

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

*Вірослав Блашків, Олеся Даньків,
Олег Кузик, Дионізій Шуптар*

Загальна фізика

МЕХАНІКА

Тексти лекцій

Дрогобич
2025

УДК Б31/634 (0775.8)
Б 68

*Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 4 від 15 квітня 2009 р.)*

Рецензенти:

- **Богдан ПАВЛИК**, професор кафедри сенсорної та напівпровідникової електроніки Львівського національного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук;
- **Ігор СТОЛЯРЧУК**, професор кафедри фізики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, доктор фізико-математичних наук, професор.

Вірослав Блашків, Олеся Даньків, Олег Кузик, Дионізій Шуптар.
Загальна фізика. Механіка : тексти лекцій. Видання друге доповнене
Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені І. Франка, 2025. 289 с.

Посібник “Загальна фізика. Механіка: тексти лекцій” написаний відповідно до робочої програми навчальної дисципліни “Загальна фізика (Механіка)” для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 014 Середня освіта (Фізика та астрономія). У посібнику подані тексти лекцій з основних розділів механіки, до кожної з яких підібрані питання для самоконтролю і задачі.

Розрахований на студентів, які вивчають механіку, та учнів, які цікавляться фізикою.

© В. Блашків, О. Кузик, О. Даньків, Д.Шуптар 2025

© Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка, 2025

З М І С Т

ВСТУП.....	6
ТЕМА 1. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	24
1.1. Механіка матеріальної точки. Системи відліку. Елементи векторної алгебри. Вектори переміщення, швидкості та прискорення	24
1.2. Рух по колу. Кутові та лінійні характеристики руху	41
1.3. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту	45
1.4. Коливальний рух матеріальної точки	46
Питання для самоконтролю	48
ТЕМА 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	50
2.1. Перший закон Ньютона. Принцип відносності Галілея	50
2.2. Другий і третій закони Ньютона. Поняття про силу та масу. Імпульс. Закон збереження імпульсу	55
2.3. Рух у неінерціальних системах відліку.....	62
2.4. Реактивний рух. Рух тіла із змінною масою. Рівняння Мещерського та Ціолковського	71
Питання для самоконтролю	74
ТЕМА 3. СИЛИ В МЕХАНІЦІ.....	76
3.1. Пружні сили.....	76
3.2. Сили тертя у механіці	90
3.3. Сили тяжіння	99
Питання для самоконтролю	106
ТЕМА 4. РОБОТА Й ПОТУЖНІСТЬ	109
4.1. Інтеграли руху	109
4.2. Кінетична енергія. Робота, потужність.....	110
4.3. Консервативні сили. Потенціальне поле	114

4.4. Потенціальна енергія у зовнішньому полі сил	118
4.5. Закон збереження енергії	121
4.6. Умови рівноваги механічної системи. Удар куль.....	122
4.7. Космічні швидкості.....	126
Питання для самоконтролю	128
ТЕМА 5. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА	132
5.1. Поняття твердого тіла як системи матеріальних точок. Поступальний і обертовий рух твердого тіла	132
5.2. Момент сили	135
5.3. Момент інерції. Теорема Штейнера. Моменти інерції деяких тіл.....	140
5.4. Основне рівняння динаміки обертowego руху	144
5.5. Момент імпульсу твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу	146
5.6. Кінетична енергія обертowego руху твердого тіла.....	150
5.7. Вільні осі обертання. Гіроскоп. Прецесія. Гіроскопічні сили. Застосування гіроскопічного ефекту	153
Питання для самоконтролю	161
ТЕМА 6. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ	164
6.1. Гармонічний коливальний рух. Енергія коливального руху. Маятники.....	164
6.2. Додавання гармонічних коливань	171
6.3. Загасаючі та вимушені коливання.....	176
6.4. Механічні хвилі. Рівняння плоскoї біжучої хвилі. Енергія пружної хвилі. Вектор Умова-Пойтінга.....	185
6.5. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі.....	195
6.6. Власні коливання суцільного обмеженого середовища	201
6. 7. Природа звуку	204
6. 8. Характеристики звуку	206

6.9. Поширення звуку. Ефект Доплера	210
6.10. Джерела звуку. Ультразвук.....	212
Запитання для самоконтролю	217
ТЕМА 7. МЕХАНІКА РІДИН	223
7.1. Рідкі та газоподібні тіла.....	223
7.2. Закони Паскаля й Архімеда	224
7.3. Основні поняття і визначення гідродинаміки	228
7.5. Сили в'язкості. Коефіцієнт в'язкості	240
7.6. Рух в'язкої рідини. Формула Пуазейля.....	244
7.7. Ламінарний і турбулентний рух рідин. Число Рейнольдса	248
7.8. Рух тіл в рідинах і газах.....	251
7.9. Підіймальна сила крила літака	257
7.10. Рух з надзвуковими швидкостями.....	261
Питання для самоконтролю	262
ТЕМА 8. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ (СТВ).....	265
8.1. Межі застосування класичних понять і законів у механіці	265
8.2. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца	267
8.3. Наслідки із перетворень Лоренца.....	269
8.4. Релятивістська динаміка.....	277
Запитання для самоконтролю	286
ЛІТЕРАТУРА	288

ВСТУП

ПЛАН

1. Простір і час – основні форми існування матерії.
2. Головні риси вчення про будову матерії у сучасній фізиці.
3. Фізика та її зв'язок з іншими науками і технікою.
4. Побудова курсу фізики та коротка характеристика головних його розділів. Формування наукового мислення.

Простір і час – основні форми існування матерії

Щоб розкрити предмет фізики, вкрай важливо ознайомитися з такими поняттями, як матерія і рух, а для цього необхідно мати хоча б первинні уявлення про просторово-часове існування матерії.

Фізика – це наука про природу. Однак хімія, біологія, географія також є науками про природу. Щоб точніше визначити предмет фізики, потрібно з'ясувати найзагальніші властивості об'єктів, що оточують людину, і серед усіх їх властивостей віднайти ті, які безпосередньо вивчає фізика.

Усе розмаїття об'єктів, що оточує людину, насправді має щось спільне. Факт існування цих об'єктів поза людською свідомістю є тим спільним, що об'єднує всі дуже різноманітні предмети. Однією з найзагальніших властивостей усіх навколишніх об'єктів є вплив на людські органи чуття.

Деякі об'єкти навколишнього світу не діють безпосередньо на людські органи чуття, зокрема, атоми, молекули, бактерії. Однак недосконалість органів чуття людини можна виправити за допомогою приладів, тоді усі об'єкти сприйматимуться опосередковано.

Усе те, що існує поза людською свідомістю, незалежно від неї та прямо або опосередковано діє на органи чуття, об'єднується поняттям матерія. Уся навколишня дійсність і люди – це матерія, матеріальний світ.

Нематеріальними є лише думки, почуття, бажання, воля, відчуття тощо. Про них не можна сказати, що вони відбуваються

поза людиною і незалежно від неї. Вони належать до сфери людської свідомості. Матеріальний світ, діючи на органи чуття, відображається у свідомості людини. У мисленні дійсність, навколишній світ лише відтворюється, копіюється, тобто відображається, але не створюється. Під *матерією* розуміють все те, що існує поза людиною, незалежно від неї, і так чи інакше діє на людські органи чуття, викликаючи відчуття та емоції.

Отже, фізика вивчає не свідомість (як, наприклад, психологія), а матерію. Однак інші науки (біологія, хімія тощо) теж досліджують матеріальний світ. Які ж основні властивості матерії вивчає фізика?

У навколишньому матеріальному світі завжди відбуваються найрізноманітніші зміни (змінюється положення одних тіл відносно інших, змінюються їхні температура, агрегатний стан, може змінюватися їх електричний чи магнітний стан тощо), і немає такого матеріального об'єкта, який би не зазнавав жодних змін. Усі зміни, властиві матеріальним об'єктам, називаються *рухом матерії*. При цьому під рухом розуміють будь-яку зміну в матеріальному світі – зміну кольору тканин на сонці, танення льоду, обмін речовин у живому організмі тощо.

Отже, матерія завжди перебуває в русі і не може без нього існувати. Аналізуючи явища навколишнього світу, бачимо, що вони відбуваються у часі, мають певну тривалість, і при цьому обов'язково змінюється місце розташування тіл або їхня протяжність. Не може бути руху, який би не тривав певний час і щоб при цьому не сталися які-небудь просторові зміни у взаємному розташуванні тіл або їх частин. Рух матерії відбувається обов'язково у просторі та часі. Існувати у просторі, але поза часом предмети не можуть. Якщо предмет перебуває у певному місці простору, то це може бути або зараз, або вчора, або колись. Предмет перебуває одночасно і в просторі, і в часі.

Простір і час не є чимось, що існує поза матерією. Це ті характеристики, які тільки і дають змогу судити про рух матерії. Той факт, що всі матеріальні об'єкти мають певне місце розташування, протяжність (розмір, форму, об'єм), і означає, що матерія існує в просторі. А той факт, що всі зміни в матеріальному світі мають

певну тривалість, відбуваються у деякій послідовності, і означає, що матерія існує в часі.

Отже, інакше, як у русі, матерія існувати не може, а рух не може здійснюватися інакше, як у просторі та часі.

Підсумовуючи, можна сказати:

а) навколишній світ матеріальний, тобто існує поза нами, незалежно від нас і прямо або опосередковано діє на наші органи чуття, викликаючи відчуття;

б) матерія перебуває в русі, нерозривно з ним пов'язана і без нього існувати не може;

в) рухома матерія існує в просторі та часі.

Формування наукових уявлень про простір і час зводиться насамперед до розкриття таких ідей:

- кожний фізичний об'єкт має певне місцеположення відносно якої-небудь системи відліку і просторову протяжність, тобто існує в просторі;
- кожний фізичний процес має скінчену тривалість, відбувається одночасно з іншими процесами, до або після них, тобто відбувається в часі;
- кожний рух можна описати лише за допомогою просторово-часових характеристик, які явно чи неявно входять до законів фізики;
- будь-який рух можна описати лише відносно певним чином вибраної системи відліку, пов'язаної з матеріальними тілами. Не пов'язаних з матерією “абсолютного простору” і “абсолютного часу” не існує;
- просторово-часові характеристики матеріальних об'єктів відносні й залежать від руху матерії.

Простір – це не є щось відмінне від довжини тіл, від їх взаємного розташування. Час не є чимось відмінним від проміжків часу, від послідовності подій. Простір і час не є самотійними сутностями, які існують поряд з матеріальними об'єктами й процесами або поза ними.

Макротіла, мікрочастинки, поля існують самотійно. Це матеріальні об'єкти (речі, субстанції). Процес зміни матеріальних

об'єктів називають *фізичними явищами*. Між речами, між явищами існують різні відношення (наприклад, між людьми можуть бути стосунки любові та ненависті. Але любов, ненависть не існують самотійно, окремо від людей). Відношення невіддільні від матеріальних об'єктів та явищ.

Простір і час мають характер відношень і не існують окремо від тіл і процесів. Довжина окремо від тіла не існує. Так само не існує проміжок часу окремо від процесу. Описати рух точки у просторі та часі – означає встановити, де перебуває точка в довільний момент часу (час і відстань від точки до тіл, прийнятих за тіла відліку). Для опису руху використовують просторові характеристики – координати й часову характеристику – проміжок часу. До *просторових характеристик* належать такі величини, як довжина тіла, переміщення, кутове зміщення, довжина хвилі тощо. Як *часові характеристики* у фізиці використовують такі величини: період коливаль, період піврозпаду, час “осілого життя молекули”, час життя елементарної частинки тощо. Ці характеристики явно входять до кінематичних рівнянь руху:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad x = A \cos \omega t; \quad \lambda = vT .$$

Або входять неявно: $F = ma = \frac{2S}{t^2} m; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot S}{\rho l} .$

Просторова межа, до якої дійшло фізичне дослідження, становить 10^{-15} м (область, у якій проявляються ядерні сили).

Поле не має строго визначених просторових меж, форм, розмірів. Не можна говорити й про чіткі межі елементарних частинок. Однак це не означає, що вони існують поза простором. Усі процеси (як швидко вони б не відбувалися) тривають певний час. Тривалість у 10^{-24} с – це та часова “межа” (час життя частинок), до якої на сьогодні дійшло фізичне дослідження.

Простір і час мають такі *властивості*:

- *тривимірність простору й одновимірність часу*: довжина, ширина й висота, вперед, назад, вгору, вправо і вліво; для визначення моменту часу потрібна одна величина – проміжок

- часу від початкового моменту, раніше або пізніше певного моменту;
- *однорідність простору й часу*. Фізичне явище, здійснене у певний момент часу, можна точно відтворити у довільний наступний момент часу. Хід часу сам собою не впливає на перебіг явища. Факти, які були твердо встановлені наукою колись, повинні бути підтверджені і тепер. Однорідність простору означає, що фізичні явища за тих самих умов, але в різних місцях простору протікають однаково (закон, відкритий у Берліні, буде справедливим і в Дрогобичі);
 - *оборотність простору і необоротність часу*. У будь-яку точку простору можна потрапити скільки завгодно разів – простір оборотний. Час необоротний: він тече від минулого через теперішнє до майбутнього;
 - *ізотропність простору*. У просторі рівноправні не лише всі точки, але й усі напрямки. Такого не можна сказати про час. Напряму часу від минулого до майбутнього нерівноцінний зворотному і повернутися в минуле неможливо.

Головні риси вчення про будову матерії у сучасній фізиці

Тепер можна з'ясувати, що ж вивчає фізика? Матерія вкрай різноманітна. У світі існує безліч матеріальних об'єктів (тіла неживої природи, рослини, тваринний світ).

Також є надзвичайно різноманітний і рух матерії (механічне переміщення, теплові явища, електромагнітні хвилі, ріст рослинних і тваринних організмів). Які ж з видів матерії і видів її руху вивчає фізика? Зі шкільного курсу відомо, що фізика вивчає механічні, теплові, електромагнітні, атомні та ядерні явища. У такій послідовності вивчалася природа і в процесі історичного розвитку фізики. Вивчення теплових явищ було пов'язане з вивченням молекул і атомів. Вивчення електромагнітних явищ призвело до відкриття структури атомів (ядра й електронів) та відкриття полів – електричного та магнітного. А вивчення внутрішньоатомних явищ призвело до відкриття елементарних частинок – протонів, нейтронів, фотонів тощо.

Це дало можливість пояснити явища, які раніше вивчалися повніше і глибше. Процеси плавлення, кристалізації, пароутворення пояснюються рухом і взаємодією частинок речовини, електромагнітні явища – взаємодією заряджених частинок з електричними та магнітними полями.

Отже, всі фізичні процеси можна пояснити рухом і взаємодією елементарних частинок та відповідних полів. *Тому предметом сучасної фізики є елементарні частинки і поля та властиві їм форми руху. Фізика – наука, яка вивчає найпростіші види матерії і властиві їм форми руху.*

Загальнонаукові філософські поняття матерії, руху, простору й часу є дуже потрібні для того, щоб правильно розуміти світ фізичних явищ. Був час, коли не всі фізики вірили в існування молекул, електронів, тобто в їх матеріальність. А.Ейнштейн з цього приводу говорив: "Упевненість в існуванні зовнішнього світу, незалежно від суб'єкта, що його пізнає, лежить в основі всього вчення про природу".

Тільки визнаючи, що у світі немає нічого, окрім рухомої матерії, і що матерія може рухатися лише у просторі і часі, можна правильно орієнтуватися у фізичних явищах.

Для переконання у реальності об'єктів, що безпосередньо не сприймаються, недостатньо тільки показати, що вони так чи так опосередковано діють на наші органи чуття. Необхідно показати, що на основі наукових уявлень про той чи той об'єкт ми здійснюємо процеси, в яких він бере участь, і ці процеси ми можемо безпосередньо спостерігати в умовах фізичного експерименту.

Важливо підкреслити, що процес, який спостерігається, відбувається у повній відповідності з його теоретичним передбаченням, яке ґрунтується на врахуванні властивостей об'єкта, що вивчається. Реальність молекул, наприклад, впливає не тільки з факту їх фотографування, а й з того, що величезна кількість явищ, передбачуваних теорією, що базується на припущенні про існування молекул, відбувається в умовах експерименту в цілковитій кількісній відповідності з даними теорії.

Обґрунтовуючи реальність усіх об'єктів, які вивчає фізика, ми водночас розкриваємо важливі філософські положення про різні форми матерії. При цьому не можемо обминути питання про види матерії.

Проблема видів матерії і сьогодні ще є дискусійною. Аж до ХХ століття матерією вважали лише речовину. Завдяки працям Фарадея і Максвелла, у фізиці виникло поняття поля., яке почали розглядати як самостійний вид матерії. *Тому видами матерії стали вважатися і речовина, і поле.*

Які ж сучасні погляди на проблему речовини і поля? Більшість авторів (фізиків і філософів) у тій чи тій формі визнають існування двох видів матерії – речовини (частинок) і поля. Але розвиток квантової електродинаміки показав неправомірність протиставлення речовини (частинок) і поля, умовність поділу матерії на ці види. *З погляду сучасної теорії, усі “звичайні” частинки потрібно розглядати як кванти відповідних полів.*

У квантовій теорії поля з електронами і протонами ототожнюється електронно-позитронне поле, з протонами і нейтронами – нуклонне. При цьому уявлення про квантові поля не збігаються з класичними уявленнями про поле. Дія квантових полів проявляється дискретно. Квантами полів є відповідні елементарні частинки.

У сучасній фізиці втратили класичні риси і частинки. Класична частинка безструктурна, має строгу локалізацію у просторі і рухається певною траєкторією. За сучасними поглядами, елементарні частинки не мають строгої локалізації (частинку не можна локалізувати в області, меншій, ніж h/mc). А електрон внаслідок випромінювання і поглинання фотонів виявляється “обгорненим” хмарою фотонів, невіддільний від неї, тому це вже не є точкова частинка із строгою локалізацією.

Отже, тепер вже не можна говорити, що фотон – це поле, а електрон – частинка. *Частинка тепер це лише особливий збуджений стан поля, квант поля. Відмінність між ними – це відмінність між двома станами однієї і тієї самої фізичної реальності. Поняття частинки і поля, які раніше відносили до різних фізичних об'єктів,*

зливаються тепер в єдине поняття квантового поля як особливої форми існування матерії.

Порівнюючи поле і речовину, важливо виділяти риси їх подібності та відмінності. При цьому потрібно розрізняти і в жодному разі не ототожнювати речовинні об'єкти та елементарні частинки. Під речовиною (або речовинними об'єктами) зазвичай розуміють макротіла як об'єкти, що складаються з атомів і молекул. Маса спокою цих об'єктів завжди відмінна від нуля. А в елементарних частинок вона може як дорівнювати, так і не дорівнювати нулю.

Необачно риси подібності й відмінності між речовинними об'єктами і певним полем поширювати на всі поля загалом. Те, що характерне для одного поля, може бути невластивим іншому. Наприклад, єдність неперервності і дискретності характерна як для електромагнітного поля, так і для речовинних об'єктів. Однак не можна цього стверджувати впевнено, коли говоримо про гравітаційне поле, оскільки проблема існування гравітонів ще до цього часу не розв'язана.

Так само можна сказати, що однією з ознак речовинних об'єктів, яка вирізняє їх від електромагнітного поля, є відмінна від нуля маса спокою і вони можуть рухатися з довільними швидкостями, меншими від швидкості світла у вакуумі; водночас для електромагнітного поля характерна нульова маса спокою і можливість поширення у вакуумі лише з однією конкретною швидкістю — швидкістю світла. Проте кванти ядерного поля (π -мезони) мають відмінну від нуля масу спокою.

Фізика та її зв'язок з іншими науками і технікою

Завданням фізики є відкриття і дослідження явищ та при можливості визначення шляхів їх можливого практичного використання. *Фізичним явищем (процесом)* називають сукупність певних закономірно пов'язаних одна з одною змін. Завдання дослідника — встановити цей закономірний зв'язок та причинову залежності між цими змінами, тобто встановити певний закон *фізики*.

Матеріал, що є об'єктом дослідження, дослідник здобуває або за допомогою *спостереження* (вивчення явища в природних умовах) або *експерименту* (вивчення явища в штучних умовах).

Експеримент має низку переваг перед звичайним спостереженням, а саме можливість:

- вивчення явища в різноманітних умовах;
- багаторазового повторення одного й того ж явища в однакових або різних умовах;
- точнішого та глибшого вивчення явища, виділення потрібних властивостей.

Але факти, встановлені в результаті спостереження й експерименту, ще не є науковими. З фактів, які є в розпорядженні дослідника, він добирає ті, які споріднені між собою, установлює зв'язок нових явищ з уже дослідженими.

Кінцевою метою дослідника є створення фізичної теорії. Для цього висувають різні гіпотези. *Природничо-науковою гіпотезою називають припущення про закономірний порядок, яке пояснює певну сукупність явищ природи.* Необхідність висунення гіпотези диктується неможливістю очікування моменту, коли нагромадження нових фактів і вдосконалення методів дослідження дасть можливість повністю встановити закони досліджуваного явища. Гіпотеза дає змогу проводити подальші дослідження цілеспрямовано, об'єднаними певною ідеєю.

Перетворення гіпотези на теорію, у точно встановлену істину, відбувається через відшукування й узагальнення нових фактів, перевірку висновків, одержаних на основі цієї гіпотези, очищення її від всього, помилково до неї внесеного.

Часто буває, що для пояснення тієї чи тієї групи явищ пропонується одночасно декілька гіпотез. При цьому виявляється, що в кожній з них є зерно істини (боротьба між корпускулярною і хвильовою гіпотезами світла, що закінчилася створенням сучасної корпускулярно-хвильової теорії світла).

Сукупність висновків на основі гіпотези, що пояснюють усі явища в певній галузі, називають *науковою теорією* (молекулярно-кінетична теорія, електронна теорія тощо).

Фізика черпає матеріал, на основі якого встановлюються фізичні закономірності з різних природничих наук (астрономії, фізіології тощо), які, своєю чергою, широко використовують фізичні методи дослідження (телескоп в астрономії, мікроскоп, трубка Рентгена в медицині тощо).

Фізика лежить в основі техніки. Вона якнайтісніше пов'язана з такими її галузями як електротехніка, радіотехніка, теплотехніка, світлотехніка тощо. Механіка покладена в основу будівельної техніки, гідротехніки. Учення про теплові явища – в основу теплотехніки; учення про електричні і магнітні явища – в основу електротехніки і радіотехніки; оптика – в основу світлотехніки; учення про будову атома і ядра – в основу ядерної енергетики.

Розвиток фізики, своєю чергою, перебуває під впливом техніки. Як і кожна наука, фізика виникла з практичних потреб (сільське господарство, мореплавство, розвиток міст, ремесел, військової справи).

Звернемося до історії. Під кінець епохи середньовіччя у розвитку науки і техніки було досягнуто значного прогресу. Застосування хомути збільшило ефективність використання коня. Поширення набули водяні млини. Почалося використання повітряних млинів, продовжувалося удосконалення парусних суден. Побудовані в цю епоху величаві готичні собори переконливо доводять, що й без використання теорії міцності будівельних конструкцій можна будувати досить значні споруди.

Уже з часів Галілея природничі науки почали чинити помітний вплив на розвиток техніки. Однак технічні досягнення зовсім не впливали з результатів наукових досліджень – швидше можна стверджувати протилежне. Такий стан зберігався до XIX століття.

Останньою фундаментальною фізичною теорією, яка виникла після розвитку певної області техніки (а саме парових машин), була термодинаміка. Відтоді розвиток фізичної науки приводив до відкриття явищ, аж ніяк не зумовлених потребами сучасної техніки.

Відкриття законів електрики та магнетизму і особливо явища електромагнітної індукції на багато років випередило появу динамомашини та електродвигунів. Максвелл вивів повну систему

рівнянь електромагнітного поля і передбачив існування електромагнітних хвиль до відкриття їх Герцом та до використання їх для радіозв'язку. Квантова механіка і принцип заперечення Паулі, теорія поведінки електронів у кристалічних ґратках і концепція додатньо заряджених дірок з'явилися за 20 років до винайдення транзистора, що стало початком сучасної електроніки й обчислюваної техніки. Відкриття рентгенівських променів було зроблене зовсім не за ініціативи виробників медичної апаратури чи інженерів різних галузей металургії, у яких була потреба в універсальному методі для виявлення дефектів у виробленому матеріалі та можливості глибшого вивчення його структури. Атомна зброя і можливості мирного використання атомної енергії з'явилися аж через півроку після робіт Кюрі і Резерфорда.

Як бачимо, використання наукових відкриттів у техніці завжди здійснювалося з певною затримкою в часі. Науково-технічна революція надзвичайно скорочує терміни впровадження наукових відкриттів у практику. Якщо для практичної реалізації принципу, на якому ґрунтується фотографія, потрібно було понад століття, телефонного зв'язку – понад 50 років, радіо – понад третину століття, то для втілення ідеї радіолокації потрібно було 15 років, телебачення – 12 років, транзистора – 5 років, то інтегральних схем – лише 3 роки.

Можна назвати і немало областей техніки, виникнення яких прямо не пов'язане з раніше встановленими природничо-науковими концепціями. Але подальший їх розвиток істотно залежить від досягнень фізичних наук. Все більше і більше зростає співдружність фізики й техніки. Техніка забезпечує фізику інструментами, приладами та сучасними складними установками, які допомагають їй розв'язувати завдання науки і практики.

Фізика, як і інші науки, – наука інтернаціональна, вона розвивається у різних країнах, її досягнення використовують усі.

Сучасний етап у розвитку фізики почався з великих відкриттів у кінці XIX – початку XX століття, у результаті яких механічна картина світу була доповнена або замінена електромагнітною

картиною. Були вивчені властивості електрона, відкрита корпускулярно-хвильова природа світла, розроблені квантова теорія і теорія відносності. Було відкрито подільність атомного ядра та можливість використання ядерної енергії. Виникла кібернетика. З відкриттям лазерів виникла і почала бурхливо розвиватися нова область науки і техніки – квантова електроніка.

Відійшов у минуле дослідник, який працював самотійно. Тепер наука стала справою великих колективів, а вчений є активним учасником їх трудової діяльності. За підрахунками німецьких фізиків, лабораторію Фарадея можна було б обладнати за 100 марок, а Герца – вже за 1000 марок; сучасна лабораторія коштує приблизно 5 мільйонів марок, а ядерна – мінімум 500 мільйонів марок.

Зараз фізична наука нараховує щонайменше 14 великих напрямків. Серед них є такі: фізика й енергетика, керований термоядерний синтез, металофізика, напівпровідники, надпровідність, радіоактивні ізотопи тощо.

Побудова курсу фізики та коротка характеристика головних його розділів. Формування наукового мислення

Як уже зазначалося, фізика вивчає будову неживої матерії і найзагальніші форми її руху, а саме: механічний, молекулярний, тепловий, електромагнітний, внутріатомний і внутріядерний.

Відповідно до цього курс фізики поділяється на такі розділи: механіка, молекулярна фізика і термодинаміка, електрика і магнетизм, оптика, учення про атом й атомне ядро.

Найпростішою формою руху є механічна форма – переміщення тіл одне відносно одного. Усі інші, складніші, форми руху завжди супроводжуються простим механічним переміщенням, але не зводяться до нього. Оскільки знання механіки необхідне під час вивчення інших розділів фізики, то вивчення фізики починають з механіки.

Під *механікою* розуміють вчення про рухи макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла. В її основі лежать закони механіки Ньютона.

Рухи тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла, вивчаються в так званій релятивістській механіці, основою якої є теорія відносності А.Ейнштейна. Рухи мікрочастинок вивчаються у квантовій механіці.

Механіка поділяється на кінематику та динаміку. У *кінематиці* вивчаються переміщення тіл залежно від часу, без урахування їх маси і сил, що діють на них ($v = v_0 + at$; $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$).

У *динаміці* вивчаються рухи тіл під дією прикладених до них сил; сюди належить також *статика* – вчення про умову рівноваги тіл.

Учення про будову речовини є основою усіх природничих наук. Воно дає ключ до розуміння різноманітних явищ природи. Сучасним уявленням про будову речовини є *молекулярно-кінетична теорія*. Її основи були закладені в працях таких учених, як Дальтон, Клаузіус, Максвелл, Больцман, Ван дер Ваальс, Ж. Перен та інші. Спираючись на основні положення молекулярно-кінетичної теорії, можна сформулювати уявлення про внутрішні процеси в речовинах та знайти залежності між фізичними величинами, що характеризують процеси загалом, і величинами, які характеризують окремо поведінку атомів або молекул. Ці питання є предметом вивчення наступного розділу фізики, який дістав назву *молекулярної*. У цьому розділі також вивчається і *термодинаміка* – учення про рушійну силу теплоти, точніше – про умови найефективнішого перетворення теплоти на роботу. Термодинаміка вивчає найрізноманітніші фізичні явища в газах, рідинах і твердих тілах з точки зору енергетичних перетворень.

Вивчення взаємозв'язку внутрішньої енергії з іншими видами енергії становить основне завдання термодинаміки. Оскільки поняття внутрішньої енергії стосується макроскопічного тіла, то звідси випливає, що в термодинаміці розглядається макроскопічне тіло або система тіл. Мікрооб'єкти у вигляді окремих атомів або

молекул, а також будова речовини і внутрішній механізм явищ у тілах у термодинаміці не розглядаються. Внутрішній механізм явищ розглядають у молекулярно-кінетичній теорії. Оскільки термодинаміка та молекулярно-кінетична теорія доповнюють одна одну, вони є предметом вивчення окремого розділу фізики, який одержав назву “Молекулярна фізика і термодинаміка”.

Електричні та магнітні явища, властивості і взаємодії нерухомих та рухомих у заданій системі відліку електрично заряджених тіл і пов’язаних з ними полів вивчає розділ фізики, який одержав назву “Електрика і магнетизм”. Цей розділ має таку структуру: електростатика, постійний електричний струм, електропровідність твердих тіл, електричний струм у рідинах і газах, електромагнетизм, електромагнітна індукція, змінний електричний струм та електромагнітні коливання і хвилі.

Учення про світло – його природу та властивості, взаємодію з речовиною та його практичні застосування є предметом вивчення окремого розділу фізики, який отримав назву “Оптика і фізика атома”.

Розділ фізики, який вивчає будову ядра та ядерні реакції, а також методи вивчення атомних ядер і їх складових частинок одержав назву “Фізика атомного ядра”.

Потрібно особливо підкреслити, що за останні роки виникли нові розділи фізики електромагнітного випромінювання – квантова радіофізика, або квантова електроніка, а також когерентна оптика та нелінійна оптика. Сьогодні ці розділи фізики бурхливо розвиваються. Їх розвиток за своєю інтенсивністю можна умовно порівняти з розвитком атомного ядра, елементарних частинок і квантової теорії поля. Мазери і лазери відкрили великі можливості для космічного зв’язку, радіо- і оптичної локації, радіо- й оптичного керування літальними апаратами.

Курс загальної фізики спільно з курсом теоретичної фізики має фундаментальне значення для підготовки студентів до їх майбутньої спеціальності учителя фізики. Він дає студентам основні знання фізики на експериментальній основі і готує їх до вивчення інших

дисциплін – методики навчання фізики, теоретичної фізики, електро- і радіотехніки, математики та астрономії.

Залежно від поставленої мети є декілька видів навчання:

- 1) викладання фізики з метою забезпечення учнів основними знаннями для правильного розуміння навколишнього світу, в якому вони живуть, включаючи і технічні аспекти;
- 2) забезпечення майбутніх інженерів і представників інших областей науки необхідними фізичними знаннями;
- 3) підготовка спеціалістів-фізиків для розв'язування завдань прикладної науки;
- 4) підготовка вчених для роботи у сфері “чистої” фізики;
- 5) навчання фізики з метою виховання в учнів розуміння краси і філософського значення цієї науки.

Вивчення фізики в школі повинно сприяти досягненню мети, яка сформульована в пункті першому. Одержані в школі знання повинні забезпечити розуміння учнями фізичних законів, які лежать в основі повсякденного життя, а також розуміння характерних особливостей прояву цих законів у техніці. Важливо виховати в учнів уміння самостійно поповнювати свої знання, уміти орієнтуватися у величезному потоці наукової і технічної інформації.

Видатний математик і методист А.Маркушкевич запропонував раціональну модель нагромадження інформації. Згідно з цією моделлю, запас інформації має ядро, яке порівняно повільно змінюється з часом, і оболонку, яка швидко змінюється. Мета навчання, особливо в школі, полягає в засвоєнні ядра запасу інформації, не дивлячись на бажання ознайомити учнів з найновішими досягненнями науки (краще знати мало, ніж розуміти погано).

Із сказаного зрозуміло, яка велика роль у вихованні підростаючого покоління належить учителям школи, зокрема учителям такої складної і потрібної дисципліни як фізика. А становлення вчителя фізики починається з викладання шкільного курсу фізики, який служить тим фундаментом, на якому в майбутньому будується фізика!

Вивчаючи фізику, ми повинні переконуватися у правильності нашого розуміння природи, у тому, що світ побудовано в загальних рисах саме так, як встановлено наукою, тобто формувати для себе уявлення про наукову картину навколишнього світу.

Можна виділити чотири шляхи обґрунтування фізичних положень при вивченні фізики: експериментальний, математичний, логічний та історичний.

На перший погляд природа є сукупністю найрізноманітніших об'єктів і явищ, які виглядають розрізненими і не пов'язаними між собою. Проте глибше пізнання відкриває дивовижний зв'язок цих явищ, причинну зумовленість кожного з них. *Навколишній світ – це ланцюг причин і наслідків. Розкриваємо одну причину – відкривається друга, за нею – третя і т.д. У цьому причинному зв'язку, у цій спільній матеріальній основі всього суцього і полягає гармонія природи.*

Якщо досконалий у своїй будові оригінал (природа), то і його відображення (наукова теорія), якщо воно істинне, повинно викликати відчуття краси. Найкраще це можна побачити на прикладі теорії відносності, внутрішня досконалість якої полягає у наступному:

- теорія не повинна містити штучних, надуманих і складних передумов. Її вихідні положення прості й тому вишукані. Саме такі відчуття і викликають вихідні постулати теорії відносності;
- теорія тим красивіша, чим менше вихідних передумов. І Ейнштейн у спеціальній теорії відносності зводить їх до мінімуму – в її основі є лише два постулати;
- теорія тим досконаліша, чим більше наслідків впливає з мінімальної кількості вихідних постулатів.

Великий фізик А.Ейнштейн говорив: “Соромно має бути тому, хто користується чудесами науки, що містяться у звичайному приймачі, і при цьому цінує їх так само мало, як мало цінує корова ті чудеса ботаніки, які вона жує”.

Вивчаючи природу, ми набуваємо певних знань про неї. Вони стають переконаннями, коли самотійно осмислені, а не взяті на віру “в готовому вигляді”, коли є плодом напруженої розумової діяльності.

Наведемо основні риси стилю наукового мислення:

- повага до фактів як вихідного матеріалу будь-якого наукового твердження (світло – поперечні коливання, бо тільки вони могли поширюватися в ефірі; таке уявлення використав Френель для пояснення явищ інтерференції і дифракції; проте явище поляризації світла не вкладалося в рамки цих загальноприйнятих уявлень. Воно вимагало визнати світло поперечними хвилями. І Френель всупереч своїм симпатіям, але відповідно до вимог фактів вводить у фізику уявлення про світло як про поперечні хвилі);
- обережність і обачність у висуненні нових ідей. Обґрунтованим можна вважати лише той висновок, що опирається не на поодинокий факт, а на їх велику сукупність (І. Ньютон затримав публікацію закону тяжіння на 18 років);
- конкретність мислення, яке виявляється у розумінні того, що будь-яке наукове положення є істинним за певних умов, а застосування його поза цими умовами є неправильним; розуміння мінливості, гнучкості понять (Н. Бор і А. Ейнштейн краще за інших розуміли, що деякі ідеї класичної фізики можуть бути хибними в мікросвіті і світі швидких рухів);
- здоровий скептицизм щодо загальноприйнятого, але такого, що суперечить новим дослідним даним, і, з іншого боку, поважне ставлення до раніше здобутого наукою (Г. Галілей висунув низку ідей, що суперечили загальноприйнятим судженням “здорового глузду” – можливості руху без дії сили, сталість прискорення вільного падіння, єдність “небесного” та “земного”);
- розуміння того, що пізнання має враховувати суперечливі сторони в явищах природи та розглядати протилежності в єдності (світло – і частинки, і хвилі одночасно);
- розуміння того, що для досягнення істини необхідно врахувати всі зв’язки даного явища з іншими явищами (чим більше факторів, що впливають на досліджуване явище, враховано, тим достовірнішим буде результат).

Отже, одним з найважливіших компонентів наукового світогляду, що формується при вивченні фізики, є узагальнені наукові знання про природу та процес її пізнання, які ґрунтуються на конкретних знаннях фактів, понять, законів і принципів фізики, та філософські узагальнення, зроблені на їх підставі.

ТЕМА 1. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

ПЛАН

1. Механіка матеріальної точки. Системи відліку. Вектори переміщення, швидкості та прискорення.
2. Рух по колу. Кутові та лінійні характеристики руху. Нормальне, тангенціальне та повне прискорення при криволінійному русі.
3. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту.
4. Коливальний рух матеріальної точки.

1.1. Механіка матеріальної точки. Системи відліку. Елементи векторної алгебри. Вектори переміщення, швидкості та прискорення

1.1.1. Механіка матеріальної точки

Для побудови моделей механічних систем найважливішою абстракцією є поняття матеріальної точки. За *матеріальну точку* приймають матеріальне тіло, розміри якого дуже малі порівняно з віддаллю між тілами. Іншими словами, матеріальна точка – це тіло, яке не має розмірів, але має масу.

Під матеріальним тілом розуміють сукупність матеріальних точок, які можуть бути ідентифіковані і відмінні одна від одної. Є тіла, у яких різні їх частини мають відносну свободу переміщення одна до одної (рідина, сипучі тіла), але є й інші тіла, різні частини яких стійко зберігають своє положення одна до одної, тому залишається незмінною їх форма. Такі тіла називаються *твердими*. Найменша довжина між двома точками називається віддаллю між точками, а відповідна лінія – прямою. *Абсолютно тверде тіло* – це тіло, віддаль між будь-якими точками якого є незмінною.

1.1.2. Системи відліку

Для опису руху матеріальної точки насамперед треба вибрати систему відліку, тобто координатну систему та годинник для відліку часу, яка зв'язана з певним реальним тілом, що умовно приймається за нерухоме.

З точки зору кінематики, всі системи відліку є рівноправними. При розв'язуванні практичних завдань намагаються вибрати таку систему, яка при розгляді даної задачі найвигідніша, тобто забезпечує найбільшу наочність та простоту обчислень.

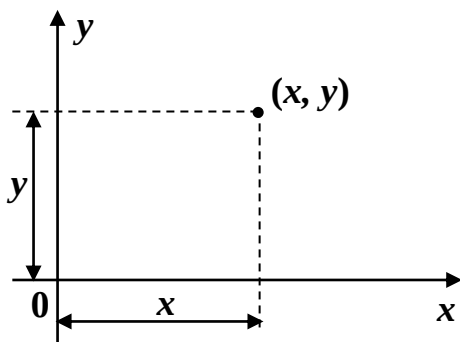
Але при розгляді динаміки руху матеріальної точки не всі системи відліку є рівноправними.

Із величезної кількості можливих систем координат найпростішими і важливими, які найчастіше використовуються на практиці, є лише деякі:

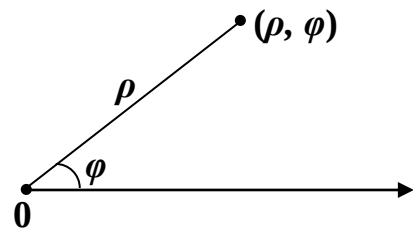
1) на площині:

1а) прямокутна декартова, у якій двом числам (x, y) , що задають положення точки, відповідають довжини відрізків x та y (мал.1.1);

1б) полярна, у якій двома числами (ρ, φ) , що задають положення точки, є довжина ρ та кут φ (мал.1.2);



мал. 1.1

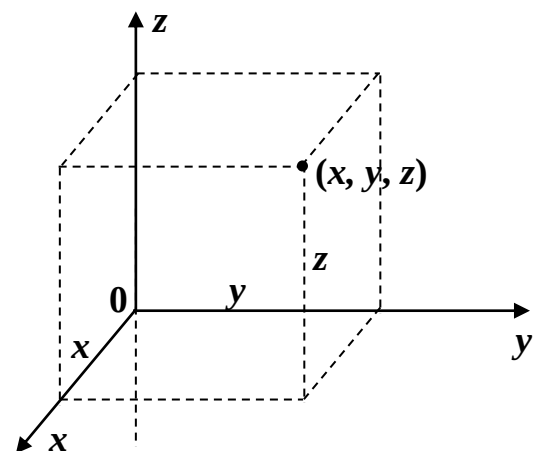


мал. 1.2

2) у просторі:

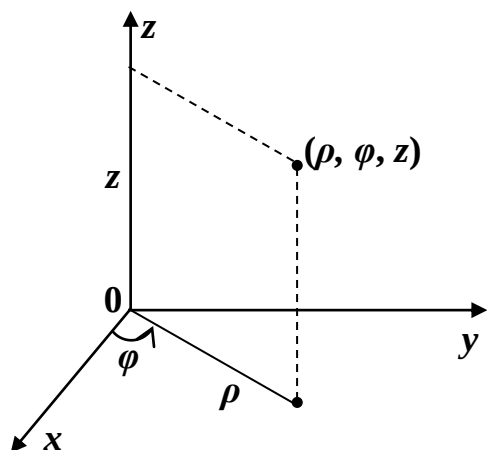
2а) прямокутна декартова, у якій трьом числам (x, y, z) , що задають положення точки, відповідають довжини відрізків x, y, z (мал. 1.3);

2б) циліндрична, у якій трьома числами (ρ, φ, z) , які задають положення точки, є довжина ρ , кут φ , довжина z (мал.1.4);

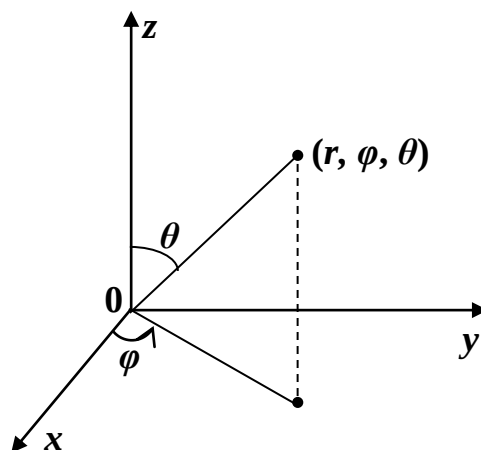


мал. 1.3

2в) сферична, у якій трьома числами (r, φ, θ) , які задають положення точки, є довжина r , кути φ та θ (мал. 1.5).



мал. 1.4



мал. 1.5

Числа, які визначають положення точки в деякій системі координат, називаються *координатами точки*. Формули, що пов'язують координати точки в одній системі координат з її координатами в іншій системі, називаються *перетвореннями координат*.

Запишемо формули перетворення між циліндричними, сферичними та декартовими координатами.

Перехід від циліндричних до декартових координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.1)$$

Перехід від сферичних до декартових координат:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (1.2)$$

1.1.2. Елементи векторної алгебри

При вивченні механічних рухів доволі часто використовують як скалярні, так і векторні величини.

Векторними називаються величини, які характеризуються числовими значеннями та напрямками. Векторні величини додаються за правилом паралелограма. Числове значення вектора називають його модулем. Модуль вектора – скаляр, при цьому завжди додатний.

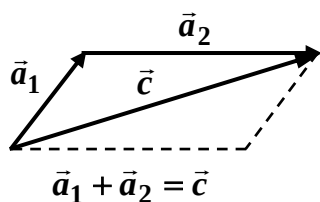
Вектори будемо позначати так: $\vec{a}$, $\vec{F}$, $\vec{v}$. Для позначення модуля використовують символ: a або $|\vec{a}|$. На малюнках вектори зображаються у вигляді прямолінійних відрізків із стрілкою в кінці.

Довжина відрізка визначає модуль вектора, а стрілка вказує його напрям.

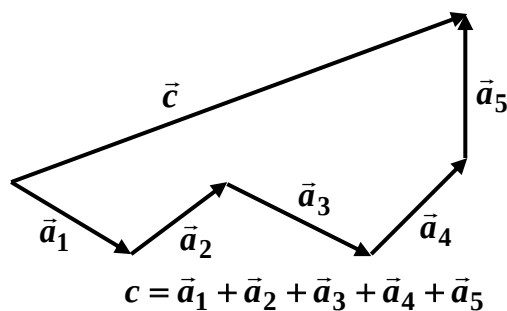
Вектори, які напрямлені вздовж паралельних прямих (в одну і ту ж або в протилежні сторони), називаються *колінеарними*. Вектори, які лежать в паралельних площинах, називаються *компланарними*.

Додавання і віднімання векторів

Практично додавання векторів вигідно здійснювати без побудови паралелограма:



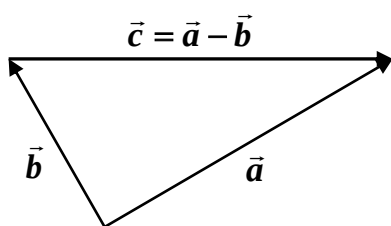
мал. 1.6



мал. 1.7

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2| = |\vec{c}|. \quad (1.3)$$

Як видно із малюнка, такий самий результат досягається, якщо початок другого вектора сумістити з кінцем першого, а потім провести з початку першого до кінця другого результуючий вектор. Особливо доцільно застосувати такий прийом у тому випадку, коли потрібно додавати більше, ніж два вектори (мал. 1.6, 1.7).



мал. 1.8

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$ (мал. 1.8):

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{c}|. \quad (1.4)$$

Множення вектора на скаляр

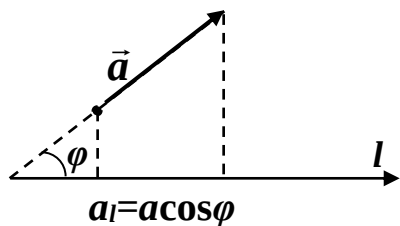
У результаті множення вектора $\vec{a}$ на скаляр α одержується новий вектор $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$, модуль якого в $|\alpha|$ разів більший, ніж модуль вектора $\vec{a}$. Напрямок вектора $\vec{b}$ або збігається з напрямом вектора $\vec{a}$ (якщо $\alpha > 0$), або протилежний до напрямку вектора $\vec{a}$ (якщо $\alpha < 0$).

Із означення операції множення вектора на скаляр випливає, що довільний вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді:

$$\vec{a} = a\vec{e}_a, \quad (1.5)$$

де a – модуль вектора $\vec{a}$, $\vec{e}_a$ – *орт* або одиничний вектор (його модуль дорівнює одиниці і він має такий самий напрям, як і вектор $\vec{a}$).

Проекція вектора



мал. 1.9

Розглянемо деякий напрямок у просторі, який задається віссю l (мал.1.9). Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з ним кут φ .

Величина

$$a_l = a \cos \varphi \quad (1.6)$$

називається проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l .

Проекція вектора є величиною алгебраїчною.

Якщо вектор утворює з цим напрямом гострий кут, то $\cos \varphi > 0$ і проекція додатня.

Якщо кут φ тупий, то $\cos \varphi < 0$ і, відповідно, проекція від'ємна.

Якщо вектор перпендикулярний до даної осі, то його проекція на дану вісь дорівнює нулю.

Проекція вектора має простий геометричний зміст. Вона дорівнює віддалі між проекціями на вісь початку і кінця відрізка, який зображає цей вектор.

