковому напівпровіднику знаходиться приблизно посередині між домішковим рівнем та відповідною зоною (зоною провідності у донорному напівпровіднику чи валентною зоною в акцепторному) установіть температурну залежність домішкової провідності.....	131
(113) Поясніть типову експериментальну залежність опору напівпровідника від температури.....	132
(114) Покажіть, як на основі експериментальної температурної залежності питомої провідності напівпровідника можна обчислити його ширину забороненої зони E_g та енергію активації домішки E_a	133

Тема 8. Контактні явища в металах

- (115) Покажіть, що між поверхнею металу та вакуумом виникає різниця потенціалів, так званий поверхневий стрибок потенціалу і встановіть її зв'язок з роботою виходу електронів з металу..... 135
- (116) Покажіть, що між двома різними металами виникає зовнішня різниця потенціалів і встановіть вираз для цієї різниці потенціалів..... 136
- (117) Вважаючи вільні електрони в металі класичним електронним газом, покажіть, що між двома різними металами виникає внутрішня різниця потенціалів і встановіть, як вона залежить від концентрацій вільних електронів у цих металах та температури..... 137
- (118) Вважаючи вільні електрони в металі квантовим електронним газом, встановіть залежність внутрішньої контактної різниці потенціалів від концентрації вільних електронів у металах та температури..... 140
- (119) Установіть вирази для контактної різниці потенціалів як в класичній, так і в квантовій моделях і встановіть перший закон Вольта..... 141
- (120) Доведіть другий закон Вольта: якщо послідовно привести в контакт багато різних металів, які перебувають за однакової температури, то різниця потенціалів між крайніми металами не залежить від того, які саме метали включені як проміжні у цьому з'єднанні, а залежить лише від типу цих крайніх металів..... 142
- (121) Покажіть, що контакт двох металів не має односторонньої провідності..... 142

Тема 9. Явища в контактах двох напівпровідників та напівпровідника з металом

- (122) Поясніть механізм виникнення односторонньої провідності на *p-n*-переході..... 144
- (123) Покажіть, що контакт металу з напівпровідником може як

мати односторонню провідність, так і її не мати: залежно від природи цього металу і напівпровідника..... 146

Тема 10. Термоелектричні явища

(124) Покажіть, що якщо контакти (спаї) термопари перебувають за різних температур, то між ними виникає електрорушійна сила, яка пропорційна до цієї різниці температур..... 147

(125) З'ясуйте природу ефекту Пельтьє на основі класичної теорії електропровідності металів та знайдіть спосіб експериментального вимірювання теплоти Пельтьє..... 148

(126) З'ясуйте природу ефекту Томсона і вкажіть на спосіб експериментального вимірювання теплоти Томсона..... 149

Тема 11. Електричний струм у вакуумі

(127) Доведіть, що дрейфова швидкість електронів між катодом і анодом у вакуумному діоді є практично не залежною від напруги..... 151

(128) Поясніть природу вольт-амперної характеристики (ВАХ) вакуумного діода і зокрема струму насичення..... 152

(129) На основі класичної теорії електропровідності встановіть залежність густини струму насичення у вакуумному діоді від температури катода та роботи виходу електрона з катода (формула Річардсона)..... 153

(130) На основі формули Річардсона-Дешмана покажіть, як за допомогою експериментальної залежності густини струму насичення від температури можна обчислити роботу виходу електрона з металу..... 154

Тема 12. Електричний струм в рідинах

(131) Наведіть експериментальні факти, які свідчать, що носіями електричного струму в електролітах є йони..... 156

(132) Поясніть механізм електролітичної дисоціації..... 156

(133) Виведіть формулу розчинення Оствальда та проаналізуйте її в граничних випадках..... 157

(134) Покажіть, як на основі закону електролізу Фарадея можна дослідним шляхом визначити заряд електрона..... 158

(135)	Покажіть, що внаслідок нагрівання опір електролітів зменшується.....	159
(136)	Доведіть експериментально, що рухливість будь-якого йона в електроліті малої концентрації не залежить від наявності в ньому інших йонів.....	160
Тема 13. Контактні явища між металами та електролітами		
(137)	Покажіть, що якщо занурити метал у воду чи у водний розчин солі цього металу, то між металом і розчином виникає різниця потенціалів.....	163
(138)	Покажіть, що процес вимірювання електрохімічного потенціалу неминуче впливає на вимірювану величину.....	163
(139)	Покажіть, як за допомогою еталонного водневого електрода можна вимірювати електрохімічні потенціали.....	164
(140)	Покажіть, що в замкненому колі з послідовно з'єднаними металами та електролітами, різниця потенціалів між будь-якими з них не дорівнює нулеві (на відміну від замкненого кола складеного з металів), тобто в такому колі виникає ЕРС.....	165
(141)	Покажіть, що між двома електролітами різних концентрацій, розділених пористою перегородкою, виникає різниця потенціалів, і встановіть вираз для цієї різниці потенціалів (формула Нернста).....	166
Тема 14. Електричний струм в газах. Плазма		
(142)	Установіть залежність густини струму насичення від швидкості генерації йонів та довжини трубки, і покажіть, що за несамостійного розряду за малих напруг виконується закон Ома, а за великих напруг струм досягає насичення.....	169
(143)	Установіть часову залежність концентрації йонів у газорозрядній трубці після вимкнення йонізатора.....	171
(144)	Встановити залежність сили струму та потоку електронів від відстані в електронній лавині, яка має місце в самостійному розряді.....	172

- (145) Установіть умову самостійного розряду, тобто умову, за якої струм буде підтримуватися у відсутності зовнішнього йонізатора..... 174
- (146) Покажіть, що за низького тиску плазма є ближчою до неізотермічної, а за високого – до ізотермічної..... 175
- (147) Встановіть зв'язок дебаївської довжини з температурою та концентрацією заряджених частинок одного знаку..... 176
- (148) На основі припущення про флуктуації заряду в плазмі та виразу для дебаївської довжини встановіть вираз для плазмової (ленгмюрової) частоти..... 178
- (149) Вважаючи рух електрона в плазмі під дією електричного поля рівномірним, покажіть, що для струму в плазмі виконується закон Ома і встановіть вираз для питомої електропровідності плазми..... 178

Розділ III. Магнетне поле

Тема 1. Закон Ампера. Індукція магнетного поля. Провідник зі струмом у магнетному полі

- (150) Знайдіть метод обчислення сили, яка діє з боку магнетного поля на провідник зі струмом довільної форми..... 182
- (151) Установіть, як зорієнтується вільний контур зі струмом в однорідному магнетному полі..... 183
- (152) Знайдіть вираз для моменту сили, який обертає коловий контур зі струмом у випадку, коли площа контура паралельна до ліній магнетної індукції..... 184
- (153) Знайдіть силу, яка розтягає (стискає) коловий контур зі струмом, магнетний момент якого паралельний (антипаралельний) до вектора індукції однорідного магнетного поля. 185
- (154) Покажіть, що можливий стан рівноваги контура зі струмом за антипаралельного напрямку його магнетного моменту щодо напрямку зовнішнього однорідного магнетного поля, проте, цей стан рівноваги не є стійким..... 186
- (155) Покажіть, що в неоднорідному магнетному полі контур зі

	струмом не набуде стану спокою, а буде переміщуватися в область сильнішого поля.....	187
(156)	Знайдіть вираз для величини орбітального магнетного моменту електрона в атомі.....	188
(157)	Установіть вираз для магнетного моменту рівномірно зарядженого зарядом q стержня довжиною L , який обертається з кутовою швидкістю ω	188
Тема 2. Закон Біо– Савара–Лапласа		
(158)	Установіть картину ліній індукції магнетного поля прямого, колового та соленоїдного струмів.....	191
(159)	Установіть вираз для індукції магнетного поля, створеного в довільній точці простору прямим нескінченно довгим провідником зі струмом.....	192
(160)	Установіть вираз для індукції магнетного поля на осі колового струму.....	193
(161)	Установіть вираз для індукції магнетного поля на осі плоского соленоїда.....	195
(162)	Установіть вираз для індукції магнетного поля на середині осі нормального соленоїда.....	196
(163)	Установіть вираз для індукції магнетного поля, створеного точковим зарядом q , який рухається зі швидкістю v	197
(164)	Знайдіть спосіб визначення горизонтальної складової магнетного поля Землі за допомогою тангенс-гальванометра.	199
(165)	На основі законів Ампера та Біо-Савара-Лапласа доведіть, що два паралельні проводи зі струмами одного напрямку притягаються, а протилежних – відштовхуються.....	200
Тема 3. Циркуляція і потік вектора індукції магнетного поля		
(166)	На основі означення одиниці фізичної величини ампера визначіть числове значення магнетної сталої.....	202
(167)	Перевірте теорему про циркуляцію вектора магнетної індукції для прямого струму.....	203