Нехай $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Проекція результуючого вектора $\vec{a}$ на деякий напрям дорівнює сумі проекцій векторів, що додаються:

$$a_l = a_{1l} + a_{2l} + a_{3l}. \quad (1.7)$$

Представлення вектора через його проекції на координатні осі

Вектор $\vec{a}$, який лежить в площині, можна представити в декартовій системі координат через його проекції і орти координатних осей $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$:

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y. \quad (1.8)$$

Якщо всі три проекції вектора відмінні від нуля, то

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z. \quad (1.9)$$

Величини a_x , a_y , a_z дорівнюють сторонам прямокутного паралелепіпеда, великою діагоналлю якого є вектор $\vec{a}$. Тому має місце співвідношення:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (1.10)$$

Якщо $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то відповідно до (1.9) маємо:

$$c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z = (a_x + b_x) \vec{e}_x + (a_y + b_y) \vec{e}_y + (a_z + b_z) \vec{e}_z, \quad (1.11)$$

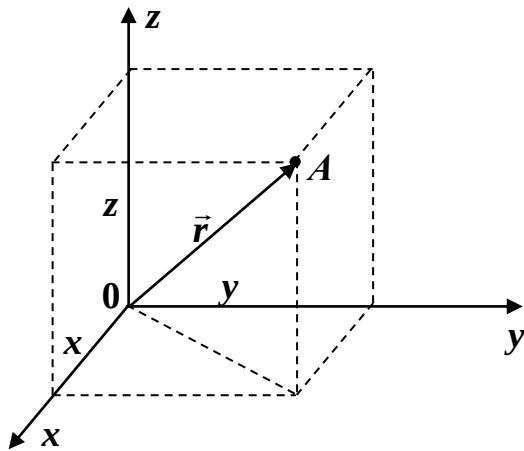
де $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$.

Формули (1.11) є аналітичним виразом правила додавання векторів. Вони справедливі для будь-якого числа доданків.

Радіус-вектор

Радіус-вектором $\vec{r}$ деякої точки називається вектор, проведений з початку координат у дану точку A (мал.1.10). Його проєкції на координатні осі дорівнюють декартовим координатам даної точки:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z. \quad (1.12)$$



мал. 1.10

Отже, відповідно до (1.9) радіус-вектор можна представити у вигляді:

$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z. \quad (1.13)$$

І відповідно до (1.10):

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2. \quad (1.14)$$

Скалярний добуток векторів

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна перемножити двома способами. Один приводить до скалярної величини, а другий – дає новий вектор. У зв'язку з цим існує два добутки векторів – скалярний і векторний. Зауважимо, що операції ділення вектора на вектор не існує.

Скалярним добутком вектора $\vec{a}$ і вектора $\vec{b}$ називається скаляр, який дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута α між ними:

$$\vec{a} \vec{b} = ab \cos \alpha. \quad (1.15)$$

Вираз (1.15) є алгебраїчною величиною:

при α гострому $\vec{a}\vec{b} > 0$, при α тупому $\vec{a}\vec{b} < 0$, при $\alpha = \pi/2$ матимемо $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Зазначимо, що під квадратом вектора завжди розуміють скалярний добуток вектора на самого себе:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = a a \cos \alpha = a^2. \quad (1.16)$$

Отже, квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля.

Із означення (1.15) випливає, що скалярний добуток комутативний, тобто не залежить від порядку співмножників:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}. \quad (1.17)$$

Вираз (1.15) можна записати декількома способами:

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \alpha = (a \cos \alpha) b = a (b \cos \alpha).$$

Тому можна сказати, що скалярним добутком двох векторів називається скаляр, який дорівнює добутку модуля одного з перемножуваних векторів на проєкцію другого вектора на напрямок першого:

$$\vec{a}\vec{b} = a_b b = ab_a; \quad (1.18)$$

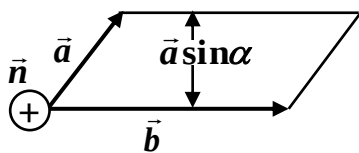
$$\left. \begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} + \vec{c} + \dots) &= \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} + \dots \\ \vec{a}\vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \cdot (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Тут взято до уваги, що $\vec{e}_x \vec{e}_x = 1$, а $\vec{e}_x \vec{e}_y = 0$, $\vec{e}_x \vec{e}_z = 0$.

Векторний добуток векторів

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який визначається формулою:

$$\vec{c} = ab \sin \alpha \cdot \vec{n}, \quad (1.20)$$



мал. 1.11

де a і b – модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; α – кут між векторами; $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Напрямок $\vec{n}$ вибирається так, щоб послідовність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{n}$ утворювала правої вентову систему. Це означає, що коли дивитися вслід вектора $\vec{n}$, то поворот по короткому шляху від першого співмножника (вектора $\vec{a}$) до другого (вектора $\vec{b}$) відбувається за стрілкою годинника.

Символьно векторний добуток можна записувати двома способами:

$$[\vec{a} \vec{b}] \text{ або } \vec{a} \times \vec{b}.$$

Надалі ми будемо використовувати перший з них.

Відповідно до (1.20), векторний добуток записується:

$$[\vec{a} \vec{b}] = ab \sin \alpha \vec{n}. \quad (1.21)$$

Модуль векторного добутку має простий геометричний зміст – вираз $ab \sin \alpha$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах, що перемножуються (мал. 1.11).

При розгляді таких векторів, як радіус-вектор $\vec{r}$, швидкість $\vec{v}$, сила $\vec{F}$, питання про вибір їх напрямку не виникає; він впливає з природи самих величин. Такі вектори називаються *справжніми* (або *полярними*).

Вектори типу $[\vec{a} \vec{b}]$, напрям яких пов'язується з напрямом обертання, називаються *псевдовекторами* (або *аксіальними векторами*).

Оскільки напрям векторного добутку визначається напрямом обертання від першого співмножника до другого, то напрям вектора $\vec{c}$ залежить від порядку співмножників, записаних у рівнянні (1.21). Векторний добуток через це не має властивості комутативності:

$$[\vec{b} \vec{a}] = -[\vec{a} \vec{b}]. \quad (1.22)$$

Векторний добуток дистрибутивний:

$$[\vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \dots)] = [\vec{a} \vec{b}_1] + [\vec{a} \vec{b}_2] + \dots$$

Відповідно до (1.20):

$$\left. \begin{aligned} [\vec{e}_x \vec{e}_x] &= [\vec{e}_y \vec{e}_y] = [\vec{e}_z \vec{e}_z] = 0, \\ [\vec{e}_x \vec{e}_y] &= -[\vec{e}_y \vec{e}_x] = \vec{e}_z; \quad [\vec{e}_y \vec{e}_z] = \vec{e}_x; \quad [\vec{e}_z \vec{e}_x] = \vec{e}_y \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Похідна вектора

Нехай вектор $\vec{a}$ змінюється з часом за відповідним законом. Проекції цього вектора на координатні осі є функціями часу. Відповідно:

$$\vec{a}(t) = \vec{e}_x a_x(t) + \vec{e}_y a_y(t) + \vec{e}_z a_z(t). \quad (1.24)$$

Тоді похідну цього вектора по часу запишемо так:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{e}_x \frac{da_x}{dt} + \vec{e}_y \frac{da_y}{dt} + \vec{e}_z \frac{da_z}{dt}. \quad (1.25)$$

Якщо за $\vec{a}(t)$ взяти радіус-вектор $\vec{r}(t)$ рухомої точки, то

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{e}_x \frac{dx}{dt} + \vec{e}_y \frac{dy}{dt} + \vec{e}_z \frac{dz}{dt}. \quad (1.26)$$

Похідну від векторного добутку знаходимо так:

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}\vec{b}] = \left[\vec{a} \frac{d\vec{b}}{dt} \right] + \left[\frac{d\vec{a}}{dt} \vec{b} \right]. \quad (1.27)$$

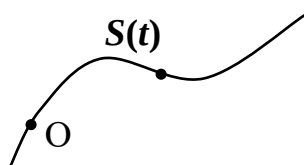
1.1.4. Способи аналітичного опису руху матеріальної точки

Спостерігаючи рух тіла, зауважуємо, що його положення з часом змінюється відносно деяких інших тіл, які в цьому русі участі не беруть. Тому ми говоримо, що рух тіла є рухом відносним, а саме рухом відносно тіл $A, B, C \dots$. Будь-який рух є відносним і немає іншого руху.

У вибраній системі відліку в результаті спостереження ми встановлюємо положення рухомої точки в просторі для кожного моменту часу. Безліч точок простору, через які проходить матеріальна точка, утворюють лінію, яка називається *траєкторією руху*. За виглядом траєкторії у даній системі всі рухи можна поділити на прямолінійні і криволінійні. Вигляд траєкторії залежить від вибору системи відліку. Рух однієї і тієї ж точки в одній системі є прямолінійним, а в іншій – криволінійним.

Головне завдання кінематики полягає в тому, щоб у вибраній системі відліку описати рух точки аналітично, тобто за допомогою формул. Рух матеріальної точки буде визначено, якщо будуть знайдені координати точки як функції часу:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$



мал. 1.12

(1.28)

Існує три способи аналітичного опису руху точки в просторі: траєкторний, векторний і координатний.

Траєкторний спосіб полягає в тому, що на заданій траєкторії вибирається початок відліку так званої дугової координати S , яка визначає положення рухомої точки на траєкторії

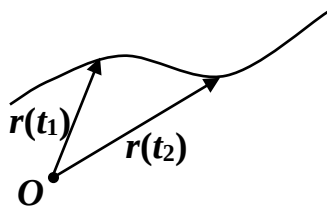
(мал.1.12). Дугова координата вимірюється довжиною дільниці по кривій від точки відліку до даної точки на траєкторії. Існує також і правило знаків. Дугова координата в одну сторону від точки відліку вважається додатною, а в іншу – від’ємною.

Положення рухомої точки на траєкторії цілком визначається однією координатою S , яка є функцією часу:

$$S = S(t). \quad (1.29)$$

Цю функцію називають *законом руху точки по траєкторії*.

Аналітичний опис руху точки, який одержав назву *векторного*, ґрунтується на тому, що положення точки в просторі задається радіус-вектором, який проводиться із деякого центра O до даної точки (мал.1.13).

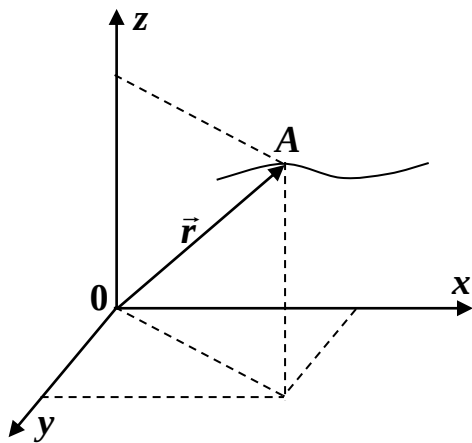


мал. 1.13

При русі точки її радіус-вектор змінює свій модуль та напрям, і є функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.30)$$

Функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називають *векторним законом руху точки*.



мал. 1.14

Координатний спосіб опису руху полягає у такому. Положення точки A в просторі визначається у прямокутній системі координат заданням трьох координат x, y, z . При русі точки усі координати змінюються з часом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.31)$$

Функції (1.31), якщо вони відомі визначають положення точки в просторі у будь-який момент часу.

Звичайно, всі три способи пов’язані між собою. Найпростіший зв’язок існує між векторним і координатним способами опису руху, оскільки кожен вектор $\vec{r}$ в декартовій системі координат може бути представлений у вигляді суми трьох векторів, які спрямовані вздовж осей x, y, z (мал.1.14):

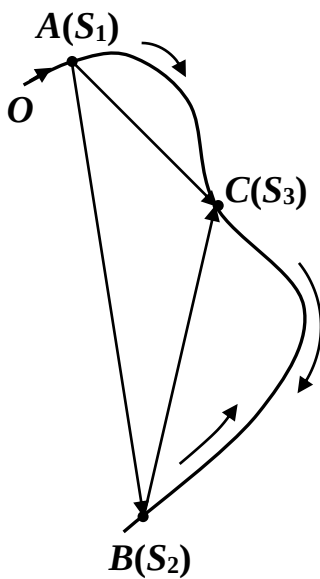
$$\vec{r} = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z, \quad (1.32)$$

де r_x, r_y, r_z – проєкції вектора $\vec{r}$ на відповідні осі; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти), напрямлені вздовж осей x, y, z . Однак

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z, \quad \text{тому} \quad \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (1.33)$$

Вираз (1.33) дає змогу здійснити перехід від векторного способу опису руху до координатного і навпаки.

1.1.5. Вектори переміщення, швидкості та прискорення



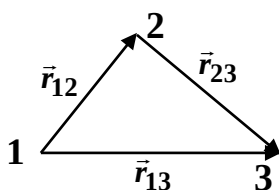
мал. 1.15

Розглянемо рух точки по довільній криволінійній траєкторії (мал.1.15). Нехай за проміжок часу t точка перемістилася з положення A в положення B , рухаючись по траєкторії весь час в одному напрямі. Тоді її шлях буде дорівнювати $l_1 = S_2 - S_1$. Якщо ж точка перемістилася з A в B , а потім, змінивши напрям руху, перейшла в положення C , то її шлях уже буде складатися із двох частин: шляху від A до B і шляху від B до C . Це можна записати так: $l_2 = S_2 - S_1 + (S_2 - S_3)$.

Віддаль між точками A і B (A і C), виміряна вздовж траєкторії, називається *шляхом*, який пройшла точка. За змістом *шлях* – величина скалярна і додатна. Будемо надалі його позначати буквою S .

Прямолінійний відрізок (мал.1.15), проведений з точки A в точку B , називають переміщенням $\vec{AB}$. Переміщенням точки є вектор $\vec{AB}$, який має довжину $|\vec{AB}|$ і напрям від A до B .

Якщо ж точка перейде по траєкторії від точки B до C , то переміщення буде $\vec{BC}$ (мал.1.15). Переміщення точки від A до C відображається вектором $\vec{AC}$. З мал.1.15 бачимо,



мал. 1.16

що

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}, \quad (1.34)$$

тобто переміщення додаються геометрично.

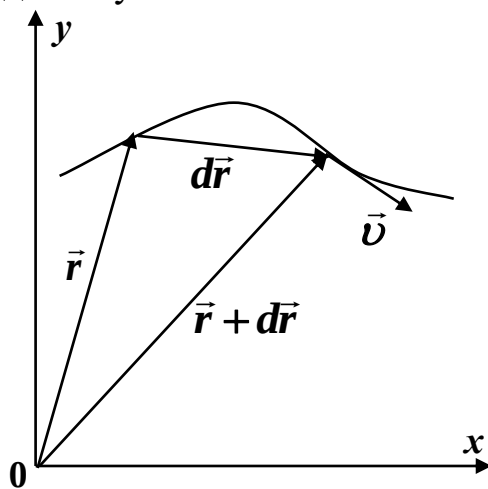
За таким правилом додаються усі вектори

(мал.1.16):

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} \quad (1.35)$$

У фізиці для характеристики руху матеріальної точки використовують величину, яка дістала назву швидкості. Під швидкістю розуміють векторну величину, яка характеризує не тільки швидкість переміщення частинки траєкторією, але і напрям, у якому рухається частинка в кожний момент часу.

Розглянемо рух частинки, поданий на мал.1.17, і розіб'ємо траєкторію руху точки на нескінченно малі ділянки dS . Кожну таку ділянку співставимо з нескінченно малим переміщенням $d\vec{r}$.



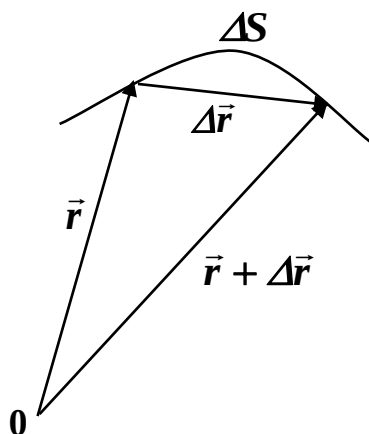
мал. 1.17

Розділивши це переміщення $d\vec{r}$ на відповідний проміжок часу dt , одержимо *миттєву швидкість* частинки в даній точці траєкторії:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.36)$$

Отже, швидкість є похідною від радіус-вектора частинки по часу. Переміщення $d\vec{r}$ збігається з нескінченно малим елементом траєкторії dS . Тому вектор швидкості $\vec{v}$ завжди напрямлений по дотичній до траєкторії.

Щоб одержати (1.36) потрібно: зафіксувати деякий момент часу t , знайти приріст радіус-вектора $\Delta\vec{r}$ за малий проміжок часу Δt (мал.1.17).



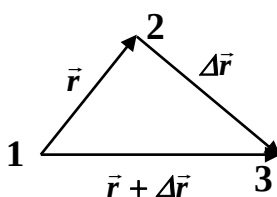
мал. 1.18

Відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ дає *середнє значення*

швидкості за час Δt . Якщо ж $\Delta t \rightarrow 0$, то

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.37)$$

Знайдемо модуль швидкості $\vec{v}$:



мал. 1.19

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}. \quad (1.38)$$

У цій формулі не можна записати Δr замість $|\Delta \vec{r}|$. Вектор $\Delta \vec{r}$ є різницею двох векторів. Символ $|\Delta \vec{r}|$ означає модуль приросту вектора $\vec{r}$, у той час як Δr є приростом модуля вектора $\vec{r}$: $\Delta |\vec{r}|$. Обидві ці величини, взагалі кажучи, не дорівнюють одна одній:

$$|\Delta \vec{r}| \neq \Delta |\vec{r}|.$$

У цьому можна переконатися з такого прикладу. Нехай вектор $\vec{r}$ одержує такий приріст, що модуль його не змінюється: $|\vec{r} + \Delta \vec{r}| = |\vec{r}|$. Тоді приріст модуля вектора дорівнює нулю ($\Delta |\vec{r}| = \Delta r = 0$). Водночас модуль приросту вектора $\vec{r}$, тобто $|\Delta \vec{r}|$, відмінний від нуля. Він дорівнює довжині відрізка 2–3 (мал.1.19).

З мал.1.18 бачимо, що шлях ΔS відрізняється за величиною від модуля переміщення $|\Delta \vec{r}|$. Однак, якщо розглядати відрізки шляху ΔS і переміщення $\Delta \vec{r}$, які відповідають все меншим проміжкам часу Δt , то різниця між ΔS та $|\Delta \vec{r}|$ буде зменшуватися і границя їх відношення буде:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{|\Delta \vec{r}|} = 1. \quad (1.39)$$

Взявши до уваги (1.39), можна записати, що

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (1.40)$$

Відповідно до (1.37) елементарне переміщення частинки дорівнює:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \text{або} \quad dS = v dt. \quad (1.41)$$

Вектор швидкості, як і будь-який вектор, можна представити у вигляді:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z. \quad (1.42)$$

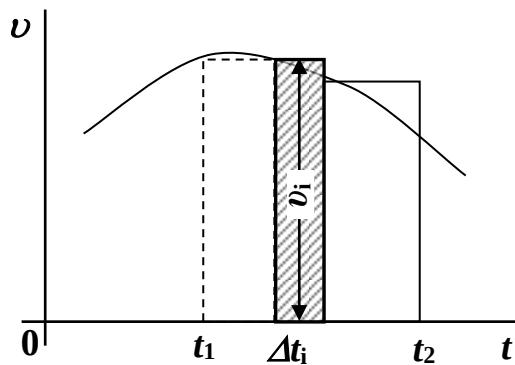
Оскільки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$, то

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad i$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.43)$$

Розглянемо, як, знаючи величину швидкості в кожний момент часу, обчислити шлях, що проходить частинка від моменту часу t_1 до моменту t_2 . Розіб'ємо проміжок часу $t_1 - t_2$ на N малих, не обов'язково однакових, проміжків: $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$. Весь шлях S можна подати як суму шляхів $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_N$, які пройдені за відповідні проміжки часу Δt_i :

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_N = \sum_{i=1}^N \Delta S_i. \quad (1.44)$$



мал. 1.20

На мал.1.20 подано залежність швидкості частинки від часу. Відповідно до формули (1.41), кожен з елементарних шляхів ΔS_i можна записати у вигляді:

$$\Delta S_i \approx v_i \Delta t_i.$$

Відповідно, весь шлях

$$S \approx \sum_{i=1}^N \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.45)$$

Покажемо, що величину пройденого шляху можна подати як площу фігури, обмеженої кривою залежності величини швидкості v від часу t . Добуток $v_i \Delta t_i$ чисельно дорівнює площі заштрихованої (i -тої) смужки. Сума таких добутків буде дорівнювати площі фігури, обмеженої віссю t , прямими $t = t_1$ і $t = t_2$, а також ламаною лінією, утвореною верхніми краями всіх подібних смужок. При $\Delta t_i \rightarrow 0$ ширина всіх смужок зменшується і ламана лінія в границі переходить у криву залежності $v = v(t)$. Тоді

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.46)$$

Вираз (1.46) є визначенням інтегралом від функції $v(t)$, взятим у межах від t_1 до t_2 . Отже, шлях, пройдений частинкою за проміжок часу від t_1 до t_2 , дорівнює

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.47)$$

А середнє значення модуля швидкості за час від t_1 до t_2 дорівнює

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.48)$$

Швидкість частинки $\vec{v}$ може змінюватися з часом як за величиною, так і за напрямом. Швидкість зміни вектора $\vec{v}$, як і швидкість зміни довільної функції від часу, визначається похідною вектора $\vec{v}$ по часу t . Позначають цю похідну так:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.49)$$

Величина, що визначається формулою (1.49), називається *прискоренням частинки*. Для прямолінійного рівноприскореного руху матеріальної точки прискорення

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z. \quad (1.50)$$

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}, & a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d^2 z}{dt^2}, & a^2 &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

то

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}. \quad (1.52)$$

Рух називається *рівномірним*, якщо матеріальна точка за однакові, довільно вибрані проміжки часу проходить однакові шляхи.

Рух називають *нерівномірним*, якщо шляхи, які пройшла точка за довільні однакові проміжки часу, будуть неоднаковими.

Рівноприскорений рух – це такий рух, при якому швидкість матеріальної точки за довільні однакові проміжки часу змінюється на однакову величину.

При рівномірному русі модуль швидкості матеріальної точки не змінюється ($v = \text{const}$). Використавши рівняння (1.41), знайдемо формулу шляху при рівномірному русі:

$$S = \int v dt = v \int dt = vt + c. \quad (1.53)$$

Тут c – постійна інтегрування. Для її знаходження потрібні додаткові дані про положення точки в початковий момент часу $t = 0$. Якщо відомо, що в момент часу $t = 0$ положення рухомої точки визначається координатою S_0 , то рівняння (1.53) перепишеться так:

$$S = S_0 + vt. \quad (1.54)$$

Якщо рух рівноприскорений, то, використавши (1.49), можемо знайти швидкість (враховуючи, що $a = \text{const}$):

$$v = \int a dt + c_1 = at + c_1. \quad (1.55)$$

Сталу інтегрування c_1 знаходимо із початкових умов: при $t = 0$ швидкість $v = v_0$. Тоді закон зміни швидкості має вигляд:

$$v = v_0 + at. \quad (1.56)$$

Для знаходження закону руху точки траєкторією при рівноприскореному русі використаємо співвідношення (1.47) і (1.56):

$$S = \int v dt + c_2 = \int (v_0 + at) dt + c_2 = v_0 t + at^2 / 2 + c_2.$$

Постійна інтегрування c_2 обчислюється з умови, що в момент часу $t = 0$ положення точки на траєкторії визначається координатою S_0 ; тоді $c_2 = S_0$.

Отже, закон рівноприскореного руху точки траєкторією має вигляд:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.57)$$

Встановимо зв'язок швидкості з положенням точки на траєкторії при рівноприскореному русі.

Закон руху і закон зміни швидкості при цьому русі мають такий вигляд:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 + at,$$

де v_0 – швидкість точки в момент часу $t = 0$ (або в положенні S_0), v – швидкість точки в момент часу t (або в положенні S). Виключивши з цих рівнянь час, отримаємо рівність

$$v^2 - v_0^2 = 2a(S - S_0), \quad (1.58)$$

яка встановлює зв'язок між швидкістю і положенням рухомої точки: різниця квадратів швидкостей в кінцевому і початковому положеннях точки визначається різницею координат кінцевого і початкового її положення.

Розглянемо рух матеріальної точки довільною криволінійною траєкторією. Увівши поняття орта дотичної до траєкторії $\vec{\tau}$, який має такий самий напрям, що і швидкість $\vec{v}$, можемо записати:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}. \quad (1.59)$$

Підставивши (1.59) у (1.49), одержуємо:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.60)$$

У цьому випадку вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді суми двох складових. Одна з них має напрям $\vec{\tau}$, тобто напрямлена по дотичній до траєкторії і тому позначається $\vec{a}_\tau$ та називається тангенціальним прискоренням. Вона дорівнює:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \quad (1.61)$$

Друга складова, яка дорівнює $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, напрямлена по нормалі до траєкторії і тому позначається $\vec{a}_n$ та називається нормальним прискоренням:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.62)$$

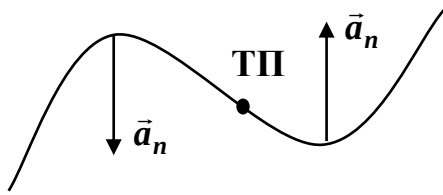
Тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ характеризує зміну швидкості за величиною. Якщо швидкість за величиною не змінюється, то тангенціальне прискорення дорівнює нулю і $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямом. Якщо напрям швидкості не змінюється, то рух точки відбувається прямолінійною траєкторією. Тоді нормальне прискорення дорівнює нулю і $\vec{a} = \vec{a}_\tau$.

Відповідні обчислення похідної орта по часу дають таку кінцеву формулу для нормального прискорення:

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{n}, \quad (1.63)$$

де $\vec{n}$ – орт нормалі до траєкторії, напрямлений у ту саму сторону, в яку повертається вектор $\vec{\tau}$ при русі точки по траєкторії; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.



мал. 1.21

Вектор прискорення при русі точки плоскою кривою задається наступним виразом:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.64)$$

А модуль вектора $\vec{a}$ в цьому випадку дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.65)$$

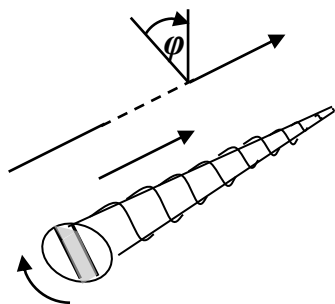
При прямолінійному русі нормальне прискорення відсутнє ($\vec{a}_n = 0$). Воно перетворюється у нуль і в точці перегину (ТП) криволінійної траєкторії. Вектор $\vec{a}_n$ не може змінюватися стрибком; зміна напрямку на протилежний відбувається плавно з перетворенням в нуль $\vec{a}_n$ у ТП. Якщо частинка рухається рівномірно з постійним за величиною прискоренням, то $\vec{a}_\tau = 0$ і $\vec{a} = \vec{a}_n$. Постійність за величиною $\vec{a}_n$ означає, що $\frac{v^2}{R} = \text{const}$. Звідси робимо висновок, що $R = \text{const}$ (оскільки $v = \text{const}$ внаслідок рівномірності руху). Отже, частинка рухається кривою зі сталою кривизною, тобто по колу.

1.2. Рух по колу. Кутові та лінійні характеристики руху

Поворот тіла на деякий кут φ можна описати у вигляді відрізка, довжина якого дорівнює φ , а напрям збігається з віссю, навколо якої відбувається поворот.

Для того, щоб вказати, в яку сторону відбувається поворот навколо даної осі, пов'язують напрям повороту і напрям відрізка, яким його позначають, правилом правого гвинта (свердлика).

Суть цього правила наступна: напрям відрізка повинен бути таким, щоб, дивлячись вздовж нього, ми бачили поворот, що відбувається за годинниковою стрілкою.



мал. 1.22

Отже, повороту тіла можна приписати числове значення і напрям. Однак цього замало, щоб поворот можна було вважати вектором: потрібно, щоб таким методом зображувані повороти можна було додавати за правилом паралелограма.

Для поворотів довільної величини остання умова не завжди виконується. Відомо, що малі повороти можна розглядати як вектори. Їх записують у вигляді $\Delta\vec{\varphi}$ або $d\vec{\varphi}$.

Такі вектори, напрям яких пов'язується з напрямом обертання (або обходу), називають *аксіальними* векторами.

Для опису обертового руху точки використовують такі величини, які одержали назву кутова швидкість і кутове прискорення.

Векторна величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.66)$$

називається *миттєвою кутовою швидкістю*. Кутова швидкість $\vec{\omega}$ напрямлена вздовж осі, навколо якої обертається тіло в сторону, яку визначає правило правого гвинта (свердлика), і є аксіальним вектором. Модуль кутової швидкості дорівнює $d\varphi/dt$. Обертання із сталою кутовою швидкістю називається *рівномірним*.

Якщо обертання є рівномірним, то $\omega = \varphi/t$, де φ – кут повороту за час t . При рівномірному обертанні ω показує, на який кут повертається тіло за одиницю часу. Рівномірне обертання характеризують періодом обертання T , під яким розуміють час, протягом якого тіло зробить один оберт, тобто повернеться на кут 2π . Оскільки для одного оберту $\Delta t = T$, $\Delta\varphi = 2\pi$, то кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.67)$$

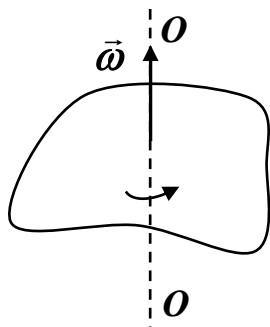
або

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.68)$$

Знаючи період обертання T , можна обчислити кількість обертів ν за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (1.69)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ може змінюватися як за рахунок зміни швидкості обертання ν навколо осі (в цьому випадку він зміниться за величиною), так і за рахунок повороту осі обертання в просторі (в цьому випадку $\vec{\omega}$ зміниться за напрямом).

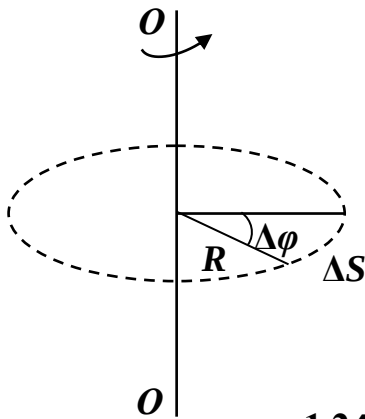


мал. 1.23

Нехай за час Δt вектор $\vec{\omega}$ одержує приріст $\Delta\vec{\omega}$. Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується величиною

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (1.70)$$

яка називається кутовим прискоренням. Кутове прискорення є також аксіальним вектором.



мал. 1.24

При обертанні окремі точки тіла мають різні лінійні швидкості $\vec{v}$. Швидкість кожної точки неперервно змінює свій напрям. Величина ж швидкості $|\vec{v}|$ визначається кутовою швидкістю тіла $\vec{\omega}$ і віддалю точки від осі обертання R .

Нехай за малий проміжок часу Δt тіло повернулося на кут $\Delta\varphi$ (мал.1.24). Точка, яка є на віддалі R від осі, пройшла шлях $\Delta S = R\Delta\varphi$.

Лінійна швидкість цієї точки знаходиться так:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

$$\text{Отже, } v = \omega R. \quad (1.71)$$

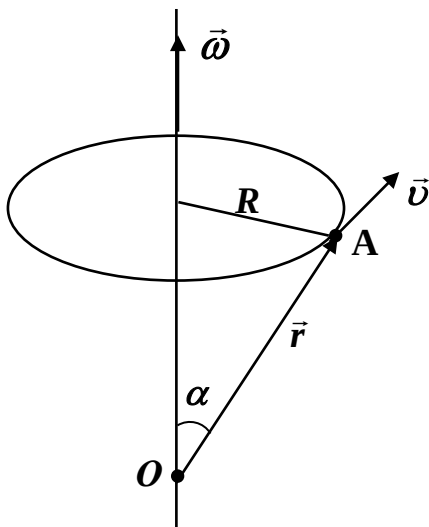
Формула (1.71) пов'язує модулі лінійної і кутової швидкостей. Знайдемо вираз, що пов'язує вектори лінійної $\vec{v}$ і кутової $\vec{\omega}$ швидкостей.

Положення точки A будемо визначати радіус-вектором $\vec{r}$, проведеним з вибраного на осі обертання початку координат O (мал.1.25).

З мал.1.25 бачимо, що векторний добуток $[\vec{\omega} \vec{r}]$ збігається за напрямом з вектором швидкості $\vec{v}$ і його модуль дорівнює $\omega r \sin \alpha = \omega R$, де $R = r \sin \alpha$.

Отже, можна записати:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (1.72)$$



мал. 1.25

Знайдемо зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху матеріальної точки.

Відомо, що нормальне прискорення точок обертового тіла $a_n = v^2/R$. Тоді, врахувавши (1.71), одержимо:

$$a_n = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.73)$$

Нехай вісь обертання тіла не змінює свого положення у просторі. Знайдемо модуль тангенціального прискорення при такому русі.

Використавши (1.71) і прийнявши $R = \text{const}$, можемо записати, що

$$a_\tau = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\beta, \quad (1.74)$$

де β – модуль вектора кутового прискорення.

Отже, нормальне і тангенціальне прискорення збільшуються лінійно із збільшенням віддалі точки від осі обертання. Якщо лінійна швидкість точок тіла зростає, то тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ збігається за напрямом із швидкістю $\vec{v}$. Напрямок кутового прискорення збігається з напрямом кутової швидкості (оскільки вона збільшується). Щоб одержати зв'язок між векторами $\vec{a}_\tau$, $\vec{\beta}$ і $\vec{r}$, потрібно у формулі (1.72) вектори $\vec{v}$ і $\vec{\omega}$ замінити на $\vec{a}_\tau$ і $\vec{\beta}$:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \vec{r}]. \quad (1.75)$$

Якщо кутова швидкість зменшується, то вектор кутового прискорення $\vec{\beta}$ направлений в сторону, протилежну до вектора $\vec{\omega}$, а

вектор $\vec{a}_\tau$ направлений в сторону, протилежну до лінійної швидкості, тобто порядок співмножників у формулі (1.75) не змінюється і в цьому випадку.

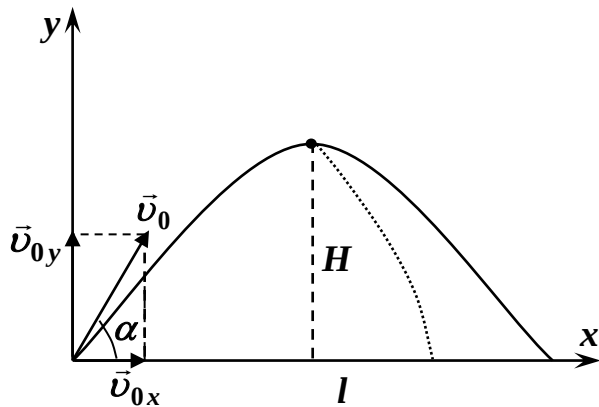
Вектор нормального прискорення можна представити формулою:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \vec{v}], \quad (1.76)$$

а повне прискорення:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \vec{R}] + [\vec{\omega} \vec{v}]. \quad (1.77)$$

1.3. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту



мал. 1.26

Одним із важливих прикладів криволінійного руху є рух тіла, кинутого під кутом до горизонту (мал.1.26).

Нехай тілу надали початкової швидкості v_0 під кутом α до горизонту. Знайдемо:

- 1) траєкторію руху тіла;
- 2) найбільшу висоту підняття тіла над горизонтом H ;
- 3) дальність польоту l .

Виходячи із складових швидкості на координатних осях,

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

резюмуємо, що в напрямі осі x точка рухається рівномірно, бо $v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const}$ (від часу не залежить), а в напрямі осі y – рівносповільнено. Тому координати точки для будь-якого моменту будуть:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (1.78)$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2/2, \quad (1.79)$$

де g – прискорення вільного падіння.

Якщо з рівнянь (1.78) і (1.79) виключити час, то отримаємо рівняння траєкторії у явному вигляді:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.80)$$

Отже, тіло летітиме параболічною траєкторією.

Найбільшу висоту підняття тіла над горизонтом шукатимемо як максимум координати y з рівняння (1.79). Знайдемо похідну та прирівняємо її до нуля:

$$y' = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

тоді

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.81)$$

де t_1 – час, за який тіло досягає максимальної висоти H .

Підставивши (1.81) у (1.79), одержимо:

$$H = Y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (1.82)$$

Вважаємо, що час підняття тіла до найвищої точки і час його зниження (до падіння на землю) однаковий. Тому весь час польоту тіла:

$$t = 2t_1 = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

а далекість польоту:

$$l = v_0 \sin \alpha \cdot 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.83)$$

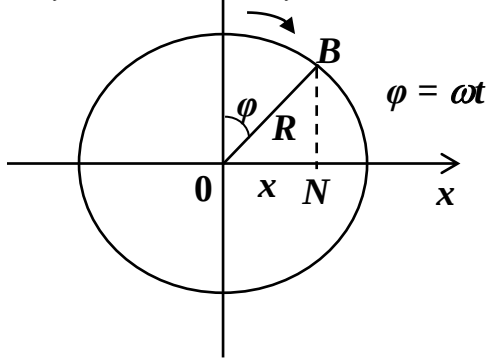
У розглянутому прикладі не враховано опору середовища. Насправді, внаслідок опору повітря траєкторія тіла не параболою, а по так звана балістична крива (пунктирна крива на мал.1.26).

1.4. Коливальний рух матеріальної точки

Коливальним називається рух, у якому матеріальна точка, багатократно відхиляючись від свого положення рівноваги, щоразу знову повертається до нього.

Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла точно повторюються через однакові проміжки часу, називають *періодичним*. Час, за який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом*.

Гармонічним називають коливальний рух, у якому зміщення матеріальної точки від положення рівноваги змінюється за законом синуса або косинуса.



мал. 1.27

Прикладом гармонічного коливання може бути рух проєкції точки B , яка рівномірно рухається по колу, на довільну пряму в площині руху (мал.1.27). Якщо радіус кола R , а кутова швидкість точки ω , то координата її проєкції:

$$x = R \sin \omega t. \quad (1.84)$$

Відстань точки, що коливається, від положення рівноваги позначають через x . Її називають *міщенням*.

Найбільше значення зміщення точки в колиальному русі ($x = R = A$) називають *амплітудою*.

Період коливань T точки B , виходячи з періодичності функції синуса (або косинуса):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.85)$$

де ω – циклічна (або колова) частота гармонічних коливань.

Кількість коливань ν за секунду називають частотою коливань:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (1.86)$$

Добуток ωt називають фазою. *Фаза* – це аргумент, який дає змогу визначати числове значення і напрям зміщення, тобто положення точки в колиальному русі в будь-який момент часу.

Рівняння гармонічного колиального руху в загальному вигляді:

$$x = A \sin (\omega t + \alpha), \quad (1.87)$$

де α – початкова фаза, тобто значення фази в момент часу $t = 0$.

Швидкість точки в гармонічному колиальному русі:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.88)$$

або
$$v = \omega A \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (1.89)$$

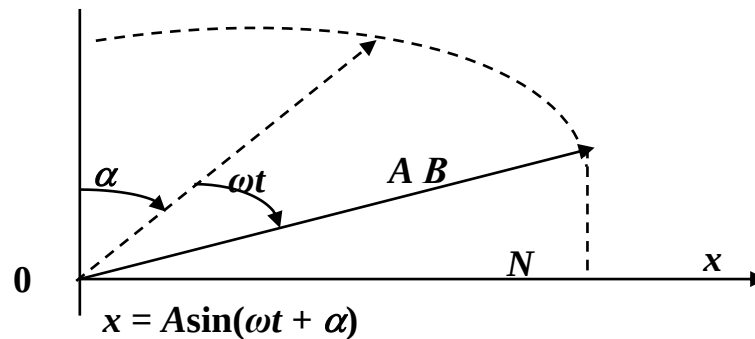
Прискорення точки в гармонічному колиальному русі:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.90)$$

інакше $a = -\omega^2 x, \quad (1.91)$

або $a = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi). \quad (1.92)$

Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі є змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею за фазою, відповідно, $\pi/2$ і π .



мал. 1.28

Окрім аналітичного відображення гармонічного коливання у вигляді рівняння координати x точки B , його можна відобразити і у вигляді зміни проєкції вектора амплітуди A , що рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω (мал.1.28). Ця проєкція $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ чисельно дорівнює зміщенню точки B у коливальному русі.

Питання для самоконтролю

1. Які ви знаєте способи опису руху матеріальної точки?
2. Що називають швидкістю рівномірного прямолінійного руху?
3. При яких умовах довжина вектора переміщення буде дорівнювати шляху, пройденому матеріальною точкою?
4. Що називають миттєвою швидкістю нерівномірного руху?
5. Що називають прискоренням рівномірного руху?
6. Який зв'язок існує між швидкістю і положенням точки на траєкторії при рівномірному русі?

7. Що називають тангенціальним прискоренням? Що воно характеризує при криволінійному русі? Як направлений вектор тангенціального прискорення?
8. Що називають нормальним прискоренням? Що воно характеризує? Куди він направлений?
9. Як модуль повного прискорення пов'язаний з модулями тангенціального та нормального прискорень?
10. Що називають кутовою швидкістю руху точки по колу?
11. Який існує зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю при рівномірному русі точки по колу?
12. Що називають кутовим прискоренням рівнозмінного руху по колу?
13. Який зв'язок існує між тангенціальним прискоренням a_t і кутовим прискоренням β ?
14. Як записується закон рівнозмінного руху точки по колу через кутові величини?
15. Запишіть формулу зв'язку між векторами $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$.
16. Запишіть формулу зв'язку між векторами $\vec{a}_n$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$.
17. Який рух називають коливальним?
18. Запишіть формули зміщення матеріальної точки, швидкості та прискорення при коливальному русі.
19. Тіло рухається рівноприскорено без початкової швидкості. До кінця п'ятої секунди його швидкість дорівнює 10 м/с. Який шлях тіло пройшло за п'яту секунду?

Відповідь: 9 м.

20. Скільки часу вільно падало тіло, якщо за останню секунду воно пройшло таку ж віддаль, як і за весь попередній час?

Відповідь: 3,4 с.

21. Два тіла кинуті одночасно одне одному назустріч. Початкова швидкість цих тіл однакова і дорівнює 40 м/с. Одне тіло рухається вертикально вгору, інше – вертикально вниз із точки найвищого підняття першого тіла. На якій висоті від поверхні землі і через який час ці тіла зустрінуться?

Відповідь: 35,1 м; 1 с.

ТЕМА 2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

ПЛАН

1. Перший закон Ньютона. Принцип відносності Галілея.
2. Другий і третій закони Ньютона. Поняття про силу та масу. Імпульс. Закон збереження імпульсу.
3. Рух у неінерціальних системах відліку.
4. Реактивний рух. Рух тіла із змінною масою. Рівняння Мещерського та Ціолковського.

2.1. Перший закон Ньютона. Принцип відносності Галілея

2.1.1. Перший закон Ньютона

Динаміка вивчає рух тіл у зв'язку з тими причинами, які зумовлюють той чи інший характер руху. *Практичні завдання динаміки зводяться до визначення прискорення руху за даними діючими силами або до знаходження діючих сил за змінами руху, який відбувається під дією цих сил.*

В основі так званої класичної механіки лежать три закони, які сформулював Ньютон у 1687 році. Закони Ньютона стали наслідком узагальнення величезної кількості дослідних фактів.

Ньютонівська механіка досягла протягом двох століть таких великих успіхів, що вважалося, щоб пояснити будь-яке явище його потрібно звести до механічного процесу, який підлягає законам Ньютона.

Але з розвитком науки виявилися нові факти, які не вкладалися у рамки класичної механіки. Ці факти одержали пояснення у нових теоріях – спеціальній теорії відносності (СТВ) і квантовій механіці.

У спеціальній теорії відносності, яку створив А.Ейнштейн в 1905 році, корінному перегляду були піддані ньютонівські уявлення про простір і час. Це привело до створення механіки великих швидкостей (релятивістської механіки). Рівняння релятивістської механіки в граничному випадку (для малих швидкостей) переходять у рівняння класичної механіки.

У 20-х роках XIX століття виникла квантова механіка в результаті дослідження фізики атома. З рівнянь квантової механіки в граничному випадку (для великих мас порівняно з масами атомів) одержуються рівняння класичної механіки. *Розвиток науки не відкинув класичну механіку, а лише вказав на її обмежене застосування.*

Класична механіка, що базується на законах Ньютона, є механікою тіл великих мас (порівняно з масою атомів), які рухаються з малими (порівняно з швидкістю світла) швидкостями.

Перший закон Ньютона формулюється так: будь-яке тіло перебуває у стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху, доки дія зі сторони інших тіл не змусить його змінити цей стан.

Цей закон виконується не в кожній системі відліку. Система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називається *інерціальною*. Сам закон іноді називають *законом інерції*.

Властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називають *інертністю*. *Інертність* – властивість матерії зберігати швидкість свого руху, перебуваючи в русі. Саме це явище збереження швидкості руху або стану спокою у випадку зрівноваження зовнішніх дій на тіло називають *інерцією*. *З першого закону Ньютона випливає, що природним станом матерії є стан руху, а сила взаємодії є лише причиною зміни швидкості руху – прискорення.*

Система відліку, в якій перший закон Ньютона не виконується, називається *неінерціальною системою відліку*.

Будь-яка система відліку, яка рухається відносно деякої інерціальної системи прямолінійно та рівномірно ($\vec{v} = \text{const}$), є також інерціальною. Дослідним шляхом встановлено, що система відліку, центр якої збігається з Сонцем, а осі спрямовані на відповідні зорі, є інерціальною.

Земля рухається відносно Сонця і зірок криволінійною траєкторією. Криволінійний рух завжди відбувається з деяким прискоренням. Окрім того, Земля обертається навколо своєї осі.

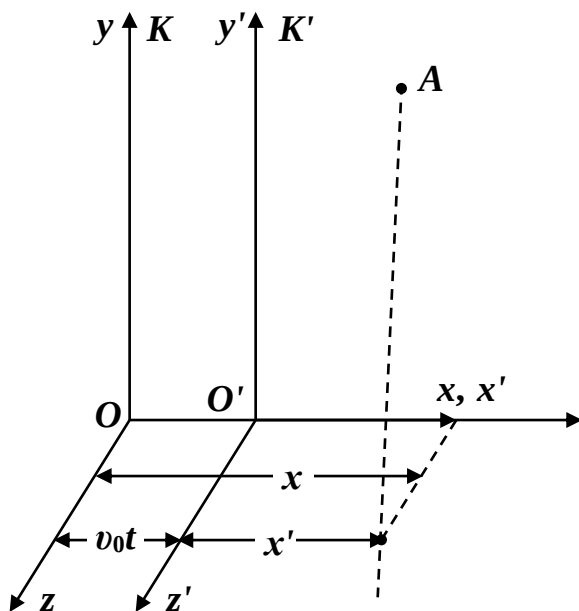
Тому система відліку, пов'язана із Землею, не є інерціальною. Але прискорення такої системи настільки мале, що в багатьох випадках її можна вважати інерціальною.

2.1.2. Принцип відносності Галілея

Сам Ньютон допускав, що існує абсолютно нерухомий простір, в якому виконуються його закони.

Однак ще Галілей поставив принципове для науки питання – чи можна спостереженням у системі, що перебуває у рівномірному та прямолінійному русі, виявити цей, так званий, інерціальний рух і визначити його швидкість?

У 1632 році Галілей, з точки зору спостерігача, який перебував у закритій каюті корабля, довів, що ніякими механічними дослідженнями неможливо встановити, чи перебуває система в стані спокою, чи в стані рівномірного та прямолінійного руху. Адже відомо, що на пароплавах і у вагонах, коли вони рухаються рівномірно та прямолінійно, досліди відбуваються так само, як і тоді, коли вони перебувають у стані спокою.



мал. 2.1

Усе це привело Галілея, а після нього і Ньютона, до висновку, що ту чи ту систему можна лише умовно вважати нерухомою, оскільки інерціальний рух неможливо виявити. У цьому суть так званого *механічного принципу відносності Галілея*.

Розглянемо детальніше дві системи відліку, які рухаються одна відносно одної з постійною швидкістю $\vec{v}_0$ (мал.2.1).

Одну з цих систем, яка позначена буквою K , будемо вважати нерухомою. Друга система K' буде рухатися прямолінійно та рівномірно. Виберемо координатні осі x, y, z системи K і осі x', y', z'

системи K' так, щоб осі x і x' збіглися, а осі y і y' та осі z і z' були паралельні.

Знайдемо зв'язок між координатами x, y, z деякої точки A в системі K і координатами x', y', z' цієї ж точки в системі K' .