(168)	На основі теореми про магнетну циркуляцію покажіть, що для випадку струмів будь-якої форми, які течуть у проводах $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$, де $\sum_{i=1}^n I_i$, – алгебраїчна сума струмів, яка охоплена будь-яким контуром довжиною L	205
(169)	Представте теорему про магнетну циркуляцію у диференціальній формі.....	205
(170)	За допомогою теореми про магнетну циркуляцію знайдіть вираз для індукції магнетного поля тороїда.....	206
(171)	На основі теореми про магнетну циркуляцію знайдіть вираз для індукції магнетного поля всередині нормального соленоїда.....	207
(172)	Представте теорему Остроградського-Гауса для магнетного поля в диференціальній формі.....	209
(173)	Покажіть, що теорема Остроградського-Гауса для магнетного поля свідчить про замкненість силових ліній магнетного поля, що, своєю чергою, може трактуватися як відсутність у природі магнетних зарядів.....	209
Тема 4. Сила Лоренца		
(174)	Установіть вираз для сили Лоренца.....	211
(175)	Вкажіть на відносність магнетного поля.....	213
(176)	Порівняйте силу електричної та магнетної взаємодії між двома точковими зарядами.....	213
(177)	Знайдіть циклотронну частоту точкового заряду, який потрапив у магнетне поле нормально до його силових ліній.	215
(178)	Знайдіть радіус і крок гвинтової лінії вздовж якої буде рухатися заряджена частинка, яка потрапила в магнетне поле під довільним кутом α до його силових ліній.....	216
(179)	Визначте питомий заряд електрона, якщо він, будучи прискореним різницею потенціалів U_n потрапивши в норльне до його швидкості магнетне поле з індукцією $\vec{B}$, відхилився на відстань d , пройшовши відстань l	217

- (180) Визначте питомий заряд електрона методом Томсона, а саме: якщо він, рухаючись нормально до силових ліній взаємно-нормальних та однорідних електричних та магнетних полів, не зазнав відхилення..... 219
- (181) Знайдіть масу однозарядного йона, який потрапив на фотопластинку у масс-спектрографі Бейнбріджа на відстані L від щілини..... 220
- (182) Поясніть механізм виникнення ефекту Голла і виразити напругу Голла через індукцію магнетного поля і силу струму..... 221
- (183) Покажіть, що вимірявши експериментально напругу Голла можна визначити концентрацію та рухливість носіїв струму в металі чи напівпровіднику..... 222
- (184) Поясніть роботу прискорювача заряджених частинок – циклотрона..... 223
- (185) Поясніть роботу магнетогідродинамічного генератора (МГД-генератора)..... 224
- (186) Поясніть, як виникає явище “північне сяйво”..... 224

Тема 5. Електромагнетна індукція

- (187) Перевірте закон електромагнетної індукції Фарадея для відрізка проводу, який рухається в однорідному магнетному полі нормально до його силових ліній..... 227
- (188) З’ясуйте, у чому полягає різниця між формулюваннями закону електромагнетної індукції Фарадея та Максвелла. 229
- (189) На основі закону електромагнетної індукції Фарадея та означення магнетного потоку проаналізуйте способи, якими можна отримати ЕРС індукції..... 229
- (190) Знайдіть напрям індукованого струму у таких випадках електромагнетної індукції: а) провідний коловий контур є в однорідному магнетному полі, індукція якого зменся; б) провідний коловий контур деформують в постійному однорідному магнетному полі; в) провідний контур рівномірно обертається в постійному однорідному магнетному