Нехай система K' рухається прямолінійно відносно нерухомої системи K з постійною швидкістю $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 \ll C$, C – швидкість світла у вакуумі). При цьому дослід показує, що час t' , виміряний з можливою тепер точністю, у рухомій системі відліку і час t у нерухомій системі однаковий: $t = t'$.

Із співвідношення $t = t'$ випливає, що дві події, які одночасні в системі K' , будуть одночасними і в системі K . Отже, й тривалість однієї і тієї ж події є однакою в усіх інерціальних системах відліку.

Якщо почати відлік часу з того моменту, коли початки координат обох систем збіглися, то

$$x = x' + \vec{v}_0 t, \quad (2.1)$$

$$y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Ці рівняння називають *перетвореннями Галілея*.

Перше і останнє із співвідношень (2.1) будуть справедливими лише при значеннях $v_0 \ll C$.

При $v_0 = C$ перетворення Галілея повинні бути замінені загальнішими перетвореннями Лоренца.

Перетворення швидкостей

Продиференціюємо співвідношення (2.1) по часу:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt} + v_0 & v_x &= v_x' + v_0 \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt} & v_y &= v_y' \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt} & v_z &= v_z' \end{aligned} \quad \text{або} \quad (2.2)$$

Або у векторній формі:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (2.3)$$

де $\vec{v}$ – абсолютна швидкість, $\vec{v}'$ – відносна швидкість, $\vec{v}_0$ – переносна швидкість.

Формули (2.2) і (2.3) дають правило додавання швидкостей у класичній механіці. Варто пам'ятати, що співвідношення (2.3) є справедливим при довільному виборі взаємних напрямків координатних осей системи K та K' . Співвідношення (2.2) виконується тільки при виборі осей, як показано на мал.2.1.

Перетворення прискорень

Покажемо, що будь-яка система відліку, яка рухається відносно деякої інерціальної системи з постійною швидкістю, буде також інерціальною.

Для цього продиференціюємо по часу співвідношення (2.3). Врахувавши, що $\vec{v}_0$ постійна величина, одержуємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \vec{a}'. \quad (2.4)$$

Співвідношення (2.4) стверджує, що прискорення будь-якого тіла в усіх інерціальних системах відліку однакове.

Перетворення маси тіла

Класична механіка виходить з того, що в усіх інерціальних системах відліку маса одного і того ж тіла однакова та не залежить від швидкості його руху:

$$m = m'. \quad (2.5)$$

Перетворення сили

Основне рівняння механіки характерне тим, що з кінематичних величин воно містить тільки прискорення. Але прискорення будь-якого тіла в двох довільно вибраних інерціальних системах відліку K і K' однакове. Звідси випливає, що сили, які діють на тіло в системах K і K' , також будуть однаковими.

Сили в ньютонівській механіці – результат взаємодії тіл. Сили можуть залежати від віддалі між тілами, від відносної швидкості руху взаємодіючих тіл і часу. Але віддаль і час не змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Не змінюється і відносна швидкість руху тіл. Тому:

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (2.6)$$

Отже, рівняння динаміки не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. З механічної точки зору всі інерціальні системи відліку цілком еквівалентні: жодній з них не можна віддавати перевагу над іншими.

Практично це проявляється у тому, що жодними механічними дослідями, проведеними в межах даної системи відліку, не можна встановити, чи перебуває вона в стані спокою, чи в стані рівномірного та прямолінійного руху. Це положення називається принципом Галілея. Його ще можна сформулювати так: в усіх інерціальних системах відліку закони фізики мають однакову математичну форму запису. Відрізнити інерціальні системи відліку одну від одної неможливо в принципі.

Фізичні величини та фізичні закони, які не змінюються при переході від однієї інерціальної системи до іншої, називають *інваріантними* (незмінними) до перетворень Галілея.

Усі відомі закони механіки інваріантні до перетворень Галілея. Однак не всі інші фізичні закони є інваріантні до цих перетворень. Зокрема, як показала перевірка, рівняння Максвелла не є інваріантні до перетворень Галілея.

А. Ейнштейн в 1905 році і незалежно від нього Пуанкаре показали, що визнаючи справедливість і рівнянь Максвелла, і принципу відносності, потрібно вважати перетворення Галілея неточними: їх потрібно замінити іншими, які отримали назву перетворень Лоренца.

2.2. Другий і третій закони Ньютона. Поняття про силу та масу.

Імпульс. Закон збереження імпульсу

2.2.1. Маса та імпульс тіла

Дія на дане тіло інших тіл викликає зміну його швидкості, тобто надає даному тілу прискорення. Дослід показує, що однакова дія надає різним тілам різні за величиною прискорення.

Як було сказано вище, властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називається *інертністю*. Кількісною характеристикою інертності є величина, яка називається *масою тіла*.

Найзагальнішими проявами маси тіл є дві властивості: *гравітація* – властивість притягувати до себе інші тіла і притягуватися ними та згадана вже *інерція* тіл. Гравітація та інерція – властивості, притаманні всім видам матерії.

Численні досліди, проведені Ньютоном, а також Етвешем, показали, що для будь-яких двох тіл відношення мас тяжіння дорівнює відношенню їх інертних мас. Через те у фізиці не розрізняють числових значень маси тяжіння й інертної маси.

Щоб знайти масу деякого тіла, потрібно порівняти її з масою тіла, яке прийняте за еталон маси. Можна також порівнювати масу даного тіла з тілом, маса якого відома.

Операцію порівняння мас m_1 і m_2 двох матеріальних точок можна виконати так. Поставимо ці точки в такі умови, щоб їх взаємодією з іншими тілами можна було знехтувати.

Систему тіл (частинок, матеріальних точок), які взаємодіють тільки між собою і не взаємодіють з іншими тілами, називають замкнутою системою.

Якщо примусити ці частинки взаємодіяти (через зіткнення одна з одною), то їх швидкості одержать приріст $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$. Результати досліду показують, що ці прирости завжди мають протилежні напрями, тобто відрізняються знаком. Відношення ж модулів приростів швидкостей не залежить від способу та інтенсивності взаємодії даних двох тіл. Ця взаємодія дорівнює оберненому відношенню мас тіл, що взаємодіють:

$$\left| \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta \vec{v}_2} \right| = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.7)$$

Тіло з великою масою, тобто інертніше тіло зазнає меншої зміни швидкості.

Взявши до уваги напрями векторів $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$, запишемо:

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2. \quad (2.8)$$

У ньютонівській механіці маса тіла вважається сталою величиною, яка не залежить від швидкості тіла. Тому (2.8) перепишемо так:

$$\Delta(m_1 \vec{v}_1) = -\Delta(m_2 \vec{v}_2). \quad (2.9)$$

Добуток маси тіла на його швидкість називають імпульсом тіла. Позначають імпульс буквою $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (2.10)$$

Тоді (2.9) можна записати як

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{або} \quad \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0. \quad (2.11)$$

Рівність нулю приросту величини означає, що сама величина залишається сталою. Тому з (2.11) можна зробити висновок, що повний імпульс замкнутої системи, яка складається з двох взаємодіючих тіл, залишається сталим:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}. \quad (2.12)$$

2.2.2. Другий закон Ньютона

Другий закон Ньютона в загальному вигляді формулюється так: зміна механічного імпульсу тіла пропорційна прикладеній силі і відбувається у напрямі діючої сили:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.13)$$

де $m\vec{v} = \vec{p}$ – імпульс тіла, $\vec{F}$ – результуюча зовнішня сила.

Рівняння (2.13) можна записати у вигляді:

$$d\vec{p} = \vec{F} dt, \quad (2.14)$$

звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від величини прикладеної сили, але і від часу її дії. Добуток сили на час її дії називають *імпульсом сили*.

Вирази (2.13) і (2.14) називають рівняннями динаміки матеріальної точки.

Якщо $m = \text{const}$, то другий закон Ньютона, відповідно до (2.13), можна записати ще так:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.15)$$

Звідси $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$. Отже, прискорення руху матеріальної точки прямопропорційне діючій силі та обернено пропорційне масі точки.

У широкому розумінні силами називаються взаємодії тіл, у результаті яких вони одержують прискорення або деформуються, або ж має місце одне й інше одночасно.

Відповідно, про наявність і дію сили ми можемо судити і за динамічним її проявом (за прискоренням, якого надає сила взаємодіючим тілам), і за статичним проявом (за деформаціями, які виникають у взаємодіючих тілах: стиск або розтяг пружини, прогин поверхні тіл тощо).

При розв'язуванні задач про рух тіл сталої маси спочатку складають рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.16)$$

а потім записують його у проєкціях на координатні осі:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_x; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_y; \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_z. \quad (2.17)$$

За виразами (2.17) розв'язують задачі з механіки двох типів:

а) задачі на знаходження діючих сил, коли відомі маса матеріальної точки та її координати як функції від часу:

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f_3(t);$$

б) задачі на знаходження цих функцій, коли відомі діючі сили.

Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, а задачі другого типу – методом інтегрування.

Вираз другого закону Ньютона ще називають основним рівнянням динаміки матеріальної точки.

Розглянемо деякі наслідки, які випливають з другого закону Ньютона:

1. Другий закон Ньютона стосується, точно кажучи, матеріальної точки, а не тіла взагалі, оскільки тіло може обертатися і тоді різні його точки будуть мати різні прискорення, або у випадку лише поступального руху всього тіла.
2. Дослід показує, що постійна сила викликає постійне прискорення. Якщо сила з часом змінюється, то величини $\vec{a}$ та $\vec{F}$ мають зміст миттєвих значень.
3. Відомо, що прискорення – величина векторна. Тому сила також є векторною величиною.

4. Якщо на матеріальну точку масою m одночасно діє декілька незалежних між собою сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то повне прискорення точки дорівнює:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.18)$$

Отже, прискорення при незалежних рухах додаються геометрично, а роль усіх сил у рівнянні (2.18) виконує векторна сума $\sum_i \vec{F}_i$.

Силу $\vec{F}$, яка виконує таку ж дію, як і система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, називають *рівнодійною цих сил*.

Отже, одночасна дія на матеріальну точку декількох сил еквівалентна дії однієї сили (рівнодійної сили). Рівнодійна сила дорівнює геометричній сумі діючих сил:

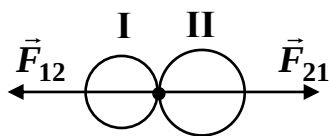
$$m\vec{a} = \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.19)$$

де $\vec{a}$ – повне прискорення матеріальної точки, $\vec{F}$ – рівнодійна всіх сил. Рівняння (2.19) можна переписати ще так:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.19')$$

2.2.3. Третій закон Ньютона

Ньютон сформулював *третій закон динаміки* так: *дії завжди відповідає рівна і протилежна протидія*.



мал. 2.2

Це означає, що сили, з якими два тіла діють одне на одне, завжди рівні за модулями і направлені у протилежні сторони. Сили дії і протидії прикладені до різних тіл, тому вони не мають рівнодійної, та ще й такої, що дорівнює нулю (мал.2.1.).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.20)$$

Згідно з другим законом Ньютона, перше тіло набуває прискорення:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}, \text{ а друге: } \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}, \quad (2.21)$$

тоді

$$\bar{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \bar{a}_2. \quad (2.22)$$

Отже, два тіла, що взаємодіють, одержують прискорення, спрямовані в протилежні сторони і обернено пропорційні до їх мас.

Згідно з третім законом Ньютона, дія не існує без протидії, через що жодна машина не може сама почати рухатися. Тому будь-яка машина є системою пар взаємодіючих тіл. Щоб машина почала рухатися, потрібна взаємодія її хоча б з одним зовнішнім відносно неї тілом.

Основою кількісного дослідження механічного руху є рівняння руху тіл. Вони дають можливість розв'язувати два типи задач. *Пряму, або основну, задачу динаміки – знаходити за заданими силами стан руху тіла (знаходити прискорення, швидкість, траєкторію тощо). Обернену задачу динаміки – знаходження сил за заданим рухом тіла (кінематичними та динамічними характеристиками руху).*

2.2.4. Закон збереження імпульсу

Розглянемо систему з n взаємодіючих частинок. Нехай, окрім внутрішніх сил $\vec{F}_{ik}$, на i -ту частинку діють зовнішні сили, результуюча яких дорівнює $\vec{F}_i$. Запишемо рівняння руху для всіх n частинок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{in} + \vec{F}_1 = \sum_{k=2}^n \vec{F}_{1k} + \vec{F}_1 \\ . &. \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{ik} + \dots + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Додамо ці n рівнянь. Оскільки $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \mathbf{0}$ і т.д. у правих частинах рівнянь (2.22) залишаться тільки зовнішні сили. І ми отримаємо співвідношення:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \vec{p}_n) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.23)$$

Суму імпульсів частинок, які утворюють механічну систему, називають *імпульсом системи*. Позначимо його символом $\vec{p}$, тоді

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.24)$$

Перепишемо рівняння (2.23) у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (2.25)$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил.

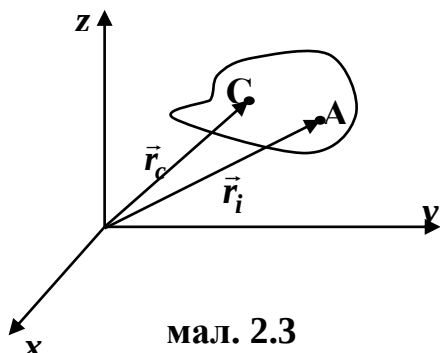
З рівняння (2.25) випливає закон збереження імпульсу: при відсутності зовнішніх сил ($\vec{F} = 0$), коли система замкнута, імпульс системи тіл $\vec{p}$ зберігається:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \text{const}. \quad (2.26)$$

Імпульс залишається постійним і у випадку незамкнutoї системи при умові, що дія зовнішніх сил компенсується (їх рівнодійна дорівнює нулю). Коли сума зовнішніх сил не дорівнює нулю, але проекція цієї суми на деякий напрям дорівнює нулю, то зберігається складова імпульсу в цьому напрямі. Наприклад:

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \quad \text{то} \quad p_x = \text{const}. \quad (2.27)$$

Імпульс системи частинок можна подати у вигляді добутку сумарної маси частинок на швидкість центра інерції (мас) системи. *Центром мас тіла (системи тіл) називають точку перетину прямих, вздовж яких мають бути направлені сили, щоб тіло рухалося поступально.*



Інакше кажучи, центром інерції (мас) системи матеріальних точок називається точка C, положення якої задається радіус-вектором $\vec{r}_c$ (мал.2.3):

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \\ &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

де m_i – маса i -тої частинки, $\vec{r}_i$ – радіус-вектор, який визначає положення цієї частинки, m – маса всієї системи.

Декартові координати центра інерції дорівнюють проєкціям $\vec{r}_c$ на координатні осі:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (2.29)$$

Зазначимо, що в однорідному полі сил тяжіння центр інерції збігається з центром ваги системи.

Швидкість центра інерції знаходимо шляхом диференціювання радіус-вектора $\vec{r}_c$ по часу:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (2.30)$$

де $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – імпульс системи.

Якщо система тіл є замкнута, то

$$\vec{p} = m \vec{v}_c = \text{const}. \quad (2.31)$$

Згідно з (2.31) центр інерції замкнутої системи або рухається прямолінійно та рівномірно, або залишається в стані спокою.

2.3. Рух у неінерціальних системах відліку

2.3.1. Неінерціальні системи відліку

До цього часу ми говорили про рухи тіл в інерціальних системах відліку. Тепер розглянемо складніший випадок руху тіл.

Системи відліку, що рухаються прискорено відносно однієї з інерціальних систем, називаються неінерціальними. Розглянемо рух тіла в неінерціальній системі відліку, системі, що рухається прямолінійно та прискорено відносно інерціальної.

Нехай як і у випадку інерціальної системи

$$t = t', \quad x = x' + x_0, \quad y = y', \quad z = z', \quad (2.32)$$

де $x_0 = v_0 t$, v_0 – деяка функція часу.

Продиференціюємо (2.32) по часу t ; тоді:

$$v_x = v'_x + v_0, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z. \quad (2.33)$$

Після диференціювання по часу t рівняння (2.33), одержимо:

$$a_x = a'_x + a_0, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z, \quad (2.34)$$

де $a_0 = \frac{d\nu_0}{dt}$.

У загальному випадку співвідношення (2.33) і (2.34) можна записати так:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0, \quad (2.35)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0. \quad (2.36)$$

Отже, у випадку руху тіла в неінерціальній системі відліку абсолютна швидкість дорівнює геометричній сумі відносної $\vec{v}'$ і переносної $\vec{v}_0$ швидкостей. Абсолютне прискорення також дорівнює геометричній сумі відносного $\vec{a}'$ і переносного $\vec{a}_0$ прискорень.

Запишемо рівняння руху точки масою m відносно рухомої (неінерціальної) системи відліку x', y', z' .

Нехай прискорення цієї точки відносно нерухомої системи дорівнює $\vec{a}$, а сила, що діє на неї, $\vec{F}$.

Тоді для нерухомої (інерціальної) системи згідно з другим законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.37)$$

Оскільки $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$, формула (2.37) перепишеться так:

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \vec{F}, \quad (2.37')$$

тому

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (2.38)$$

Отже, другий закон Ньютона в системах відліку, які рухаються з прискоренням, до числа сил, що діють на тіло, зараховує взятий з протилежним знаком добуток маси тіла на переносне прискорення ($-m\vec{a}_0$). Цей добуток, який враховує прискорений рух системи відліку, називається силою інерції.

При складанні рівнянь руху тіла в неінерціальній системі відліку до результуючих сил $\vec{F}$, прикладених до тіла, слід додавати силу інерції $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$.

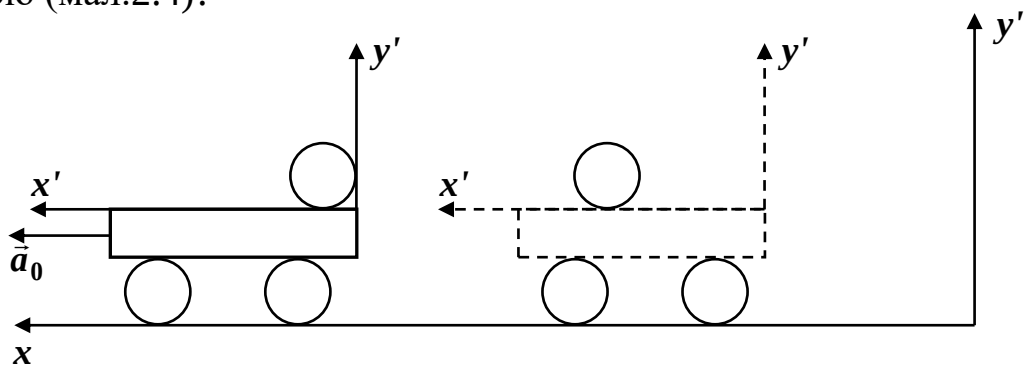
Рівняння (2.37) і (2.38) вказують два шляхи, якими можна вивчати рух тіл відносно системи відліку, що рухається прискорено.

Перший шлях: записують рівняння руху тіла відносно інерціальної системи відліку (2.37). Потім, враховуючи, що $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$, рівняння (2.37) перетворюють до вигляду (2.37'), розв'язують його відносно $\vec{a}$ та інтегрують.

Другий шлях: записують рівняння руху тіла відразу відносно неінерціальної системи відліку (2.38), врахувавши всі сили, що діють на тіло та сили інерції. Одержане рівняння інтегрують.

Розглянемо приклади руху тіл.

Приклад 1. На візочку, який покритий гладеньким склом, лежить кулька. Візочку надають прискорення $\vec{a}_0$. Що відбудеться з кулькою (мал.2.4)?



мал. 2.4

У системі відліку, пов'язаній із Землею, кулька залишиться у спокої (тертям нехтуємо), оскільки на неї в напрямі руху візочка не діють жодні сили, тобто $\vec{a} = \mathbf{0}$. Відносно візочка кулька рухається з прискоренням $-\vec{a}$ (оскільки $\vec{a}' + \vec{a}_0 = \mathbf{0}$, то $\vec{a}' = -\vec{a}_0$).

У системі відліку, яка пов'язана з візком, кулька дістає прискорення, хоча на неї при цьому жодні сили не діють.

Спостерігаючи за рухом кульки, робимо висновок, що система відліку рухається з прискоренням, і при складанні рівняння руху кульки необхідно вважати, що на неї діє сила інерції: $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$, звідси прискорення кульки відносно візка: $\vec{a}' = -\vec{a}_0$.

Приклад 1. Нехай у ліфті на пружинних терезах підвішено вантаж масою m . На нього діє сила тяжіння $m\vec{g}$, яка спрямована вниз, і пружна сила $\vec{T}$ зі сторони розтягнутої пружини, що направлена вгору.

Оскільки вектори сил направлені вздовж однієї прямої, то вибравши її за вісь координат, ми можемо оперувати з модулями вказаних векторів. Під дією зрівноважених сил $\vec{P} = m\vec{g}$ та $\vec{T}$ вантаж перебуває у стані спокою.

Якщо ліфт почав рухатися з прискоренням a_0 , направленим вгору, то точка закріплення пружини почне рухатися вгору з таким самим прискоренням.

Унаслідок інерції витки пружини та вантаж рухаються спочатку з прискоренням меншим, ніж прискорення ліфта. Тому пружина дещо розтягується, вантаж зміщується вниз, після чого набуває прискорення, яке дорівнює прискоренню ліфта.

В інерціальній системі відліку, пов'язаній із Землею (відносно стінок шахти ліфта), вантаж одержує прискорення $\vec{a}$ під дією різниці збільшеної пружної сили пружини $\vec{T}$, яка тягне його вгору, і сили тяжіння $\vec{P}$, направленої вниз.

Тоді із врахуванням знаків сил другий закон Ньютона запишемо у вигляді:

$$T_1 - P = ma \quad \text{або} \quad T_1 - P = ma_0 = ma'.$$

Коли вантаж одержує таке ж прискорення, що й ліфт, то

$$a' = 0 \quad \text{і} \quad T_1 - P = ma_0.$$

Сила натягу пружини дорівнює

$$T_1 = P + ma_0.$$

У системі відліку, яка рухається разом з ліфтом, на вантаж діє сила тяжіння $\vec{P}$ і пружна сила розтягнутої пружини $\vec{T}_1$. Хоча рівність між $\vec{P}$ і $\vec{T}_1$ порушена, вантаж, коли розтяг пружини досягне деякої максимальної величини, залишиться у спокої. Отже, в умову рівноваги вантажу нам слід включити силу інерції $-ma_0$. Тоді:

$$T_1 - P - ma_0 = 0.$$

Звідси сила натягу пружини також дорівнює:

$$T_1 = P + ma_0.$$

Розглянемо випадок, коли ліфт рухається з прискоренням $\vec{a}_0$, направленим вниз. У цьому випадку на початку руху точка підвісу пружини наближається до вантажу, який деякий час рухається з

прискоренням $a < a_0$, і сила T_2 , яка діє зі сторони пружини на вантаж, зменшується (оскільки зменшилася деформація пружини). Зменшення пружної сили $\vec{T}_2$ відносно сили тяжіння $\vec{P}$ надає вантажу прискорення $\vec{a}_0$, яке дорівнює прискоренню ліфта.

Рівняння руху вантажу відносно нерухомої системи відліку запишеться у вигляді:

$$P - T_2 = ma, \quad P - T_2 - ma_0 = ma'.$$

Коли вантаж одержить таке ж прискорення, що й ліфт, рівняння руху набуде вигляду:

$$ma_0 = P - T_2,$$

оскільки $a' = 0$.

Натяг пружини дорівнює $T_2 = P - ma_0$.

Відносно системи відліку, яка пов'язана з ліфтом, вантаж перебуває у стані спокою.

$$\text{Отже: } P - T_2 - ma_0 = 0.$$

Звідси сила натягу пружини дорівнює $T_2 = P - ma_0$.

Зазначимо, що у випадку, коли ліфт рухається з прискоренням, яке дорівнює прискоренню вільного падіння $\vec{a}_0 = \vec{g}$, сила натягу пружини перетворюється у нуль (тіло стає невагомим).

Оскільки в нерухомій системі відліку ліфт, пружина і вантаж рухаються з однаковим прискоренням, то не виникають їх переміщення одне відносно одного, а відповідно, і взаємодії.

У системі, яка пов'язана з ліфтом, поява стану невагомості свідчить про те, що переносне прискорення дорівнює прискоренню сили тяжіння.

Звернемо увагу на наступну особливість сил інерції в неінерціальних системах – особливість, яка відрізняє їх від усіх інших сил: сили інерції не мають протидіючої сили, оскільки не можна вказати тіла, зі сторони якого вони прикладені.

Виникнення сил інерції є також результатом передачі руху, але не даному тілу, а тілам відліку, відносно яких розглядається рух тіла. Сили інерції не можна ставити в один ряд із силами тяжіння, пружності або тертя, які є результатами взаємодії двох тіл. *Сили*

інерції – це не результат дії іншого тіла, а властивість системи відліку. Тому сили інерції іноді називають фіктивними силами.

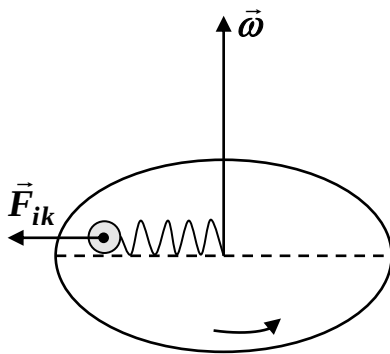
2.3.2. Відцентрова сила інерції. Коріолісова сила інерції

Розглянемо деякі види сил інерції.

1. Якщо неінерціальна система перебуває у поступальному русі з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи відліку, то $-\vec{a}_0$ буде прискоренням тіла в неінерціальній системі відліку. І сила інерції матиме такий вигляд:

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0. \quad (2.39)$$

2. Якщо неінерціальна система перебуває в обертальному русі відносно інерціальної системи відліку, то різні точки неінерціальної системи матимуть різне прискорення і сила інерції залежатиме від положення тіла в обертальній системі відліку.



мал. 2.5

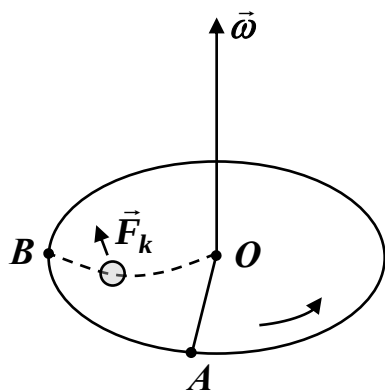
Нехай на диску, що обертається з кутовою швидкістю ω , одночасно обертається наколота на спицю і прикріплена до осі пружиною кулька (мал.2.5). З точки зору спостерігача в інерціальній системі кулька перебуває в обертальному русі під дією доцентрової сили $F = m\omega^2 r$, якою є сила пружності розтягнутої пружини.

З точки зору спостерігача, в неінерціальній системі кулька перебуває в стані спокою, оскільки сила інерції зрівноважується силою пружності розтягнутої пружини. Тут сила інерції направлена по радіусу від центра, її називають *відцентровою силою інерції*. Вона знаходиться за формулою:

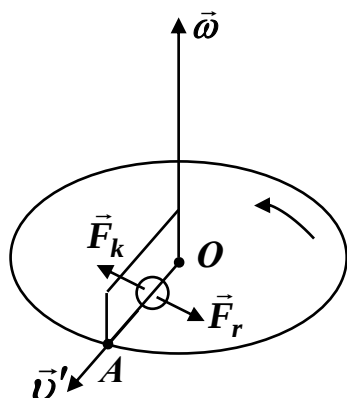
$$F_{in} = m\omega^2 r \quad (2.40)$$

Відцентрова сила інерції в неінерціальній системі діє на тіло незалежно від того, чи воно перебуває у цій системі в стані спокою, чи в стані відносного руху.

3. При русі тіла відносно обертової системи відліку, окрім відцентрової сили інерції, проявляється ще одна сила, яку називають *силою Коріоліса* або *коріолісовою силою інерції*.



мал. 2.6



мал. 2.7

Появу цієї сили можна виявити на такому прикладі. Пустимо в напрямі від O до A кульку із швидкістю $\vec{v}'$ (мал.2.6). Якщо диск не обертається, кулька буде котитися вздовж лінії OA .

Якщо ж диск почне обертатися у напрямі, позначеному стрілкою, то кулька покотиться кривою OB .

Отже, щодо обертової системи відліку кулька веде себе так, наче на неї подіяла сила F_k , перпендикулярна до швидкості $\vec{v}'$ (мал.2.6).

Щоб примусити кульку котитися по обертовому диску вздовж радіуса, треба зробити направляючу, наприклад, у вигляді ребра OA (мал.2.7).

При коченні кульки направляюче ребро діє на неї з деякою силою F_r . Відносно обертової системи (диска)

кулька рухається з постійною за напрямом швидкістю $\vec{v}'$. Це можна формально пояснити тим, що сила F_r зрівноважується прикладеною до кульки силою інерції F_k , яка є перпендикулярною до швидкості кульки $\vec{v}'$. Ця сила F_k і є коріолісовою силою інерції. Її обчислюють за формулою:

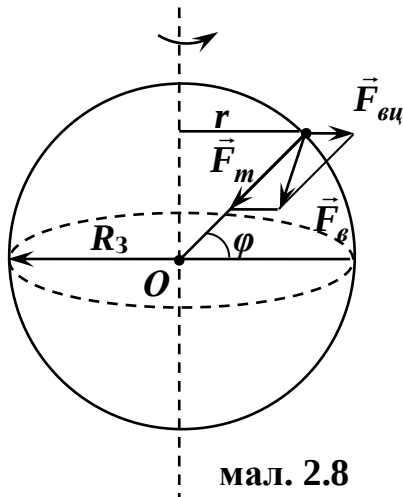
$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}], \quad (2.41)$$

де $\vec{v}'$ – довільна відносна швидкість тіла в обертовій системі відліку, $\vec{\omega}$ – кутова швидкість системи відліку, m – маса тіла.

Внаслідок коріолісової сили, зумовленої добовим обертанням Землі, у ріках, що течуть у північній півкулі, більше підмивається правий берег, зміщуються морські течії, вітри, снаряди.

2.3.3. Прояв відцентрових сил інерції

Відносно інерціальної системи відліку Земля здійснює добове обертання навколо своєї осі. Через те система відліку, пов'язана із Землею, буде неінерціальною. У цій системі одержують цілком реальне значення відцентрова та коріолісова сила інерції (мал.2.8).



Тіло на поверхні Землі зазнає дії двох сил: сили тяжіння

$$F_m = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg_0 \text{ та відцентрової сили}$$

$$F_{сг} = ma = m\omega^2 r.$$

Рівнодійна цих сил, яка називається силою ваги (вага тіла), дорівнює

$$\vec{F}_\phi = \vec{F}_m + \vec{F}_{сг}. \quad (2.42)$$

Якщо тіло вільне, то воно одержить прискорення $\vec{g}_\phi$ і $\vec{F}_\phi = m\vec{g}_\phi$. Тому

$$m\vec{g}_\phi = m\vec{g}_0 + m\vec{a}_{сг}.$$

Отже, спостережуване прискорення вільного падіння на широті ϕ дорівнює:

$$\vec{g}_\phi = \vec{g}_0 + \vec{a}_{сг}. \quad (2.43)$$

Прискорення вільного падіння (мал.2.8) не направлене до центра Землі і не дорівнює тому прискоренню $\vec{g}_0$, яке мало б тіло, якби Земля не оберталася. Найбільша різниця між $\vec{g}_\phi$ та $\vec{g}_0$ є на екваторі:

$$g_\phi = g_0 - a_{сг} \cos \phi, \quad (2.44)$$

або

$$g_\phi = g_0 - \omega^2 R_3 \cos^2 \phi. \quad (2.45)$$

За означенням, вагою називають силу, з якою тіло діє на підвіс або опору, які утримують тіло від падіння. Вага, відповідно, є сила пружності, бо взаємодія тіла з опорою здійснюється через сили пружності.

Однак вагу тіла можна представити через силу тяжіння і відцентрову силу. Ми вже знаємо, що на нерухоме тіло діє сила

$$\vec{F}_{р\text{івн}} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{сг}.$$

З такою ж силою нерухоме тіло діє на підтримуючу його опору. Тому вага тіла $\vec{P}$ на поверхні Землі дорівнює

$$\vec{P} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц}. \quad (2.46)$$

Вага тіла відрізняється від діючої на нього сили тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ як за модулем, так і за напрямом. Оскільки $\vec{F}_{вц}$ залежить від географічної широти, то і вага тіла буде залежати від широти. Вагу тіла можна подати у такому вигляді:

$$\vec{P} = m\vec{g}_\varphi. \quad (2.47)$$

Рівність (2.47) справедлива лише у випадку, коли тіло і опора нерухомі відносно Землі.

У рухомій з прискоренням $\vec{a}$ системі відліку на тіло діють, окрім сили тяжіння, сили інерції, які пов'язані з обертанням Землі ($\vec{F}_{вц}$ і $\vec{F}_k$), та сили інерції $\vec{F}_{ін.пост.}$, зумовлені поступальним рухом системи відліку K' : $\vec{F}_{ін.пост.} = -m\vec{a}'$.

Результуюча цих сил дорівнює

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_{кор.} + \vec{F}_{ін.пост.} \quad (2.48)$$

Тому вага тіла дорівнює

$$\vec{P} = \vec{F}_{рез} = m\vec{g}_\varphi + \vec{F}_{кор.} - m\vec{a}, \quad (2.49)$$

де $m\vec{g}_\varphi = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц}$.

Формула (2.49) визначає вагу тіла в найзагальнішому випадку.

Як було показано вище, сили інерції виникають у прискорених (неінерціальних) системах відліку – як поступальних, так і обертальних. Значення сили інерції визначають як добуток маси тіла на прискорення системи. Характерним у цьому є те, що для тіл різних мас у заданій неінерціальній системі прискорення є однаковим, тобто сили інерції надають різним тілам однакового прискорення.

Відомо, що такі ж властивості притаманні і силам тяжіння. Ці факти дають підставу говорити про еквівалентність сил інерції та сил тяжіння. Якщо інертні та гравітаційні властивості тіл взаємопов'язані, то повинні існувати більш загальні фізичні закони, які відображали б ці зв'язки, тобто включали б в себе як закони руху, так і закон тяжіння. Саме ці завдання спонукали А. Ейнштейна до пошуку загальної теорії відносності.

2.4. Реактивний рух. Рух тіла із змінною масою. Рівняння Мещерського та Цюлковського

2.4.1. Реактивний рух

Під *реактивним рухом* розуміють рух тіл, що виникає при відокремленні від тіла частини його маси з деякою відносною швидкістю.

Нехай людина перебуває на відкритому візочку, завантаженому камінцями. Припустимо, що підлога є горизонтальна (якою рухається візочок), колеса мають дуже малу масу і рухаються без тертя. Людина бере камінь і кидає його назад. У результаті цього візочок (з людиною і камінням) набуває деякої швидкості, спрямованої вперед. Рух візочка можна розглядати як прояв закону збереження горизонтальної складової імпульсу системи. Одна частина системи (камінь) у результаті дії внутрішніх сил одержала деякий імпульс в одну сторону, інша її частина (візочок) – одержує такий самий імпульс у протилежну сторону.

Нас зараз цікавить тільки рух візочка. Тому візочок у цьому випадку вигідно розглядати як незамкнуту систему, на яку діє зовнішня сила зі сторони каменя, що відокремився, – реакція каменя (під час кидання рука людини діє на камінь, а камінь за третім законом Ньютона діє на руку з такою ж за модулем силою, але направленою у протилежний бік).

Силу реакції викинутого каменя, а в загальному випадку відокремленого тіла або частинки, називають *реактивною силою*.

Отже, рух візочка, що виник при киданні каменя, можна пояснити як результат дії реактивної сили. Якщо кидати камені один за одним, то на візочок буде діяти реактивна сила, що пульсує з часом. У цьому випадку говорять про середнє значення реактивної сили.

Викидаючи камінь, ми зменшуємо масу візочка. Можна встановити, що чим частіше викидати камені, тим більшою буде середня реактивна сила, але й тим швидше буде зменшуватися маса візочка. Реактивна сила залежить від швидкості зменшення маси. Відомо, що величина реактивної сили також залежить від відносної швидкості каменів, що викидаються. Якщо камені кидати з нульовою відносною швидкістю (тобто випускати з рук, не надаючи їм

імпульсу), то на візочок жодна реактивна сила не буде діяти. Реактивна сила в розглянутому прикладі є пульсуючою. Але її можна зробити сталою, якщо відокремлення частинок здійснювати не порціями, а неперервно. Цього досягають у сучасних ракетах, викидаючи неперервним потоком газ – продукт згоряння спеціального палива.

Варто звернути увагу на одну важливу особливість динаміки реактивного руху: реактивна сила діє на тіло, маса якого постійно змінюється (зменшується або збільшується). Рух таких тіл вивчає спеціальний розділ механіки – динаміка тіл, маса яких змінюється.

2.4.2. Рух тіла із змінною масою.

Рівняння Мещерського та Ціолковського

У природі й сучасній техніці часто трапляються рухи тіл, маса яких змінюється з часом.

Для одержання основного рівняння руху тіла змінної маси будемо розглядати ракету як достатньо мале тіло, положення центра ваги якого не змінюється у процесі згоряння палива. У такому випадку можна вважати ракету матеріальною точкою змінної маси, яка збігається з центром ваги ракети.

Будемо вважати, що викинута з ракети частина газу dM взаємодіє з ракетою M тільки в момент безпосереднього контакту. Нехай зміна маси ракети M відбувається неперервно, без стрибків (не розглядаємо багатоступеневі ракети, маси яких змінюються стрибкоподібно). Це припущення дає можливість вважати, що існує похідна за часом від маси ракети.

Розглянемо рух ракети детальніше. У момент часу t маса ракети дорівнює M , а її швидкість відносно нерухомої системи координат $\vec{v}$. Припустимо, що за час dt від ракети відокремилася частинка масою $-dM$ зі швидкістю (відносно тієї ж системи), яка дорівнює $\vec{u}$. Знак “мінус” перед приростом маси вказує на те, що цей приріст від’ємний, маса ракети зменшується. Нехай рівнодійна зовнішніх сил $\vec{F}$ (сила тяжіння і опір середовища). У момент відокремлення частинки масою $-dM$ між нею і ракетою діє реактивна сила $\vec{F}_p$. Ця сила для системи ракета-частинка є внутрішньою.

Використавши закон зміни імпульсу системи ракета-частинка і відкинувши члени другого порядку малості $d\vec{M} \cdot d\vec{v}$, одержуємо основне рівняння руху точки змінної маси:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} = \vec{F} + \vec{w} \frac{dM}{dt}, \quad (2.50)$$

де $\vec{w}$ – відносна швидкість.

Це рівняння називається *рівнянням Мещерського*. Другий член правої частини рівняння (2.50) має назву *реактивної сили* ($\vec{F}_p = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt}$), яка діє на масу M зі сторони частинки, що вилітає.

Отже, для будь-якого моменту часу добуток маси тіла на його прискорення дорівнює векторній сумі рівнодійної прикладених до тіла зовнішніх сил і реактивної сили.

Якщо відносна швидкість $\vec{w}$ частинок, що покидають ракету дорівнює нулю ($\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$), то рівняння руху точки змінної маси має формально такий самий вигляд, що і для точки постійної маси:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.51)$$

Але в цьому випадку маса M є функцією часу t .

Формула, за якою можна обчислювати швидкість руху тіла змінної маси:

$$v = v_0 + w \ln \frac{M_0}{M}, \quad (2.52)$$

де v_0 – початкова швидкість, w – відносна швидкість, M і M_0 – початкова та кінцева маси тіла.

Якщо маса ракети в кінці процесу горіння M_p , а втрачена маса (маса палива) – m , то при нульовій початковій швидкості ($\vec{v}_0 = \vec{0}$) для розрахунку швидкості в кінці процесу горіння $\vec{v}_1$ одержуємо вираз:

$$v_1 = w \ln \frac{M_p + m}{M_p} \approx 2.3w \lg(1 + \frac{m}{M_p}) \approx 2.3w \lg(1 + z), \quad (2.53)$$

де $z = \frac{m}{M_p}$ – число Ціолковського.

З формули (2.53) випливає:

- 1) швидкість тіла змінної маси в кінці активної ділянки тим більша, чим більша швидкість викидання частинок;

- 2) швидкість в кінці активної ділянки тим більша, чим більше число Ціолковського;
- 3) швидкість тіл змінної маси в кінці активної ділянки не залежить від закону зміни маси;
- 4) для одержання великих швидкостей тіла змінної маси в кінці активної ділянки вигідніше йти шляхом збільшення відносної швидкості викидання частинок, ніж шляхом збільшення запасів палива.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте перший закон Ньютона. Який фізичний зміст цього закону?
2. Які системи відліку називають інерціальними, які неінерціальними?
3. Чому система відліку, пов'язана із Землею, строго кажучи, не є інерціальною?
4. Що таке інертність тіла? Інерція?
5. Яка фізична величина є мірою інертності тіла?
6. Чому на практиці тіло, залишене само на себе, не зберігає як завгодно довго свою швидкість?
7. Який зміст має поняття сили в ньютонівській механіці?
8. Яка різниця між ньютонівськими силами та силами інерції?
9. Сформулюйте другий закон Ньютона. Запишіть формули другого закону Ньютона (які ви знаєте) і поясніть їх.
10. У чому полягає принцип незалежної дії сил? Які наслідки випливають з нього?
11. Сформулюйте третій закон Ньютона. Як слід розуміти рівність $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$?
12. Що називають імпульсом тіла? Сформулюйте закон збереження імпульсу та запишіть формули.
13. Що називають імпульсом сили?
14. Доведіть, що в замкнутій системі сума внутрішніх сил дорівнює нулю.
15. Що таке центр мас (інерції) системи?

16. Сформулюйте закон збереження імпульсу системи через рух центру мас системи.
17. Який рух називають реактивним?
18. Запишіть рівняння руху точки, маса якої змінюється. Поясніть його.
19. Чому не можна досягнути космічних швидкостей за допомогою одноступеневої ракети?
20. У шахту рівноприскорено опускається вантаж масою 280 кг. За перших 10 с він проходить 35 м. Знайти силу натягу канату, на якому висить вантаж.

Відповідь: $2,53 \cdot 10^3 \text{ Н}$

21. До одного кінця шнура, перекинутого через блок, прив'язали вантаж масою 0,8 кг. З яким прискоренням буде підніматися вантаж, якщо другий кінець шнура тягнути з силою 9,8 Н? Якщо до нього прив'язати тягарець масою 1 кг та дати можливість йому опускатися?

Відповідь: $2,45 \text{ м/с}^2$; $1,1 \text{ м/с}^2$

22. На нитці, перекинутій через блок, зліва підвішено вантаж масою 11 г, а справа – масою 13 г. Уся система вантажів рухається з прискоренням $81,8 \text{ см/с}^2$. Знайти прискорення сили тяжіння для даного місця.

Відповідь: $981,6 \text{ см/с}^2$

ТЕМА 3. СИЛИ В МЕХАНІЦІ

ПЛАН

1. Пружні сили.
2. Сили тертя.
3. Сила тяжіння.

3.1. Пружні сили

3.1.1. *Поняття про пружне тіло. Закон Гука*

Під дією сил, які діють на тіло змінюється форма тіла. Тверде тіло деформується. У багатьох задачах механіки необхідно знати закони, які пов'язують дію сил на тіло з тими деформаціями, що викликаються цими силами.

Насамперед зауважимо, що деформації тіла існують завжди, коли на тіло діють сили, незалежно від того, чи воно нерухоме (статика), чи перебуває у стані нерівномірного руху (динаміка).

Сили, які виникають між різними частинами деформованого тіла називаються внутрішніми (на відміну від зовнішніх сил).

Тіла, в яких після припинення дії зовнішніх сил деформація цілком зникає і попередня форма тіла та його об'єм цілком відновлюється, називаються абсолютно пружними, а сама деформація – пружною.

Тіла, які після припинення дії зовнішніх сил не відновлюють свою початкову форму і об'єм називаються *непружними* або *пластичними*; відповідно їх деформацію називають непружною, пластичною.

Властивість тіл відновлювати форму й об'єм після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю. Розрізняють об'ємну пружність і пружність форми.

Об'ємна пружність – універсальна властивість усіх тіл, включаючи рідини та газу.

Пружність форми – властивість багатьох твердих тіл, перш за все кристалічних.

У природі, звичайно, нема абсолютно пружних і абсолютно непружних тіл. Але є багато тіл, залишкові деформації у яких настільки малі, що ними можна знехтувати. З іншого боку, є такі тіла, які уже при малих деформаціях поведуться як абсолютно непружні.

Внутрішні сили, які виникають при деформаціях пружних і непружних тіл, суттєво відрізняються між собою. У пружних тілах вони визначаються величиною і видом деформації і при припиненні дії зовнішніх сил повертають тілу його початкову форму й об'єм. У непружних тілах внутрішні сили залежать від швидкості зміни деформації і при припиненні дії зовнішніх сил зникають, не повертаючи тілу його попередньої форми.

Внутрішні сили, які виникають у пружних тілах при невеликих деформаціях, називають пружними.

Внутрішні сили в непружних тілах належать до сил, які називаються *силами в'язкості* або *силами внутрішнього тертя*.

А. Види пружних деформацій

Існує багато видів пружних деформацій:

- односторонній розтяг (стиск);
- всесторонній розтяг (стиск);
- згин;
- зсув;
- кручення тощо.

Але не всі види деформацій є незалежними, багато з них можна звести до сукупності невеликого числа простіших деформацій. Так, згин стержня можна звести до деформації неоднорідного розтягу і стиску; кручення – до неоднорідного зсуву; зсув – до неоднорідного розтягу і стиску в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Відомо, що будь-яку пружну деформацію можна звести до сукупності двох деформацій, які одержали назву головних, розтягу (або стиску) і зсуву.

Деформації, які не змінюються у часі, називаються стаціонарними. Вони поділяються на два типи: статичні та динамічні. *Статичною* називають деформацію нерухомого тіла або тіла, що рухається рівномірно, а *динамічною* – деформацію тіла, яке рухається з прискоренням.

Стаціонарні деформації можуть бути однорідні та неоднорідні. *Однорідною* називають деформацію, при якій пружна напруга розподілена по всьому об'єму рівномірно. Якщо пружна напруга розподілена по об'єму нерівномірно, то таку деформацію називають *неоднорідною* (згин, кручення).

Динамічні деформації завжди неоднорідні, бо біля точок прикладання сили вони завжди більші.

Б. Закон Гука

При будь-якій деформації (простій чи складній) у тілі виникають пружні сили. Роберт Гук (англійський фізик, сучасник Ньютона) ще в 1675 році встановив, що величина і напрямки сил пружності певним чином залежать як від виду, так і від величини деформації.

Встановлений Гуком закон полягає у такому:

а) при будь-якій малій деформації сила пружності пропорційна величині деформації;

б) малі деформації пропорційні прикладеним силам.

Цей закон записують у такому вигляді:

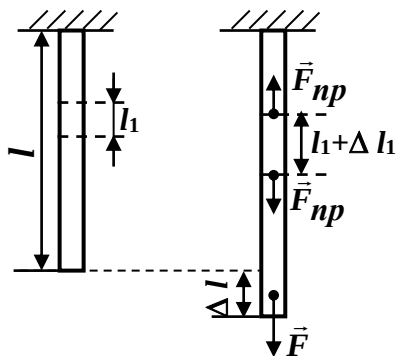
$$F_{np} = -kx, \quad (3.1)$$

де k – коефіцієнт жорсткості (коефіцієнт пропорційності), x – величина деформації.

3.1.2. Сили пружності та закон Гука

при деформації одностороннього розтягу (стиску)

А. Характеристика деформації. Закон Гука



мал. 3.1

Деформація одностороннього розтягу виникає, наприклад, у тонкому стержні, один кінець якого закріплений, а до другого прикладено зовнішню силу $\vec{F}$, яка намагається розтягнути стержень (мал. 3.1).

Під дією прикладеної сили стержень видовжується на величину Δl .