полі.....	230
(191) Поясніть, як вимірюють індукцію магнетного поля флюк- сометром.....	232
(192) Поясніть механізм виникнення вихрових струмів (струмів Фуко).....	233
(193) Поясніть механізм виникнення скін-ефекту.....	234
(194) Поясніть природу явища самоіндукції і встановити вираз для ЕРС самоіндукції.....	234
(195) Представте закон електромагнетної індукції у диференці- яльній формі.....	235
(196) Знайдіть вираз для індуктивності нормального соленоїда, тобто виразіть цю величину через геометричні розміри соленоїда та густоту витків.....	236
(197) Розкрийте принцип роботи прискорювача заряджених час- тинок бетатрона та встановіть умову за якої заряджена частинка буде утримуватися в бетатроні на сталій орбіті.	237
(198) Установіть закон спадання сили струму після розмикання кола постійного струму.....	240
(199) Установіть закон зростання сили струму після замикання кола постійного струму.....	241
(200) Виразіть енергію магнетного поля через силу струму, який є джерелом цього поля.....	242
(201) Виразіть густину енергії магнетного поля через індукцію цього поля.....	243
Тема 6. Магнетне поле в речовині	
(202) Знайдіть відношення орбітального магнетного моменту електрона в атомі P_{m_0} до його орбітального моменту імпу- льсу L_0 (орбітальне гіромагнетне відношення).....	246
(203) Покажіть, що вектор моменту імпульсу електрона в атомі протилежний до вектора його орбітального магнетного моменту.....	247
(204) Знайдіть числове значення магнетона Бора (на основі кван-	

тованості моменту імпульсу).....	248
(205) На основі того факту, що електрон має власний момент імпульсу $L_S = \pm \frac{h}{2}$ та власний (спіновий) магнетний момент, який дорівнює магнетону Бора, знайдіть спінове гіромагнетне відношення.....	248
(206) Установіть, з яких складових складається магнетний момент атома та цілого магнетика.....	249
(207) Покажіть, що гіромагнетне відношення електрона в атомі не дорівнює ні спіновому, ні орбітальному гіромагнетному відношенню.....	249
(208) Покласифікуйте всі магнетики на діа- пара- та феромагнетики з погляду наявності магнетних моментів у їхніх електронів, атомів, мікро- та макрообластей.....	250
(209) З'ясуйте механізм виникнення доменів у феромагнетику...	251
(210) Покажіть, як за приблизними розмірами домену у феромагнетику можна знайти ймовірність його виникнення і навпаки.....	252
(211) З'ясуйте природу діамagnetного ефекту, тобто покажіть, що діамagnetик намагнечується проти зовнішнього магнетного поля, що означає, що магнетне поле в діамagnetику послаблюється.....	252
(212) Знайдіть вираз для зміни орбітальної частоти електрона в зовнішньому магнетному полі (частоти Лармора).....	254
(213) Знайдіть зміну орбітального магнетного моменту електрона в магнетному полі.....	256
(214) Покажіть, що в пара- та феромагнетику магнетне поле підсилюється.....	257
(215) Покажіть, що у феромагнетику на відміну від діа- чи парамагнетика, після виключення зовнішнього магнетного поля упорядкованість магнетних моментів не зникає цілком, тобто їм властиве явище гістерезису.....	257
(216) Покажіть, що пара- та феромагнетику властиве насичення	

магнетного моменту в зовнішньому магнетному полі, тобто явище незростання магнетного моменту, починаючи з певних значень напруженості зовнішнього магнетного поля.....	258
(217) Покажіть, що в магнетиках зовнішнє магнетне поле підсилюється в μ разів.....	258
(218) Оцініть межі, у яких лежать магнетні сприйнятливості різних магнетиків.....	260
(219) Поясніть експериментальну криву магнетного гістерезису.	260
(220) Покажіть, що існує певна температура, за якої феромагнетик переходить у парамагнетик.....	262
(221) Покажіть, що в неоднорідному магнетному полі парамагнетик рухається в бік сильнішого поля, тоді як діамагнетик – в бік слабшого поля (виштовхується з магнетного поля).	263
(222) Покажіть, що обертання магнетика приводить до його намагнення (механомагнетний ефект, Барнет, 1909 р.) і, навпаки, намагнення магнетика викликає його обертання (магнетомеханічний ефект, Айнштайн і де-Гааз, 1915 р.)...	263
(223) На основі закону відсутності в природі магнетних зарядів доведіть, що на межі двох магнетиків нормальна складова вектора індукції не змінюється.....	266
(224) На основі теореми про магнетну циркуляцію доведіть, що на межі двох магнетиків тангенціальна складова вектора напруженості не змінюється.....	267
(225) Виведіть закон заломлення силових ліній на межі двох магнетиків.....	268
(226) Розкрийте природу виникнення електронного парамагнетного резонансу (ЕПР).....	269
(227) Розкрийте природу ядерного магнетного резонансу (ЯМР).	271
(228) Розкрийте природу виникнення циклотронного та магнетофононного резонансу (ЦР та МФР).....	271

Розділ IV. Електричні коливання і електромаг-

нетні хвилі

Тема 1. Змінний струм

- (229) На основі закону електромагнетної індукції встановіть часову залежність ЕРС індукції, яка виникає в контурі площею S , що обертається з кутовою швидкістю ω в однорідному магнетному полі з індукцією $\vec{B}$ 276
- (230) Доведіть, що середнє значення синусоїдної змінної ЕРС за період дорівнює нулеві..... 277
- (231) Покажіть, що середнє значення теплової потужності змінного струму за період не дорівнює нулеві..... 277
- (232) Знайдіть зв'язок між ефективним та максимальним значенням змінної ЕРС..... 278
- (233) Обґрунтуйте застосовність закону Ома та правил Кірхгофа до миттєвих, амплітудних та ефективних значень сили струму й напруги..... 279
- (234) Доведіть, що в активному резисторі сила змінного струму збігається за фазою з напругою..... 279
- (235) Доведіть, що в індуктивному резисторі сила струму відстає від напруги за фазою на $\pi/2$ 280
- (236) Доведіть, що в ємнісному резисторі сила струму випереджає напругу за фазою на $\pi/2$ 281
- (237) Розкрийте геометричний спосіб додавання гармонічних коливань (векторна модель додавання гармонічних коливань)..... 283
- (238) Користуючись векторною моделлю додавання гармонічних коливань виведіть закон Ома для ділянки кола змінного струму..... 284
- (239) Установіть умову, за якої сила струму в нерозгалуженому колі змінного струму буде максимальною (умову резонансу напруг)..... 285
- (240) Установіть умову, за якої сила струму в розгалуженому колі змінного струму буде максимальною (умову резонан-

су струмів).....	286
(241) Установіть зв'язок середньої потужності змінного струму з ефективними значеннями сили струму та напруги.....	287
(242) Покажіть, що коефіцієнт трансформації трансформатора дорівнює відношенню кількості витків вторинної та первинної обмотки.....	289
(243) Покажіть, як принципово можна отримати трифазний струм і напишіть закон його зміни з часом.....	290
(244) За допомогою векторної діаграми для трифазних напруг встановіть співвідношення між лінійною та фазною напругами.....	291
(245) Доведіть, що магнетне поле створене трифазним змінним струмом в трьох соленоїдах розміщених під кутом 120° один до одного еквівалентне постійному полю з індукцією $3/2 B_m$, яке обертається з кутовою швидкістю, що дорівнює циклічній частоті змінного струму.....	292
Тема 2. Електричні коливання	
(246) На основі другого правила Кірхгофа встановіть закон коливання заряду в ідеальному коливальному контурі....	295
(247) Встановіть закон зміни сили струму в ідеальному коливальному контурі.....	297
(248) Покажіть, що сила струму в ідеальному коливальному контурі і напруга на конденсаторі цього коливального контура зсунуті за фазою на $\pi/2$	297
(249) Покажіть, що сума енергій електричного і магнетного полів ідеального коливального контура є сталою в часі величиною.....	298
(250) На основі другого правила Кірхгофа встановіть закон коливання заряду в реальному коливальному контурі.....	299
(251) На основі означення логаритмічного декременту та закону згасальних коливань встановіть зв'язок логаритмічного декременту та добротності з параметрами коливального кон-	

тура.....	301
(252) На основі другого правила Кірхгофа встановіть закон вимушених коливань в коливальному контурі під дією гармонічної ЕРС.....	302
(253) На основі закону вимушених коливань заряду в коливальному контурі встановіть зв'язок резонансної частоти з параметрами коливального контура.....	303
(254) Намалюйте схему та поясніть роботу лампового (транзисторного) генератора електричних коливань.....	304
(255) Намалюйте схему та поясніть роботу релаксаційного генератора електричних коливань.....	305
Тема 3. Електромагнетне поле. Струми зміщення	
(256) За допомогою теореми Стокса подайте закон повного струму в диференціальній формі.....	307
(257) На основі означень струму провідності та струму зміщення покажіть, що на ділянці кола змінного струму, що містить конденсатор сила струму в провідниках дорівнює силі струму зміщення між обкладками конденсатора.....	308
(258) Покажіть, що з рівнянь Максвелла випливає хвильове рівняння.....	309
(259) Доведіть, що будь-яка функція аргументом якої є $x - ut$ або $x + ut$ є розв'язком хвильового рівняння.....	311
(260) Представте рівняння електромагнетної хвилі у вигляді $E = E_m \sin(x - \omega t)$	312
(261) На основі закону повного струму в диференціальній формі доведіть, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно-нормальні.....	314
(262) На основі двох рівнянь Максвелла, а саме закону електромагнетної індукції та закону повного струму знайдіть числове значення швидкості електромагнетної хвилі у вакуумі.....	315
(263) На основі двох рівнянь Максвелла, а саме закону електромагнетної індукції та закону повного струму знайдіть	