Кількісною характеристикою деформації може служити абсолютне видовження Δl або відносне видовження $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$. Відносне видовження – безрозмірна величина, яка показує наскільки збільшилася або зменшилася початкова довжина стержня. Важливо пам'ятати, якщо весь стержень має відносне видовження $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, то при однорідній деформації кожен елемент тіла довільної довжини має точно таке саме відносне видовження:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \dots = \frac{\Delta l_n}{l_n}. \quad (3.2)$$

Сила пружності $\vec{F}_{np}$, що виникає у розтягнутому стержні, дорівнює зовнішній розтягуючій силі $\vec{F}$. З умови рівноваги стержня маємо:

$$\vec{F}_{np} = -\vec{F}. \quad (3.3)$$

Механічною напругою σ називають величину, яка визначається співвідношенням:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (3.4)$$

де S – площа поперечного перерізу стержня.

Навантажуючи нижній кінець стержня вантажами і вимірюючи при кожному вантажі абсолютне видовження, одержуємо, що

$$\Delta l = \alpha \frac{F}{S} l, \quad (3.5)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який залежить від роду матеріалу. Його називають *коефіцієнтом пружності*.

Використаємо таку заміну: $\frac{1}{\alpha} = E$, $F = -F_{np}$, тоді (3.5)

перепишеться так:

$$F_{np} = -\frac{E \cdot S}{l} \Delta l = -k \Delta l, \quad (3.6)$$

де $k = \frac{E \cdot S}{l}$, E – модуль Юнга (модуль пружності).

Співвідношення (3.6) є одним із математичних записів закону Гука для деформації розтягу. Знак “мінус” у формулі (3.6) показує, що напрям сили пружності F_{np} протилежний до напрямку розтягу.

Коефіцієнт пропорційності k для даного тіла залежить від його розмірів (S і l) і модуля пружності матеріалу E .

Коефіцієнт пружності k називають коефіцієнтом сили пружності (для пружини – жорсткістю).

Б. Коефіцієнт пружності та модуль пружності

Повернемося до співвідношення (3.5):

$$\Delta l = \alpha \frac{F}{S} l.$$

Визначимо з нього α :

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l} \frac{S}{F} = \frac{\frac{\Delta l}{l}}{\frac{F}{S}} = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (3.7)$$

Але

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Із співвідношення (3.7) випливає, що коефіцієнт пружності α чисельно дорівнює відносному видовженню ε , яке виникає під дією механічної напруги, що дорівнює одиниці.

Із (3.8) маємо, що модуль Юнга E чисельно дорівнює механічній напрузі, яка створює відносне видовження, рівне одиниці. Якщо $\Delta l = l$, то відносне видовження ε дорівнює одиниці. Отже, модуль Юнга чисельно дорівнює механічній напрузі σ , яка розтягує стержень вдвічі.

Для деформації розтягу закон Гука можна записати ще і так:

$$\sigma_{np} = -E \frac{\Delta l}{l} = -E \varepsilon. \quad (3.9)$$

Отже, при малих деформаціях пружна напруга, яка виникає в тілі, прямо пропорційна відносній деформації.

В. Коефіцієнт поперечного стиску

Дослід показує, що деформація повздовжнього розтягу супроводжується зменшенням поперечного розміру зразка, а деформація стиску – збільшенням поперечного розміру.

Зміна поперечних розмірів тіла при його розтягу або стиску характеризується відносним поперечним стиском (чи відносним поперечним розтягом) ε_n :

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta d}{d}, \quad (3.10)$$

де d – поперечний розмір тіла до деформації, Δd – абсолютне значення зміни поперечного розміру тіла. Величину ε_n також називають *коефіцієнтом поперечного стиску*.

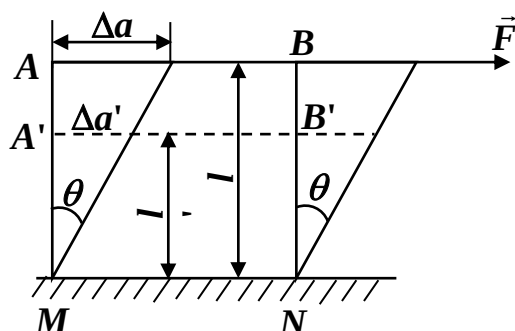
Дослід показує, що для всіх тіл з одного і того ж матеріалу відношення коефіцієнта поперечного стиску до відносної повздовжньої деформації $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ є величина стала:

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \mu. \quad (3.11)$$

Цю безрозмірну постійну μ називають *коефіцієнтом Пуассона*. Коефіцієнт Пуассона залежить від матеріалу та поряд з модулем Юнга є важливою характеристикою пружних властивостей матеріалу. Це означає, що пружні сили, які виникають при будь-якій складній деформації, будуть певним чином залежати тільки від двох модулів.

Дослід показує, що для всіх відомих матеріалів μ не перевищує 0,5.

3.1.3. Пружні сили та закон Гука при деформації зсуву



мал. 3.2

Деформацію зсуву можна одержати в паралелепіпеді, якщо одну його грань закріпити, а до протилежної прикласти силу $\vec{F}$, яка лежить у площині цієї грані (мал. 3.2).

Величина Δa є абсолютне зміщення (зсув) шару AB відносно нерухомого (закріпленого) шару MN .

На малюнку бачимо, що абсолютний зсув неоднаковий для різних шарів паралелепіпеда: він більший для тих шарів, які розміщені даліше від нерухомого шару.

Відношення абсолютного зсуву Δa до віддалі l між зсунутим і нерухомим шаром називають відносним зсувом. Його позначають через γ . Відносний зсув γ однаковий для всіх шарів і дорівнює тангенсу кута зсуву θ :

$$\gamma = \frac{\Delta a}{l} = \frac{\Delta a'}{l'} = \dots = \operatorname{tg} \theta. \quad (3.12)$$

При малих кутах зсуву $\operatorname{tg} \theta = 0$, отже, $\gamma = 0$: при малій деформації відносний зсув дорівнює вимірюваному в радіанах куту зсуву.

При зсуві всередині тіла виникають пружні сили, які при статичній деформації зрівноважують зовнішню силу:

$$F_{np} = -F$$

Встановлено, що при малих деформаціях абсолютний зсув:

$$\Delta a = \beta l \frac{F}{S}, \quad (3.13)$$

де β – коефіцієнт пропорційності, що має назву коефіцієнта зсуву, l – віддаль від зсунутої грані до нерухомої, F – сколююча сила, S – площа шару, що зазнав зсуву.

Дослід показує, що коефіцієнт зсуву β залежить тільки від матеріалу зразка і є кількісною характеристикою пружних властивостей тіла до деформації зсуву.

На практиці частіше використовують величину N , яку називають модулем зсуву:

$$N = \frac{1}{\beta}.$$

Відношення $\frac{F}{S} = \tau$ називають сколюючою напругою. Це відношення дорівнює силі, яка діє на одиницю площі поверхні та направлена по дотичній (тангенціально) до цієї поверхні.

Взявши до уваги, що $\frac{\Delta a}{l} = \gamma$, рівняння (3.13) запишеться так:

$$\gamma = \beta \tau. \quad (3.14)$$

Отже, відносний зсув прямо пропорційний сколюючій напрузі.

При статичній і однорідній деформації пружна тангенціальна напруга $\frac{F_{np}}{S} = \tau_{np}$, яка виникає в тілі, буде за модулем дорівнювати (а за напрямом – протилежна) сколюючій напрузі:

$$\tau_{np} = -\tau.$$

Тоді можна записати, що

$$\tau_{np} = -N\gamma = -\frac{1}{\beta}\gamma. \quad (3.15)$$

Отже, при невеликих деформаціях пружна тангенціальна напруга прямо пропорційна до відносного зсуву.

Із співвідношення (3.14) і (3.15) випливає фізичний зміст коефіцієнта та модуля зсуву:

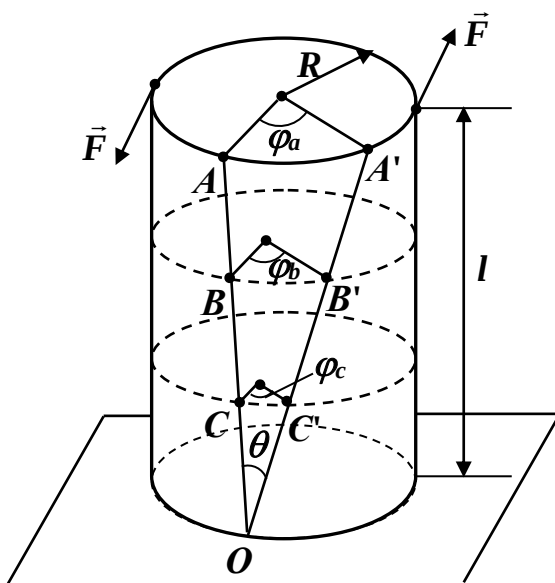
- коефіцієнт зсуву чисельно дорівнює відносному зсуву, який одержує тіло при дії на нього одиничної сколюючої напруги ($1 \frac{H}{m^2}$ або 1 Па);

- модуль зсуву дорівнює тангенціальній напрузі, яка виникає у тілі при куті зсуву $\theta = 45^\circ (\text{tg} 45^\circ = 1)$.

У теорії пружності показано, що модулі E , μ , N не є незалежними. Вони пов'язані таким співвідношенням:

$$N = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.16)$$

3.1.4. Сили пружності і закон Гука при деформації кручення



мал. 3.3

Розглянутий вище зсув прямокутного бруска є однорідною деформацією, тобто відносний зсув γ для всіх паралельних шарів однаковий.

Кручення – деформація неоднорідного зсуву (мал. 3.3). Така деформація виникає у стержні, якщо закріпити його один кінець і закручувати другий.

При цьому різні перерізи стержня повертаються на різні кути відносно закріпленої основи стержня ($\varphi_a > \varphi_e > \varphi_c$). При крученні об'єм тіла не змінюється, так як не змінюється ні діаметр, ні довжина стержня.

Нехай верхній переріз повернувся на кут φ_a . Тоді кожна із твірних циліндричної поверхні (наприклад, твірна OA) повернеться на кут θ , який називається кутом зсуву або кутом кручення.

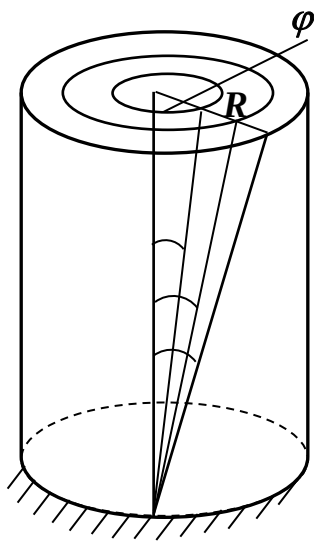
При малих зсувах відносний зсув дорівнює:

$$\gamma = \operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{|AA'|}{l} = \frac{R\varphi}{l}.$$

Якщо виділити в стержні циліндричну поверхню меншого радіуса ($r < R$), то її елементи зазнають зсуву

$$\theta_r = \frac{r\varphi}{l} \quad (3.17)$$

меншого, ніж елементи на поверхні самого стержня (мал. 3.4).



мал. 3.4

Отже, при крученні елементи стержня зазнають тим більшого зсуву, чим далі від осі вони розміщені.

Деформацію такого виду називають неоднорідною.

Встановлено, що кут закручування φ верхнього перерізу пропорційний силі $\vec{F}$, яка прикладена по дотичній до поверхні стержня (циліндра) в площині його перерізу, і радіусу стержня:

$$\varphi \sim F \cdot R.$$

Увівши коефіцієнт пропорційності, запишемо:

$$\varphi = d \cdot M, \quad (3.18)$$

де d – коефіцієнт пружності при деформації кручення.

При закручуванні всередині стержня виникають пружні сили, які створюють пружний момент M_{np} , що зрівноважує момент зовнішніх сил: $M_{np} = -M$.

Із (3.18) маємо, що:

$$M_{np} = -D \cdot \varphi, \quad (3.19)$$

де $D = \frac{1}{d}$ – коефіцієнт жорсткості стержня, модуль кручення.

Модуль кручення D пов'язаний із модулем зсуву N і розмірами стержня таким співвідношенням:

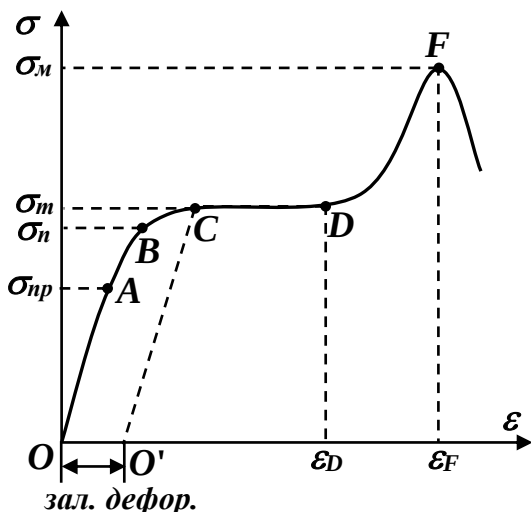
$$D = \frac{\pi N R^4}{2l}, \quad (3.20)$$

де R – радіус стержня, l – його довжина.

З формули (3.20) випливає, що із збільшенням радіуса стержня модуль кручення D різко зростає ($D \sim R^4$). Тому товсті (і короткі) стержні трудно піддаються закручуванню: уже при малих кутах потрібні великі зовнішні сили.

3.1.5. Границі пружності та міцності

Отже, пружні деформації будь-якого виду підлягають закону Гука. Але цей закон має місце тільки в певній області: *коли деформація лежить нижче деякої границі, яка визначається експериментально.*



мал. 3.5

Розглянемо це питання на прикладі деформації одностороннього розтягу.

Результати вимірювань подано на мал. 3.5. По осі абсцис відкладено відносний розтяг $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, по осі ординат – внутрішню пружну напругу σ_{np} , яка за модулем дорівнює зовнішній напрузі, що розтягує стержень.

На графіку бачимо, що лінійна залежність σ від ε , яка відповідає закону Гука, виконується лише в певних границях зміни деформації ε . Ця границя для багатьох тіл невелика. Так, для сталі $\varepsilon_{zp} \approx 10^{-3}$; для інших матеріалів ε_{zp} ще менше.

Граничне значення напруги, при якому ще виконується лінійна залежність σ від ε , називається *границею пропорційності* σ_{np} .

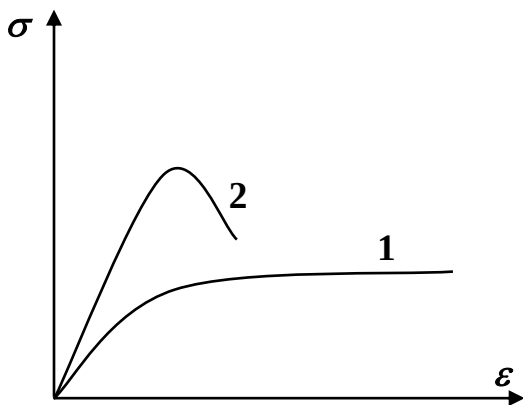
Граничне значення напруги, при якому ще не виникають залишкові деформації, називається *границею пружності* – σ_n ($\sigma_{np} \approx \sigma_n$).

Напругу σ_m , при якій залишкова деформація досягає умовно вибраної величини (0,002), називається *границею текучості*. Ділянка графіка CD показує, що деформація зростає без збільшення напруги, тіло ніби “тече”. Область CD має назву пластичних деформацій. На цьому виді деформації ґрунтуються такі способи обробки металів, як ковка, пресування, прокат, волочіння, чеканка.

Для деформацій, більших ніж ε_D , пружні сили знову зростають, тобто тіло знову починає протидіяти розтягу.

Максимальну напругу, яка виникає в тілі до його руйнування, називають *границею міцності* σ_m .

При деформації, більшій ніж ε_F , пружні сили різко зменшуються, і зовнішня сила не врівноважується, тіло безперешкодно розтягується і швидко розривається (руйнується).



мал. 3.6

Матеріали, які мають область текучості CD значного розміру (крива 1, мал. 3.6.), називаються *в'язкими* або *пластичними* (глина, вар, свинець тощо).

Матеріали, у яких область текучості практично відсутня (крива 2, мал. 3.6.), називаються *крихкими* (скло, бетон, фарфор тощо).

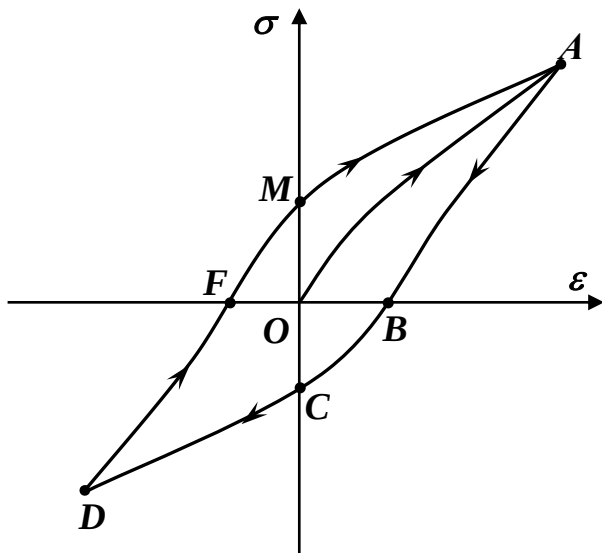
Потрібно пам'ятати, що властивості тіл залежать від зовнішніх факторів (температура, тривалість дії сили).

3.1.6. Пружна післядія і пружний гістерезис

Реальні тверді тіла виявляють досить складну залежність деформації від часу. Ця залежність не міститься у законі Гука, і ми її до цього часу не враховували.

Дослід показує, що після початку дії зовнішньої сили деформація досягає відповідного значення не відразу (миттєво), а лише через певний проміжок часу.

Після припинення дії зовнішньої сили деформація зникає також не миттєво: спочатку вона зменшується до деякої малої величини, а в наступні моменти часу вона зменшується дуже повільно. Тіло повільно відновлює свою форму. Це явище називають *пружною післядією*.



мал. 3.7

Якщо взяти зразок, який раніше не зазнавав деформації, то при розтягу в ньому виникає напруга σ , яка змінюється із збільшенням ϵ вздовж кривої OA (мал. 3.7).

Після досягнення стану A будемо поступово зменшувати ϵ . При цьому графік залежності $\sigma=f(\epsilon)$ піде нижче від кривої OA, і зразок перейде в стан B ($\sigma=0$), при якому він зберігає частину одержаної ним деформації. Ділянка OB відповідає залишковій деформації.

Щоб її ліквідувати, тіло треба стиснути, досягнути стану, що відповідає точці C. У цьому стані тіло повністю відновило свою форму ($\epsilon=0$), але має внутрішню напругу, величина якої відповідає відрізку OC.

Якщо продовжувати стиск, то залежність $\sigma=f(\epsilon)$ піде по кривій CD. Після досягнення зразком стану D почнемо поступово зменшувати зовнішнє зусилля, довівши його до нуля (крива DF). У стані F тіло має залишкову деформацію (стиску) OF. Для її ліквідації

тіло треба розтягнути (т. M , $\varepsilon = 0$). Здійснивши розтяг даліше, переведемо зразок по кривій MA у стан A . Наступне зменшення розтягу тіла піде уже по кривій AB .

При зміні зовнішнього навантаження залежність $\sigma=f(\varepsilon)$ буде виражатися петлею $ABCD FMA$ (мал. 3.7), яка називається *петлею пружного гістерезису*. Гістерезис з грецького – відставання.

Площа петлі гістерезису пропорційна енергії, що виділяється у тілі (нагрівання), при кожному циклі періодично змінної деформації. Що більша площа петлі, то тіло сильніше нагрівається. Для зменшення нагрівання відповідальні деталі машин виготовляють із матеріалів, які мають вузьку петлю гістерезису (пружини, ресори тощо).

Пояснення пружної післядії і гістерезису потрібно шукати в тому, що всі тіла (навіть монокристали) складаються із дуже маленьких областей, які дотикаються одна до одної. Ці області при пружній деформації можуть зміщуватися, повертатися і при певних умовах зачіплятися одна за одну, перекошуючись і розтягуючись. Звільнення від зачеплень відбувається поступово, внаслідок безладного теплового руху. Воно відбувається інтенсивніше при високих температурах. Зміщуючись і повертаючись, такі області труться одна до одної, внаслідок чого виділяється тепло – і тіло нагрівається.

3.1.7. Енергія пружної деформації

Зовнішня сила, переміщуючи частини деформованого тіла, виконує деяку роботу проти внутрішніх сил, які виникають в тілі під час деформації. Якщо тіло абсолютно пружне, то робота зовнішньої сили дорівнює роботі внутрішніх сил (пружних сил).

У реальних тілах частина внутрішніх сил має характер внутрішнього тертя. Тому робота деформуючої сили частково йде на необоротне збільшення внутрішньої, а не потенціальної енергії тіла. Але при деформаціях, для яких справджується закон Гука, можна вважати, що вся робота зовнішніх сил і для реальних тіл йде на збільшення тільки їх потенціальної енергії.

Знайдемо потенціальну енергію розтягнутої пружини. Сила, яка розтягує пружину, прямо пропорційна її видовженню:

$$F = k x. \quad (3.21)$$

Тоді елементарна робота буде:

$$dA = F dx. \quad (3.22)$$

Для знаходження певної роботи A проінтегруємо вираз (3.22):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = k \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}. \quad (3.23)$$

На таку величину зміниться потенціальна енергія розтягнутої пружини.

Якщо вважати, що в нерозтягнутому стані ($x_1=0$) потенціальна енергія пружини дорівнює нулю, то потенціальна енергія розтягнутої пружини буде:

$$U = k \frac{x^2}{2}. \quad (3.24)$$

Виділимо в деформованому тілі куб, ребро якого дорівнює l , тоді елементарна робота:

$$\Delta A = F \Delta x = \sigma S \Delta x = \sigma S \Delta x \frac{l}{l} = \sigma l^3 \frac{\Delta x}{l} = \sigma l^3 \Delta \varepsilon. \quad (3.25)$$

Тоді повну роботу сили F , яка викликала деформацію ε , знайдемо, проінтегрувавши вираз (3.25):

$$A = \int_x^x F dx = l^3 \int_0^l \sigma d\varepsilon. \quad (3.26)$$

Взявши до уваги, що $\sigma_{np} = -E\varepsilon$ ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), запишемо:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}, \text{ бо } E \text{ — модуль Юнга, стала величина.}$$

Тоді:

$$A = l^3 \int_0^\sigma \sigma \frac{d\sigma}{E} = \frac{l^3}{E} \int_0^\sigma \sigma d\sigma = \frac{l^3}{E} \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2 l^3}{2E},$$

якщо $l^3 = V$ (об'єм тіла), то

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (3.27)$$

За рахунок роботи деформуючих сил пружно деформоване тіло має енергію:

$$U = A = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (3.27')$$

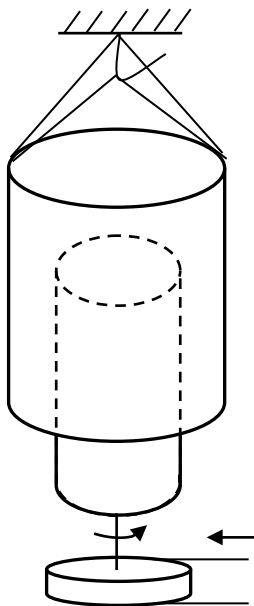
3.2. Сили тертя у механіці

3.2.1. Сили тертя

При механічних процесах завжди відбувається більшою чи меншою мірою перетворення механічного руху (на теплову форму руху, найчастіше). У цьому випадку взаємодія між тілами має назву сил тертя.

Досліди з рухом тіл, які стикаються (тверді з твердими, тверді з рідинами чи газами, рідкі в газах тощо) з різним станом поверхонь зіткнення, показують, що сили, які проявляються при відносному переміщенню тіл, що стикаються, направлені проти вектора відносної швидкості та тангенціальні до поверхні стикання. При цьому завжди відбувається нагрівання взаємодіючих тіл.

Отже, силами тертя називають тангенціальні взаємодії, що виникають між тілами, які перебувають у безпосередньому контакті при їх відносному переміщенні.



мал. 3.8

Сили тертя, які виникають між поверхнями твердих тіл, при їх відносному переміщенні називають силами зовнішнього (сухого) тертя. Сили тертя виникають і при відносному переміщенні частин одного і того самого тіла.

Розглянемо два циліндри, що на мал. 3.8. Примусимо внутрішній циліндр обертатися. Через деякий час зовнішній циліндр повернеться на деякий кут у напрямку обертання внутрішнього циліндра і залишиться в цьому положенні.

Причина цього явища у наступному: внутрішній циліндр приводить в рух шар повітря, яке безпосередньо прилягає до нього.

Наступний за ним нерухомий шар зазнає переміщення відносно першого шару. При цьому виникає сила тертя, яка приводить у рух нерухомий шар, потім наступний і т.д., аж доки не почнеться рухатися шар, що прилягає до зовнішнього циліндра, і не почне

рухати його. Коли сила пружності, яка виникає при закручуванні нитки, зрівноважить силу тертя, зовнішній циліндр зупиниться.

Сила тертя, яка виникає між рухомими шарами одного і того ж тіла (газу, рідини), називається внутрішнім тертям.

У реальних рухах завжди виникають сили тертя більшої або меншої величини. Рівняння другого закону динаміки з урахуванням сил тертя записується у вигляді:

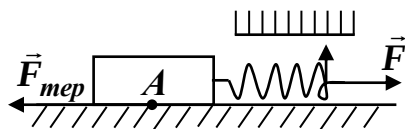
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}}. \quad (3.28)$$

Із (3.28) випливає, що для рівномірного руху тіла в реальних умовах до нього треба прикласти силу $\vec{F}$, яка зрівноважить силу тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. Підкреслюємо, що сила тертя завжди має напрям, протилежний до руху тіла.

3.2.2. Сухе тертя

Розрізняють три види сухого тертя: тертя спокою, тертя ковзання і тертя кочення.

А. Тертя спокою



мал. 3.9

Покладемо масивний брусок на горизонтальну поверхню (мал. 3.9) і попробуємо зсунути його з місця, приклавши до нього в горизонтальному напрямку силу $\vec{F}$. Дослід показує, що брусок залишається у стані спокою навіть тоді, коли на нього діє зі сторони

нитки деяка сила. Це можливе тоді, коли на брусок, окрім натягу нитки, діє ще одна сила. Ця сила, яка виникає у результаті особливої взаємодії бруска з поверхнею стола, дорівнює за модулем натягу нитки і напрямлена в протилежний бік. Цю силу називають *силою тертя спокою*.

При збільшенні натягу нитки брусок залишається у стані спокою до тих пір, доки натяг не досягне певного значення, при якому брусок починає рівномірно ковзати по поверхні стола:

$$0 \leq \vec{F}_{\text{тр}} \leq \vec{F}_{\text{тр.мак}} = -\vec{F}_{\text{нат.нит}}. \quad (3.29)$$

Силу тертя спокою, рівну за модулем тій зовнішній силі, при якій починається ковзання даного тіла по поверхні іншого, називають максимальною силою тертя спокою. Сила, яка менша за модулем від максимальної сили тертя спокою, не викликає ковзання. Ця особливість властива тільки сухому тертю. У випадку рідинного тертя ніякого порогу для зовнішньої сили не існує.

Встановимо від чого залежить максимальна сила тертя спокою. Для цього будемо змінювати силу, яка притискує брусок до поверхні стола, будемо використовувати бруски з різних матеріалів або з одного матеріалу, але з різною обробкою його поверхонь. Закономірності, які при цих експериментах виникали, побачили ще учені Амонтон (франц. фізик) у 1699 році і незалежно від нього Кулон (франц. фізик) у 1785 році.

Було встановлено таке:

1) максимальна сила тертя спокою пропорційна силі нормального тиску:

$$F_{\text{тер.мак}} \sim N,$$

де N – сила нормального тиску.

Увівши безрозмірний коефіцієнт пропорційності k , названий коефіцієнтом тертя спокою, одержуємо рівняння, яке називається рівнянням Кулона-Амонтона:

$$F_{\text{тер.мак}} = kN; \quad (3.30)$$

2) при одній і тій самій силі нормального тиску N максимальна сила тертя спокою (а отже і коефіцієнт k) залежить від фізичної природи тіл, які стикаються, і стану обробки їх поверхонь;

3) при одній і тій самій силі нормального тиску N максимальна сила тертя спокою (а також і k) не залежить від площі поверхонь, що стикаються.

Згадані закономірності мають наближений характер. Це пов'язано з тим, що $F_{\text{тер.мак}}$ залежить від великої кількості факторів, багато з яких не піддаються врахуванню (наявність на поверхні окислів, вологи, адсорбованих газів тощо).

Поверхні тіл, коли їх розглядати в масштабах атома, нерівні. При підвищенні чистоти обробки поверхні ці нерівності

зменшуються. Дослід показує, що при дуже акуратному шліфуванні поверхонь тіл, що стикаються, вони прилипають одне до одного.

Отже, можна сказати, що у грубо обробленій поверхні основну роль у виникненні сили тертя спокою (і ковзання) відіграють зачеплення нерівностей, а при детальній обробці – молекулярне (або атомне) зчеплення (міжмолекулярна взаємодія).

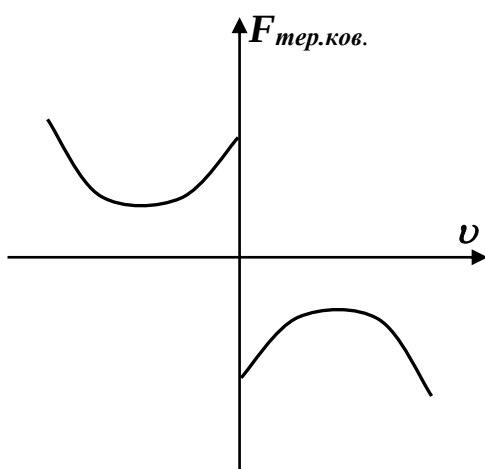
Б. Значення тертя спокою у техніці

Тертя спокою має виключно важливе значення у житті людини, у її практичній діяльності. Сили тертя спокою забезпечують можливість ходьби людини. Між людиною і землею в площині їх стикання виникають сили тертя спокою. Одна із них (тангенціальна) – це сила, з якою підошва людини діє на землю. Інша (тангенціальна) – це сила, з якою земля діє на підошву. Обидві ці сили рівні за величиною і протилежні за напрямком. Друга із згаданих сил і забезпечує переміщення людини по землі.

Сила тертя спокою є рушійною і гальмівною силою для всіх наземних колісних видів транспорту. Але сили тертя спокою мають і негативні прояви. Це стосується, насамперед, вимірювальних приладів, які мають деталі, що труться.

В. Тертя ковзання

Розглянемо знову рух бруска по поверхні стола. Коли модуль зовнішньої сили досягає значення, яке дорівнює $F_{\text{тер.спок.мак}}$, виникає ковзання (рух). Тепер цю силу тертя називають *тертям ковзання*.



мал. 3.10

Сили тертя ковзання також діють вздовж поверхні контакту двох тіл. Вони прикладені до обидвох поверхонь, що труться, згідно з третім законом Ньютона. Сила тертя ковзання також має напрям, протилежний до швидкості руху тіла.

Модуль сили тертя ковзання залежить від матеріалу тіл і стану поверхонь, що труться. Але він також ще залежить від відносної швидкості

руху тіл. (мал. 3.10).

Із збільшенням швидкості сила $F_{\text{тер.ков.}}$ спочатку зменшується, а потім знову починає зростати (при $v = 0$, $F_{\text{тер.ков.}} = F_{\text{тер.спок.мак.}}$). Зменшення сили тертя ковзання при невеликих швидкостях можна пояснити тим, що при русі тіла наявні на його поверхні мікроскопічні виступи не встигають глибоко заходити у заглиблення на поверхні другого тіла, як при спокої тіла. Деформуються тільки “вершки” виступів і тому сила опору (пружної деформації) зменшується.

Уважають, що збільшення сили тертя ковзання при великих швидкостях пов’язане із руйнуванням виступів, які є на поверхні тіл, і їх роздрібненням. Але повного розуміння цього питання нема і досі.

Нагрівання поверхонь при русі тіл пояснюють тим, що при розриві зачеплень виступи деякий час коливаються, перетворюючи в тепло нагромаджену енергію пружної деформації (виступів).

Сила тертя ковзання залежить від нормального тиску на поверхню стикання. При незмінній відносній швидкості руху сила тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску:

$$F_{\text{тер.ков.}} = k_{\text{ков.}} N, \quad (3.31)$$

де $k_{\text{ков.}}$ – коефіцієнт тертя ковзання. Він залежить від матеріалу та стану поверхні тіл, а також від відносної швидкості руху; N – сила нормального тиску.

У першому наближенні можна вважати, що $k_{\text{ков.}}$ дорівнює коефіцієнту тертя спокою k .

Г. Тертя кочення

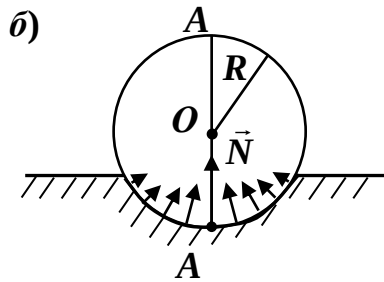
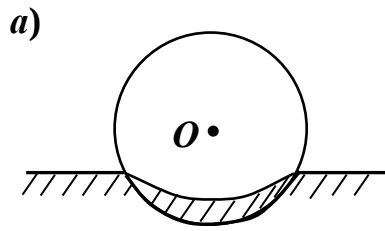
При коченні одного тіла по поверхні іншого виникає особлива сила – сила тертя кочення, яка перешкоджає коченню тіла.

Установлено, що сила тертя кочення для тих самих матеріалів завжди менша від сили тертя ковзання.

Кулон дослідним шляхом встановив, що сила тертя кочення пропорційна силі нормального тиску, яка діє на поверхні тіл, що стикаються, і обернено пропорційна радіусу рухомого циліндра ():

$$F_k = k' \frac{N}{R}, \quad (3.32)$$

де k' – коефіцієнт тертя кочення, R – радіус циліндра, N – сила нормального тиску.



мал. 3.11

(наприклад, сила тяжіння), циліндр і площина деформуються (мал. 3.11, а). Будемо вважати, що деформується тільки площина (мал. 3.11, б). Сили пружності, які діють на кожен малий елемент циліндра зі сторони площини, будуть симетричні відносно

Коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини і в системі СІ вимірюється у метрах (коефіцієнти k' і $k'_{ков.}$ – безрозмірні величини). Коефіцієнт тертя кочення не залежить від швидкості кочення і радіуса циліндра, але залежить від матеріалу взаємодіючих тіл і стану їх поверхонь. Коефіцієнт тертя кочення k' зменшується із збільшенням твердості матеріалу і чистоти його обробки.

Розглянемо причини появи сили кочення. Нехай на горизонтальній площині лежить нерухомо циліндр. Під дією сили, яка притискає циліндр до площини (наприклад, сила тяжіння), циліндр і площина деформуються (мал. 3.11, а). Будемо вважати, що деформується тільки площина (мал. 3.11, б). Сили пружності, які діють на кожен малий елемент циліндра зі сторони площини, будуть симетричні відносно вертикальної площини AA , яка проходить через вісь циліндра O .

Тому результуюча сила реакції тертя опори N вертикальна і проходить через вісь циліндра. Вона і зрівноважує силу тяжіння:

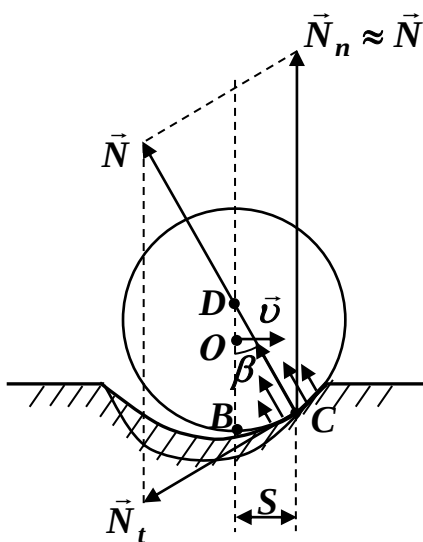
$$\vec{N} = m\vec{g}.$$

При русі циліндра по площині картина розподілу елементарних сил пружності суттєво змінюється (мал. 3.12).

Ці зміни сталися з таких причин:

1) строго кажучи, будь-яка деформація твердого тіла певною мірою є непружна. Хоча при малих деформаціях

реальних твердих тіл залишкові деформації дуже малі і ними зазвичай нехтують, то тут вони відіграють головну роль і нехтувати ними не можна;



мал. 3.12

2) усі реальні тіла (і пружні зокрема) мають властивість пружної післядії, яка полягає в тому, що тіла не відразу відновлюють свою форму після припинення дії сили.

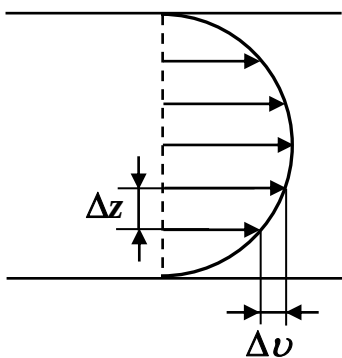
При русі колеса ці фактори проявляються в тому, що деформація площини кочення стає несиметричною. Позаду колеса деформація не зникає або зникає через деякий час. Тому рівнодійна всіх елементарних сил реакції площини є нахиленою до поверхні кочення і не проходить через вісь циліндра. Як показано на мал. 3.12, результуюча сила $\vec{N}$ реакції площини буде проходити через точку D . При цьому її момент буде перешкоджати руху тіла.

Точка C прикладання сили $\vec{N}$ зміщується у сторону руху на деяку віддаль S , яку називають коефіцієнтом моменту сили тертя кочення. Кут β і зміщення S дуже малі.

Розкладемо силу $\vec{N}$ реакції площини на нормальну $\vec{N}_n$ і дотичну $\vec{N}_t$ – складові до площини кочення. Так як кут β малий, то $\vec{N}_n \approx \vec{N}$, а $\vec{N}_t$ направлена майже по дотичній до ободу колеса. Дотична складова $\vec{N}_t$ є тією силою, яка перешкоджає руху циліндра вперед. Її називають силою тертя кочення.

3.2.3. Внутрішнє (в'язке) тертя

Внутрішнім називають тертя між шарами рідин і газів. До нього також належить тертя на межі твердих тіл з рідинами або газами. Механізм виникнення внутрішнього тертя такий. Коли рідина тече трубою, то швидкість її шару прилипло до стінок, дорівнює нулю, а в міру віддалення шару від стінок до осі труби вона поступово збільшується (мал. 3.13). Одні шари рідини наче ковзають по поверхні інших і між ними виникає сила тертя.



мал. 3.13

Сила внутрішнього тертя є результатом дії сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів і переходу молекул з одного шару в інший. Молекули переходять з одного шару в інший, особливо в газах, внаслідок теплового

хаотичного руху, і при цьому вони переносять певний імпульс направленого шару. Тому імпульс шару з більшою швидкістю зменшується. За другим законом Ньютона, зміна імпульсу шару газу (рідини) за одиницю часу визначає силу, що діє на нього, тобто силу внутрішнього тертя.

Підкреслимо деякі характерні особливості внутрішнього тертя:

- при в'язкому терті відсутня сила тертя спокою;
- при відсутності швидкості сила внутрішнього (в'язкого) тертя дорівнює нулю;
- при виникненні відносної швидкості величина в'язкого тертя із збільшенням швидкості спочатку росте лінійно, а потім пропорційно квадрату швидкості (мал. 3.14);
- при швидкостях, більших від швидкості звуку в даному середовищі, сила внутрішнього тертя пропорційна приблизно кубу швидкості.

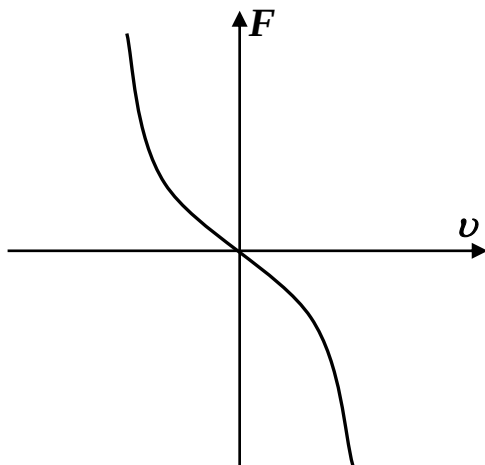
Для малих швидкостей:

$$F = -\beta_1 v, \quad (3.33)$$

а для великих швидкостей:

$$F = \pm \beta_2 v^2. \quad (3.34)$$

Значення коефіцієнтів β_1 і β_2 залежать від властивостей середовища, розмірів і форми тіла та стану поверхні тіл. Знак у формулі (3.34) вибирається протилежний до знаку швидкості.



мал. 3.14

Рівняння руху тіла у випадку дії сили внутрішнього тертя записується так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_r, \quad (3.35)$$

де $\vec{F}$ – зовнішня сила, що діє на тіло, $\vec{F}_r$ – сила тертя, яка залежить від

швидкості (3.33, 3.34), m – маса тіла.

І. Ньютон установив, що сила внутрішнього тертя пропорційна градієнту швидкості ($\frac{\Delta v}{\Delta z}$) і площі шарів рідини чи газу S , між якими визначається сила тертя:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S, \quad (3.36)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя, або в'язкість. В'язкість η залежить від роду рідини або газу та їх температури. Установлено, що з підвищенням температури в'язкість рідин дуже зменшується, а в'язкість газів – збільшується.

Градієнт швидкості ($\frac{\Delta v}{\Delta z}$) у формулі (3.36) виражає зміну швидкості, розраховану на одиницю відстані по нормалі між шарами, що розглядаються, Δz – відстань між шарами.

Важливе практичне значення мають точніші формули для визначення сил внутрішнього тертя. Учений Стокс установив формулу для лобового опору кульки при малих швидкостях її руху у в'язкому середовищі:

$$F_c = 6\pi r \eta v, \quad (3.37)$$

де r – радіус кульки, η – в'язкість середовища, v – швидкість кульки.

Формула Ньютона для лобового опору будь-якого тіла має вигляд:

$$F = c_x \rho S v^2, \quad (3.38)$$

де ρ – густина середовища, S – площа проєкції тіла на площину, перпендикулярну до напрямку руху (міделевий переріз), c_x – коефіцієнт опору. Коефіцієнт опору c_x є функцією від числа Рейнольдса і залежить від форми тіла.

Відомо, що Рейнольдс, досліджуючи потоки рідин і газів, установив, що характер будь-якого потоку визначається безрозмірним числом Re :

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \quad (3.39)$$

де ρ – густина рідини або газу, v – швидкість потоку, D – діаметр труби, η – в'язкість. Знайдене за цією формулою число дістало назву *числа Рейнольдса*.

Було встановлено, що доки для потоку в круглій трубі $Re < 2000$, потік ламінарний, а коли $Re > 2000$, то потік нестійкий і легко переходить у турбулентний.

Функція $c_x = f(Re)$ складного характеру. Велика заслуга в її вивченні належить М.Є.Жуковському (1847–1921). Він вивів теоретичні формули для визначення коефіцієнта опору та розробив методику дослідження моделей, геометрично подібних до реальних тіл, за допомогою аеродинамічної труби. Зокрема було встановлено, що результати досліджень на моделі відповідають співвідношенню сил, що діють на об'єкт, коли для їх рухів будуть однакові значення числа Рейнольдса.

3.3. Сили тяжіння

Видимий рух Сонця із сходу на захід і видимий рух Місяця й зірок відносно горизонту наводили людей на думку, що всі небесні світила рухаються навколо нерухомої Землі. З цих уявлень і вибудувалося учення про будову всесвіту, прихильником і захисником якого був александрійський учений К. Птоломей (II ст. н. е.).

Для пояснення петлеподібних рухів планет Птоломей вважав, що кожна планета рівномірно рухається по малому колу – епіциклу, центр якого рухається по великому колу навколо Землі.

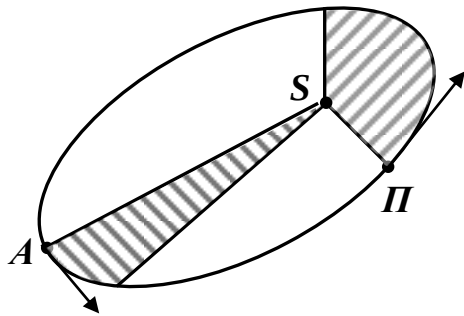
Першим революційним актом, що проголошував новий світогляд, стало видання в 1543 році твору “Про сонячну систему: добове обертання небесних тіл” М. Коперника. У ньому розвивалося нове вчення про сонячну систему: добове обертання небосхилу зі сходу на захід є видимим, Земля насправді обертається навколо своєї осі в протилежному напрямі; що річне переміщення Сонця між зорями є також видимим, бо насправді Земля обертається навколо Сонця протягом року; планети (і Земля теж) обертаються навколо Сонця; що далі планета від Сонця, то повільніше вона обертається.

У 1609 році Галілей побудував телескоп. За його допомогою він відкрив гори на поверхні Місяця, чотири супутники Юпітера, фази Венери – світіння її відбитим сонячним світлом, плями на Сонці та його обертання навколо своєї осі.

3.3.1. Закони Кеплера

М. Копернік ще помилково вважав, що планети обертаються навколо Сонця по колових орбітах. Точніші спостереження за рухом планет провів Тіхо Браге (1546–1601). Опрацювавши їх, Іоганн Кеплер (1571–1630) установив основні закони руху планет. Вони формулюються так:

1) кожна планета рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого розміщене Сонце;



мал. 3.15

2) радіус-вектор планети за однакові проміжки часу описує рівні площі. З цієї рівності випливає, що поблизу перигелія швидкість планети найбільша, а поблизу афелія – найменша. Перигелій і афелій відповідно найближча і найдальша точки на орбіті планети від Сонця (мал. 3.15);

3) квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться, як куби великих півосей їх еліптичних орбіт:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \quad (3.40)$$

3.3.2. Закон всесвітнього тяжіння

Закони Кеплера розв'язують основні питання кінематики сонячної системи. Природу сил, що зумовлюють відомі рухи планет, з'ясовує закон всесвітнього тяжіння. Його встановив Ньютон, детально проаналізувавши закони Кеплера.

Ньютон міркував так: якщо планети перебувають в обертальному русі навколо Сонця, то на них повинні діяти доцентрові сили. Припустивши, що планети рухаються по колових орбітах, ці сили для будь-яких двох планет можна записати так:

$$F_1 = \frac{4\pi^2 m_1 r_1}{T_1^2}; \quad F_2 = \frac{4\pi^2 m_2 r_2}{T_2^2}. \quad (3.41)$$

Взявши до уваги відношення цих сил $(\frac{F_1}{F_2})$ і третій закон

$$\text{Кеплера } \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{r_1^3}{r_2^3}, \text{ одержуємо, що } \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{r_1^2} / \frac{m_2}{r_2^2}. \quad (3.42)$$

З відношення (3.42) можна записати загальний вираз доцентрової сили, з якою Сонце діє на планету:

$$F = \gamma_1 \frac{m}{r^2}, \quad (3.43)$$

де m – маса планети, γ_1 – стала, що не залежить від маси планети, r – віддаль планети від Сонця.

За третім законом механіки планета повинна з такою ж самою за величиною силою діяти на Сонце:

$$F' = \gamma_2 \frac{M}{r^2}. \quad (3.44)$$

З рівнянь (3.43) і (3.44) випливає, що сила взаємодії між планетою і Сонцем пропорційна масі обидвох тіл. Отже, вона пропорційна добутку мас обидвох тіл і її можна записати в такому вигляді:

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (3.45)$$

де γ – стала, що не залежить від мас взаємодіючих тіл; вона дістала назву *гравітаційної сталої*.

Закон всесвітнього тяжіння стверджує, що будь-які матеріальні частинки притягуються одна до одної із силою, прямопропорційною добутку їх мас і оберненопропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}. \quad (3.46)$$

Увесь подальший розвиток астрономії можна назвати тріумфом закону всесвітнього тяжіння:

- за цим законом почали заздалегідь розраховувати рухи небесних тіл і явище затемнення;
- було встановлено, що припливи та відпливи води в морях і океанах зумовлюються притяганням Місяця;
- доведено, що планета повинна дещо зміщуватися з кеплерівської орбіти під дією сусідньої планети;

- за зміщенням планети Уран було передбачено, а потім і відкрито планету Нептун (1846 р.);
- за зміщенням планети Нептун спочатку розраховували, а потім і відкрили планету Плутон (1930 р.);
- за законом всесвітнього тяжіння розраховують траєкторії сучасних космічних кораблів.