	вираз для швидкості електромагнетної хвилі в середовищі.	318
(264)	На основі формул для густини енергії електричного та магнетного полів знайдіть вираз потужності яка припадає на одиницю площі фронту електромагнетної хвилі.....	319

**Алфавітний покажчик означень фізичних явищ,
фізичних понять, фізичних величин, систем й приладів**

Фізичні явища

А

Активний опір **274**

В

Вторинна електронна емісія **168**

Взаємоіндукція **225**

Власні коливання **294**

Г

Гармонічні коливання **294**

Е

Електрострикція **58**

Електретний ефект **58**

Електричний струм (далі: струм)
85

Ефект Голла **210**

Електромагнетна індукція **225**

Електронний парамагнетичний
резонанс (ЕПР) **244**

Ефективне (діюче) значення
змінного струму **274**

Ефект Зеебека (термoeфектрич-
ний ефект) **146**

Ефект Пельтьє **147**

Ефект Томсона **147**

Є

Ємнісний опір **274**

З

Згасальні коливання **294**

І

Індуктивний опір **274**

К

Квазістаціонарне коло змінного
струму **274**

Коефіцієнт трансформації **275**

М

Магнетоопір (магнеторезисти-
вний ефект) **210**

Механомагнетний ефект (Ефект
Барнета) **244**

Магнетомеханічний ефект (ефект
Ейнштейна-де-Гааза) **244**

Магнетофононний резонанс
(МФР) **244**

Н

Несамостійний газовий розряд
168

П

Поляризація діелектрика **58**

П'єзоелектричний ефект **58**

Повний опір **275**

Р

Резонанс напруг **275**
Резонанс струмів **275**
Релаксаційні коливання **294**

С

Самостійний газовий розряд **168**
Самоіндукція **225**
Скін-ефект **226**
Синусоїдний змінний струм **274**

Ц

Циклотронний резонанс **210, 244**

Я

Ядерний магнетний резонанс (ЯМР) **244**

Фізичні поняття

А

Акцептор **125**
Антиферомагнетик **246**

В

Власна провідність напівпровідника **125**
Вільна зона (інакше зона провідності) **125**
Валентна зона **124**
Внутрішня різниця потенціалів **135**
Водневий електрод **161**
Електроліт **155**

Вихрові струми (струми Фуко) **226**

Відносна магнетна проникність магнетика **246**

Вихрове електричне поле **306**

Вектор Пойтінга **307**

Г

Гradient скалярної величини **50**
Гіромагнетне відношення **244**
Гармонічний осцилятор **295**

Д

Діелектрик **58**
Дрейфова швидкість **85**
Домішкова провідність напівпровідника **125**
Дірка **125**
Донор **125**
Дебаєвська довжина **168**
Діамагнетик **245**
Добротність коливального контура **295**

Е

Електричний заряд **8**
Елементарний заряд **8**
Електричне поле **13**
Еквіпотенціальна поверхня **50**
Електронний газ **114**
Енергія йонізації донора **125**
Енергія активації акцептора **125**
Логаритмічний декремент зга-