3.3.3. Гравітаційна стала

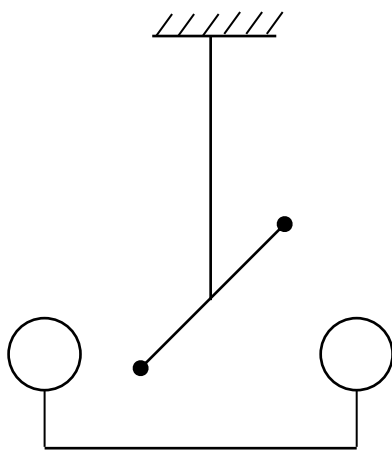
Як уже сказано вище, коефіцієнт пропорційності γ у законі всесвітнього тяжіння називається гравітаційною сталою.

Фізичний зміст її можна встановити, якщо у рівнянні (3.46) прийняти $m_1=m_2=1\text{ кг}$ і $r=1\text{ м}$. Тоді:

$$F = \gamma, \quad (3.47)$$

тобто гравітаційна стала чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок з масами по 1 кг кожна, що перебувають на віддалі одна від одної 1 метр.

Закон всесвітнього тяжіння у лабораторних умовах перевіряв англ. учений Кавендіш (1798) за допомогою крутильних терезів. Він уперше визначив величину гравітаційної сталої. У його дослідах (мал. 3.16) дві свинцеві кульки по 520–730 г підвішували на пружній нитці. До цих кульок підводилися дві масивні свинцеві кулі по 155-158 кг. Уже при наближенні куль до 20 см спостерігалось зміщення маленьких кульок в бік великих куль майже на 2 см.



мал. 3.16

$$M = F \cdot l; \quad M = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} l \quad - \text{момент}$$

закручення нитки, який зрівноважується моментом сили тяжіння.

З багатьох дослідів було встановлено, що гравітаційна стала:

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^1.$$

Знання гравітаційної сталої дало можливість визначити масу Землі та інших небесних тіл. Зокрема, прискорення сили тяжіння на поверхні Землі визначається за формулою:

$$g = \gamma \frac{M_3}{R^2}, \quad (3.48)$$

де M_3 – маса землі, R – її радіус.

Щоб знайти масу Сонця, можна йти таким самим шляхом: вважаємо, що сила тяжіння між Сонцем і планетою є доцентровою силою в обертальному русі планети навколо Сонця:

$$\gamma \frac{M_c \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки:
$$M_c = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2}{\gamma T^2} \cdot r^3, \quad (3.49)$$

де T – період обертання планети навколо Сонця, r – середня відстань від планети до Сонця (відстань між центрами цих тіл).

3.3.4. Поле тяжіння

У сучасній фізиці механізм гравітаційної взаємодії уявляється так. Кожне тіло масою M створює навколо себе поле. Якщо в деяку точку цього поля помістити пробне тіло масою m , то поле діє на цю пробну масу m з деякою силою F , яка залежить від властивостей поля у цій точці і від величини маси пробного тіла m . Природно, що пробне тіло створює навколо себе своє поле, яке, і собі, діє на тіло з масою M .

Вільний від речовини простір має ряд геометричних і фізичних властивостей. Так, найкоротшою віддалю між двома точками є пряма лінія; хід часу в усіх точках простору один і той самий; промені світла є прямими лініями.

Відповідно до теорії А.Ейнштейна, тіло масою M , яке внесене в деяку область простору, змінює властивості останнього. Зокрема, найкоротшою віддалю між двома точками буде уже не пряма, а деяка крива, форма якої залежить від маси M тіла і від віддалі між цим тілом і досліджуваними точками простору.

Світло і тепер поширюється найкоротшою віддалю між двома точками, але тепер уже світлові промені викривляються. Відповідно і час біля масивних тіл сповільнюється.

Отже, гравітаційне поле викликає зміну фізичних і геометричних властивостей простору біля масивних тіл.

Гравітаційне поле матеріальне. Воно існує незалежно від нашої свідомості і може бути виявлене за його дією на фізичні об'єкти (прилади). Гравітаційне поле є одним із видів матерії.

Для кількісної характеристики поля тяжіння вводиться фізична величина, яка називається напруженістю гравітаційного поля $\vec{G}$. Вона чисельно дорівнює відношенню сили тяжіння, яка діє на пробне тіло, до маси цього тіла:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.50)$$

Використавши закон тяжіння (3.46) і поклавши в ньому $m_1=M$, $m_2=m$, одержуємо:

$$G = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad (3.51)$$

напруженість поля тяжіння визначається масою тіла, яке створює поле і віддалю від цього тіла до точки поля, яке нас цікавить. Напруженість поля не залежить від маси пробного тіла, яке поміщене в цій точці.

За своїм фізичним змістом напруженість гравітаційного поля збігається з прискоренням пробного тіла. Оскільки напруженість поля не залежить від маси пробного тіла, то всі тіла, незалежно від їх маси, рухаються у даній точці гравітаційного поля з однаковим прискоренням. Зокрема, всі тіла падають в полі сили тяжіння з однаковим прискоренням $\vec{g}$.

Напруженість поля є векторною величиною, її напрям скерований в ту ж сторону, що і сили тяжіння. Якщо радіус-вектор $\vec{r}$ направити від джерела поля M до досліджуваної точки поля, то вектор напруженості скерований завжди протилежно до радіус-вектора. Щоб це показати, то формулу (3.51) треба записувати зі знаком “мінус”:

$$G = -\gamma \frac{M}{r^2}. \quad (3.52)$$

Якщо позначити масу тіла, яке створює поле через M , а масу пробного тіла через m , то потенціальна енергія пробного тіла на віддалі r від джерела поля буде:

$$U = \gamma \frac{Mm}{r}, \quad (3.53)$$

бо робота сили тяжіння дорівнює зменшенні потенціальної енергії:

$$dA = -dU,$$

або

$$dA = Fdr = \gamma \frac{Mm}{r^2} dr. \quad (3.54)$$

Проінтегрувавши (3.54) і взявши до уваги, що для $r=\infty$, $U_r(\infty)=0$, одержуємо рівність (3.53).

Знаючи потенціальну енергію, можна знайти потенціал поля:

$$\varphi_p = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (3.55)$$

Потенціал точки поля чисельно дорівнює відношенню потенціальної енергії пробного тіла маси m , до величини цієї маси.

Якщо пробне тіло перемістити із точки поля з потенціалом φ_1 в точку поля з потенціалом φ_2 , то при цьому поле виконає роботу:

$$A = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.56)$$

3.3.5. Поле тяжіння Землі

Якщо би Земля не оберталася навколо своєї осі, то вага (сила тяжіння) збігалася б за величиною і напрямом з силою, що визначається законом всесвітнього тяжіння. При цьому прискорення вільного падіння збіглося б з напруженістю поля тяжіння Землі.

У міру віддалення тіла від поверхні Землі його вага і прискорення вільного падіння будуть зменшуватися. Тіло, яке перебуває на рівні моря, притягується до Землі з силою:

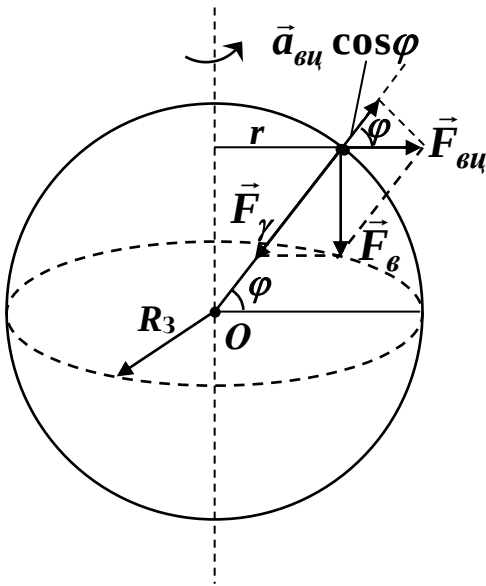
$$P_0 = mg_0 = \gamma \frac{Mm}{R^2}, \quad (3.57)$$

де M і R – маса і радіус Землі, m – маса тіла, g_0 – прискорення вільного падіння на рівні моря.

Тіло, яке перебуває на висоті h над рівнем моря, притягується до Землі з силою:

$$P = mg = \gamma \frac{M \cdot m}{(R + h)^2}. \quad (3.58)$$

Розглянемо як впливає добове обертання Землі на величину прискорення вільного падіння.



мал. 3.17

Тіло масою m на поверхні Землі зазнає дії двох сил, які залежать від його маси: сили всесвітнього тяжіння F_γ і сили інерції $\vec{F}_{in}$:

$$F_\gamma = \gamma \frac{M \cdot m}{R^2} = mg_0 \text{ і}$$

$F_{in} = m\omega^2 r$, де r – віддаль від осі обертання.

На мал. 3.17 показані обидві сили на широті φ . Рівнодійна цих сил, яка називається силою тяжіння, дорівнює:

$$\vec{F} = \vec{F}_\gamma + \vec{F}_{вц} = m\vec{g}_\varphi \quad (3.59)$$

Тому:

$$m\vec{g}_\varphi = m\vec{g}_0 + m\vec{a}_{вц}. \quad (3.60)$$

Відповідно, прискорення вільного падіння на широті φ дорівнює:

$$\vec{g}_\varphi = \vec{g}_0 + \vec{a}_{вц}.$$

На нерухоме тіло на поверхні Землі діє сила, яка визначається рівнянням (3.59). Але з такою ж силою нерухоме тіло діє на утримуючу його опору (чи розтягує нитку). Тому вага тіла $\vec{P}$ (якщо воно нерухоме) на поверхні Землі дорівнює:

$$\vec{P} = \vec{F}_\gamma + \vec{F}_{вц}. \quad (3.61)$$

Вага тіла відрізняється від діючої на нього сили всесвітнього тяжіння як за модулем, так і за напрямом (хоч і незначно).

Оскільки $\vec{F}_{вц}$ залежить від географічної широти, то і вага тіла буде залежати від широти. Тому:

$$\vec{P} = m\vec{g}_\varphi. \quad (3.62)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називають деформацією тіла? Назвіть основні види деформацій.
2. Яка деформація називається однорідною, а яка – неоднорідною?

3. Коли виникає деформація зсуву? Кручення?
4. У чому суть закону Гука? Запишіть його математично в загальному вигляді.
5. Запишіть закон Гука для деформації розтягу. Який фізичний зміст модуля Юнга?
6. Запишіть закон Гука для деформації зсуву. Який фізичний зміст модуля зсуву?
7. Запишіть закон Гука для деформації кручення. Який фізичний зміст модуля кручення?
8. Замалюйте залежність $\sigma_{np} = f(\varepsilon)$. Поясніть її.
9. Що називають пружним гістерезисом? Намалюйте петлю пружного гістерезису. Що виражає площа петлі?
10. Як обчислити потенціальну енергію пружно деформованого тіла?
11. Яке тертя називають сухим і яке – в'язким (внутрішнім)?
12. Що означає сила тертя спокою? Яке значення може приймати ця сила? Запишіть закон Кулона-Амонтона.
13. Вкажіть приклади корисного та шкідливого прояву сили тертя спокою.
14. Що таке сила тертя ковзання? Від чого вона залежить?
15. Поясніть, чому тертя ковзання супроводжується нагріванням тіл, що труться, а тертя спокою – ні?
16. Що називають тертям кочення? Запишіть закон Кулона і поясніть його.
17. Поясніть механізм виникнення сили тертя кочення.
18. Що називають в'язким (внутрішнім) тертям. Запишіть формулу Ньютона для сили внутрішнього тертя. Поясніть її.
19. Запишіть формулу Стокса, формулу числа Рейнольдса. Поясніть їх.
20. Сформулюйте і запишіть математично закон всесвітнього тяжіння.
21. Який фізичний зміст гравітаційної сталої?
22. Поясніть дослід Кавендіша. Що досліджував учений?
23. Як знайти масу Місяця, Землі? Які величини треба для цього знати?
24. Що називають напруженістю і потенціалом поля?

25. Чи дорівнює сила всесвітнього тяжіння силі тяжіння (вазі тіла)? Як знайти g_ϕ ?
26. Поясніть чому прискорення вільного падіння залежить від географічної широти? Де воно більше, а де менше?
27. Чи існує екран для гравітаційного поля? Як ви це розумієте?
28. На якій висоті над поверхнею Землі сила притягання до Землі буде в 2 рази менша, ніж на її поверхні?

Відповідь: $0,41R$ (R – радіус Землі).

29. На якій висоті над земною поверхнею прискорення вільного падіння дорівнює $\frac{3}{4}$ від того значення, яке воно має на рівні моря? Радіус Землі – $R_0 = 6400$ км.

Відповідь: 10^3 км.

30. Місяць рухається навколо Землі із швидкістю $1,02$ км/с. Віддаль від Місяця до Землі 384000 км. Знайдіть масу Землі.

Відповідь: $6 \cdot 10^{24}$ кг.

31. Радіус планети Марс складає $0,53$ від радіуса Землі, маса Марса складає $0,11$ від маси Землі. Яке прискорення вільного падіння тіл на Марсі?

Відповідь: $3,92$ м/с¹.

32. Подайте тиск $p = 72$ см рт.ст. в одиницях системи СІ.

Відповідь: $9,6 \cdot 10^4$ Н/м¹.

ТЕМА 4. РОБОТА Й ПОТУЖНІСТЬ

План

1. Інтегрالي руху.
2. Кінетична енергія. Робота, потужність.
3. Консервативні сили. Потенціальне поле.
4. Потенціальна енергія у зовнішньому полі сил.
5. Закон збереження енергії.
6. Умови рівноваги механічної системи. Удар куль.
7. Космічні швидкості.

4.1. Інтегрالي руху

Тіла, що утворюють механічну систему, можуть взаємодіяти як між собою, так і з тілами, які не належать до даної системи. Згідно з цим, сили, що діють на тіла системи, можна розділити на внутрішні та зовнішні.

Внутрішніми називають сили, з якими взаємодіють між собою тіла, що належать до даної системи.

Зовнішніми – сили, зумовлені дією тіл, які не належать до даної системи.

Якщо зовнішні сили відсутні, то така система називається замкнутою.

Для замкнутих систем існують певні функції координат і швидкостей частинок, які утворюють систему і які зберігають при русі сталі значення. Ці функції називаються інтегралами руху. У механіці важливе значення мають лише ті інтеграли руху, які мають властивість адитивності. Ця властивість полягає у тому, що значення інтеграла руху для системи, яка складається із частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень інтегралів руху, взятих для кожної частини окремо. Адитивних інтегралів руху є три: енергія, імпульс, момент імпульсу.

Отже, для замкнутих систем є незамінними три фізичні величини: енергія, імпульс, момент імпульсу. Відповідно є три закони збереження: закон збереження енергії, закон збереження

імпульсу та закон збереження моменту імпульсу. Усі вони тісно пов'язані з основними властивостями простору та часу.

В основі збереження енергії лежить однорідність часу, тобто рівноцінність усіх моментів часу. Рівноцінність треба розуміти так: заміна моменту часу t_1 на момент t_2 без зміни значень координат і швидкостей частинок не змінює механічних властивостей системи.

В основі збереження імпульсу лежить однорідність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх точках. Однаковість треба розуміти так, що паралельне перенесення замкнутої системи із одного місця простору в інше без зміни взаємного розташування і швидкостей частинок не змінює механічних властивостей системи.

В основі збереження моменту імпульсу лежить ізотропність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх його напрямках. Цю однаковість треба розуміти так: повертання замкнутої системи як цілого не впливає на її механічні властивості.

4.2. Кінетична енергія. Робота, потужність

4.2.1. Кінетична енергія частинки

Перейдемо до знаходження адитивних інтегралів руху. Розглянемо найпростішу механічну систему, яка складається з однієї частинки. Запишемо рівняння руху для цієї частинки:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (4.1)$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна сил, які діють на частинку.

Перемножимо (4.1) на переміщення частинки $d\vec{S} = \vec{v}dt$. Тоді:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}dt = \vec{F}d\vec{S}. \quad (4.2)$$

Добуток $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt$ є приростом швидкості частинки $d\vec{v}$ за час dt .

Тоді:

$$m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \vec{v} d\vec{v} = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (4.3)$$

Або:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{S}. \quad (4.4)$$

Якщо система замкнута ($\vec{F} = 0$), то $d(\frac{mv^2}{2}) = 0$,

$$T = (\frac{mv^2}{2}) = const, \quad (4.5)$$

де T – кінетична енергія частинки.

Отже, якщо частинка перебуває у замкнутій системі, то її кінетична енергія не змінюється.

Після перемноження чисельника та знаменника виразу (4.5) на m і прийнявши, що $mv = p$ (p – імпульс частинки), вираз для кінетичної енергії набуває вигляду:

$$T = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{p^2}{2m}. \quad (4.6)$$

Якщо ж на частинку діє сила $\vec{F}$, то її кінетична енергія не залишається сталою (постійною величиною). У цьому випадку відповідно до (4.4) приріст кінетичної енергії частинки за час dt дорівнює скалярному добутку $\vec{F}d\vec{S}$. Величина

$$dA = \vec{F}d\vec{S} \quad (4.7)$$

називається роботою, яку виконує сила $\vec{F}$ на шляху $d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ – є модуль переміщення $d\vec{S}$).

Скалярний добуток (4.7) можна записати через добуток проєкції сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $d\vec{S}$ і елементарного шляху dS :

$$dA = \vec{F}_S d\vec{S}, \quad (4.8)$$

де $\vec{F}_S$ – проєкція сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $d\vec{S}$.

Виходячи із співвідношення (4.4), можна зробити висновок, що робота характеризує зміну кінетичної енергії, яка зумовлена дією сил на частинку, що рухається.

Проінтегруємо співвідношення (4.4) вздовж деякої траєкторії від точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d(\frac{mv^2}{2}) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S}.$$

Ліва частина цього рівняння є різницею значень кінетичної енергії в точках 2 і 1, тобто є приростом кінетичної енергії на шляху 1–1. Тоді можна записати:

$$T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S}. \quad (4.9)$$

Величина

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F}_S dS \quad (4.10)$$

є роботою сили $\vec{F}$ на шляху 1–1. Іноді будемо вживати символ A_{12} замість A .

Отже, робота рівнодійної усіх сил, які діють на частинку, йде на приріст кінетичної енергії частинки:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (4.11)$$

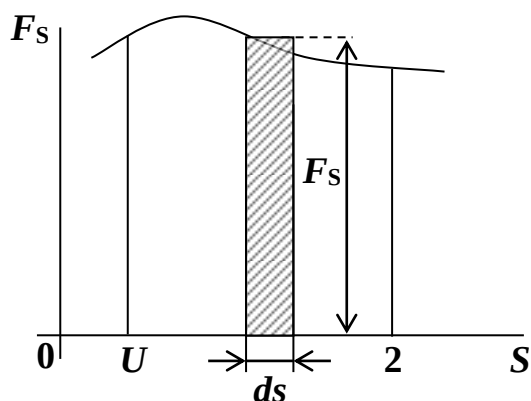
Із (4.11) випливає, що кінетична енергія має таку ж розмірність, як і робота. І згідно з цим енергія вимірюється у тих самих одиницях, що й робота. Одиницею роботи в системі СІ є Джоуль (Дж).

4.2.2. Робота. Потужність

Розглянемо величину, названу роботою, детальніше. Вираз (4.7) можна подати у вигляді:

$$dA = \vec{F} d\vec{S} = F \cos \alpha dS F_S, \quad (4.12)$$

де α – кут між напрямом сили $\vec{F}$ і напрямом переміщення $d\vec{S}$, F_S – проекція сили на напрям переміщення.



мал. 4.1

Якщо $\cos \alpha > 0$ (гострий кут), то робота додатна ($dA > 0$). Якщо α – тупий ($\cos \alpha < 0$), то робота від'ємна ($dA < 0$). При $\alpha = \pi/2$ робота дорівнює нулю.

Із мал. 4.1 бачимо, що елементарна робота $dA = F_S dS$ чисельно дорівнює площі заштрихованої смужки, а робота A на шляху 1–2 чисельно дорівнює площі фігури, що обмежена кривою F_S , вертикальними прямими 1 і 2 та віссю S .

Якщо траєкторія руху не прямолінійна, а сила не є постійною, то при розрахунку роботи треба весь шлях ΔS розбити на такі малі елементи ΔS_i , щоби кожен із них можна було вважати прямолінійним, а силу F_i на ньому постійною.

Тоді роботу на елементарній ділянці ΔS_i можна обчислити за формулою:

$$\Delta A_i = F_i \cos \alpha_i \Delta S_i = F_{Si} \Delta S_i.$$

А повна робота буде дорівнювати сумі робіт, виконаних на всіх елементарних ділянках від точки 1 до точки 2:

$$A \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_{Si} \Delta S_i. \quad (4.13)$$

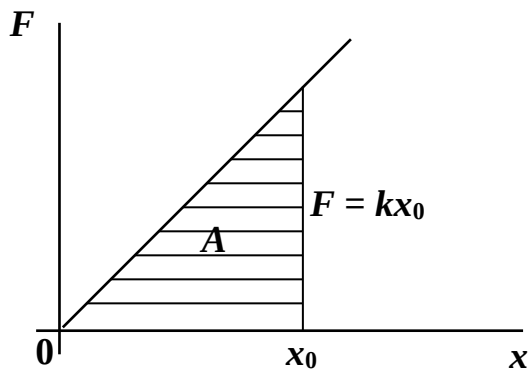
При безконечному збільшенні числа елементарних ділянок сума (4.13) переходить в означений інтеграл і повна робота буде дорівнювати:

$$A = \int_1^2 F_S dS. \quad (4.14)$$

Розглянемо для прикладу роботу сили пружності. Відомо, що ця сила змінюється пропорційно до величини деформації:

$$F = kx,$$

де k – деяка стала величина, x – величина деформації.



мал. 4.2

Графіком сили $F=f(x)$ є пряма (мал. 4.2), яка проходить через початок координат. Робота на шляху від $x=0$ до $x=x_0$ буде дорівнювати площі заштрихованого трикутника і, відповідно,

$$A = \frac{1}{2} x_0 \cdot kx_0 = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Такий самий результат одержуємо, використавши формулу (4.14):

$$A = \int_0^{x_0} F dx = k \int_0^{x_0} x dx = \frac{kx_0^2}{2} \quad \text{або} \quad A = \int_{x_1}^{x_0} F dx = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (4.15)$$

Запишемо елементарне переміщення $d\vec{S}$ так:

$$d\vec{S} = \vec{v} dt$$

Тоді вираз для елементарної роботи набуває такого вигляду:

$$dA = \vec{F} d\vec{S} = \vec{F} \vec{v} dt. \quad (4.16)$$

А робота, виконана за проміжок часу від t_1 до t_2 , буде обчислюватися за формулою:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \vec{v} dt. \quad (4.17)$$

Із попереднього відомо, що $\vec{F} d\vec{S} = F dS_F = F_S dS$. Тому формулу для роботи можна записати ще і так:

$$dA = F dS_F, \quad (4.18)$$

де dS_F – проекція вектора переміщення на напрям сили.

Якщо сила має сталу величину і напрям (наприклад, сила земного тяжіння), то:

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \vec{F} \int_1^2 d\vec{S} = \vec{F} \vec{S} = FS_F, \quad (4.19)$$

де $\vec{S}$ – вектор переміщення із точки 1 в точку 2 (ал.. 4.3).

Робота, виконана за одиницю часу, називається потужністю:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \vec{v} dt}{dt} = \vec{F} \vec{v}. \quad (4.20)$$

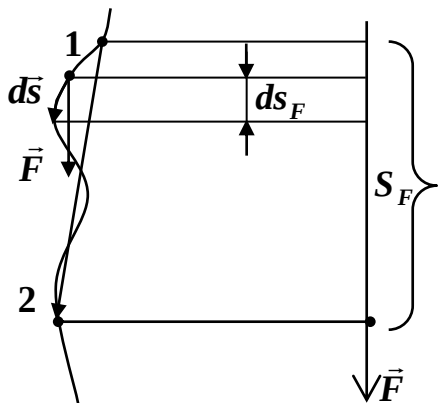
Потужність N дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка прикладання сили. Одиницею потужності є ват (Вт).

$$1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ с}}.$$

За одиницю потужності приймається така потужність, при якій за одиницю часу виконується робота, що дорівнює одиниці роботи. Одиницею роботи в СІ є джоуль (Дж), який дорівнює роботі, яку виконує сила в 1 Н на шляху в 1 м .

4.3. Консервативні сили. Потенціальне поле

Якщо на частинку в кожній точці простору діють інші тіла, то кажуть, що ця частинка перебуває у полі сил. Наприклад, частинка



мал. 5.3

біля поверхні Землі перебуває у полі сили тяжіння – в кожній точці простору на неї діє сила $\vec{P} = m\vec{g}$.

Існують поля, для яких напрямок сили, яка діє на частинку в будь-якій точці простору, проходить через нерухомий центр, а величина сили залежить тільки від віддалі до цього центра: $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{r})$. Поле сил, яке має такі властивості, називається центральним.

Якщо в кожній точці поля сила, яка діє на частинку, однакова за величиною і напрямком ($\vec{F} = \text{const}$), то воно називається однорідним.

Силове поле, яке можна описати за допомогою функції $\Pi(x, y, z, t)$, для якої: $F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}$, (4.21)

називається потенціальним. Функція $\Pi(x, y, z, t)$ має назву потенціальної функції (або потенціалу). Якщо час t входить у функцію $\Pi(x, y, z, t)$ явно, то силове поле буде змінюватися з часом – сила в кожній точці буде залежати від t . Таке поле називають нестационарним. А поле, яке не змінюється з часом, називають стаціонарним. Для стаціонарного поля $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Вектор з компонентами $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$, де ϕ – скалярна функція координат x, y, z (і навіть часу t), називається градієнтом функції ϕ ; його позначають символом

$\text{grad } \phi$ або $\nabla\phi$

(∇ називається оператором набла, $\nabla\phi$ читається: “набла фі” або “градієнт фі”). Із визначення градієнта випливає, що

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z, \quad (4.22)$$

де $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орти координатних осей x, y, z .

Порівняння (4.21) із (4.22) показує, що у випадку потенціального силового поля

$$\vec{F} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{e}_z = \nabla \Pi. \quad (4.23)$$

Робота сили, яка задовольняє умову (4.23), дорівнює

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = \nabla\Pi d\vec{S} = \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz. \quad (4.24)$$

Якщо час не входить явно у функцію $\Pi(x, y, z)$, то права частина рівняння (4.24) є повним диференціалом функції Π . Відповідно, робота, виконана над частинкою у стаціонарному силовому полі, дорівнює:

$$dA = d\Pi(x, y, z, t) \quad (4.25)$$

Проінтегруємо вираз (4.25) вздовж деякої траєкторії від точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 dA = \int_1^2 d\Pi. \quad (4.26)$$

Ліва частина рівняння (4.26) – це робота A_{12} , яку виконують сили поля на шляху 1–2. Права частина (4.26) дорівнює сумі елементарних приростів $d\Pi$ функції Π , що є повним приростом цієї функції на шляху 1–2:

$$\int_1^2 d\Pi = \Pi_2 - \Pi_1. \quad (4.27)$$

Тоді рівність (4.26) можна записати так:

$$A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1. \quad (4.28)$$

Форма траєкторії, вздовж якої здійснювалося інтегрування, була вибрана довільною. Тому робимо висновок, що робота, виконана над частинкою силами стаціонарного потенціального поля, не залежить від форми шляху, яким рухається частинка. Вона залежить тільки від початкового та кінцевого положення її у просторі.

Ті сили, робота яких не залежить від шляху, яким частинка переходить із одного положення в інше, називають консервативними.

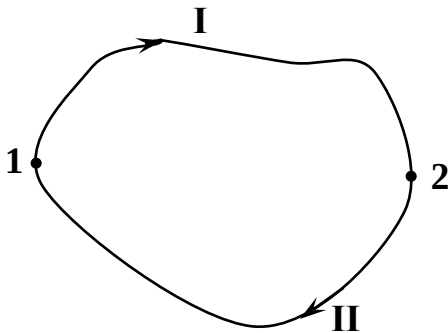
Із сказаного випливає, що сили, які діють на частинку в стаціонарному потенціальному полі, є консервативними.

Із незалежності роботи консервативних сил від шляху випливає, що робота таких сил по замкнутому шляху дорівнює нулю.

Розбиваємо довільний замкнутий шлях на дві частини: шлях I, яким частинка переходить із точки 1 до точки 2, і шлях II, яким вона

повертається із точки 2 в точку 1 (мал. 4.4). Роботу по всьому замкнутому шляху можна записати так:

$$A = (A_{12})_I + (A_{21})_{II}. \quad (4.29)$$



мал. 5.4

Неважко зрозуміти, що роботи $(A_{21})_{II}$ і $(A_{12})_I$ відрізняються тільки знаком. Справді, заміна напрямку руху на зворотний лише замінює $d\vec{S}$ на $-d\vec{S}$, внаслідок чого значення інтеграла $\int \vec{F} d\vec{S}$ змінює знак на обернений. Отже,

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II},$$

але

$$(A_{12})_I = (A_{12})_{II}, \text{ тоді } A = (A_{12})_I - (A_{21})_{II} = 0, \quad (4.30)$$

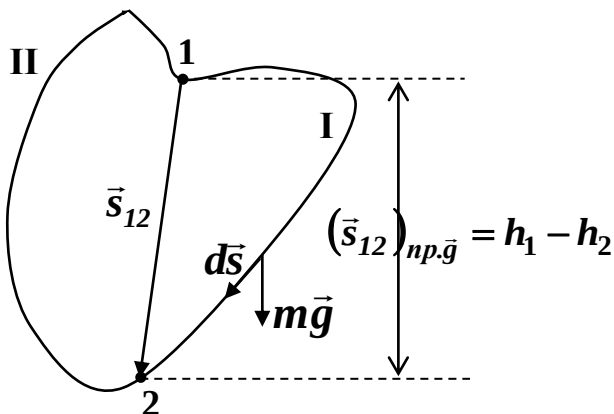
тому консервативними силами можна назвати такі сили, робота яких на будь-якому замкнутому шляху дорівнює нулю.

Сили, робота яких на будь-якому замкнутому шляху не дорівнює нулю, називають *неконсервативними*. Прикладом неконсервативних сил є сила тертя.

Робота сили тертя за час dt дорівнює:

$$dA = \vec{F} d\vec{S} = \vec{F} \vec{v} dt = -F v dt = -F dS. \quad (4.31)$$

Сила тертя $\vec{F}$ і швидкість частинки $\vec{v}$ завжди мають протилежні напрямки. Тому робота сили тертя на кожній ділянці шляху dS від'ємна ($dA < 0$) і, відповідно, на замкнутій ділянці шляху не буде дорівнювати нулю.



мал. 4.5

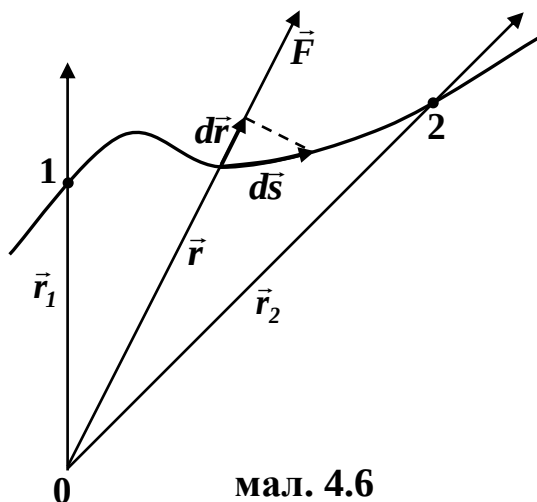
Покажемо, що сила тяжіння є консервативною. Ця сила в будь-якій точці поля має однакову величину і напрямок – вниз по вертикалі. Тому, незалежно від того, яким із шляхів рухається частинка (мал. 4.5), робота A_{12} визначається виразом

$$A_{12} = m\vec{g}\vec{S}_{12} - mg(S_{12})_{np.\vec{g}}.$$

Проекція $(S_{12})_{np.\vec{g}}$ вектора $\vec{S}_{12}$ на напрямок $\vec{g}$ дорівнює різниці висоти h_1-h_2 . Тому вираз для роботи сили тяжіння можна записати у вигляді:

$$A_{12} = mg \cdot (h_1 - h_2). \quad (4.32)$$

Цей вираз не залежить від шляху, тому сила тяжіння є консервативною.



мал. 4.6

Сили, що діють на частинку в центральному полі, також консервативні (мал. 4.6). Відомо, що елементарна робота на шляху dS дорівнює:

$$dA = F(r) dS_F. \quad (4.33)$$

Але проекція $d\vec{S}$ на напрямок сили в даній точці, тобто на напрямок радіус-вектора $\vec{r}$, дорівнює $d\vec{r}$ – приросту відстані частинки від силового центра O : $dS_S = dr$.

Тому $dA = F(r) dr$, а робота на всьому шляху

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (4.34)$$

Вираз (4.34) залежить тільки від виду функції $F(r)$ і від значень r_1 і r_2 . Від вигляду траєкторії він ніяк не залежить, а це означає, що сили, які діють в центральному полі, є консервативними.

4.4. Потенціальна енергія у зовнішньому полі сил

Ми вже знаємо, що робота, виконана над частинкою силами стаціонарного поля, дорівнює:

$$A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1, \quad (4.35)$$

де Π_1 і Π_2 – значення потенціальної функції $\Pi(x, y, z)$ у початковій і кінцевій точках. Уся виконана робота йде на приріст кінетичної енергії частинки.

Тому:
$$T_2 - T_1 = \Pi_2 - \Pi_1. \quad (4.36)$$

Перейдемо від функції $\Pi(x, y, z)$ до функції $U(x, y, z)$, які пов'язані співвідношенням:

$$U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z). \quad (4.37)$$

Тоді формулу (4.36) перепишемо так:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \quad \text{або} \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_1. \quad (4.38)$$

Позначимо: $E_1 = T_1 + U_1$; $E_2 = T_2 + U_1$. І рівняння (4.38) матиме вигляд:

$$E_1 = E_2, \quad (4.39)$$

тобто вираз $E = T + U$ для частинки, яка перебуває в полі консервативних сил, залишається сталою величиною (є інтегралом руху).

Функцію $U(x, y, z)$ називають потенціальною енергією частинки у зовнішньому полі. Величину E , яка дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії частинки, називають повною механічною енергією частинки.

Перейшовши від потенціальної функції $\Pi(x, y, z)$ до потенціальної енергії $U(x, y, z)$, рівняння (4.35) перепишемо так:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (4.40)$$

з якого випливає, що робота, виконана над частинкою консервативними силами, дорівнює зменшенню потенціальної енергії частинки. Або можна говорити, що робота виконується за рахунок запасу потенціальної енергії.

Замінивши функцію $\Pi(x, y, z)$ потенціальною енергією $U(x, y, z)$, знаходимо зв'язок між потенціальною енергією і силою:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = -\nabla U. \quad (4.41)$$

Отже, сила, що діє на частинку в стаціонарному потенціальному силовому полі, дорівнює градієнту потенціальної енергії, який взято з оберненим знаком.

Проекціями сили на відповідні осі є вирази:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.42)$$

Розглянемо випадок, коли на частинку одночасно діють консервативні $\vec{F}$ і неконсервативні сили $\vec{F}^*$. Тоді при переході частинки із точки 1 в точку 2 над нею буде виконана робота:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} + \int_1^2 \vec{F}^* d\vec{S} = A_{\text{кон}} + A_{12}^*, \quad (4.43)$$

де A_{12}^* – робота неконсервативних сил. Роботу консервативних сил $A_{\text{кон}}$ можна записати: $A_{\text{кон}} = U_1 - U_2$. Тоді (4.43) перепишемо так:

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^*, \quad (4.43)$$

Але з рівняння (4.11) ми знаємо, що сумарна робота всіх прикладених до частинки консервативних сил йде на приріст кінетичної енергії частинки. Це твердження називається *теоремою про кінетичну енергію*.

Отже, рівняння (4.43) перепишемо так:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^* \quad \text{або} \quad T_1 + U_1 + A_{12}^* = T_2 + U_2.$$

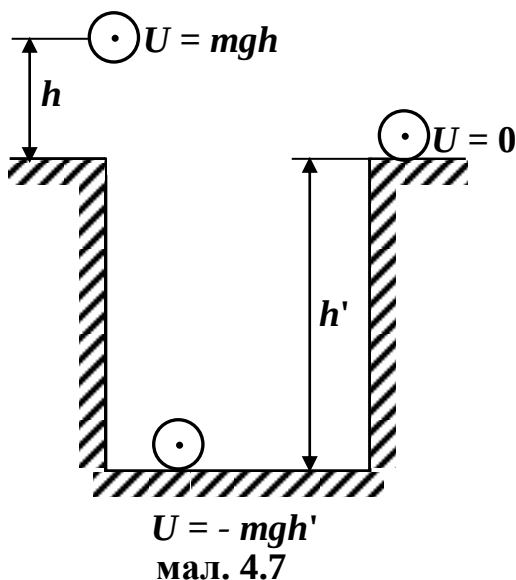
Взявши до уваги (4.38), одержуємо:

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*. \quad (4.44)$$

Одержаний результат означає, що робота неконсервативних сил витрачається на приріст повної механічної енергії частинки.

Потенціальна енергія, як і потенціальна функція, визначається з точністю до деякої довільної постійної величини. Це, проте, не має ніякого значення, бо в усі фізичні співвідношення входить або різниця значень потенціальної енергії, або похідні від функції U .

Практично вважають потенціальну енергію тіла в певному положенні рівну нулю, а в інших положеннях її значення визначають відносно прийнятого нульового значення.



Конкретний вигляд функції $U(x, y, z)$ залежить від характеру силового поля. Щоби знайти потенціальну енергію частинки в полі сили тяжіння, візьмемо до уваги, що робота, яку виконують сили цього поля над частинкою, дорівнює:

$$A_{12} = mg(h_1 - h_2), \text{ але } A_{12} = U_1 - U_2.$$

Прирівнявши обидва вирази, робимо висновок, що потенціальна енергія частинки в полі сили тяжіння:

$$U = mgh, \quad (4.45)$$

відлік h робиться від довільного рівня, прийнятого за нульовий (мал. 4.7). Повна енергія частинки, яка є в полі сили тяжіння, дорівнює:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (4.46)$$

4.5. Закон збереження енергії

Розглянемо систему, яка складається із N частинок масами $m_1, m_2, \dots, m_N$. Нехай вони взаємодіють одна з одною з силами $\vec{F}_{ik}$, модулі яких залежать тільки від віддалі між частинками. Такі сили, називають консервативними (їх робота визначається початковою і кінцевою конфігурацією системи). Припустимо, що на i -ту частинку діє ще і зовнішня консервативна сила $\vec{F}_i$ і зовнішня неконсервативна сила $\vec{F}^*$. Тоді рівняння руху i -ої частинки буде мати вигляд:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^*. \quad (4.47)$$

Перемножимо i -е рівняння на $d\vec{S}_i = d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ і додавши усі N рівнянь, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} \right\} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{S}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{S}_i. \quad (4.48)$$

Ліва частина (4.48) є приростом кінетичної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = dT. \quad (4.49)$$

Перший член правої частини (4.48) дорівнює зменшенню потенціальної енергії взаємодіючих частинок:

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i = -dU_{\text{вз}}. \quad (4.50)$$

Другий член правої частини рівняння (4.48) дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи в зовнішньому полі консервативних сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{S}_i = -dU_{\text{зов}}. \quad (4.51)$$

Останній член в (4.48) виражає роботу неконсервативних (зовнішніх) сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^N dA_i^* = dA_{\text{зов}}^* . \quad (4.52)$$

Урахувавши всі ці співвідношення, рівняння (4.48) запишемо так:

$$d(T+U_{\text{вз.}}+U_{\text{зов}})= dA_{\text{зов}}^* . \quad (4.53)$$

Величина

$$E=T+U_{\text{вз.}}+U_{\text{зов.}} \quad (4.54)$$

є повною механічною енергією системи.

Якщо зовнішні неконсервативні сили відсутні, то права частина рівняння (4.53) дорівнює нулю і повна енергія системи залишається сталою (незмінною):

$$E=T+U_{\text{вз.}}+U_{\text{зов.}}=\text{const} \quad (4.55)$$

Отже, повна механічна енергія системи тіл, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою. Це і є закон збереження механічної енергії.

Для замкнутої системи, тобто системи, на тіла якої не діють ніякі зовнішні сили, співвідношення (4.55) набирає вигляду:

$$E=T+U_{\text{вз.}}=\text{const}, \quad (4.56)$$

повна механічна енергія замкнутої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою.

Якщо в замкнутій системі, крім консервативних сил, діють також неконсервативні сили, то повна енергія системи не зберігається. Її зміна дорівнює роботі неконсервативних сил:

$$dE=d(T+U_{\text{вз.}})=dA^* \quad \text{або} \quad E_2 - E_1 = A_{12}^* \quad (4.57)$$

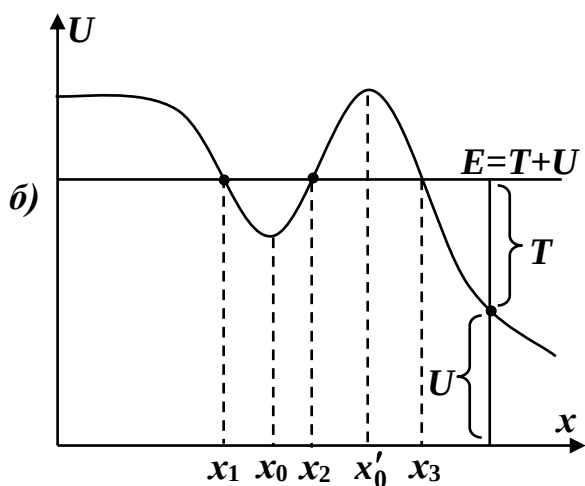
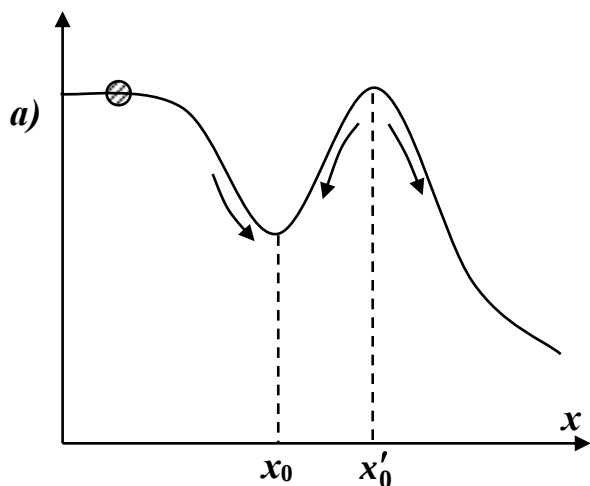
4.6. Умови рівноваги механічної системи. Удар куль

4.6.1. Умови рівноваги механічної системи

Розглянемо матеріальну точку, рух якої обмежено так, що вона має лише одну ступінь вільності. (Ступенями вільності називають незалежні величини, за допомогою яких можна задати положення системи. Наприклад, рух матеріальної точки, що рухається лише поступально, можна описати трьома ступенями вільності).

Якщо точка має одну ступінь вільності (як в зазначеному випадку), то її положення можна визначати за допомогою однієї координати; нехай цією координатою є координата x .

Для прикладу розглянемо кульку, яка ковзає без тертя по закріпленій нерухомо, зігнутій у вертикальній площині дротині (мал. 4.8, а).



мал. 4.8

На кульку діє консервативна сила – сила тяжіння. Графік потенціальної енергії $U(x)$ показано на мал. 4.8, б.

Оскільки кулька рухається по дротині без тертя, то сила, з якою дротина діє на кульку перпендикулярна до швидкості кульки і, відповідно, роботи над кулькою не виконує. Тому має місце закон збереження енергії згідно з формулою:

$$E = T + U = \text{const.} \quad (4.58)$$

Із (4.58) випливає, що кінетична енергія може зростати тільки за рахунок зменшення потенціальної

енергії. Тому якщо кулька перебуває у стані при якомк її швидкість дорівнює нулю, а потенціальна енергія має мінімальне значення, то без зовнішньої дії вона не може почати рухатися, тобто вона буде перебувати в рівновазі (у стані спокою).

Мінімум потенціальної енергії $U(x)$ відповідає на графіку значення $x = x_0$. Умова мінімуму потенціальної енергії має вигляд:

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \text{але} \quad \frac{dU}{dx} = F_0 = 0. \quad (4.59)$$

(Якщо U є функцією тільки однієї змінної, то $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx} = F_x$).

Отже, положення, яке відповідає мінімуму потенціальної енергії, має ту властивість, що сила, яка діє на тіло, дорівнює нулю.

Для випадку, який зображено на малюнку, умова (4.59) виконується також для $x = x'_0$ (для максимуму $U(x)$). Визначене цим значенням x'_0 положення кульки буде також рівноважним. Але ця рівновага на відміну від рівноваги при x_0 буде нестійкою: достатньо легко вивести кульку із цього положення, як виникає сила, яка віддаляє кульку від положення x'_0 . А при стійкій рівновазі виникають сили, які намагаються вернути кульку в положення рівноваги.

Якщо повна енергія частинки має значення, як показано на мал. 4.8, б, то частинка може здійснювати рух або в межах від x_1 до x_2 , або в межах від x_3 до безконечності.

В області $x < x_1$ і $x_2 < x < x_3$ частинка проникнути не може, так як потенціальна енергія не може стати більшою за повну енергію.

Отже, область $x_2 < x < x_3$ є потенціальним бар'єром, через який частинка не може проникнути, маючи даний запас повної енергії. Область $x_1 < x < x_2$ називається потенціальною ямою.

Якщо частинка при русі не може віддалитися на безконечність, то такий рух називають *фінітним*. Якщо ж частинка може відходити як завгодно далеко, то такий рух називають *інфінітним*. Частинка, перебуваючи у потенціальній ямі, здійснює фінітний рух.

4.6.2. Удар куль

Будемо розглядати тільки центральний удар – удар, який відбувається по лінії, що з'єднує центри куль.

А. Абсолютно непружний удар

Якщо кулі є тілами абсолютно пружними, то удар називається абсолютно пружним. Якщо кулі є тілами абсолютно непружними, то удар називається абсолютно непружним.

Нехай на кульки, які взаємодіють, ніякі інші сили, крім сил взаємодії, не діють. Тоді кульки утворюють замкнуту систему, в якій виконуються закони збереження енергії і імпульсу:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}, \quad (4.60)$$

де m_1, m_2 – маси куль; $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – їх швидкість до удару; $\vec{u}$ – їх спільна швидкість після удару.

Якщо кульки до удару мали однаковий напрям руху, то після проектування рівняння (4.60) на напрям руху одержуємо:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.61)$$

Зрозуміло, що на деформацію тіл затрачено деяку енергію, величину якої знаходимо з рівняння:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \left(\frac{m_1 + m_2}{2} \right) u^2 = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (4.62)$$

Ця частина кінетичної енергії тіл перетворилася у внутрішню енергію тіл (тіла нагріваються).

Б. Абсолютно пружний удар

Під час ідеально пружного удару в першій стадії тіла деформуються і швидкості тіл вирівнюються, а в другій стадії тіла повністю відновлюють свою форму завдяки силам пружності, що виникають. Відновлюється форма тіл і вони набувають різної швидкості (бо маси тіл різні). Знайдемо швидкості тіл після удару.

Нехай кулі масами m_1 і m_2 до удару мали швидкості v_1 і v_2 відповідно. Після удару їх швидкості стали відповідно u_1 і u_2 .

Оскільки удар абсолютно пружний, то сумарна кінетична енергія тіл залишається незмінною:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (4.63)$$

За законом збереження імпульсу системи взаємодіючих тіл

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (4.64)$$

(Швидкості до удару і після удару паралельні тій самій прямій).

Якщо в одержаних рівняннях зібрати зліва і справа члени з однаковими масами, а потім перше рівняння поділити на друге, то дістанемо систему двох лінійних рівнянь, з якої знаходимо швидкості куль після удару. Вони відповідно дорівнюють:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (4.65)$$

Розглянемо окремі випадки удару:

а) якщо $m_1=m_2$, то $u_1=v_2$, $u_2=v_1$, тобто тіла, ударяючись, обмінюються швидкостями.

б) якщо $v_2=0$, то:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (4.66)$$

в) якщо $m_2 \gg m_1$ (або $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$), то:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)v_1 + 2v_2}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx -v_1 + 2v_2; \\ u_2 &= \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 \approx v_2 + 2\frac{m_1}{m_2}v_1 = v_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

при $v_2=0$, $m_2 \rightarrow \infty$, то $u_1 = -v_1$; $u_2=0$, тобто перше тіло відскакує від другого з тією самою швидкістю. Так, наприклад, відскакує м'яч, ударяючись у стіну чи підлогу.

4.7. Космічні швидкості

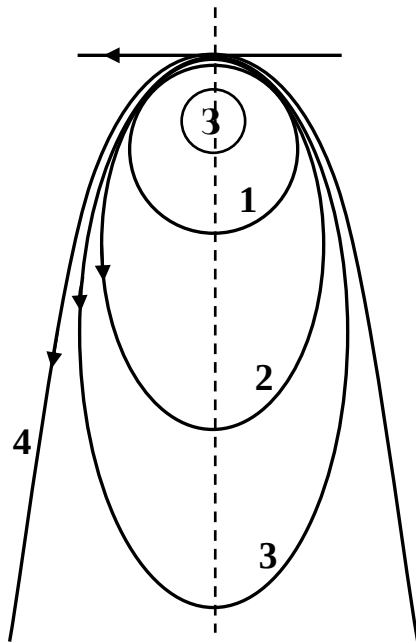
Рухи тіл, що їх посиляють з Землі в космічний простір, розраховують, виходячи із закону всесвітнього тяжіння.

Припустимо, що ці тіла посиляють у горизонтальному напрямі високо над Землею, де опору атмосфери вже немає. Розрахунки показують, якщо швидкість тіла становить $\sim 7,9$ км/с, то воно буде обертатися навколо Землі як супутник. Щоб визначити цю швидкість, виходимо з того, що в обертальному русі тіла навколо Землі доцентровою силою мусить бути сила тяжіння:

$$mg = \frac{mv_z^2}{r}; \quad v_I = \sqrt{gr}, \quad (4.68)$$

де r – відстань тіла від центра Землі. Таку швидкість v_I називають *першою космічною*.

Якщо швидкість тіла збільшувати, то орбіта його руху навколо Землі витягується і при швидкості 11,2 км/с тіло перейде на



мал. 4.9

- 1 – колова орбіта;
- 2 – еліпс при $v_0 = 10$ км/с;
- 3 – еліпс при $v_0 = 11,1$ км/с;
- 4 – парабола при $v_0 = 11,6$ км/с;
- 5 – напрямок v_0 .

параболічну орбіту та залишить Землю (мал. 4.9). Цю швидкість називають другою космічною.

Її обчислюють за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло, щоб виконати роботу виходу за межі тяжіння до Землі (роботу проти сили тяжіння):

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr. \quad (4.69)$$

Виконавши інтегрування (4.69), одержуємо

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \gamma \frac{mR_3}{R}, \quad v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_3}{R}} = \sqrt{2gR} \quad (4.70)$$

де R – радіус Землі.

Надаючи космічному апарату швидкості понад 11,2 км/с, можна посилати його у сферу тяжіння інших планет і Сонця.

Запускаючи космічний апарат з Землі, йому можна надати і такої швидкості, при якій він залишить Сонячну систему. Таку швидкість називають третьою космічною. Її величина залежить від напрямку запуску корабля щодо орбітального руху Землі; найменше її значення буде тоді, коли корабель запуснуть у напрямі орбітального руху Землі.

Третю космічну швидкість можна обчислити за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло для виконання роботи виходу за межі тяжіння спочатку Землі, а потім і Сонця. Зауважимо, що рух космічного корабля зручно розраховувати в системі

координат, пов'язаній з тим небесним тілом, у сфері тяжіння якого перебуває корабель.

Щоб вийти за сферу тяжіння Сонця, корабель повинен мати кінетичну енергію, достатню для виконання роботи виходу:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM_c}{r^2} dr. \quad (4.71)$$

$$\text{Звідки:} \quad v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_c}{R_0}} = \sqrt{2}v_3, \quad (4.72)$$

де v_{II} – параболічна швидкість корабля в Сонячній системі, M_c – маса Сонця, R_0 – Радіус орбіти Землі, v_3 – орбітальна швидкість Землі. Знаючи, що $v_3 = 29,75 \text{ км/с}$, знаходимо, що $v_{II} = 42 \text{ км/с}$. Така параболічна швидкість корабля у Сонячній системі. Ця швидкість у геоцентричній системі (системі, пов'язаній із Землею) при умові, що швидкість корабля на границі тяжіння з Землею збігається з швидкістю орбітального руху Землі, буде:

$$v'_{II} = v_{II} - v_3 = 12,25 \text{ км/с}.$$

Отже, щоб запустити корабель з Землі для польоту за межі тяжіння Сонця, йому треба надати кінетичну енергію, достатню для виходу за сферу тяжіння Землі і збереження параболічної швидкості v'_{II} , достатньої для виходу за сферу тяжіння Сонця.

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{mv_{II}'^2}{2}. \quad (4.73)$$

Звідки $v_{III} = \sqrt{v_{II}^2 + v_{II}'^2} = 16,7 \text{ км/с}$. Таке мінімальне значення третьої космічної швидкості.

Питання для самоконтролю

1. Як обчислити роботу сталої сили?
2. Що називають потужністю? Виведіть формулу $N = \vec{F} \vec{v}$.
3. Якими одиницями вимірюється робота і потужність у системі СІ?
4. Які сили називають консервативними?

5. Що називають кінетичною енергією тіла? Якими одиницями вимірюється кінетична енергія? Чому?
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії.
7. Що називають потенціальною енергією? Від чого вона залежить?
8. Установіть зв'язок роботи сили із зміною потенціальної енергії.
9. Гравітаційне поле в кожній точці можна охарактеризувати двома величинами. Якими? Дайте їх означення. Запишіть формули.
10. Чому дорівнює кінетична енергія тіла, яке впало з висоти $h = 1000$ м, якщо його початкова швидкість дорівнює нулю?
11. У чому суть закону збереження механічної енергії матеріальної точки, що рухається у потенціальному полі?
12. Що називають потенціальним бар'єром? Замалуйте графік потенціальної енергії тіла, яке має одну ступінь вільності?
13. Що називають першою, другою і третьою космічними швидкостями?
14. Як знайти першу космічну швидкість?
15. Як знайти другу космічну швидкість?
16. Як знайти третю космічну швидкість?
17. Сформулюйте і запишіть закон збереження механічної енергії для замкнутої системи: а) у якій діють тільки консервативні сили; б) у якій діють консервативні та неконсервативні сили.
18. Сформулюйте закон збереження механічної енергії для незамкнутої системи. Запишіть його.
19. Які види рівноваги є для тіла? Поясніть їх.
20. Який існує зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією?
21. Як обчислити потенціальну енергію пружно деформованого тіла?
22. Чому сила тяжіння є консервативною?
23. Як обчислити роботу сили, що змінюється?
24. Чому сили, які діють в центральному полі, є консервативними?
25. Який удар називають непружним? Як обчислити енергію, що перетворюється на тепло при абсолютно непружному ударі?

26. Який удар називають пружним? Запишіть формули, за якими знаходять швидкості двох взаємодіючих тіл при абсолютно пружному ударі.
27. Які інтеграли руху є в механіці? Як вони пов'язані з властивостями простору та часу?
28. Які відбуваються перетворення енергії, коли куля вилітає із гвинтівки при пострілі і коли кулі трапляється на шляху перешкода?
29. Тіло масою m перебуває на похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом. Доведіть, що для рівномірного руху його вгору чи вниз по похилій площині потрібна дія сили $F = mg(k\cos\alpha \pm \sin\alpha)$.
30. Якщо розмістити тіло на похилу площину і збільшувати кут її нахилу α , то від легкого поштовху це тіло почне рівномірно ковзати вниз при куті α_0 . Доведіть, що $\operatorname{tg}\alpha_0 = k$ (де k – коефіцієнт тертя).
31. Якщо насипати купу з піску або з іншого якого-небудь сипучого матеріалу, то пісок утворює відкос, який іде під кутом, що дорівнює куту тертя (його називають кутом природного відкосу). Чому для піску він дорівнює 30° ?
32. Камінь масою 2 кг впав з деякої висоти. Падіння тривало $1,43\text{ с}$. Знайдіть кінетичну та потенціальну енергію каменя у середній точці шляху.

Відповідь: $W_k = W_n = 98,1\text{ Дж}$.

33. Куля масою 10 г , що летіла із швидкістю 800 м/с , пробила дошку товщиною 5 см . Чому дорівнює сила удару, якщо при цьому куля втратила $\frac{3}{4}$ своєї швидкості?

Відповідь: $6 \cdot 10^4\text{ Н}$.

34. Людина з'їжджає на санчатах з гори заввишки 30 м і заввишки схилу 300 м . Після цього санчата рухаються по горизонтальній поверхні льоду. Маса людини з санчатами 57 кг . Сила тертя на всьому шляху постійна і дорівнює $22,5\text{ Н}$. Знайдіть: а) кінетичну енергію людини з санчатами біля підніжжя гори; б) віддаль, яку пройшли санчата по горизонтальній ділянці шляху до зупинки.

Відповідь: а) $1,01 \cdot 10^4\text{ Дж}$; б) 460 м .

35. Яку швидкість повинен мати штучний супутник Землі відносно її поверхні для того, щоб він рівномірно обертався по коловій орбіті на висоті 600 км над поверхнею Землі? Який період обертання такого супутника. Радіус Землі $R = 6400$ км.

Відповідь: $7,61 \cdot 10^3$ м/с; 1,6 год.

36. Дві непружні кулі, маси яких 8 і 3 кг, рухались назустріч одна одній і після удару зупинилися. Знайти швидкість кулі більшої маси до удару, якщо куля меншої маси рухалася із швидкістю 2 м/с.

Відповідь: 0,75 м/с.

37. Свинцева куля масою 5 кг рухається із швидкістю 4 м/с і наздоганяє іншу свинцеву кулю масою 6 кг, яка рухається в тому ж напрямі із швидкістю 2 м/с. Вважаючи удар непружним, знайти енергію, затрачену на деформацію куль при ударі.

Відповідь: 5,45 Дж.

38. Дві пружні кулі, що мають маси 25 і 40 кг, рухаються назустріч одна одній – перша із швидкістю 3 м/с, друга – 5 м/с. Якими будуть їх швидкості після удару?

Відповідь: 6,85 м/с; - 1,15 м/с.

ТЕМА 5. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

ПЛАН

1. Поняття твердого тіла як системи матеріальних точок. Поступальний і обертовий рух твердого тіла.
2. Момент сили.
Момент сили відносно точки.
Момент сили відносно осі.
Момент пари сил.
Сумарний момент внутрішніх сил.
3. Момент інерції. Теорема Штейнера. Моменти інерції деяких тіл.
4. Основне рівняння динаміки обертвого руху.
5. Момент імпульсу твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу.
6. Кінетична енергія обертвого руху твердого тіла.
7. Вільні осі обертання. Гіроскоп. Прецесія. Гіроскопічні сили. Застосування гіроскопічного ефекту.

5.1. Поняття твердого тіла як системи матеріальних точок. Поступальний і обертовий рух твердого тіла

У задачах цього розділу механіки реальні тіла замінюють моделлю – абсолютно твердим тілом. Рух абсолютно твердого тіла розглядають як рух системи великого числа матеріальних точок, які зберігають незмінними положення однієї точки відносно іншої.

Для кожної такої матеріальної точки є справедливим другий закон динаміки. Якщо маса i -ої точки m_i і швидкість її $\vec{v}_i$, то

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{вн}}, \quad (5.1)$$

де $\vec{F}_{\text{вн}}$ – рівнодійна внутрішніх сил, що діють на дану точку зі сторони інших точок тіла; $\vec{F}_i$ – рівнодійна зовнішніх сил, що діють на точку.

Запишемо рівняння (5.1) для кожної точки тіла і просумуємо їх. Пам'ятаючи, що $\sum \vec{F}_{\text{вн}} = \mathbf{0}$, одержимо:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{F}_i, \quad (5.2)$$

або

$$\frac{d}{dt} \sum_i (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{F}_i, \quad (5.3)$$

Тобто, похідна по часу від повного імпульсу тіла дорівнює сумі зовнішніх сил, які діють на тіло.

Рівність (5.2) можна переписати у вигляді:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (5.4)$$

При поступальному русі тіла прискорення всіх його точок однакове і, взявши до уваги, що $\sum_i m_i = M$ (маса тіла), одержуємо:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (5.5)$$

де $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Одержане рівняння (5.5) має назву рівняння поступального руху твердого тіла.

Порівнюючи вираз (5.5) з рівнянням руху матеріальної точки, робимо висновок, що поступальний рух твердого тіла можна розглядати як рух матеріальної точки з масою, що дорівнює масі тіла, яка перебуває під дією сили, що дорівнює рівнодійній зовнішніх сил.

Якщо механічна система замкнута, то $\vec{F} = \mathbf{0}$, тоді:

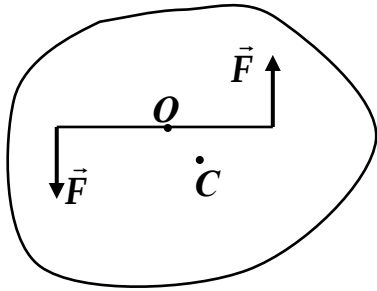
$$\frac{d}{dt} (M\vec{v}) = \mathbf{0} \text{ або } M\vec{v}_c = \text{const}, \quad (5.6)$$

де $\vec{v}_c$ – швидкість центра мас (центра інерції) механічної системи.

Згідно з (5.6), центр мас замкнутої механічної системи перебуває у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно.

Як приклад розглянемо рух Сонячної системи. Її можна вважати замкнутою, якщо знехтувати взаємодією її з іншими космічними тілами. Тоді центр мас Сонячної системи можна вважати таким, що рухається прямолінійно та рівномірно.

Розглянемо тверде тіло (мал. 5.1) у спокої. Нехай на нього одночасно діють дві сили $\vec{F}$, рівні за величиною і протилежні за напрямом, які прикладені в точках A і B . Ці точки не збігаються з центром мас C . Така система сил називається парою сил. Яким буде характер руху такого тіла?



мал. 5.1

Результуюча прикладених до тіла зовнішніх сил дорівнює нулю. Відповідно, центр мас C тіла має залишатися у спокої. Тому тіло, одна точка якого нерухома (т. C), може тільки обертатися навколо цієї точки. І тіло буде обертатися навколо центра мас C .

Обертальним називається такий рух, при якому всі точки твердого тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання.

При нерухомій осі обертання всі точки твердого тіла рухаються по колах, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Відомо, що рух точки по колу можна описати як лінійними характеристиками (дуговою координатою S , лінійною швидкістю $\vec{v}$, лінійним прискоренням $\vec{a}$), так і кутовими (кутом повороту φ , кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, кутовим прискоренням $\vec{\beta}$).

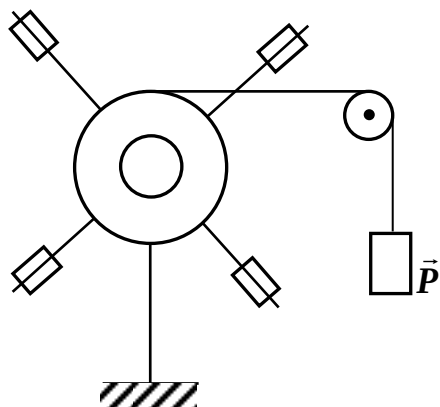
Оскільки лінійні кінематичні характеристики руху точок залежать від їх віддалі до осі обертання, то вони не можуть бути характеристиками обертового руху тіла як цілого.

З іншого боку, кутові характеристики (φ , $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$) для всіх точок твердого тіла мають бути однаковими, бо в іншому випадку ці точки перемістилися б одна відносно іншої, що для абсолютно твердого тіла є неможливим.

Отже, кут повороту φ , кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\beta}$, обчислені для будь-якої точки, будуть одночасно характеризувати обертання тіла як цілого.

5.2. Момент сили

Щоби зрозуміти від чого залежить характер обертання тіла навколо нерухомої осі, розглянемо такий дослід (мал. 5.2).



мал. 5.2

Візьмемо тіло у вигляді легкої хрестовини, на кінцях якої закріплено рівні масивні вантажі m . Тертям знехтуємо.

Будемо змінювати величину вантажу P , радіус шківів R , масу вантажів m та їх відстань l від осі обертання, досліджуючи, як ці зміни впливатимуть на величину кутового прискорення β .

За результатами такого дослідження приходимо до висновку, що кутове прискорення β :

- 1) прямо пропорційне натягу нитки $\vec{F}$ і радіусу шківів R ;
- 2) обернено пропорційне масі вантажів m і квадрату їх віддалі l від осі обертання.

Отже, прискорення обертального руху β залежить не тільки від величини діючої на тіло сили $\vec{F}$ і від віддалі R від осі обертання до лінії, вздовж якої діє сила. Добуток FR дає величину так званого моменту сили відносно осі обертання.

Із цього досліду, як показано вище, випливає, що величина кутового прискорення β залежить не тільки від маси обертального тіла, але і від розподілу цієї маси відносно осі обертання. Величина, яка залежить від обидвох цих причин, має назву моменту інерції тіла відносно осі обертання.

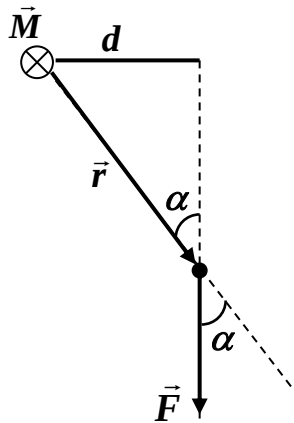
Отже, при вивченні обертального руху тіла треба брати до уваги ці дві нові фізичні величини: момент сили і момент інерції.

5.2.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили $\vec{F}$ відносно деякої точки O називається векторна величина $\vec{M}$, яка визначається виразом:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad (5.7)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із точки O до точки прикладання сили $\vec{F}$ (мал. 5.3).



мал. 6.3

З рівняння (5.7) робимо висновок, що момент сили $\vec{M}$ є аксіальним вектором. Його напрямок вибрано так, що обертання навколо точки O в напрямку сили $\vec{F}$ і вектором $\vec{M}$ утворюють правоґвинтову систему.

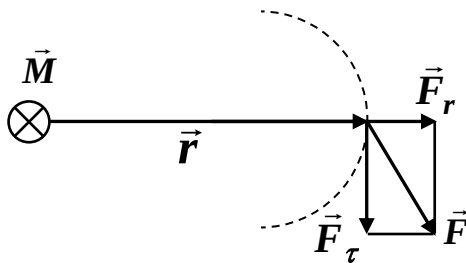
Модуль вектора $\vec{M}$ дорівнює:

$$M = rF \sin \alpha = F \cdot d, \quad (5.8)$$

де α – кут між напрямками векторів $\vec{M}$ і $\vec{F}$, а $d = r \sin \alpha$ – довжина перпендикуляра, який опущено з точки O на напрямок дії сили. Цю

довжину d називають плечем сили $\vec{F}$ відносно точки O . (мал. 5.3)

Формули (5.7) і (5.8) можна записати в іншому вигляді. Для цього розкладемо вектор $\vec{F}$ на дві складові: колінеарну з радіус-вектором $\vec{r}$ складову $\vec{F}_r$ і перпендикулярну до радіус-вектора $\vec{r}$ складову $\vec{F}_\tau$ (мал. 5.4).



мал. 6.4

Тоді:

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\tau.$$

А момент сили $\vec{M}$ запишемо так:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}(\vec{F}_r + \vec{F}_\tau)] = [\vec{r}\vec{F}_r] + [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \quad (5.9)$$

Перший доданок у правій частині (5.9) дорівнює нулю, бо вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}_\tau$ колінеарні (паралельні). Тому:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \quad (5.10)$$

Але вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}_\tau$ перпендикулярні, тому модуль вектора $\vec{M}$

$$M = r \cdot F_\tau. \quad (5.11)$$

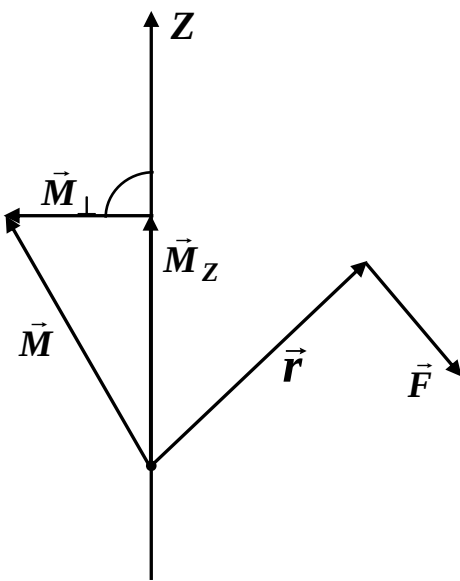
Із властивості векторного добутку випливає, що момент суми сил, які мають спільну точку прикладання, дорівнює сумі моментів складових сил:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N)] = [\vec{r}\vec{F}_1] + [\vec{r}\vec{F}_2] + \dots + [\vec{r}\vec{F}_N] = \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2.2. Момент сили відносно осі

Якщо тіло може обертатися тільки навколо деякої фіксованої осі, то здатність сили обертати тіло навколо цієї осі характеризується величиною, яка називається моментом сили відносно осі. (мал. 5.5)

Щоби в'яснити, що таке момент сили $\vec{F}$ відносно осі $\vec{Z}$, знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно точки O (мал. 5.5) і відкладемо цей вектор $\vec{M}$ з точки O (вважається, що вектори $\vec{F}$, $\vec{r}$ і $\vec{M}$ не лежать у площині малюнка). Тоді проводимо через точку O вісь, яку назвемо віссю Z , і розкладемо вектор $\vec{M}$ на дві складові:



мал. 5.5

$\vec{M}_Z$ – паралельну до осі Z і $\vec{M}_\perp$ – перпендикулярну до осі Z . Паралельну до осі Z складову моменту сили $\vec{M}_Z$ називають моментом сили відносно осі.

Позначивши момент сили відносно осі Z символом $\vec{M}_Z$, можна записати:

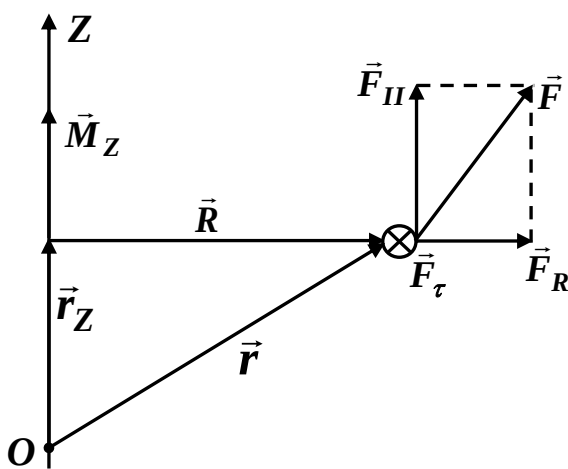
$$\vec{M}_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z. \quad (5.13)$$

При заданому $\vec{M}$ величина і напрямок вектора $\vec{M}_Z$ залежить від вибору осі Z . Якщо вісь Z збігається з напрямками вектора $\vec{M}$, то $\vec{M}_Z$ буде дорівнювати $\vec{M}$. Якщо ж вісь Z буде перпендикулярна до вектора $\vec{M}$, $\vec{M}_Z$ дорівнює нулю.

Вираз (5.13) можна зробити більш наглядним (мал. 5.6). Для цього радіус-вектор $\vec{r}$ запишемо так:

$$\vec{r} = \vec{r}_Z + \vec{R},$$

де $\vec{r}_Z$ – складова вектора $\vec{r}$,



мал. 5.6

паралельна до осі Z , $\vec{R}$ – складова вектора $\vec{r}$, перпендикулярна до осі Z .

Тоді момент сили відносно осі Z можна записати у вигляді:

$$\vec{M}_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z = [(\vec{r}_Z + \vec{R})\vec{F}]_Z = [\vec{r}_Z\vec{F}]_Z + [\vec{R}\vec{F}]_Z. \quad (5.14)$$

Але вектор $[\vec{r}_Z\vec{F}]$ є перпендикулярний до осі Z , тому його складова вздовж цієї осі дорівнює нулю.

Отже,

$$\vec{M}_Z = [\vec{R}\vec{F}]_Z. \quad (5.15)$$

Тепер подамо вектор $\vec{F}$ у вигляді суми трьох складових: $\vec{F}_H$ – паралельна до осі Z , $\vec{F}_R$ – колінеарна до вектора $\vec{R}$ і $\vec{F}_\tau$ – перпендикулярна до площини, у якій лежить вісь Z і вектор $\vec{R}$. На мал. 5.6 ця складова сили $\vec{F}$ показана кружечком з хрестиком. Якщо уявити собі коло з радіусом R , центр якого лежить на осі Z , то складова $\vec{F}_\tau$ буде направлена по дотичній до цього кола.

Тобто:

$$\vec{F} = \vec{F}_H + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau. \quad (5.16)$$

Врахувавши (5.16), рівняння (5.15) запишемо так:

$$\vec{M}_Z = [\vec{R}\vec{F}]_Z = [\vec{R}(\vec{F}_H + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau)]_Z = [\vec{R}\vec{F}_H]_Z + [\vec{R}\vec{F}_R]_Z + [\vec{R}\vec{F}_\tau]_Z. \quad (5.17)$$

Розглянемо кожен із доданків рівняння (5.17) окремо:

- вектор $[\vec{R}\vec{F}_H]$ перпендикулярний до осі Z , тому його складова на цю вісь дорівнює нулю;
- вектор $[\vec{R}\vec{F}_R]$ дорівнює нулю, бо вектори $\vec{R}$ і $\vec{F}_R$ колінеарні;
- вектор $[\vec{R}\vec{F}_\tau]_Z = [\vec{R}\vec{F}_\tau]$ паралельний до осі Z .

Тому:

$$\vec{M}_Z = [\vec{R}\vec{F}]_Z = [\vec{R}\vec{F}_\tau]. \quad (5.18)$$

Вектори $\vec{R}$ і $\vec{F}_\tau$ взаємно перпендикулярні. Модуль вектора $\vec{M}_Z$ дорівнює

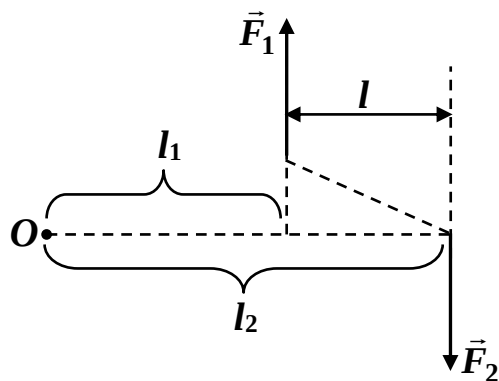
$$|\vec{M}_Z| = R F_\tau. \quad (5.19)$$

Величину R називають плечем сили $\vec{F}_\tau$ відносно осі Z .

Із рівняння (5.19) робимо висновок, що момент сили $\vec{M}_Z$ характеризує здатність сили $\vec{F}$ повертати тіло навколо осі Z .

Дійсно, складові сили $\vec{F}_H$ і $\vec{F}_R$ не можуть викликати обертання тіла навколо осі Z . Це обертання може викликати тільки складова $\vec{F}_\tau$.

5.2.3. Момент пари сил



мал. 5.7

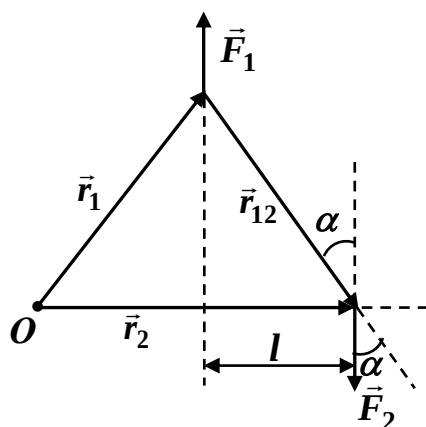
Парою сил називають дві рівні за величиною і протилежно направлені сили, які не діють вздовж однієї і тієї ж прямої (мал. 5.7).

Віддаль l між прямими, вздовж яких діють сили, називається плечем пари.

Покажемо, що момент пари сил відносно будь-якої точки буде один і той самий. Момент сили $\vec{F}_1$ дорівнює (мал. 5.7): $M_1 = F_1 l_1$ і направлений до нас. Момент сили $\vec{F}_2$ дорівнює $M_2 = F_2 l_2$ і направлений від нас. Результуючий момент направлений від нас і дорівнює:

$$M = M_2 - M_1 = F(l_2 - l_1) = F \cdot l, \quad F_1 = F_2 = F. \quad (5.20)$$

Із співвідношення (5.20) робимо висновок: момент пари сил не залежить від положення точки O на площині, у якій лежить пара сил.



мал. 5.8

Вибираємо точку O довільним чином (мал. 5.8). Відповідно до малюнка:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}. \quad (5.21)$$

Сумарний момент сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_2 \vec{F}_2]$$

або

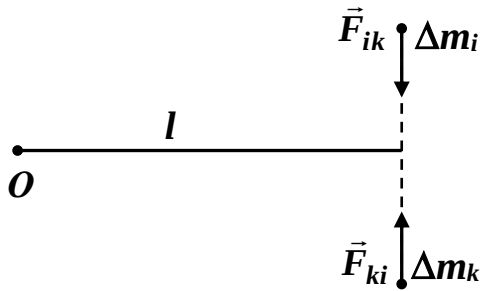
$$\begin{aligned} \vec{M} &= [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [(\vec{r}_1 + \vec{r}_{12}) \vec{F}_2] = \\ &= [\vec{r}_1 \vec{F}_1] + [\vec{r}_1 \vec{F}_2] + [\vec{r}_{12} \vec{F}_2]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Але $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, тому перші два члени в (5.22) взаємно компенсуються і кінцевий результат є:

$$\vec{M} = [\vec{r}_{12} \vec{F}_2] \quad \text{або} \quad M = F_2 r_{12} \sin \alpha = F_2 l = F_1 l. \quad (5.23)$$

Отже, згідно з (5.23), момент пари сил є перпендикулярний до площини, у якій лежать сили, і чисельно дорівнює добутку модуля будь-якої із сил на плече пари сил.

5.2.4. Сумарний момент внутрішніх сил



мал. 5.9

Сили, з якими взаємодіють одна з одною дві будь-які елементарні маси, лежать на одній і тій самій прямій (мал. 5.9).

Їх моменти відносно довільної точки O рівні за величиною і протилежні за напрямом. Тому сума моментів всіх внутрішніх сил для будь-якої системи матеріальних точок, зокрема для твердого тіла, завжди дорівнює нулю.

Цей висновок має місце для сумарного моменту всіх внутрішніх сил, взятого відносно довільної осі.

5.3. Момент інерції. Теорема Штейнера. Моменти інерції деяких тіл

5.3.1. Момент інерції

Моментом інерції матеріальної точки масою m_i , яка перебуває на відстані r_i від осі обертання, називається фізична величина

$$J = m_i r_i^2. \quad (5.24)$$

Фізична величина J , що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрат їх відстаней від деякої осі Z , називається моментом інерції системи матеріальних точок (тіла) відносно осі Z .

$$J = \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.25)$$

З (5.25) робимо висновок, що момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин.

Якщо тіло однорідне, тобто його властивості в усіх точках однакові, то густину його знаходимо за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (5.26)$$

де m – маса тіла, V – його об'єм. У випадку однорідного тіла густина дорівнює масі, що припадає на одиницю об'єму тіла.

Для неоднорідних тіл вираз (5.26) дає середню густину. Тоді густина в даній точці визначається так:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (5.27)$$

Згідно з (5.27) елементарна маса Δm_i дорівнює:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Тоді момент інерції тіла можна записати:

$$J = \sum_i \rho_i r_i^2 \Delta V_i. \quad (5.28)$$

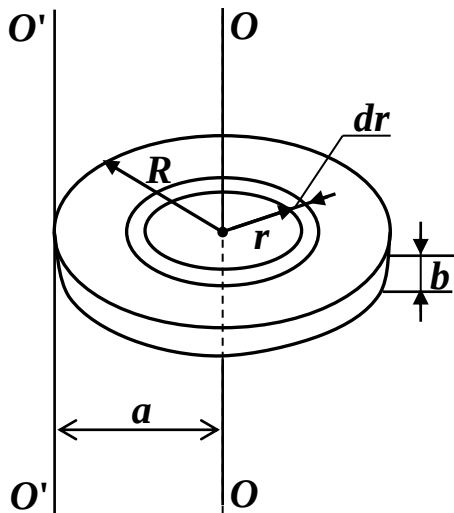
Коли густина тіла стала, то:

$$J = \rho \sum_i r_i^2 \Delta V_i. \quad (5.29)$$

Для точніших розрахунків переходимо до інтегрування:

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \quad (5.30)$$

Інтеграли в (5.30) беруться по всьому об'єму тіла.



мал. 5.10

Знайдемо моменти інерції однорідного диска відносно осі OO , яка перпендикулярна до площини диска і проходить через його центр (мал. 5.10).

Для цього розбиваємо диск на кільцеві шари товщиною dr . Усі точки одного шару будуть перебувати на однаковій віддалі r від осі OO . Об'єм такого кільцевого шару дорівнює:

$$dV = 2\pi r \cdot dr \cdot b.$$

Диск однорідний, тому його момент інерції відносно осі OO буде:

$$J = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 \cdot b \cdot 2\pi \cdot dr. \quad (5.31)$$

де R – радіус диска.

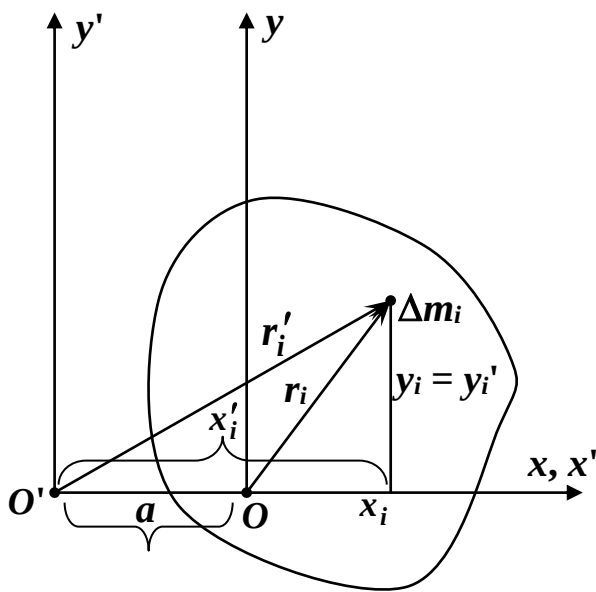
Проінтегрувавши праву частину рівняння (5.31), одержуємо:

$$J = 2\pi b \cdot \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b \cdot \rho \frac{R^4}{4}, \text{ але } m = \rho R^2 \cdot b, \text{ тоді}$$

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (5.32)$$

Якщо треба знайти момент інерції диска відносно осі $O'O'$, яка паралельна до осі OO (мал. 5.10), то обчислення будуть значно складнішими. У такому разі краще використати теорему Штейнера.

5.3.2. Теорема Штейнера



мал. 5.11

Теорема Штейнера формулюється так: момент інерції J тіла відносно довільної осі $O'O'$ дорівнює сумі моменту інерції J_0 відносно осі, яка паралельна до даної і проходить через центр інерції тіла (вісь OO), і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між цими осями (мал.5.10).

$$J = J_0 + ma^2. \quad (5.33)$$

Для доведення теореми Штейнера розглянемо тіло довільної форми (мал. 5.11).

Виберемо дві паралельні одна до одної осі OO і $O'O'$. Вісь OO проходить через центр інерції тіла. Проведемо осі координат так, що вісь z збігається з віссю OO , а z' – з віссю $O'O'$. Осі x і x' вибираємо так, щоб вони збіглися і проходили через центр інерції тіла. Тоді:

$$x'_i = a + x_i; y'_i = y_i, \quad (5.34)$$

де a – віддаль між осями. Квадрат віддалі елементарної маси Δm_i від осі OO дорівнює:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (5.35)$$

а квадрат її віддалі від осі $O'O'$ дорівнює:

$$r'^2_i = x'^2_i + y'^2_i = (x_i + a)^2 + y_i^2. \quad (5.36)$$

Тоді момент інерції тіла відносно осі OO буде:

$$J_0 = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i, \quad (5.37)$$

а момент інерції його відносно осі $O'O'$ буде:

$$\begin{aligned} J &= \sum_i r_i'^2 \Delta m_i = \sum_i [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i = \\ &= \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum_i \Delta m_i + 2a \sum_i x_i \Delta m_i. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Перша сума в (5.38) тотожна із (5.37), тобто є J_0 ; друга сума дає ma^2 ; третя сума дорівнює нулю.

Оскільки вісь z проходять через центр інерції тіла, то координата центра інерції тіла x_c дорівнює нулю. Але за означенням

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{m}, \text{ а отже } \sum \Delta m_i x_i = 0 \text{ (бо } x_c = 0 \text{)}.$$

Тоді вираз (5.38) набирає вигляду:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (5.39)$$

Вираз (5.39) тотожний виразу (5.33), а отже, теорема Штейнера доведена.

5.3.3. Моменти інерції деяких тіл

1. Момент інерції тонкого кільця відносно осі, що проходить через його центр, перпендикулярно до площини (мал. 5.12):

$$J = mR^2. \quad (5.40)$$

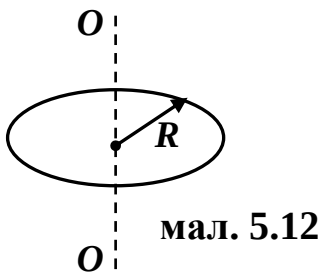
1. Момент інерції товстостінного циліндра відносно осі симетрії (мал. 5.13):

$$J = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2), \quad (5.41)$$

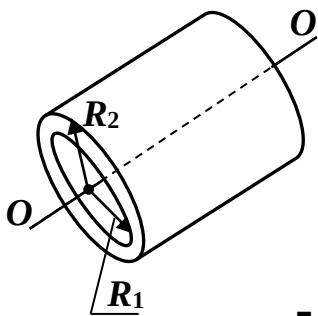
де R_1 – внутрішній і R_2 – зовнішній радіуси.

2. Момент інерції диска відносно осі, яка збігається з одним із його діаметрів (мал. 5.14):

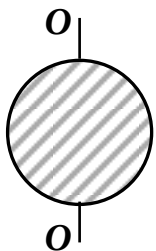
$$J = \frac{1}{4} mR^2. \quad (5.42)$$



мал. 5.12

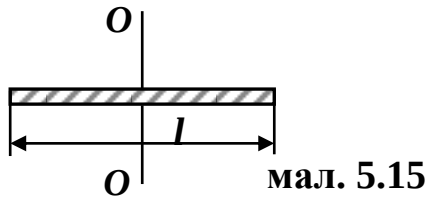


мал. 5.13



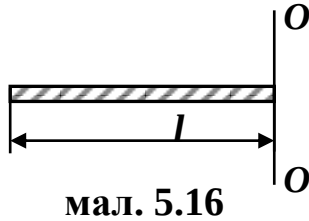
мал. 5.14

4. Момент інерції тонкого стержня відносно осі, яка проходить через його середину (мал. 5.15):



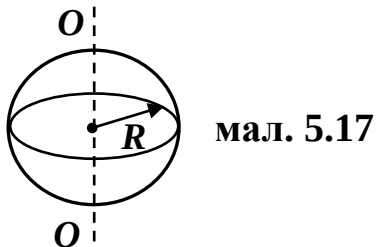
$$J = \frac{1}{12} ml^2. \quad (5.43)$$

5. Момент інерції тонкого стержня відносно осі, яка проходить через один із його кінців (мал. 5.16):



$$J = \frac{1}{3} ml^2. \quad (5.44)$$

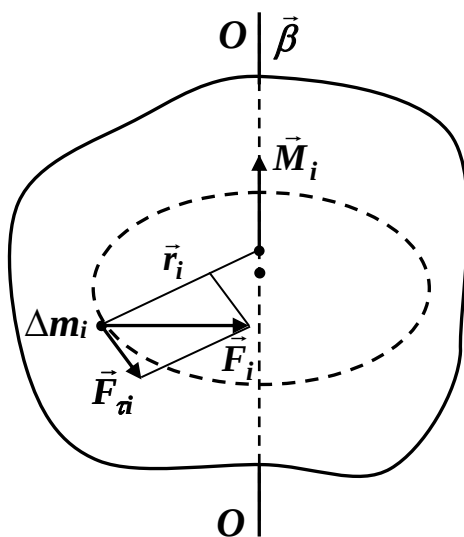
5. Момент інерції кулі відносно осі, яка збігається з одним із його діаметрів (мал. 5.17):



$$J = \frac{2}{5} mR^2. \quad (5.45)$$

5.4. Основне рівняння динаміки обертового руху

Розглянемо тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі (мал. 5.18). Рух будь-якої елементарної маси Δm_i , на які можна розбити тіло, є рухом точки по колу. Оскільки швидкість будь-якої елементарної маси Δm_i лежить весь час у площині кола, то



рівнодійна всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), прикладених до цієї маси Δm_i , теж лежить в тій самій площині. Позначимо цю рівнодійну через $\vec{F}_i$.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для тангенціальних складових сил:

$$\Delta m_i a_{\tau i} = F_{a i}, \quad (5.46)$$

де $a_{\tau i}$ – тангенціальне прискорення. Нормальна складова сили забезпечує доцентрове прискорення і на кутове прискорення не впливає. Врахувавши,

що $\mathbf{a}_{\tau i} = \beta \mathbf{r}_i$, і помноживши обидві частини (5.46) на $\mathbf{r}_i$, одержуємо:

$$\Delta m_i \beta r_i^2 = F_{\tau i} r_i. \quad (5.47)$$

Але $F_{\tau i} r_i = M_i$, тому

$$\Delta m_i r_i^2 \beta = M_i, \quad (5.48)$$

де M_i – величина моменту сили $\vec{F}_i$ відносно осі OO .

Вектори $\vec{\beta}$ і $\vec{M}_i$ мають однакові напрямки, які збігаються з віссю OO . Тому рівність (5.48) можна переписати у векторній формі:

$$\Delta m_i r_i^2 \vec{\beta} = \vec{M}_i. \quad (5.49)$$

Скалярна величина $\Delta m_i r_i^2$ називається моментом інерції матеріальної точки відносно осі OO .

Момент сил $\vec{M}_i$ можна подати як

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i\text{вн}} + \vec{M}_{i\text{зв}}, \quad (5.50)$$

де $\vec{M}_{i\text{вн}}$ – результуючий момент усіх внутрішніх сил, $\vec{M}_{i\text{зв}}$ – результуючий момент всіх зовнішніх сил відносно тієї ж осі OO .

Просумуємо рівняння (5.48) за всіма елементарними масами

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_{i\text{вн}} + \vec{M}_{i\text{зв}}. \quad (5.51)$$

Беручи до уваги, що $\sum_{i\text{вн}} \vec{M}_{i\text{вн}} = \mathbf{0}$ і $\vec{\beta}$ – однакове для усіх точок, запишемо:

$$(\sum_i \Delta m_i r_i^2) \vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_{i\text{зв}}. \quad (5.52)$$

Але $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = J$, а $\sum_{i\text{зв}} \vec{M}_{i\text{зв}} = \vec{M}$. Вектор $\vec{M}$ скерований вздовж осі OO і в ту ж сторону, що $\vec{\beta}$ ($\sum_i \Delta m_i r_i^2 > 0$).

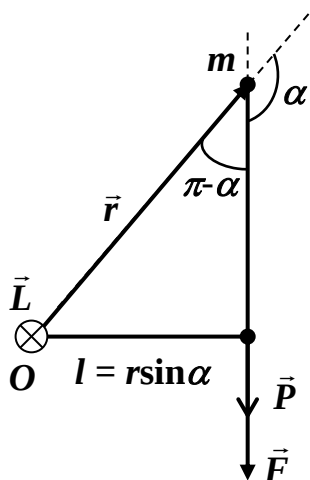
Тоді рівняння (5.52) набуває вигляду:

$$J \vec{\beta} = \vec{M}. \quad (5.53)$$

Рівняння (5.53) називають основним рівнянням динаміки обертового руху. За формою воно подібне до другого закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. Але при обертовому русі роль сили відіграє момент сили, роль маси – момент інерції і роль лінійного прискорення – кутове прискорення.

5.5. Момент імпульсу твердого тіла. Закон збереження моменту імпульсу

5.5.1. Момент імпульсу матеріальної точки



мал. 5.19

Подібно до моменту сили визначається момент імпульсу матеріальної точки. Момент імпульсу матеріальної точки O дорівнює:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{v}], \quad (5.54)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із точки O до цієї точки простору, у якій перебуває матеріальна точка, $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс точки (мал. 5.19).

Увівши плече $l = r \sin \alpha$, модуль вектора моменту імпульсу можна записати:

$$L = r p \sin \alpha = p \cdot l. \quad (5.55)$$

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно осі Z називається складова $\vec{L}_Z$ на цю вісь моменту імпульсу $\vec{L}$ відносно точки O , яка лежить на цій осі.

Знайдемо як змінюється момент імпульсу із часом. Для цього продиференціюємо (5.54) по часу t , використавши правило диференціювання добутку:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (5.56)$$

Перший векторний добуток у правій частині рівняння (5.56) дорівнює нулю (обидва вектори $\vec{v}$ і $\vec{p}$ мають однаковий напрям).

Вектор $\frac{d\vec{p}}{dt}$, що входить у другий векторний добуток рівняння (5.56), дорівнює силі $\vec{F}$ ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, за II законом Ньютона), тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}, \quad (5.57)$$

де $\vec{M}$ – момент сил, прикладених до матеріальної точки, взятий відносно тієї ж точки O , відносно якої розглядається момент імпульсу $\vec{L}$.

Із співвідношення (5.57) можна зробити висновок: якщо результуючий момент діючих на матеріальну точку сил відносно якої-небудь точки O дорівнює нулю, то момент імпульсу матеріальної точки, взятий відносно тієї ж точки O , буде залишатися сталим (незмінним).

Використавши складові по осі Z від векторів, які входять у формулу (5.57), одержуємо вираз:

$$\frac{d\vec{L}_Z}{dt} = \vec{M}_Z. \quad (5.58)$$

Порівнюючи вирази $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ і $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, робимо висновок, що подібно до того, як похідна по часу від імпульсу дорівнює силі, яка діє на матеріальну точку, так само похідна по часу від моменту імпульсу дорівнює моменту сили.

5.5.2. Момент імпульсу твердого тіла

Вектор моменту імпульсу твердого тіла відносно даної осі дорівнює сумі векторів моментів імпульсу всіх його елементів відносно тієї ж осі. Тобто,

$$L = \sum_i \vec{r}_i m_i v_i, \quad (5.59)$$

але $v_i = \omega r_i$, тоді

$$L = \sum_i \vec{r}_i m_i \omega r_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.60)$$

Відомо, що $\sum_i m_i r_i^2 = J$. Відповідно:

$$L = J\omega. \quad (5.61)$$

J – завжди скалярна величина, тоді у векторній формі співвідношення (5.61) набуває вигляду:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (5.62)$$

Момент імпульсу тіла відносно деякої осі обертання чисельно дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість його обертання.

5.5.3. Закон збереження моменту імпульсу твердого тіла

Запишемо основне рівняння динаміки обертового руху тіла у вигляді:

$$\vec{M} = J\vec{\beta} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.63)$$

Так як момент інерції твердого тіла відносно даної осі, що зберігає своє положення в тілі, не змінюється, то рівняння (5.63) можна записати так:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad (5.64)$$

де $\vec{L} = J\vec{\omega}$ – момент імпульсу тіла. А зміну моменту імпульсу знайдемо за формулою:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (5.65)$$

Отже, зміна моменту імпульсу твердого тіла відносно деякої осі обертання дорівнює імпульсу моменту прикладених до тіла зовнішніх сил (відносно тієї ж осі).