Електролітична дисоціація **155**

Електроліз **156**

Електрохімічний потенціал **161**

Елемент струму **181**

Ефективна маса вільного електрона в твердому тілі **246**

Ж

Жорсткий диполь **24**

З

Заборонена зона **125**

Зовнішня різниця потенціалів **135**

І

Ізотермічна плазма **168**

Ідеальний коливальний контур **295**

К

Конвекційний струм **85**

Коефіцієнт корисної дії споживача струму **109**

Коротке замикання **109**

Коефіцієнт дисоціації **156**

Л

Лінія напруженості електричного поля (чи силова лінія) **13**

Лінійна напруга **275**

Потенціальне поле **47**

Полярний діелектрик **58**

сання **295**

М

Магнетне поле **181**

Магнетон Бора **244**

Магнетний гістерезис **245**

Магнетна сприйнятливість магнетика **245**

Магнеторушійна сила **306**

Множник Ланде (g - фактор) **246**

Н

Неполярний діелектрик **58**

Напівпровідник **125**

Напівпровідник n -типу провідності **125**

Напівпровідник p -типу провідності **125**

Нормальна концентрація **161**

Нормальний електрохімічний потенціал **162**

Неізотермічна плазма **168**

Намагнетченість (вектор намагнетченості) **245**

О

Орбітальний магнетний момент електрона **244**

П

Пробний заряд **13**

Плече диполя **24**

Струм зміщення **306**

Потенціальна енергія заряду в даній точці електричного поля **80**

Постійний електричний струм **85**

Поверхневий стрибок потенціалу **135**

Плазма **168**

Потік вектора магнетної індукції **201**

Питомий заряд частинки **210**

Парамагнетик **245**

p-n- перехід **125, 144**

Р

Ротор вектора **47**

Робота виходу електрона з металу **135, 151**

Рівняння хвилі **306**

С

Сегнетоелектрик **58**

Струм поляризації **85**

Струм насичення **85, 151, 168**

Сила Ампера **181**

Силова лінія магнетного поля **181**

Сила Лоренца **210**

Спіновий магнетний момент електрона **244**

Спінове гіромагнетне відношення **245**

Густина струму **85**

Т

Точковий заряд **11**

Точковий диполь **24**

Точка Кюрі **245**

Ф

Феромагнетик **245**

Феримагнетик **246**

Фазна напруга **275**

Х

Хвильове рівняння **306**

Ц

Циркуляція **47, 201**

Циклотронна частота **210**

Ч

Частота Лармора **245**

Ш

Ширина забороненої зони **125**

Фізичні величини

В

Відносна діелектрична сприйнятливість **59**

Відносна діелектрична проникність **59**

Г

П

Потік електричної індукції **30**

Д

Дипольний момент **24**

Е

Електричний заряд **8**

Електрична індукція **30**

Електроємність відокремленого провідника **69**

Електричний опір провідника **93**

Електрорушійна сила **103**

І

Індукція магнетного поля **181**

Індуктивність провідника **226**

Л

Лінійна, поверхнева і об'ємна густина заряду **8**

М

Магнетний момент замкненого струму **181**

Н

Напруженість електричного поля **13**

О

Об'ємна густина енергії електричного поля **81**

Г

Гальванічний елемент **162**

Гальванічний елемент Вольта

Потенціал електростатичного поля **42**

Поляризованість окремої молекули **58**

Поляризованість діелектрика **58**

Питомий опір провідника **93**

Питома електропровідність **93**

Р

Різниця потенціалів **42**

Рухливість носія заряду **94**

С

Сила струму **85**

Т

Температурний коефіцієнт опору **94**

Х

Хемічний потенціал **125**

Фізичні системи й прилади

А

Акумулятор **162**

Асинхронний двигун **275**

В

Вакуумний діод **151**

С

Сенсор Голла **211**

162

Гальванічний елемент Даніеля

162

Генератор змінного струму 275

Д

Диполь 25

Додатковий опір 95

К

Конденсатор 69

Коливальний контур 295

М

Магнетна стрілка 181

Мас-спектрометр 211

Магнетогідродинамічний генератор 211

Н

Напівпровідниковий діод 144

Нормальний елемент Вестона 162

Нормальний соленоїд 190

П

Паливний елемент 162

Плоский соленоїд 190

Прискорювач заряджених частинок 211

М

Метал складається з йонів, які, коливаючись біля своїх вузлів

Т

Транзистор 144

Термопара 147

Тангенс-гальванометр 190

Тороїд 190

Трансформатор 275

Ф

Флюксометр 226

Ш

Шунт 95

Постулати

З

Закон збереження електричного заряду 7

Закон Кулона 10

Закон Ома 94

Закон Ампера 182

Закон Біо – Савара - Лапласа 190

Закон електромагнітної індукції (Фарадея) 226

Закон електромагнітної індукції (Максвелла) 226

Закон повного струму 307

Під час зіткнення електрона з вузлом кристалічної ґратки електрон цілком передає йому свою

утворюють кристалічну ґратку та вільних електронів, які хаотично рухаються у кристалі. **115**

О

Опір провідника прямо пропорційний до його довжини і обернено пропорційний до його площі поперечного перерізу. **95**

П

Принцип інваріантності заряду **8**

Принцип квантованості заряду **8**

Принцип суперпозиції електричних полів **18**

Принцип лінійної суперпозиції магнетних полів **190**

енергію дрейфового руху **115**

С

Сукупність вільних електронів у металі трактується як ідеальний газ **115**

Сила струму в провіднику прямо пропорційна до різниці потенціалів (напруги) на кінцях цього провідника. **94**

Т

Теорема про циркуляцію вектора магнетної індукції **201**

Теорема Остроградського-Гауса для магнетного поля **201**

Іменний покажчик

А

Авогадро 124
Айнштайн 263
Ампер 181, 182-184, 186-187
Архімед 14
Ареніус 156

Б

Барнет 244, 263
Бейнбрідж 220
Біо 190, 191, 193,
Больцман 121, 131, 167, 166, 154
Богуславський 152
Бор 244, 248, 249

В

Відеман 120
Вестон 162
Вольта 141-142, 162, 166

Г

Гаус 30, 32, 33, 207
Голл 210-211, 222-223, 224
Гротгус 156

Д

Даніель 162
Дюлонг 123
Дешман 154
Дірак 154
Дж-Тавзенда 168

О

Де-Гааз 273
Джоуль 111-113, 120, 149, 150

З

Зеебек 146

К

Кулон , 10, 11, 12, 15
Кавендіш, 12
Кірхгоф, 107-109, 240-241, 279-
280, 299, 306
Клавзіус 156
Кюри 245, 262

Л

Лаплас 51, 190, 191, 193
Ленц 111-113, 120, 149, 150
Ленгмюр 152, 174, 185
Лоренц 210-211, 213
Ланде 246, 250, 271
Лармор 244-245, 254, 256, 270-
271

М

Мілікен, 14
Максвелл 226, 229, 309, 311, 315,
318

Н

Ньютон 101, 118, 120, 182
Нернст 165, 166, 167

С

Остроградський 30, 32, 33, 207
Ом 95-96, 98-100, 103, 105, 240,
279, 284
Оствальд 157-158

П

Планк 248
Пуассон 54
Петі 123
Пельтьє 147, 148-150
Пойтінг 307, 320

Р

Річардсон 153-155

Савар 190, 191, 193
Стокс 49, 158-159, 205, 235, 307
Стюарт 115, 118
Сtoneй 159

Т

Толмен 115, 118
Томсон 147, 149-151, 219

Ф

Фік 101-102
Фур'є 101-102
Франц 120
Фермі 154
Фарадей 158 -159, 226
Фуко 226, 233

Література

1. Г. Ф. Бушок, В. В. Левандівський, Г. Ф. Півень. Курс фізики. т. 1. К: Вища школа. 2001, 468 с.
2. Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. В. Милковська. Курс фізики. т. 2. К: Вища школа. 1978, 462 с.
3. И. В. Савельев. Курс общей физики. т. 2. М: Высшая школа. 1987. 480 с.
4. Э. Парсел. Берклевский курс физики. т. 2. М: «Наука». 1983. 416 с.
5. І. М. Кучерук, І. Г. Горбачук, І. Т. Луцик. Загальний курс фізики. К: Техніка 1999. 452 с.
6. Фізичний практикум. ч. 2. (під редакцією В. П. Дуценка). К: Вища школа. 1981. 245 с.
7. И. В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике. М: Наука. 1982. 271 с.
8. А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. Задачник по физике. М: Высшая школа. 1988. 496 с.
9. И. Е. Иродов. Задачник по общей физике. М: Наука. 1988. 415 с.
10. В. С. Волькенштейн. Сборник по общему курсу физики. М: Наука. 1987. 382 с.
11. І. Т. Горбачук. Збірник задач. Загальна фізика. К: Вища школа. 1993. 323 с.
12. П. П. Чолпан. Фізика. К: К: Вища школа. 2003. 576 с.
13. Н. С. Ohanian. Physics. Norton & Com. Inc. Nev-York-London. 1985. 1012 p.
14. С. Г. Калашников. Электричество. М: Наука. 1985. 576 с.
15. Фейнман, Лейтон, Сендс. Фейнмановские лекции по физике. т.2. М: Мир. 1966. 343 с.
16. Д. І. Цюцюра. Розв'язування задач з фізики (електрика і магнетизм). Дрогобич. 1999. 156 с.
17. Р. А. Tipler. Physics. Worth Publisher Inc. Nev-York. 1982. 1078 p.
18. В. Козирський і В. Шендеровський. Словник фізичної лексики. К: «Рада». 1996. 932 с.