Із співвідношення (5.64) можна зробити такий висновок: при відсутності моменту зовнішніх сил ($\vec{M} = 0$) момент імпульсу тіла залишається сталим (при $\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ і $\vec{L} = \text{const}$). Цей закон називається законом збереження моменту імпульсу.

Для обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі при $\vec{M} = 0$ момент імпульсу:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}. \quad (5.66)$$

При незмінному моменті інерції тіла (при $\vec{M} = 0$) кутова швидкість обертання тіла залишається сталою. Якщо момент інерції тіла змінюється, то одночасно змінюється і кутова швидкість так, що

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = \text{const}. \quad (5.67)$$

У цьому випадку переміщення мас у тілі, яке змінює момент його інерції, відбувається у результаті дії внутрішніх сил.

Якісним підтвердженням закону збереження моменту імпульсу можуть бути досліди із лавою Жуковського, яка з дуже малим тертям може обертатися навколо вертикальної осі. Лаву з людиною на ній, яка тримає в розведених руках гантелі, приводять в обертання. Як

тільки людина опускає руки і її момент інерції зменшується, то кутова швидкість обертання помітно збільшується; швидкість обертання знову зменшується, коли знову розвести руки.

Фігурист на ковзанах для надання своєму тілу швидкого обертання при початковому поштовху відкидає в сторону руки і ногу, а потім наближає руки до тіла і зближує ноги. При цьому момент інерції тіла зменшується і збільшується швидкість обертання.

Із закону збереження моменту імпульсу випливає, що внутрішні сили не можуть змінити моменту імпульсу тіла або системи тіл. Але внутрішні сили можуть викликати обертання частин всередині системи.

Якщо людина стоїть на нерухомій лаві Жуковського і тримає над головою насаджене на палицю велосипедне колесо, яке також нерухоме, то момент імпульсу системи відносно вертикальної осі дорівнює нулю. Якщо людина змусить велосипедне колесо обертатися, то сама вона разом з лавою почне обертатися у протилежний бік, так що момент імпульсу системи залишиться дорівнювати нулю.

На цьому ж досліді легко показати векторний характер моменту імпульсу. Якщо перевернути палицю з обертовим колесом вниз, то напрям обертання людини з лавою також зміниться на протилежний.

К.Е. Ціолковський запропонував метод керування орієнтацією ракети, який ґрунтується на законі збереження моменту імпульсу. На космічному апараті розміщують три маховики із взаємно перпендикулярними осями обертання. Маховики і тіло космічного корабля утворюють систему, момент імпульсу якої дорівнює нулю. Якщо яким-небудь механізмом почати обертати один із маховиків, то для цього, щоби момент імпульсу системи залишався незмінним, корабель повинен почати обертатися навколо осі, яка паралельна або збігається з віссю маховика, але в протилежному до обертання маховика напрямі.

5.6. Кінетична енергія обертowego руху твердого тіла

5.6.1. Кінетична енергія обертowego руху

Кінетична енергія твердого тіла скінчених розмірів дорівнює сумі кінетичних енергій елементів, на які поділено тіло.

У загальному випадку тіло може рухатися поступально й одночасно обертатися. Розглянемо спочатку випадок обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кінетична енергія кожного елемента (матеріальної точки) тіла:

$$\Delta T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (5.68)$$

де m_i – маса i -го елемента тіла, v_i – його лінійна швидкість.

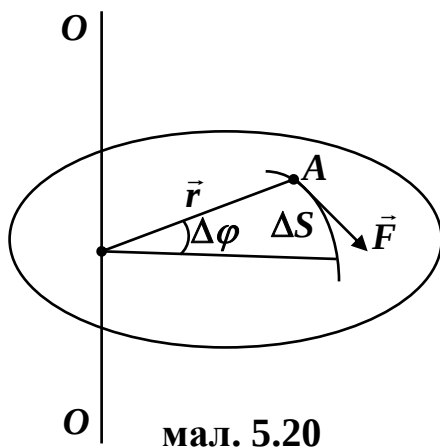
Якщо віддаль цього елемента (його центра) від осі обертання v_i , то, беручи до уваги, що $v_i = \omega r_i$, рівність (5.68) запишемо так:

$$\Delta T_i = \omega^2 \frac{m_i r_i^2}{2}. \quad (5.69)$$

Просумувавши за всіма елементами рівняння (5.69), одержуємо вираз для кінетичної енергії тіла:

$$T = \sum_i \Delta T_i = \sum_i \omega^2 \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (5.70)$$

Висновок: формула (5.70) відрізняється від відповідної формули для кінетичної енергії поступального руху тим, що замість лінійної швидкості до неї входить кутова швидкість, а замість маси – момент інерції.



5.6.2. Зміна кінетичної енергії при обертовому русі

Розглянемо зміну кінетичної енергії тіла, що обертається, під дією сили $\vec{F}$ (мал. 5.20). Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі OO .

Нехай результуюча сила $\vec{F}$, прикладена в точці A тіла, яка є на віддалі $\vec{r}$ від осі. Сила $\vec{F}$ лежить у площині траєкторії точки і направлена по дотичній до неї.

При повороті тіла на кут $\Delta\varphi$ точка прикладання сили перемістилася на довжину дуги ΔS . Якщо кут повороту досить малий, то дугу dS можна прийняти рівною переміщенню dS . Але елементарна робота dA сили $\vec{F}$ на шляху dS дорівнює:

$$dA = FdS = Frd\varphi = Md\varphi, \quad (5.71)$$

бо
$$dS = rd\varphi, \quad M = F \cdot r.$$

Повна робота при повороті на кут φ :

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi. \quad (5.72)$$

Якщо момент рівнодійної зовнішніх сил – величина стала, то із співвідношення (5.72) одержуємо:

$$A = M\varphi, \quad (5.73)$$

При обертовому русі робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту тіла.

Якщо момент сили змінюється в часі, то робота обчислюється виразом (5.72).

Обчислюємо зміну кінетичної енергії тіла при обертовому русі. Для цього використаємо основне рівняння динаміки обертового руху:

$$M = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.74)$$

Перемножимо обидві частини рівняння (5.74) на кут повороту $d\varphi = \omega dt$, де ω – кутова швидкість обертання і dt – дуже малий інтервал, протягом якого можна вважати $M = \text{const}$:

$$Md\varphi = J \frac{d\omega}{dt} d\varphi = J \frac{d\omega}{dt} \omega dt = Jd\left(\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (5.75)$$

Проінтегрувавши (5.75), одержуємо:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Md\varphi = \int_{\omega_0}^{\omega_1} Jd\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = J \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = J \frac{\omega_1^2}{2} - J \frac{\omega_0^2}{2}. \quad (5.76)$$

$$\text{Або: } A = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2}. \quad (5.77)$$

Отже, зміна кінетичної енергії тіла при обертовому русі дорівнює роботі сил, момент яких надає тілу кутового прискорення.

5.6.3. Загальний випадок руху твердого тіла

У загальному випадку рух твердого тіла можна описати як накладання двох рухів – поступального з деякою швидкістю $\vec{v}_0$ і обертального навколо відповідної осі.

Розкладемо складний рух твердого тіла на поступальний рух із швидкістю центра інерції $\vec{v}_c$ і обертальний навколо осі, яка проходить через центр інерції. Тоді швидкість i -ої елементарної маси можна записати так:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i', \quad (5.78)$$

де $\vec{v}_i'$ – швидкість, зумовлена обертанням тіла навколо осі, яка проходить через центр інерції.

Знайдемо квадрат швидкості $\vec{v}_i$:

$$v_i^2 = \vec{v}_i^2 = (\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2 = (\vec{v}_c + \vec{v}_i')(\vec{v}_c + \vec{v}_i') = \vec{v}_c^2 + 2\vec{v}_c\vec{v}_i' + v_i'^2. \quad (5.79)$$

Тоді кінетична енергія тіла буде дорівнювати:

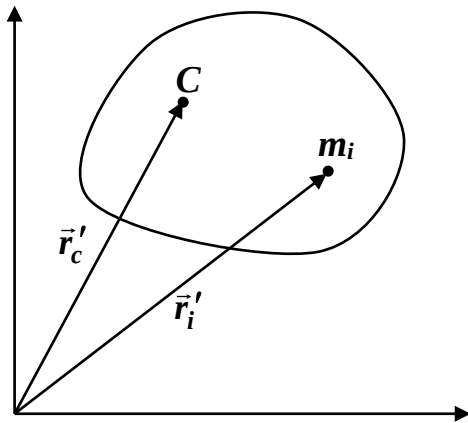
$$T = \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{\Delta m_i v_c^2}{2} + \sum_i \Delta m_i \vec{v}_c \vec{v}_i' + \sum_i \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2}. \quad (5.80)$$

Винесемо постійні множники $\vec{v}_c^2$ і $\vec{v}_c$ за знак суми і врахувавши, що $\sum_i m_i = m$ – маса тіла, рівняння (5.80) запишемо так:

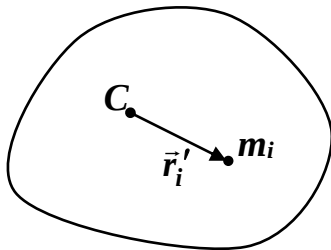
$$T = \frac{m v_c^2}{2} + \vec{v}_c \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i' + \sum_i \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2}. \quad (5.81)$$

Суму $\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i'$ можна перетворити так:

$$\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i' = \frac{d}{dt} \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i', \quad (5.82)$$



мал. 5.21



мал. 5.22

де $\vec{r}'_i$ – радіус-вектор, що визначає положення i -ої елементарної маси відносно центра інерції (мал. 5.21). Але $\frac{1}{m} \sum \Delta m_i \vec{r}'_i = \vec{r}'_c$ – радіус-вектор центра інерції відносно тієї точки із якої проведено вектори $\vec{r}'_i$. Тільки за таку точку в цьому випадку прийнято центр інерції (мал. 5.22), тому $\vec{r}'_c$ дорівнює нулю і нулю, відповідно, дорівнює вираз (5.82).

Сума $\sum_i \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2}$ виражає

кінетичну енергію тіла, зумовлену його обертанням навколо осі, що проходить через центр інерції.

$$\text{Отже, } T = \frac{m v_c^2}{2} + J_c \frac{\omega^2}{2}, \quad (5.83)$$

Кінетична енергія тіла складається з енергії поступального руху тіла із швидкістю, яка дорівнює швидкості центра інерції і енергії обертального руху навколо осі, що проходить через центр інерції.

5.7. Вільні осі обертання. Гіроскоп. Прецесія. Гіроскопічні сили. Застосування гіроскопічного ефекту

Установлено, що тіло може залишатися в стані спокою у цьому випадку, якщо немає причин, які приводять до виникнення поступального руху або обертання. Для цього є необхідним і достатнім виконання таких двох умов:

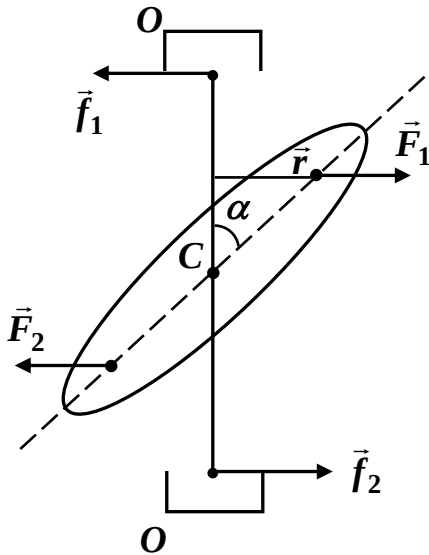
- 1) сума всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла, повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_i \vec{F}_{\text{зов}} = 0; \quad (5.84)$$

2) результуючий момент зовнішніх сил відносно будь-якої точки повинен дорівнювати нулю:

$$\sum_i \vec{M}_{\text{зов}} = \vec{0}. \quad (5.85)$$

5.7.1. Вільні осі обертання



мал. 5.23

Нерухомість осі, відносно якої обертається тверде тіло, забезпечується пристроями типу підшипників, підп'ятників або сферичних шарнірів, які розміщуються на кінцях осі (мал. 5.23).

Сили реакції опори, які діють на вісь при обертанні і при відсутності обертання, загалом різні.

Розглянемо сили реакції, які виникають при обертанні навколо вертикальної осі, яка утворює деякий кут α з віссю його симетрії. Нехай вісь обертання OO проходить через центр інерції тіла, а тертя у підп'ятниках мале.

Доки тіло нерухоме, на його частинки діє сила тяжіння, рівнодійна якої прикладена в центрі ваги (інерції) і направлена вздовж осі вниз.

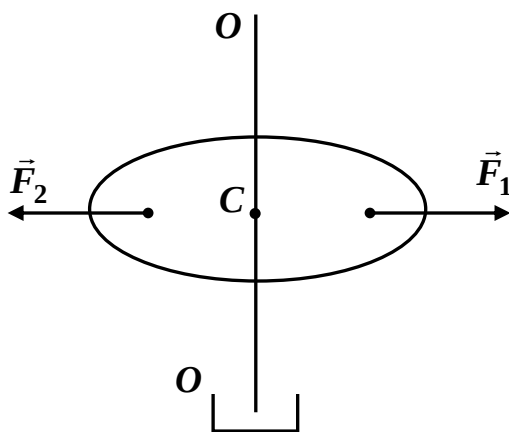
Відповідно, на вісь діє сила реакції тільки нижньої опори, яка направлена вздовж осі вгору. Ця сила деформує вісь, але не викликає обертання, так як її момент відносно осі обертання дорівнює нулю.

Припустимо, що тіло почало обертатися навколо осі OO з кутовою швидкістю ω . Тепер на кожну частинку масою m , що віддалена від осі обертання на r , окрім сили тяжіння, діє доцентрова сила, яка направлена до осі в площині обертання частинки і дорівнює $m\omega^2 r$.

Поява цієї сили зумовлена деформацією осі і частинок, які лежать між віссю і частинкою, що розглядається. На вісь зі сторони частинок діє така ж за величиною, але протилежна за напрямком сила.

Перетнемо тіло площиною, яка проходить через вісь обертання OO , перпендикулярно до площини малюнка. Частинки, які перебувають справа від площини, створюють на осі рівнодійну силу $\vec{F}_1$, скеровану вправо, а ті, що лежать зліва – рівнодійну $\vec{F}_2$, скеровану вліво.

Пара цих сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ намагається повернути вісь OO за годинниковою стрілкою, внаслідок чого в підп'ятниках виникають рівні за величиною і протилежно скеровані сили реакції $\vec{f}_1$ і $\vec{f}_2$. Цих сил, коли тіло було нерухоме, не було. Вони виникли як наслідок обертання, тому їх називають динамічними реакціями на відміну від статичних, які діють на нерухоме тіло.



мал. 5.24

При постійній кутовій швидкості обертання динамічні реакції перпендикулярні до осі обертання (при відсутності сил тертя) і пропорційні квадрату кутової швидкості.

Надамо тілу можливість вільно обертатися у вертикальній площині. Тоді під дією пари сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ тіло повернеться. Його велика вісь симетрії стане перпендикулярною до осі обертання (мал. 5.24).

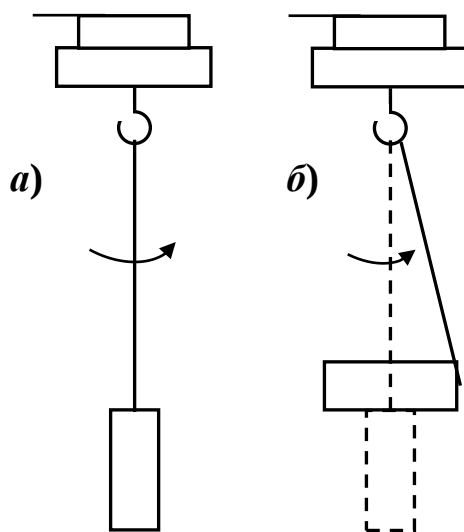
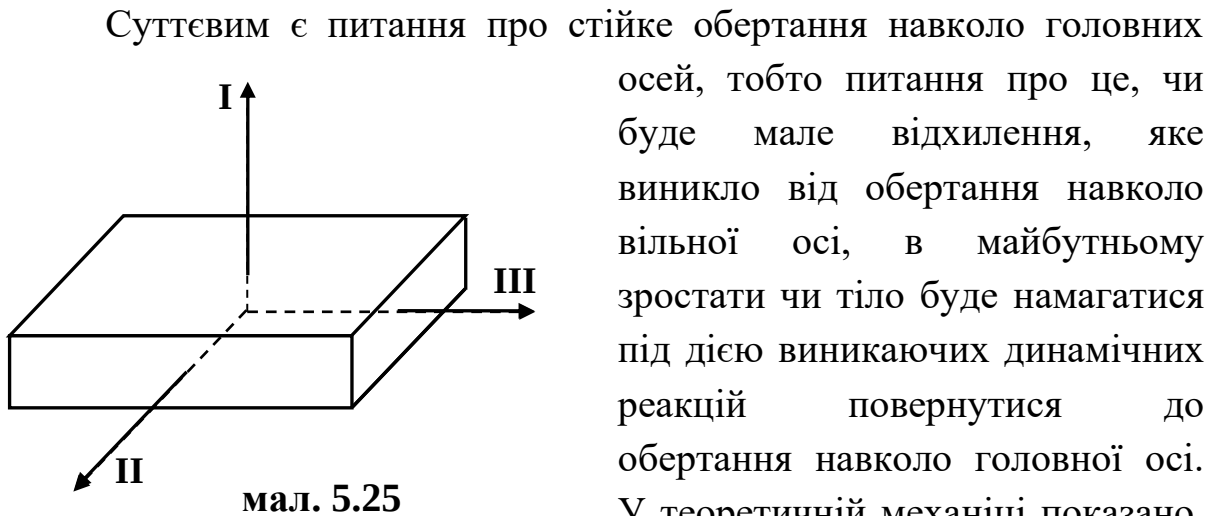
Центр інерції не змінює свого положення на осі OO . У цьому випадку сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ діють в площині, яка перпендикулярна до осі обертання. І момент цих сил відносно центра інерції тіла дорівнює нулю. Ці сили розтягують тіло, але не створюють обертання у вертикальній площині. Якщо ми тепер заберемо верхній підп'ятник, то положення осі OO ніяк не зміниться. Динамічні реакції опори в цьому випадку будуть такі ж, як і статичні.

Зв'язані з тілом осі, при обертанні відносно яких динамічні реакції опори дорівнюють статичним, називаються вільними осями.

Теоретичні дослідження показують, що в будь-якому тілі довільної форми існують три взаємно перпендикулярні осі, які

проходять через центр інерції тіла, які можуть служити вільними осями обертання. Їх називають головними осями інерції.

Так для прямокутного однорідного паралелепіпеда головні осі інерції – це осі, які проходять через центри протилежних граней.



мал. 5.26

Підвішена за один із кінців паличка при малих швидкостях обертається у вертикальному положенні, тобто навколо осі з найменшим моментом інерції. (мал. 5.26, а). При збільшенні швидкості обертання паличка наперекір дії сили тяжіння займає горизонтальне положення і стійко обертається навколо осі з найбільшим моментом інерції (мал. 5.26,б).

Вісь із найменшим моментом інерції цікава тим, що відносно неї легко створити обертання.

Падаючий кіт, як відомо, із будь-якого положення встає на ноги. Для цього кіт у повітрі обертає хвостом і лапами так, щоб в

силу закону збереження моменту імпульсу повернутися навколо горизонтальної осі, відносно якої у кота найменший момент інерції.

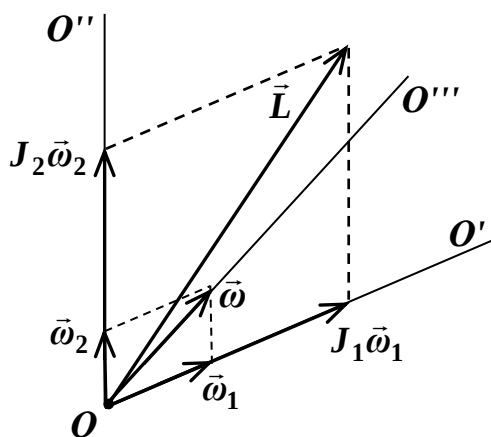
Акробат, який здійснює сальто в повітрі, навпаки, використовує обертання навколо осі з найбільшим моментом інерції. Так надійніше, бо обертання навколо осі з найбільшим моментом інерції є стійкішим, ніж обертання відносно осі, момент інерції відносно якої є меншим.

5.7.2. Гіроскоп. Прецесія гіроскопа

Гіроскопом називається масивне однорідне тіло, яке швидко обертається відносно однієї із головних осей інерції.

Із визначення випливає, що гіроскоп має вісь симетрії (оскільки він є тілом обертання), яка служить однією із головних осей інерції. Часто за вісь обертання гіроскоп вибирається головна вісь інерції, якій відповідає максимальний момент інерції. Цю вісь будемо називати віссю гіроскопа.

Нехай вісь гіроскопа при його обертанні залишається нерухомою. Відповідно, вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ лежить на цій осі. Вектор моменту імпульсу $\vec{L} = J\vec{\omega}$ також направлений вздовж осі гіроскопа. Отже, вісь гіроскопа, миттєва вісь обертання і вісь моменту імпульсу в цьому випадку збігаються.



мал. 5.27

Припустимо, що гіроскоп має дуже велику швидкість обертання $\vec{\omega}_1$, навколо власної осі OO' (мал. 5.27) і в цей же час повільно обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ навколо вертикальної осі OO'' . Напрямок миттєвої осі обертання визначається вектором миттєвої кутової швидкості результуючого обертання:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad (5.86)$$

На малюнку бачимо (внаслідок того, що $\vec{\omega}_1 \gg \vec{\omega}_2$), що миттєва вісь обертання OO''' лежить близько до осі гіроскопа OO' .

Побудувавши вектори моменту імпульсу $\vec{L}_1$ і $\vec{L}_2$ ($\vec{L}_1 = J_1 \vec{\omega}_1$; $\vec{L}_2 = J_2 \vec{\omega}_2$), знаходимо результуючий момент імпульсу гіроскопа $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$. Бачимо, що і вісь моменту імпульсу лежить близько до осі гіроскопа.

Отже, при обертанні реального гіроскопа його вісь, миттєва вісь обертання і вісь моменту імпульсу хоч і не збігаються, але розходження їх напрямків незначне.

В основу наближеної теорії гіроскопа покладено припущення, що всі три згадані осі збігаються і незмінно пов'язані одна з одною.

Іншими словами, якщо ми бачимо, що вісь гіроскопа якимось змінює положення у просторі, ми можемо зробити висновок, що також змінюється у просторі напрямок миттєвої кутової швидкості обертання гіроскопа і осі його моменту імпульсу.

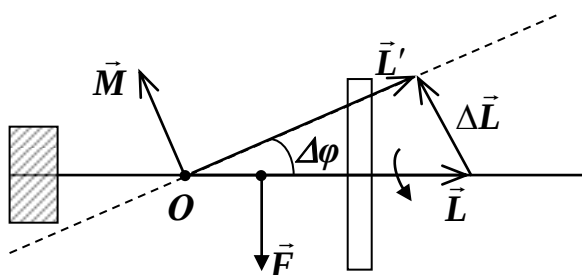
І, навпаки, встановивши, що в силу яких-небудь причин вектор моменту імпульсу повинен змінити своє положення, ми будемо вважати, що разом із ним змінить своє положення і вісь гіроскопа.

Рівняння $d\vec{L} = \vec{M}dt$, одержане для випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, справедливе і для руху гіроскопа.

Із рівняння $\vec{M}dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ випливає, що вектор моменту імпульсу змінюється тільки при дії на гіроскоп моменту зовнішніх сил. А так як ми вважаємо, що вісь гіроскопа і вісь моменту імпульсу

жорстко пов'язані між собою, то можна зробити висновок, що і переміщення осі гіроскопа відбувається до тих пір, доки діє момент зовнішніх сил.

Розглянемо рух гіроскопа, схематично показаного на мал. 5.28.

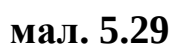


мал. 5.28

Доки гіроскоп нерухомий, його осі можна надавати будь-якого напрямку без особливих зусиль (тертя у підшипниках мале). Якщо ж йому надати швидкого обертання, то вісь гіроскопа буде зберігати незмінним своє положення в просторі. Це можна пояснити так: якщо знехтувати моментами сил тертя, а момент сили тяжіння гіроскопа

Подіємо на гіроскоп силою $\vec{F}$, момент $\vec{M}$ якої відносно точки O не дорівнює нулю. Тоді вектор моменту імпульсу одержить приріст $\Delta\vec{L} = \vec{M}dt$, який за напрямом збігається з вектором моменту сили $\vec{M}$. Нове положення осі моменту імпульсу знайдемо, додавши геометрично вектори $\vec{L}$ і $\Delta\vec{L}$ ($\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}$). Так наближено буде визначено і положення осі гіроскопа, який перебуває під дією зовнішньої сили $\vec{F}$.

Визначимо кутову швидкість процесії. Нехай вісь моменту імпульсу під дією моменту $\vec{M}$ за час dt повернеться на кут $d\varphi$. Приріст $d\vec{L}$ лежить у площині, яка перпендикулярна до вектора $\vec{L}$, і, відповідно, змінює тільки його напрямок, а не величину.



Отже, кутова швидкість прецесії прямо пропорційна величині діючого моменту зовнішніх сил і обернено пропорційна величині моменту імпульсу гіроскопа.

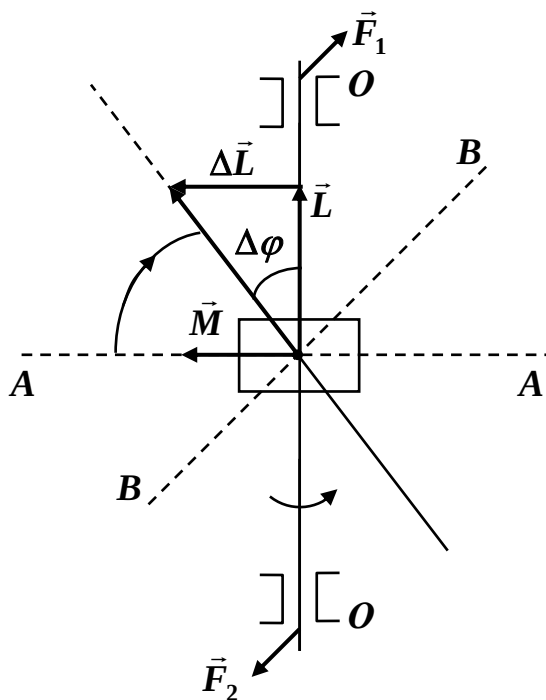
159

намагається збільшити її нахил. Але так як момент цієї складової лежить у горизонтальній площині, то дзига починає прецесіювати і вісь її описує конічну поверхню. Кутова швидкість прецесії осі дзиги:

$$\omega_n = \frac{mgl}{J\omega}, \quad (5.88)$$

де l – віддаль від точки опори до центра ваги.

5.7.3. Гіроскопічні сили. Застосування гіроскопічного ефекту



мал. 5.30

Найчастіше гіроскопом є масивне тіло, що швидко обертається, а вісь обертання якого розміщується у підшипниках (мал. 5.30).

Розглянемо взаємодію осі гіроскопа з підшипниками. Якщо до гіроскопа, що обертається, прикласти пару сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, яка намагається повернути його навколо осі AA , що перпендикулярна до осі власного обертання гіроскопа OO , то він буде повертатися навколо третьої осі BB , яка перпендикулярна до перших двох.

Момент пари сил $\vec{M}$ лежить у площині обертання гіроскопа і направлений вліво. У цю ж сторону направлений вектор приросту моменту імпульсу $\Delta \vec{L}$, тобто верхній кінець осі гіроскопа переміститься вліво, а нижній – вправо; гіроскоп буде повертатися навколо осі BB .

Переміщення осі гіроскопа до суміщення з віссю додаткового обертання є основною особливістю поведінки гіроскопа. Ця особливість гіроскопа використана в гірокомпасі. Під дією добового обертання Землі гіроскоп набуває додаткового обертання відносно осі Землі, тому його власна вісь обертання зміщується і орієнтується

у напрямі меридіана (вісь гірокомпаса обмежують так, щоб вона могла рухатися тільки в горизонтальній площині).

Якщо будь-які сили змушуватимуть вісь гіроскопа, що утримується підшипниками, відхилятися від попереднього положення, то вона чинитиме тиск на підшипники.

Сили тиску осі гіроскопа на підшипники мають назву гіроскопічних сил.

Момент гіроскопічних сил дорівнює і протилежний за напрямом моменту прикладених до гіроскопа зовнішніх сил.

Виникнення гіроскопічних сил при вимушеному повороті осі тіла, яке швидко обертається, відіграє важливу роль у техніці. Їх потрібно враховувати в конструюванні підшипників для парових турбін на кораблях, для гвинтів літаків, бо ротор турбіни та гвинт літака – це масивні гіроскопи. Гіроскопічний ефект на них проявляється у повздовжньому хитанні корабля, у розворотах літака.

Питання для самоконтролю

1. Які фізичні величини характеризують кінематику поступального руху твердого тіла?
2. Який рух називається обертальним?
3. Які кінематичні величини характеризують обертання твердого тіла відносно осі?
4. Дайте визначення кутової швидкості та кутового прискорення. Як скеровані ці вектори для тіла із закріпленою віссю?
5. Які зв'язки існують між кутовими та лінійними величинами?
6. Що називають ступенями вільності твердого тіла? Скільки ступенів вільності має матеріальна точка? Якою є максимальна кількість ступенів вільності? У якому випадку їх використовують?
7. Дайте визначення моменту інерції тіла відносно осі. Запишіть формулу.
8. Що називають моментом сили відносно точки? Як знайти напрям моменту сили відносно точки? Як знайти модуль моменту сили?

9. Що називають моментом сили відносно осі?
10. Що називають плечем сили?
11. Виведіть основний закон динаміки обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
12. Порівнюючи $\vec{M} = J\vec{\beta}$ з законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, зазначте, в чому є їх аналогія і які її наслідки.
13. Що називають моментом імпульсу матеріальної точки твердого тіла?
14. Сформулюйте і доведіть теорему Штейнера.
15. Виведіть формулу для підрахунку моменту інерції диска відносно осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через центр його інерції.
16. Запишіть формули моментів інерції деяких тіл, вказуючи осі, відносно яких вони розглядаються.
17. Виведіть формулу для кінетичної енергії тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
18. Запишіть формулу для кінетичної енергії тіла, яке котиться по горизонтальній поверхні.
19. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу. Запишіть формулу.
20. Як знайти зміну моменту імпульсу тіла? Запишіть формулу та поясніть її.
21. Опишіть (розкажіть), які досліди можна продемонструвати з використанням лави Жуковського?
22. Яке обертання тіла називають вільним? Які осі обертання називають вільними?
23. Що розуміють під статичними та динамічними реакціями опори?
24. Сформулюйте умови рівноваги твердого тіла. Запишіть формули.
25. Що називають гіроскопом? У чому суть гіроскопічного ефекту і як його пояснити?
26. Які сили називають гіроскопічними і яка їх природа?
27. Від чого залежить кутова швидкість прецесії? Запишіть формулу.

28. У скільки разів момент інерції порожнистого циліндра відносно його геометричної осі більший, ніж момент інерції суцільної однорідної кулі відносно осі, що проходить через її центр, якщо маса кулі в 2 рази більша від маси циліндра?
29. Яку частку від загальної кінетичної енергії суцільного однорідного циліндра, що скочується з похилої площини, складає енергія його обертового руху?
30. Знаючи масу Землі ($\sim 6 \cdot 10^{24}$ кг) і її середній радіус (~ 640 км), обчисліть її момент інерції відносно осі обертання.
31. Використовуючи дані попередньої задачі, знайдіть кінетичну енергію обертового руху Землі навколо своєї осі.
32. Використавши дані попередніх задач, знайдіть момент імпульсу Землі при її добовому обертанні навколо своєї осі.
33. На яку висоту вгору по похилій площині закотиться диск, який біля основи похилої площини має швидкість поступального руху 2 м/с? Тертям знехтувати.

Відповідь: 0,306 м.

34. Суцільний однорідний диск масою 10 кг і радіусом 20 см обертається, роблячи 10 об/с. Через 4 с після початку гальмування диск зупинився. Знайти гальмівний момент.

Відповідь: 3,14 Н·м.

35. На горизонтальну вісь насаджено шків радіусом 8 см. На шків намотано шнур, на якому підвісили вантаж масою 1 кг. Опускаючись рівноприскорено, вантаж пройшов шлях $1,6$ м за 2 с. Знайдіть момент інерції шківів.

Відповідь: $7,2 \cdot 10^{-2}$ кг·м¹.

36. Платформа у вигляді круглого диска радіусом 1 м обертається за інерцією, роблячи 1 об/с. На краю платформи стоїть людина, маса якої 70 кг. Скільки обертів за секунду буде робити платформа, якщо людина перейде до її центра? Момент інерції платформи дорівнює 130 кг·м¹. Момент інерції людини розраховувати як для матеріальної точки.

Відповідь: 1,54 об/с.

ТЕМА 6. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

ПЛАН

1. Гармонічний коливальний рух. Енергія коливального руху. Маятники.
2. Додавання гармонічних коливань.
3. Загасаючі та вимушені коливання.
4. Механічні хвилі. Поширення коливань в однорідному пружному середовищі. Рівняння плоскої біжучої хвилі. Енергія пружної хвилі. Потік енергії. Вектор Умова – Пойтінга.
5. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі.
6. Власні коливання суцільного обмеженого середовища.
7. Природа звуку.
8. Характеристики звуку.
9. Поширення звуку. Ефект Доплера.
10. Джерела звуку. Ультразвук.

6.1. Гармонічний коливальний рух. Енергія коливального руху. Маятники

6.1.1. *Гармонічний коливальний рух. Енергія коливального руху*

Коливальні рухи лежать в основі цілої низки явищ: звуку, світла, виникнення і поширення радіохвиль, сейсмічних хвиль, вібрацій різного походження.

Серед коливальних рухів особливе місце займають гармонічні коливання, вивчення яких важливе тому, що до них можна звести великий клас коливальних рухів.

Гармонічні коливання – це періодичний процес, у якому зміна величини, що його характеризує, відбувається за законом синуса (або косинуса). Наприклад, зміщення матеріальної точки від положення рівноваги під дією сили тяжіння відбувається за законом:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6.1)$$

де A – максимальне значення зміщення x (амплітуда коливань),
 ω - кругова (або циклічна) частина гармонічних коливань ($\omega = \frac{2\pi}{T}$),
 T – період коливань, φ_0 – початкова фаза коливань.

Нехай система здійснює власні гармонічні коливання. При відсутності сил тертя вони продовжуються необмежено довго, так як повна енергія замкнутої системи постійна. Повна енергія механічної системи складається з кінетичної і потенціальної енергії. У процесі коливання величина кожної із них періодично змінюється. У положенні найбільшого відхилення величина кінетичної енергії дорівнює нулю, а потенціальна енергія має максимальне значення. А у положенні рівноваги потенціальна енергія має мінімальне значення, а величина кінетичної енергії досягає свого максимуму.

Нехай система коливається за законом:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (6.2)$$

Кінетична енергія системи дорівнює:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (6.3)$$

де $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$.

А потенціальна енергія системи, яка перебуває під дією сили виду $F=kx$, дорівнює:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (6.4)$$

де $k=m\omega^2$.

Порівнюючи вирази (6.3) і (6.4), бачимо, що величина кінетичної і потенціальної енергії коливається із зсувом фаз, що дорівнює $\pi/1$.

Отже, мінімуму кінетичної енергії відповідає максимум потенціальної енергії.

Додавши вирази (6.3) і (6.4), одержуємо значення повної енергії системи:

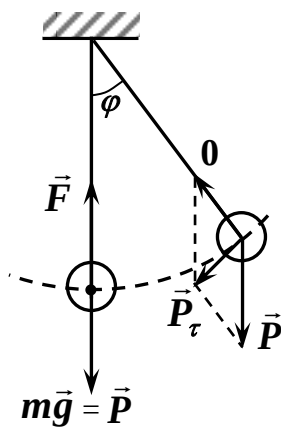
$$\begin{aligned}
E = T + U &= \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\
&= \frac{m}{2} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{m \omega^2}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\
&= \frac{m A^2 \omega^2}{2} (\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0)) = \frac{m A^2 \omega^2}{2} = \text{const.}
\end{aligned}
\tag{6.5}$$

Повна енергія гармонічного коливального руху прямо пропорційна квадрату амплітуди й квадрату частоти коливання.

6.1.2. Маятники

А. Математичний маятник

Найпростіший приклад гармонічного коливання – рух так званого математичного маятника. Ідеальним математичним маятником називається система, яка складається із практично нерозтяжної, дуже легкої нитки і підвішеного до неї вантажу, розміри якого малі порівняно з довжиною нитки, а маса велика (мал. 6.1).



мал.6.1

Центр тяжіння такої системи збігається з центром тяжіння вантажу.

Коли система перебуває у стані спокою, сила тяжіння $\vec{P}$, яка діє на кульку, зрівноважується силою натягу нитки $\vec{F}$.

Якщо ми виведемо вантаж із стану рівноваги, то виникає результуюча сил тяжіння і натягу нитки (тертям нехтуємо), яка повертає тіло до попереднього положення. Маятник коливатиметься біля положення рівноваги. Він проходить положення рівноваги внаслідок інерції вантажу. Оскільки сила тяжіння і сила натягу нитки лежать в одній площині, то маятник здійснює коливання у тій самій площині. Положення маятника для будь-якого проміжку часу буде визначене, якщо задати величину зміщення вантажу від положення рівноваги.

Коливальний рух маятника характеризується амплітудою A і періодом T . Амплітуда коливань маятника – величина найбільшого відхилення його від положення рівноваги. Період – час, за який

відбувається одне повне коливання. Величина, обернена до періоду, називається частотою коливань. Частота дорівнює числу повних коливань, здійснених тілом за одиницю часу: $\nu = \frac{1}{T}$.

Запишемо рівняння руху для математичного маятника, який перебуває у полі сили тяжіння і відхилений від стану рівноваги на кут φ (мал. 6.1).

Система, виведена із стану стійкої рівноваги і залишена сама на себе, здійснює коливання, які називаються вільними.

На маятник у відхиленому стані діє повертаюча сила:

$$P_{\tau} = mgs \sin \varphi, \quad (6.6)$$

де m – маса кульки, φ – кут відхилення.

Ця сила направлена по дотичній до траєкторії кульки в напрямку до положення рівноваги. Легко зрозуміти, що повертальна сила завжди направлена в сторону, протилежну до напрямку зростання зміщення x . Тому її знак протилежний до знаку зміщення:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} = mgs \sin \varphi. \quad (6.7)$$

Рівняння (6.7) називається рівнянням руху математичного маятника.

У загальному випадку розв'язок (6.7) є складний. При малих відхиленнях маятника від положення рівноваги можна вважати синус кута пропорційним величині кута ($\varphi \approx 3 \div 5^\circ$).

Тоді:

$$\sin \varphi = \frac{x}{l} \quad (6.8)$$

і рівняння (6.7) запишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x. \quad (6.9)$$

Зауважуємо, що малі вільні коливання маятника відбуваються під дією сили, що повертає його в положення рівноваги, яка пропорційна величині зміщення x .

Зробимо таку заміну:

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2. \quad (6.10)$$

Тоді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (6.11)$$

Розв'язком рівняння (6.11) є функція:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.12)$$

де A – амплітуда коливань, ω_0 – циклічна частота, φ_0 – початкова фаза коливань, t – час коливань.

Період коливань, що відбувається за законом (6.12), визначається з умови періодичності функції синуса чи косинуса. Для гармонічних коливань за час, що дорівнює періоду, фаза коливань змінюється на 2π :

$$\omega_0 T = 2\pi \quad \text{або} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.13)$$

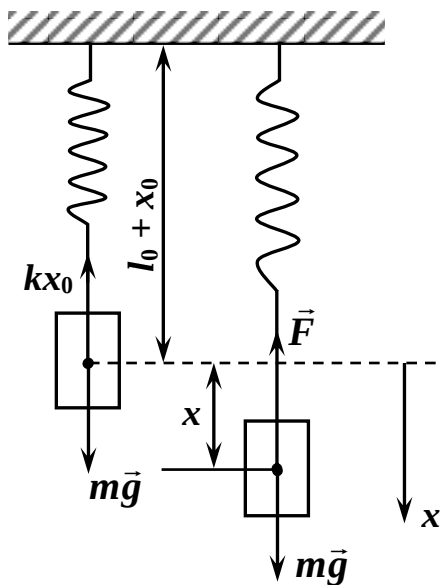
Використавши вираз (6.12), рівняння (6.13) запишеться

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (6.14)$$

де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння.

З формули (6.14) бачимо, що період коливання математичного маятника не залежить ні від кута відхилення (при малих кутах $\varphi \leq 5^\circ$), ні від маси маятника.

Б. Пружинний маятник



мал. 6.2

Розглянемо ще випадок виникнення гармонічних коливань. Вантаж масою m підвішено на пружині, маса якої мала порівняно з масою вантажу. Виведений із положення рівноваги вантаж рухається під дією двох сил: сили пружності $\vec{F}$ і сили тяжіння $m\vec{g}$ (мал. 6.2).

Запишемо проєкцію на вісь x результуючої сили f під дією якої вантаж здійснює вертикальні коливання:

$$f = mg - k(x_0 + x). \quad (6.15)$$

Врахуємо, що в стані рівноваги сила mg зрівноважується силою kx_0 , тоді:

$$f = -kx, \quad (6.16)$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Рівняння руху вантажу набирає вигляду:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad (6.17)$$

$$\text{або } \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x. \quad (6.18)$$

Прийнявши, що $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, одержуємо рівняння (6.18) у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.19)$$

Одержане рівняння аналогічне до рівняння (6.11). Його розв'язком також є функція (6.12). А це означає, що коливання вантажу, підвішеного на пружині, також є гармонічними. Період цих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (6.20)$$

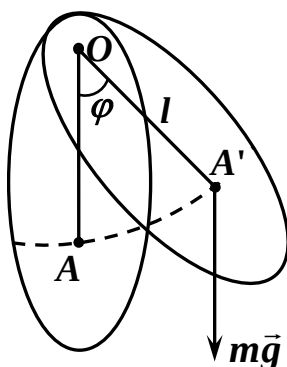
де m – маса вантажу.

Отже, період коливань пружинного маятника залежить не від ваги тіла, а тільки від його маси й жорсткості пружини. Цей маятник буде здійснювати коливання з однаковим періодом у будь-якій точці земної поверхні на нашій планеті чи в міжпланетарному кораблі.

Цю властивість пружинного маятника використовують для порівняння мас різних тіл.

В. Фізичний маятник

Важке тіло, яке вільно коливається навколо осі, що не проходить через центр тяжіння, називається фізичним маятником (мал. 6.3).



мал. 6.3

Розглянемо коливання абсолютно твердого тіла у вертикальній площині відносно горизонтальної нерухомої осі O . Якщо центр тяжіння

лежить у точці A на віддалі l від осі обертання, то момент сили тяжіння відносно осі буде:

$$M = mgl \sin \varphi. \quad (6.21)$$

Запишемо основне рівняння динаміки обертового руху, вважаючи, що тертя на осі відсутнє:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$$

(напрямок моменту сили протилежний до напрямку кута відхилення).

Або

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I} \sin \varphi. \quad (6.22)$$

Обмежившись малими відхиленнями ($\sin \varphi \approx \varphi$), запишемо:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgl}{I} \varphi. \quad (6.23)$$

Зробимо заміну: $\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}$, тоді:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) за виглядом також збігається із (6.11).

Отже, коливання фізичного маятника є також гармонічними і його період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (6.25)$$

Період коливань фізичного маятника тим більший, чим більший його момент інерції і чим менша віддаль від осі обертання до його центра тяжіння (ваги).

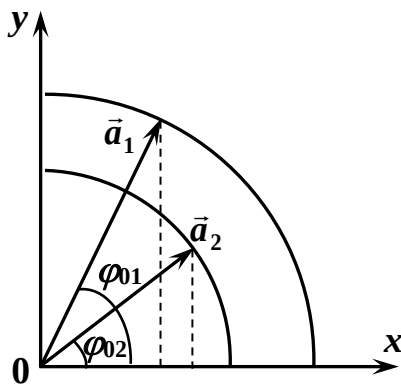
Порівнюючи вирази для періоду коливань фізичного маятника (6.25) з виразом (6.14) для періоду коливань математичного маятника, бачимо, що фізичний маятник коливається з таким самим періодом, що і математичний, який має довжину $l_n = \frac{I}{ml}$. Довжина математичного маятника l_n , який має той самий період коливань, що і даний фізичний, називається зведеною довжиною даного фізичного маятника.

Випадки виникнення коливань, розглянуті вище, дають змогу зробити висновок, що малі коливання систем біля положення стійкої рівноваги під дією повертаючої сили, яка прямопропорційна до зміщення, є гармонічними.

6.2. Додавання гармонічних коливань

А. Додавання коливань одного напрямку

Це, що рух проєкції точки, яка рівномірно обертається по колу, є гармонічним коливанням, дає можливість будь-яке гармонічне коливання умовно представляти як результат деякого обертового руху та будувати так звані векторні діаграми коливального руху (мал. 6.4).



мал. 6.4

Для векторного зображення коливання, яке відбувається з амплітудою a_1 , частотою ω_1 і початковою фазою φ_{01} на горизонтальній прямій, що виражає умовно вибраний діаметр, виберемо довільну точку O . У напрямку, який утворює з цією горизонтальною лінією кут, що дорівнює початковій фазі φ_{01} , відкладемо вектор, довжина якого дорівнює (у вибраному масштабі) амплітуді коливання a_1 . Тоді початкове зміщення зобразиться проєкцією вектора $\vec{a}_1$ на горизонтальну пряму (мал. 6.4):

$$x_0 = a_1 \cos \varphi_{01}. \quad (6.26)$$

Відкладаючи вектор довжиною $|\vec{a}_1|$ в напрямку, який визначається фазою $\omega_1 t + \varphi_{01}$, одержуємо зміщення x_1 у будь-який момент часу t :

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}). \quad (6.27)$$

Обертаючи вектор з кутовою швидкістю ω_1 і проєктуючи його кінець на горизонтальну вісь, одержуємо коливання проєкції з амплітудою a_1 , частотою ω_1 і початковою фазою φ_{01} .

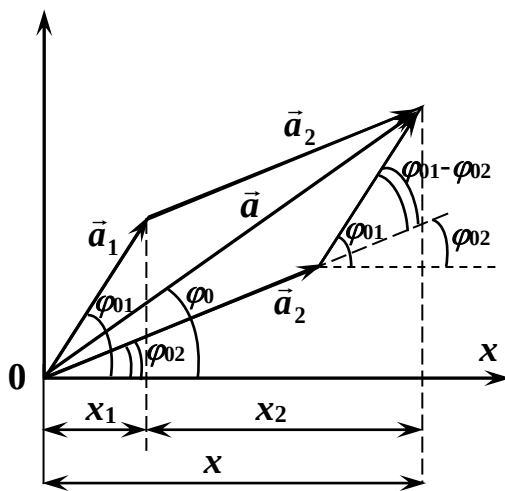
На цьому ж малюнку можна аналогічно зображати будь-яке інше гармонічне коливання з амплітудою a_2 , частотою ω_2 і початковою фазою φ_{01} . Для нього закон коливання буде:

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}).$$

Різниця фаз $(\omega_1 t + \varphi_{01}) - (\omega_2 t + \varphi_{02})$ двох коливань називається зсувом фаз. Якщо ж частоти коливань однакові ($\omega_1 = \omega_2$), то зсув фаз дорівнює різниці початкових фаз коливань $\varphi_{01} - \varphi_{02}$ і залишається незмінним за весь час коливань (так як обидва вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю).

Тіло може брати участь у декількох коливальних рухах одночасно. Результирує зміщення тіла в цьому випадку одержується як геометрична сума незалежних зміщень, які тіло одержує, беручи участь у кожному із складових коливань окремо.

Нехай тіло бере участь одночасно в двох гармонічних коливальних рухах, які відбуваються в одному напрямку з однаковою частотою, але з різними початковими фазами й амплітудами:



мал. 6.5

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \right\}. \quad (6.28)$$

Побудуємо векторні діаграми цих коливань (мал. 6.5).

Результирує зміщення x тіла, яке бере участь одночасно в двох коливаннях, дорівнює сумі проєкцій x_1 і x_2 на вісь x векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, або проєкції вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Тоді рівняння результирующего коливання буде:

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (6.29)$$

де
$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}), \quad (6.30)$$

а початкова фаза φ_0 визначається із відношення:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (6.31)$$

Отже, тіло, беручи участь у двох однакових гармонічних коливаннях, що відбуваються в одному напрямку з однаковою частотою, здійснює гармонічне коливання у тому ж напрямку і з такою ж частотою, що і складові коливання.

Величина амплітуди результуючого коливання залежить від зсуву фаз $\varphi_{01}-\varphi_{02}$. Якщо $\varphi_{01}-\varphi_{02}=2\pi n$, де $n=0, 1, 2, 3\dots$, то:

$$a=a_1+a_2, \quad (6.32)$$

тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд складових коливань.

Якщо $\varphi_{01}-\varphi_{02}=(2n+1)\pi$, де $n=0, 1, 2, 3\dots$, то:

$$a = |a_1-a_2|, \quad (6.33)$$

тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює модулю різниці амплітуд складових коливань. Коливання послаблюють (гасять) одне одного.

Якщо $a_1=a_2$, то $a=0$; в цьому випадку тіло залишається у стані спокою.

Але $-1 \leq \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \leq 1$,

$$\text{то} \quad |a_1-a_2| \leq a \leq a_1 + a_2. \quad (6.34)$$

Якщо складові гармонічні коливання мають однакові напрямки, але різні періоди, то результуюче коливання буде негармонічним.

Б. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо рух точки, яка бере участь одночасно в двох коливаннях, напрямки яких взаємно перпендикулярні, а циклічна частота яких однакова ($\omega_1=\omega_2=\omega$).

Нехай одне коливання відбувається вздовж осі x , а друге – вздовж осі y :

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (6.35)$$

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху точки. Для цього із (6.35) треба виключити час t . Перепишемо (6.35) у такому вигляді:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1 \quad (6.36)$$

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2. \quad (6.37)$$

Перемножимо (6.36) на $\cos\varphi_2$, а (6.37) на $\cos\varphi_1$. Віднімемо від першого друге рівняння:

$$\frac{x}{A}\cos\varphi_2 - \frac{y}{B}\cos\varphi_1 = \sin\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.38)$$

Тепер перемножимо (6.36) на $\sin\varphi_2$, а (6.37) на $\sin\varphi_1$ і також віднімемо від першого рівняння друге:

$$\frac{x}{A}\sin\varphi_2 - \frac{y}{B}\sin\varphi_1 = \cos\omega t \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.39)$$

Піднесемо до квадрата рівняння (6.38) і (6.39) і додамо їх. У результаті одержуємо рівняння траєкторії:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6.40)$$

Отже, траєкторією результуючого руху є еліпс.

Орієнтація цього еліпса щодо до осей x , y залежить від різниці фаз складових коливань (коливань, що додаються).

Розглянемо деякі окремі випадки:

1) нехай різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$.

Тоді рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{або}$$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0. \quad (6.41)$$

$$\text{Звідси: } y = \frac{B}{A}x. \quad (6.42)$$

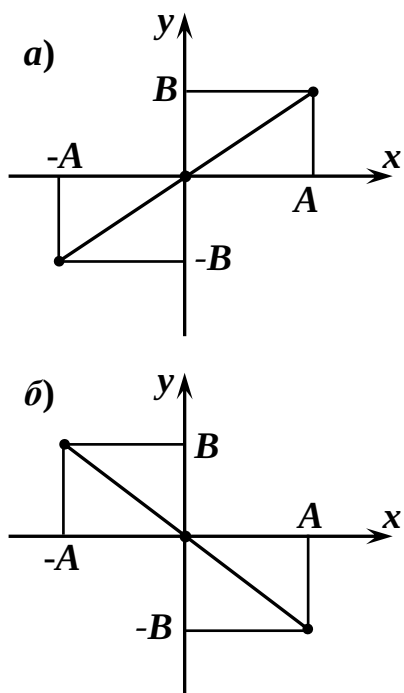
Це означає, що при різниці фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ точка рухається по прямій, яка проходить через початок координат і утворює з віссю x кут, тангенс якого дорівнює відношенню амплітуд $\frac{B}{A}$

(мал. 6.6, а).

При русі по цій прямій точка здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою ω біля початку координат.

Дійсно, положення точки на прямій задається координатою:

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



мал. 6.6

Враховуючи, що $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$, одержуємо:

$$S = \sqrt{A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.43)$$

Отже, точка здійснює гармонічне коливання з циклічною частотою ω і амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$.

2) нехай тепер різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. У цьому випадку рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{або} \quad \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0. \quad (6.44)$$

$$\text{Звідки: } y = -\frac{B}{A}x. \quad (6.45)$$

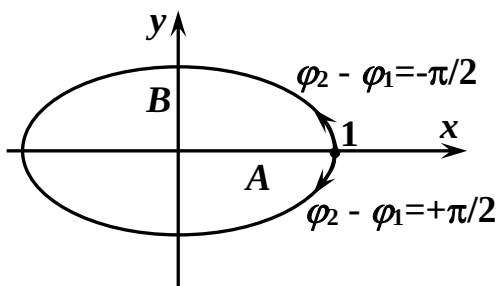
Результуючий рух, як і в попередньому випадку, є гармонічним коливальним рухом з частотою ω , який відбувається біля точки O по відрітку прямої, нахиленої до осі x під кутом, більшим ніж $\pi/2$ (мал. 6.6, б).

3) розглянемо додавання коливань, фази яких φ_2 і φ_1 відрізняються на $\pi/2$ або $\frac{3}{2}\pi$ ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$). У цьому випадку рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (6.46)$$

Рівняння (6.46) є канонічною формою рівняння еліпса (осі координат збігаються з осями еліпса). Коли $A=B=R$, то еліпс перетворюється на коло.

Випадки $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$ і $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ відрізняються напрямками руху по еліпсу або колу.



мал. 6.7

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$, то рівняння (6.35) можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= -B \sin \omega t \end{aligned} \right\} \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/2. \quad (6.47)$$

Як видно з (6.47) у момент часу $t=0$ тіло перебуває в точці 1 (мал. 6.7). В інші моменти часу

координата x зменшується, а координата y стає від'ємною. Отже, рух точки відбувається за годинниковою стрілкою.

При $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ рівняння коливань набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= B \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = B \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (6.48)$$

Звідси можна зробити висновок, що рух відбувається проти годинникової стрілки (мал. 6.7).

Із сказаного випливає, що рівномірний рух по колу з радіусом R з кутовою швидкістю ω можна подати як суму двох взаємно перпендикулярних коливань:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (6.49)$$

де “+” – відповідає рухові проти стрілки годинника;

“-” – відповідає рухові за годинниковою стрілкою.

- 4) якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові, то траєкторія результуючого руху має вигляд досить складних кривих, які називаються фігурами Ліссажу.

6.3. Загасаючі та вимушені коливання

6.3.1. Вільні коливання

У цьому випадку на рухоме тіло масою m діє лише квазіпружна сила $F = -kx$. Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху (по осі x) має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{або} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (6.50)$$

Уведемо позначення:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (6.51)$$

тоді одержуємо рівняння руху у вигляді лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.52)$$

в якому ω_0 залежить від параметрів коливальної системи.

У курсі математики доведено, що розв'язком (6.52) є така функція:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.53)$$

де A і φ_0 – довільні сталі, для визначення яких треба знати початкові умови (зміщення x_0 і швидкість v_0 у початковий момент часу $t=0$).

Отже, якщо на рухомий елемент системи масою m діє тільки пружна або квазіпружна сила $F = -kx$, то він здійснює гармонічні коливання з постійною амплітудою A , частота яких $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ і період

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ залежать від параметрів m і k .

6.3.2. Загасаючі коливання

Нехай тепер на коливальну систему діють квазіпружна сила і сила тертя. Розглянемо випадок, коли сила тертя пропорційна швидкості руху:

$$F_{mp} = -rv = -r \frac{dx}{dt}. \quad (6.54)$$

Відомо, що такі сили виникають при русі тіл у в'язкому середовищі з малими швидкостями.

Рівняння руху в цьому випадку матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx \quad \text{або} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (6.55)$$

Уведемо позначення:

$$\frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (6.56)$$

Тоді рівняння (6.55) запишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6.57)$$

Рівняння (6.57) є також лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами, які залежать від параметрів системи та коефіцієнта тертя r .

Рівняння (6.57) можна звести до рівняння гармонічних коливань (6.52). Використаємо для цього підстановку $x = ze^{\beta t}$, тоді одержуємо:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0, \quad (6.58)$$

і, зробивши заміну

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2, \quad (6.59)$$

запишемо рівняння (6.58) так:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0. \quad (6.60)$$

У рівнянні (6.60) $\omega^2 > 0$ або $\beta^2 < \omega_0^2$, бо інакше коливань не буде (ω буде уявна). Розв'язком рівняння (6.60) є функція

$$z = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

де A_0 і φ_0 – сталі інтегрування.

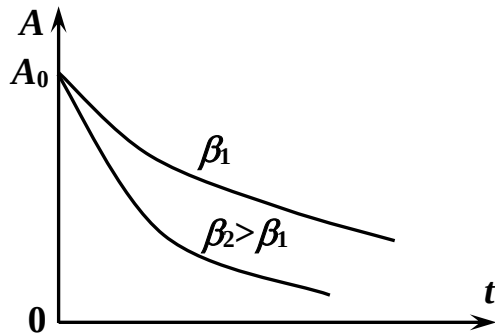
Перейшовши до змінної x , одержуємо:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (6.61)$$

Із рівняння (6.61) видно, що амплітуда коливального руху в цьому випадку

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (6.62)$$

зменшується з часом за експоненціальним законом, тобто в системі виникають загасаючі коливання (мал. 6.8).



мал. 6.8

Частота ω загасаючих коливань, як видно із (6.59), залежить не тільки від параметрів системи (m , k), але і від коефіцієнта r , що визначає силу в'язкого тертя.

Зрозуміло, що $\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тобто

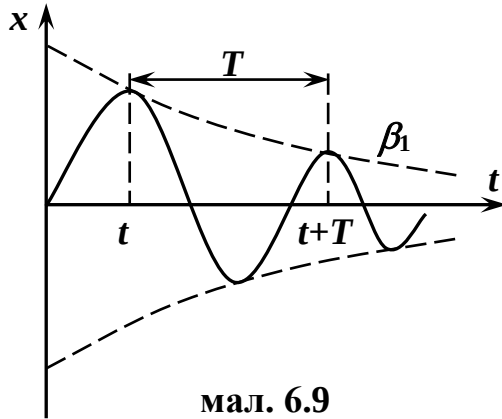
частота загасаючих коливань менша від частоти, яку би мала

система при відсутності опору середовища.

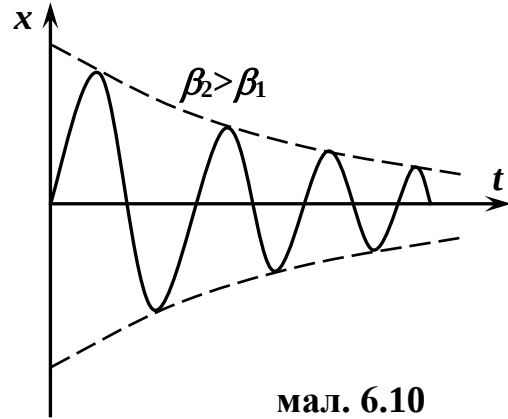
Період T загасаючих коливань є більший від періоду T_0 вільних коливань системи (мал. 6.9):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0.$$

Якщо β мале, то $T \approx T_0$. При $\beta^2 \rightarrow \omega_0^2$ частота зменшується до нуля, а період зростає до безмежності. При $\beta^2 > \omega_0^2$ частота стає уявною.



мал. 6.9



мал. 6.10

Фізично це означає, що при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ коливання не виникають. Система, виведена із положення рівноваги, повільно повертається у початкове положення.

На мал. 6.8 показані графіки зміни амплітуди з часом для двох значень числа β . Більшому значенню β (більшому r) відповідає швидкий спад амплітуди. Із малюнків видно, що величина β характеризує швидкість загасання коливань. Тому β називають коефіцієнтом загасання.

Візьмемо відношення двох амплітуд, що відрізняються в часі на 1 с:

$$\frac{A_t}{A_{t+1}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+1)}} = e^{\beta}. \quad (6.63)$$

Прологарифмувавши (6.63), одержуємо:

$$\ln \frac{A_t}{A_{t+1}} = \beta. \quad (6.64)$$

Але $\beta = \frac{r}{2m} = \text{const}$ для даної системи, тоді вираз (6.64) показує, що відношення двох амплітуд, розділених інтервалом в 1 с, завжди одне і те саме.

Часто швидкість загасання характеризують логарифмічним декрементом загасання. Логарифмічним декрементом загасання

називається фізична величина, яка дорівнює натуральному логарифму двох послідовних амплітуд, які відрізняються проміжком часу, що дорівнює періоду.

Позначимо логарифмічний декремент загасання через λ , тоді:

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+1}} = \beta T. \quad (6.65)$$

Отже, логарифмічний декремент загасання у T разів більший, ніж коефіцієнт загасання. Оскільки β і T постійні величини, то і $\lambda = \text{const}$. А це означає, що відношення двох амплітуд, які відрізняють в часі на один період, є стала і не залежить від вибору моменту часу t .

Енергетично коливальна система характеризується добротністю. Під добротністю розуміють збільшене в 2π разів відношення повної енергії системи E до енергії W , розсіяної за період:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W}, \quad (6.66)$$

де Q – добротність коливальної системи.

Очевидно, що чим менше енергії розсіюється, тим більша добротність системи. В ідеальному випадку (при відсутності втрат) добротність системи нескінченно велика. Розрахунки показують, що

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}, \quad (6.67)$$

добротність коливальної системи обернено пропорційна до логарифмічного декременту загасання.

Прийнято вважати, що коливання практично зупинилися, якщо їх енергія зменшилася у 100 разів (а амплітуда – в 10 разів).

На практиці можуть траплятися випадки, коли треба мати малий коефіцієнт загасання. Зменшити коефіцієнт загасання можна, наприклад, за рахунок збільшення маси тіла, що коливається ($\beta = \frac{r}{2m}$).

Часто виникають і обернені задачі – потрібно швидко загасити коливання (коливання стрілки вимірювальних приладів, кузов автомобіля тощо). Прилади, що збільшують загасання, називаються демпферами (або амортизаторами). Амортизатор машини – циліндр,

заповнений маслом, у якому може рухатися поршень, який має багато малих отворів. Шток поршня з'єднаний з кузовом, а циліндр – з віссю колеса.

6.3.3. Вимушені коливання

Вимушеними називають такі коливання, які виникають у коливальній системі при дії на неї зовнішньої періодично змінної сили, яку називають *змушуючою* (вимушеною).

Розглянемо випадок виникнення вимушених коливань під дією сили, яка змінюється за законом синуса:

$$F_{зм} = F_0 \sin \omega_1 t, \quad (6.68)$$

де F_0 – амплітуда вимушеної сили, ω_1 – циклічна частота коливань цієї сили.

Нехай система описується параметрами k , m , r (в'язке тертя). На неї діють:

- квазіпружна (повертаюча) сила: $F = -kx$;
- сила тертя: $F_{mp} = -r \frac{dx}{dt}$;
- вимушена (змушуюча) сила: $F_{зм} = F_0 \sin \omega_1 t$.

Запишемо рівняння руху точки, що здійснює коливання:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_1 t \quad (6.69)$$

$$\text{Зробимо заміни: } \frac{k}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{F_0}{m} = f_0. \quad (6.70)$$

Тоді рівняння (6.69) перепишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_1 t. \quad (6.71)$$

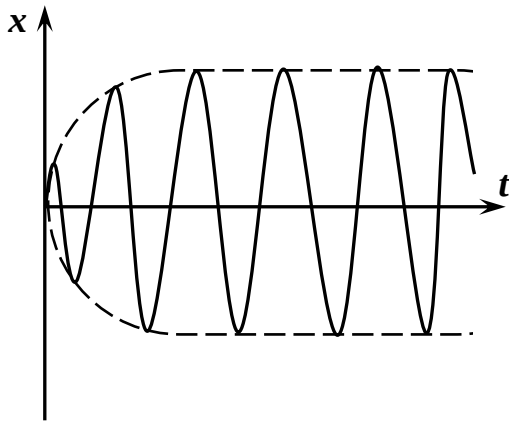
Маємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Воно відрізняється від рівняння (6.55) наявністю члена, що не залежить від x .

Загальний розв'язок $x(t)$ такого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = x_1(t) + x_2(t), \quad (6.72)$$

де $x_1(t)$ – загальний розв’язок рівняння (6.55); $x_2(t)$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння (6.71).

Загальний розв’язок рівняння (6.71) без правої частини ми уже одержали; це вираз (6.61). Він відповідає власним загасаючим коливанням системи. Складова $x_1(t)$ відіграє помітну роль тільки в початковій стадії процесу, при так званому встановленні коливань. Із зростанням часу через експоненціальний множник $e^{-\beta t}$ роль цієї складової все більше зменшується, і при великих проміжках часу нею можна знехтувати, залишаючи у рівнянні (6.72) лише складову $x_2(t)$ (мал. 6.11).



мал. 6.11

Отже, функція $x=x_2(t)$, будучи частинним розв’язком рівняння (6.71), описує вимушені коливання системи. Будемо її шукати в такому вигляді:

$$x_2(t)=A\sin(\omega_1 t+\varphi), \quad (6.73)$$

де A і φ – величини, які треба знайти.

Знайдемо першу та другу похідну від $x_2(t)$ по часу. Підставивши їх

значення у диференціальне рівняння (6.71), одержуємо:

$$\begin{aligned} &[(\omega_0^2-\omega_1^2)A\cos\varphi-2\beta\omega_1A\sin\varphi-f_0]\sin\omega_1 t+ \\ &[2\beta\omega_1A\cos\varphi+(\omega_0^2-\omega_1^2)A\sin\varphi]\cos\omega_1 t=0. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Рівняння (6.74) має виконуватися при будь-якому значенні t , що можливо, якщо коефіцієнти при синусі та косинусі будуть дорівнювати нулю:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_0^2-\omega_1^2)A\cos\varphi-2\beta\omega_1A\sin\varphi-f_0 &= 0 \\ 2\beta\omega_1A\cos\varphi+(\omega_0^2-\omega_1^2)A\sin\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

Тоді з другого рівняння (6.75) одержуємо:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\omega_1}{\omega_0^2-\omega_1^2}. \quad (6.76)$$

Для знаходження амплітуди A піднесемо обидва рівняння (6.75) до квадрату і додамо їх. Розв’язуючи одержану рівність відносно A , знаходимо, що:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega_1^2 = f_0^2 \quad \text{або}$$

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}}. \quad (6.77)$$

Отже, при дії на систему вимушеної сили $F = F_0 \sin \omega_1 t$ виникають вимушені коливання

$$x = A \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (6.78)$$

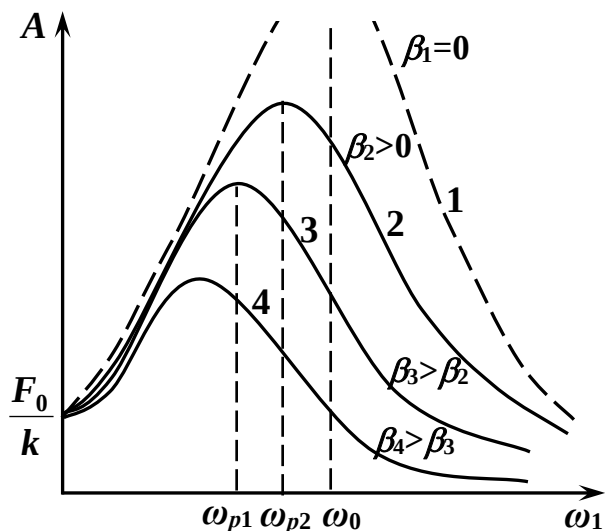
які є гармонічними з амплітудою A і мають цю ж частоту, що має вимушена сила. Але зміщення x зсунуте по фазі на φ відносно вимушеної сили. Це означає, що в той момент, коли вимушена сила досягає максимуму, зміщення x не обов'язково найбільше: воно може дорівнювати нулю ($\varphi = \pi/2$).

6.3.4. Амплітуда вимушених коливань. Резонанс

Із рівняння (6.77) видно, що амплітуда коливань залежить від співвідношення частоти вільних коливань ω_0 до частоти вимушеної сили ω_1 . Крім цього, амплітуда коливань залежить також від F_0 і коефіцієнта затухання β .

Із мал. 6.12 бачимо, що при $\omega_1 = 0$ вираз (6.77) дає постійне зміщення

$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \quad (6.78)$$



мал. 6.12

Вираз (6.78) має місце тоді, коли власні коливання уже практично згасли.

При $\omega_1 \rightarrow \infty$ амплітуда A асимптотично прямує до нуля.

При деякому проміжному значенні ω_1 амплітуда A приймає максимальне (для β) значення (криві 2, 3, 4).

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при певному значенні частоти вимушеної сили називається *механічним резонансом*.

Частота вимушеної сили, при якій має місце резонанс, називається резонансною частотою, а значення максимальної амплітуди називається резонансною амплітудою.

Знайдемо резонансну частоту ω_p . Для цього знаходимо мінімум виразу, який стоїть під коренем у знаменнику формули (6.77). Продиференціюємо цей вираз по ω_1 і прирівняємо до нуля:

$$-4(\omega_0^2 - \omega_1^2) + 8\beta^2 = 0.$$

$$\text{Тоді: } \omega_1 = \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.79)$$

Підставивши значення резонансної частоти ω_p у вираз (6.77), одержуємо резонансну амплітуду:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.80)$$

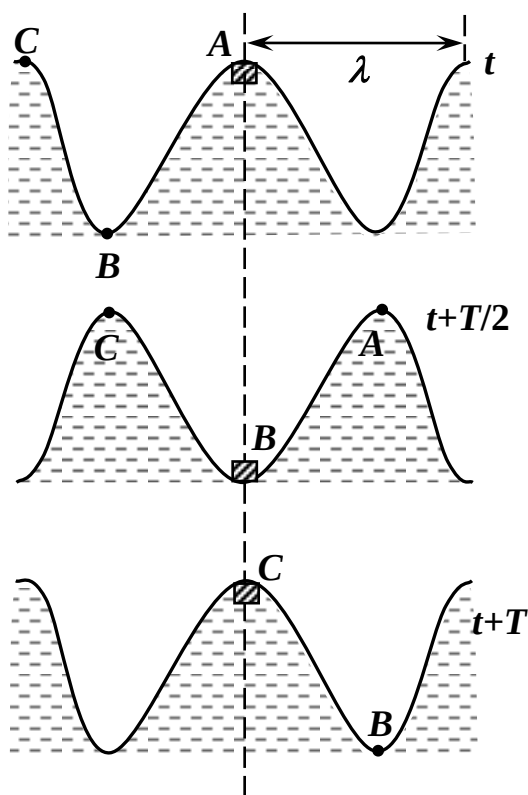
При $\beta=0$ резонансна частота ω_p дорівнює частоті вільних коливань системи ($\omega_p=\omega_0$). При зменшенні β також зростає резонансна амплітуда і при $\beta=0$ вона перетворюється у безмежність. На практиці амплітуда не може бути безмежною, бо в реальних коливальних системах завжди діють сили тертя. Якщо система має мале загасання ($\beta=0$), то наближено можна вважати, що резонанс наступить при частоті, яка дорівнює частоті вільних коливань ($\omega_p \approx \omega_0$).

Вимушені коливання і резонанс широко використовуються у техніці, особливо в акустиці, електротехніці, радіотехніці та в інших областях. Явище резонансу використовують у тих випадках, коли із великого набору коливань різної частоти хочуть виділити коливання конкретної частоти. Резонанс використовують і при вимірюванні дуже слабких періодично змінних величин.

Але у деяких випадках резонанс – небажане явище, оскільки призводить до великих деформацій і руйнувань приладів та конструкцій. Резонанс треба враховувати при конструюванні машин і різних споруд (мостів, будинків, веж тощо).

6.4. Механічні хвилі. Рівняння плоскої біжучої хвилі. Енергія пружної хвилі. Вектор Умова-Пойтінга

6.4.1. Механічні хвилі



мал. 6.13

Хвилі на поверхні води мають вигляд гребенів і впадин, що чергуються і рухаються по поверхні з певною швидкістю v , яку називають швидкістю хвилі.

Віддаль між двома сусідніми гребенями (або впадинами) у процесі поширення хвилі залишається незмінною і є характерною величиною, яку називають *довжиною хвилі* λ (мал. 6.13).

Дослід показує, що хоч гребені та впадини рухаються по поверхні води, поширення хвиль не зв'язане з переносом частинок рідини (поплавок при

проходженні хвилі коливається лише вгору і вниз і хвилею не захоплюється) (мал. 6.13).

Дослід також показує, що частота поплавка (і частинок рідини під ним) цілком визначається частотою коливань механічної системи, яка утворила хвилю.

Якщо поверхня води (або довільного середовища) не обмежена, то утворені хвилі називають *біжучими*: вони біжать від джерела, яке їх утворило.

Якщо зовнішня сила, прикладена до необмеженого середовища, змінюється за гармонічним законом, то утворена нею хвиля називається *гармонічною* або *синусоїдальною*.

Хвилі називаються *несинусоїдальними*, якщо сила, яка їх утворює змінюється за довільним (негармонічним законом).

Синусоїдальні хвилі характеризуються ще частотою хвилі ν , під якою розуміють частоту коливань частинок середовища (частота коливань поплавка на поверхні води), амплітудою A , яка визначається амплітудою коливань частинок (амплітуда коливань поплавка), і, нарешті, швидкістю хвилі v .

Три характеристики: ν , λ , v – пов’язані між собою так званим дисперсійним рівнянням:

$$v = \lambda \nu, \quad (6.81)$$

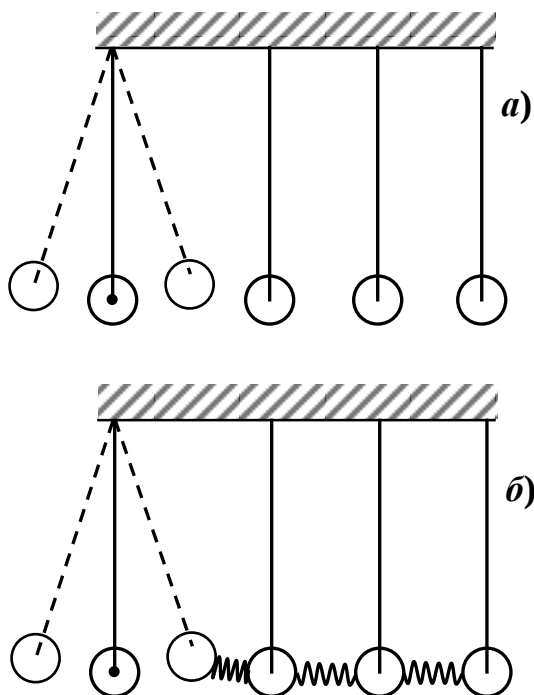
за час, протягом якого поплавок здійснить одне повне коливання, тобто опуститься з гребеня у впадину і знову підніметься на гребінь, хвиля під ним переміститься на віддаль λ . Тому:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{або} \quad \lambda = v \cdot T, \quad (6.82)$$

де T – період коливань ($T = \frac{1}{\nu}$).

Отже, довжина хвилі визначається тією віддалю, на яку переміщується хвильовий процес за час одного повного коливання частинок середовища.

6.4.2. Поширення коливань в однорідному пружному середовищі



мал. 6.14

Розглянемо систему однакових, ніяк не пов’язаних між собою маятників (мал. 6.14, а).

Через відсутність зв’язку між ними коливання одного маятника (власні чи вимушені) не можуть передаватися іншим маятникам. У такій системі процес поширення коливань неможливий.

Щоб коливання могли передаватися, маятники повинні бути так чи інакше пов’язані між собою (мал. 6.14, б).

Нехай між маятниками є пружний зв'язок, що здійснюється за допомогою легкої пружини. Якщо в такій системі почне коливатися який-небудь маятник, то він, стискаючи і розтягуючи пружини, створить змінну пружну силу, яка змусить коливатися (з тією ж частотою) сусідній маятник, а цей, своєю чергою, – наступний і т.д.

Вздовж пружно пов'язаних маятників розпочнеться процес поширення коливань від маятника до маятника, при цьому чим далі перебуває маятник від початкового, тим пізніше він почне коливатися.

Кожен маятник буде коливатися біля свого середнього положення рівноваги, але частота коливань усіх маятників є однакою: вона визначається частотою зовнішньої сили.

Система таких пружно пов'язаних однакових маятників є моделлю однорідного пружного (одномірного) середовища.

Подібні процеси відбуваються у реальному пружному середовищі. Якщо в такому середовищі викликати якимось способом коливання однієї частинки (точки), то в результаті пружних взаємодій почнуть коливатися сусідні з нею частинки, які своєю чергою, викличуть коливання наступних частинок і т.д.

Процес поширення коливань частинок в пружному середовищі називається хвильовим процесом або просто хвилею.

Границя, яка відокремлює частинки, що коливаються, від частинок середовища, які ще не почали коливатися, називають *фронтом хвилі*.

В однорідному й ізотропному середовищі напрямок поширення хвилі перпендикулярний до її фронту.

Сукупність точок, які коливаються в однакових фазах, називають *хвильовою поверхнею*. Фронт для синусоїдальних хвиль є однією із його хвильових поверхонь. Напрямок, у якому поширюється хвиля, називаються *променем*.

У необмеженому однорідному середовищі хвилі можуть бути плоскими (фронт хвилі – площина) і сферичними (фронт хвилі – сферична поверхня).

Частинки середовища, охоплені хвильовим процесом, коливаються як маятники в моделі, розглянутій вище, з однаковою

частотою. Кожна із них здійснює коливання біля свого середнього положення рівноваги, тобто хвиля не переносить частинок середовища в напрямку свого поширення.

Залежно від напрямку коливань частинок відносно напрямку поширення хвилі розрізняють два види хвиль: *повздовжні* та *поперечні*. У повздовжній хвилі частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвиль. У поперечній – частинки коливаються у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвиль.

Із моделі (мал. 6.14) видно, що швидкість поширення коливань маятників залежить від жорсткості пружини k і маси m маятників. Якщо жорсткість пружини нескінченно велика, то при відхиленні із положення рівноваги одного маятника одночасно відхиляються і всі інші маятники. Це означає, що швидкість поширення коливань нескінченно велика. І, навпаки, при жорсткості пружини, рівній нулю, коливання не передаються від маятника до маятника, тобто швидкість хвилі дорівнює нулю.

Якщо при одних і тих самих пружинах масу маятника збільшити, то швидкість хвильового процесу зменшиться. Адже для одного й того ж зміщення (відхилення) (за даний проміжок часу) у випадку більшої маси потрібна і більша сила, тобто більша деформація пружини.

У реальному середовищі швидкість залежить від типу хвилі. У повздовжній хвилі зміщення частинок середовища викликає деформацію стиску й розтягу. Тому швидкість поширення повздовжніх хвиль визначається пружністю середовища до цього виду деформації і, відповідно, залежить від модуля Юнга E .

Установлена залежність швидкості хвилі від маси коливних частинок означає, що у випадку суцільного середовища швидкість хвильового процесу залежить від густини середовища ρ . Із збільшенням густини середовища швидкість хвилі зменшується. Кількісний розрахунок дає можливість установити таку залежність:

$$v_{\text{поз}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.83)$$

У поперечних хвилях зміщення частинок середовища викликає деформацію зсуву. Тому швидкість поширення поперечних хвиль залежить від пружних властивостей середовища до деформації зсуву, тобто від модуля зсуву N . Точні розрахунки показують, що:

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}. \quad (6.84)$$

Оскільки модуль зсуву рідин і газів дорівнює нулю ($N=0$), то поперечні хвилі в цих середовищах не поширюються.

У твердих тілах поширюються як повздовжні, так і поперечні хвилі. Оскільки для всіх твердих тіл $E > N$, то швидкість повздовжніх хвиль завжди є більшою, ніж поперечних хвиль.

Швидкість поширення поперечних хвиль у натягнутому шнурі або струні залежить від сили натягу $F_{\text{нат.}}$ шнура (чи струни) і лінійної маси шнура μ (маси, що припадає на одиницю довжини):

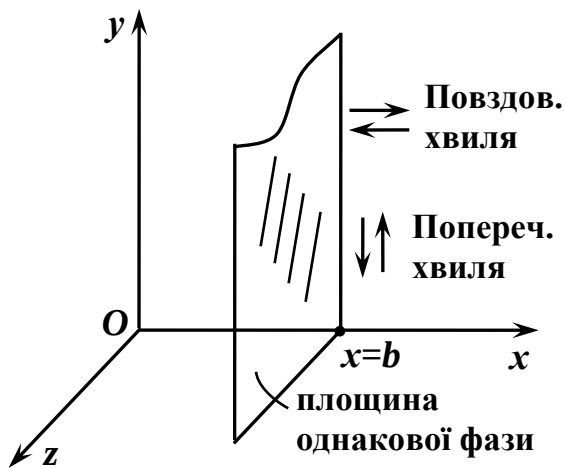
$$v = \sqrt{\frac{F_{\text{нат.}}}{\mu}}. \quad (6.85)$$

Із формул (6.83–6.85) видно, що швидкість пружних хвиль не залежить від частоти коливань, а визначається виключно пружними властивостями середовища і його густиною.

Якщо швидкість хвиль однакова для всіх частот, то кажуть, що такі хвилі не мають дисперсії.

6.4.3. Рівняння плоскої біжучої хвилі

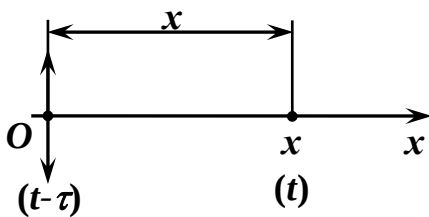
Записати рівняння хвилі – означає записати для кожної точки середовища закон зміни зміщення ξ як функцію часу. У загальному вигляді закон $\xi = f(t, x, y, z)$ є функцією часу і трьох просторових координат. Часова залежність зміщення ξ визначається характером коливань джерела хвилі.



мал. 6.15

Розглянемо частинний випадок синусоїдальної хвилі, у якій зміщення ξ частинок залежить лише від однієї координати x . Це означає, що хвиля поширюється вздовж осі x , а всі точки середовища, які розміщені в одній площині $x=b$, мають у даний момент часу однакові зміщення від положення рівноваги (мал. 6.15).

У випадку повздовжньої хвилі площина (y, z) цілком зміщується по осі x в ту чи іншу сторону на віддаль ξ . У випадку поперечної хвилі відбувається зміщення площини (y, z) в напрямку, перпендикулярному до осі x . Хвилі такого типу називаються плоскими; для них зміщення $\xi=f(t, x)$ в загальному вигляді є функцією двох змінних: t і x .



мал. 6.16

Потрібно зауважити, що в одновимірному середовищі (шнур, струна) хвильовий процес також описується функцією двох змінних t і x , якщо вісь x скерована вздовж шнура (струни).

Змусимо шнур зовнішньою дією коливатися (мал. 6.16). Тоді, точка O буде коливатися вздовж осі, яка або перпендикулярна до осі x , або паралельна до неї, за законом:

$$\xi = A \sin \omega t. \quad (6.86)$$

У результаті цього по шнурі побіжить хвиля. Через деякий час $\tau = \frac{x}{v}$, хвильовий процес досягне до точки з координатою x і примусить її коливатися. Якщо знехтувати загасанням, то амплітуда коливань точки x буде такою ж, як і точки O . У даний момент часу t точка x буде мати таке ж саме зміщення ξ і такий

самий напрям руху, які мала точка O в більш ранній момент часу $t' = t - \frac{x}{v}$. Тому для точки x закон зміни зміщення ξ запишеться так:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (6.87)$$

Співвідношення (6.87) і є рівнянням синусоїдальної одновимірної (або плоскої) хвилі, яка біжить в бік додатних значень координати x .

Рівняння хвилі, що біжить в бік від'ємних значень x , має такий вигляд:

$$\xi = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (6.88)$$

Рівняння біжучої хвилі (6.87) можна записати ще і так:

$$\begin{aligned} \xi &= A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) = \\ &= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{1}{v} x \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Візьмемо до уваги, що $\lambda = T \cdot v$ і зробимо заміну: $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$, тоді (6.89) перепишемо у вигляді:

$$\xi = A \sin(\omega t - kx), \quad (6.90)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, яке показує скільки довжин хвиль укладається на відрізку довжиною 2π метрів.

Запишемо формули для коливань зміщень двох фіксованих точок хвилі з координатами x_1 і x_2 :

$$\xi_1 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \text{ і } \xi_2 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 \right). \quad (6.91)$$

Різниця фаз коливань цих точок дорівнює:

$$\Delta = \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1). \quad (6.92)$$

Різниця фаз коливань в цьому випадку залежить від взаємного розміщення точок. Якщо $x_2 - x_1 = \lambda$, то $\Delta = 2\pi$. А це означає, що точки коливаються в однаковій фазі.

Довжина хвилі – це найменша віддаль між двома точками, які коливаються в однаковій фазі.

6.4.4. Енергія пружної хвилі. Потік енергії.

Вектор Умова-Пойтінга

У середовищі, у якому поширюється плоска повздовжня хвиля $\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, уявно виділимо елементарний об'єм ΔV настільки малий, щоби швидкість руху і деформації в усіх точках цього об'єму можна було вважати незмінними і рівними відповідно $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ і $\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

Виділений об'єм буде мати кінетичну енергію:

$$\Delta T = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (6.93)$$

де $m = \rho \Delta V$ – маса речовини в об'ємі ΔV ; ρ – густина середовища.

Підставимо в (6.93) значення $\frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = A \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \text{ тоді:}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (6.94)$$

Порівнюючи графіки миттєвого розподілу ΔT і ξ , бачимо, що максимуми кінетичної енергії припадають на ті точки середовища, які в даний момент проходять положення рівноваги ($\xi=0$) (мал. 6.17).

Але якраз ці точки мають і найбільшу швидкість коливального руху.

Вибраний об'єм ΔV має і потенціальну енергію ΔU пружної деформації, яка дорівнює:

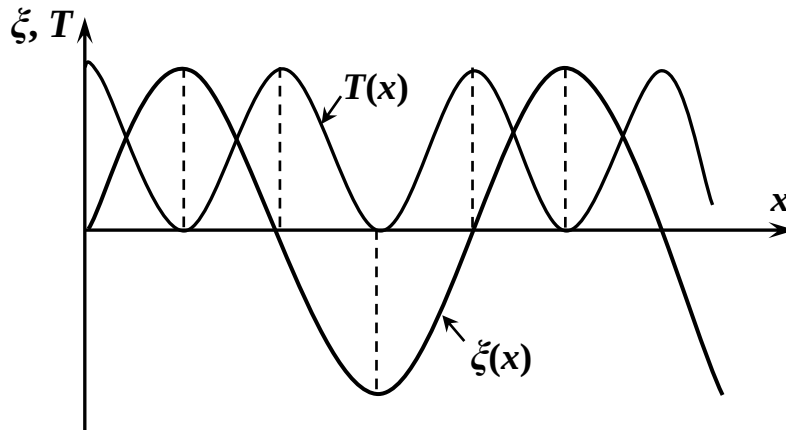
$$\Delta U = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V, \quad (6.95)$$

де $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ – відносне видовження (або стиск), E – модуль Юнга.

Використавши зв'язок, що $v^2 = E/\rho$ і вираз для похідної

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -A \frac{\omega}{v} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \text{ одержуємо що}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (6.96)$$



мал. 6.17

Порівнюючи рівняння (6.94) і (6.96) бачимо, що зміна потенціальної енергії в часі і в просторі аналогічна зміні кінетичної енергії. Максимум потенціальної енергії припадає якраз на ті області середовища, в яких максимальна кінетична енергія. Це є характерною особливістю біжучих хвиль.

Повна енергія вибраного об'єму ΔV в даний момент часу t буде:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (6.97)$$

Якщо рівність (6.97) розділити на ΔV , то одержуємо вираз для миттєвої густини енергії, тобто для енергії, яка припадає в даний момент часу на одиницю об'єму середовища:

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (6.98)$$

Взявши до уваги, що середнє значення квадрата косинуса дорівнює $\frac{1}{2}$, то середнє значення (в часі) густини енергії у кожній точці хвилі визначається формулою:

$$W_{сер.} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (6.99)$$

Отже, середня густина енергії пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди та квадрату частоти.

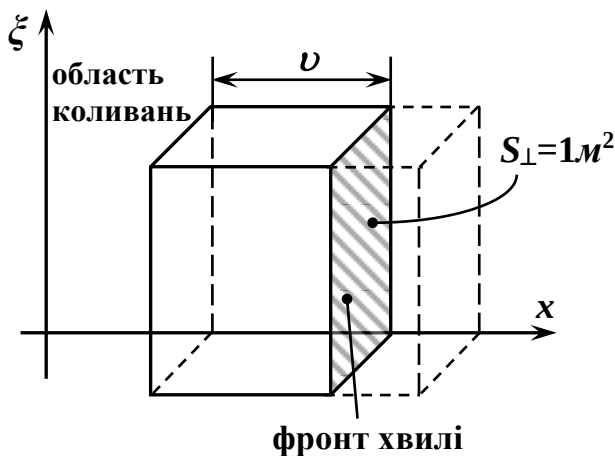
При поширенні хвилі середовище одержує додатковий запас енергії. Хвиля переносить енергію від джерела колювання до віддалених ділянок середовища.

Кількість енергії, яка переноситься хвилею за 1 секунду через деяку поверхню S , називається потоком енергії Φ через цю поверхню. Потік енергії – скалярна величина, розмірність якої збігається з розмірністю потужності.

Кількість енергії, яка переноситься хвилею за 1 секунду через площадку в один квадратний метр, розміщену перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, називають *густиною потоку енергії*.

Обчислимо цю величину.

Хвиля у результаті свого проходження через площадку $S=1\text{м}^2$ переносить за 1 с таку кількість енергії, яка міститься у паралелепіпеді, показаному на мал. 6.18.



мал. 6.18

На цей паралелепіпед припадає енергія:

$$J = w_c \cdot v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (6.100)$$

Розглядаючи фазову швидкість хвилі як вектор $\vec{v}$, напрям поширення якого збігається з напрямом поширення хвилі, запишемо густину потоку через векторні величини:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (6.101)$$

Вектор, що визначається рівнянням (6.101), називають вектором Умова-Пойтінга.

Знаючи вектор $\vec{J}$ у будь-якій точці довільної поверхні S , можна обчислити потік енергії через цю поверхню. Для цього поверхню розбивають на елементарні площадки dS і вводять поняття вектора

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}, \quad (6.102)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, нормальний до площадки dS .

Тоді потік енергії $d\Phi$ через елементарну площадку dS дорівнює:

$$d\Phi = \vec{J} d\vec{S} = J dS \cos\alpha = J_n dS, \quad (6.103)$$

де $J_n = J \cos\alpha$ є проєкцією вектора $\vec{J}$ на напрямок нормалі до площадки.

Повний потік енергії через площадку S знаходимо інтегруванням по поверхні:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S J_n dS. \quad (6.104)$$

6.5. Інтерференція хвиль. Стоячі хвилі

6.5.1. Інтерференція хвиль

Коли в середовищі поширюються одночасно декілька хвиль, то тоді частинки середовища здійснюють коливання, які є результатом додавання коливань, створених у даній точці кожною хвилею окремо.

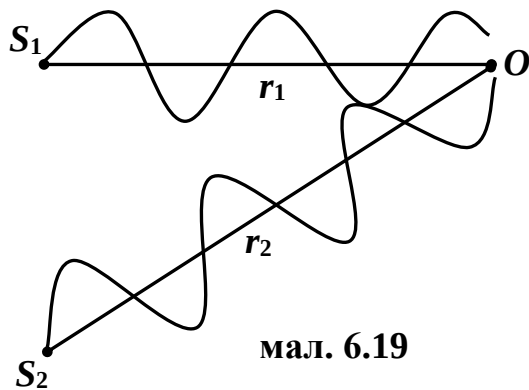
Результуюче зміщення частинки середовища у будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які одержує частинка, беручи участь в кожному із складових хвильових процесів.

Принцип суперпозиції (накладання) хвиль, встановлений із досліду, полягає в тому, що хвилі від різних джерел, накладаючись одна на одну, не змінюють одна одну і поширюються так, ніби інші хвилі були відсутні.

Явище, яке виникає при додаванні хвиль, називають *інтерференцією*. Інтерференція полягає у такому накладанні двох (і більше) хвиль, яке приводить до стаціонарного (не залежного від часу) підсилення коливань частинок в одних місцях середовища і послаблення (або повного гасіння) в інших місцях простору.

Розглянемо випадок, коли в середовищі поширюються дві хвилі, які мають в кожній точці середовища однакову частоту і постійну різницю фаз (мал. 6.19).

Для цього треба мати два джерела, які коливаються з однаковою частотою і постійною різницею фаз. Такі джерела називають когерентними, а створені ними хвилі – когерентними хвилями.



мал. 6.19

Нехай хвилі поширюються від двох когерентних джерел S₁ і S₂ і накладаються у т.О. Для простоти будемо вважати, що їх коливання відбуваються в однакових фазах.

Щоб визначити результуючий рух точки О, знайдемо її зміщення у кожній хвилі окремо:

$$\xi_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad \text{і} \quad \xi_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right), \quad (6.105)$$

де r₁ і r₂ – віддаль точки О від джерел хвиль S₁ і S₂ відповідно.

Оскільки в т.О хвилі викликають коливання одного напрямку, то результуюче зміщення дорівнюватиме алгебраїчній сумі зміщень ξ₁ і ξ₂. Відомо, що при додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку результуюче коливання буде також гармонічним з тим самим періодом. Його амплітуду А і зсув фаз знаходять із формул:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.106)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6.107)$$

Із рівняння (6.105) визначаємо φ₁ і φ₂:

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi r_1}{\lambda} \quad \text{і} \quad \varphi_2 = -\frac{2\pi r_2}{\lambda} \quad (6.108)$$

$$\text{Тоді } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}, \quad (6.109)$$

де r₂ – r₁ – різниця ходу хвиль від джерел S₁ і S₂ до точки О, де ці хвилі накладаються.

Знайдемо значення результуючої амплітуди коливання в окремих випадках:

$$1) \text{ нехай } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (6.110)$$

$$\text{де } k = 0, 1, 2, \dots \text{ Тоді } |r_2 - r_1| = k\lambda, \text{ і } A = A_1 + A_1. \quad (6.111)$$

Отже, максимальна амплітуда коливань буде в таких точках, для яких різниця ходу хвиль дорівнює нулю або цілому числу довжин хвиль.

$$2) \text{ нехай } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2k + 1)\pi, \quad (6.112)$$

$$\text{де } k = 0, 1, 2, \dots \text{ Тоді } r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ і } A = A_1 - A_1. \quad (6.113)$$

Отже, мінімальна амплітуда коливань буде в таких точках, для яких різниця ходу хвиль дорівнює непарному числу півхвиль.

3) точки, для яких різниця ходу хвиль має проміжні значення між $k\lambda$ і $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, коливаються з деякими середніми значеннями амплітуд.

6.5.2. Стоячі хвилі

Запишемо рівняння двох плоских хвиль, які мають однакові частоти й амплітуди і поширюються у протилежних напрямках:

$$\xi_1 = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \text{і} \quad \xi_2 = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (6.114)$$

Сумарне зміщення частинки середовища з координатою x дорівнює сумі зміщень ξ_1 і ξ_2 :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right], \quad (6.115)$$

або після геометричних перетворень (взявши до уваги, що

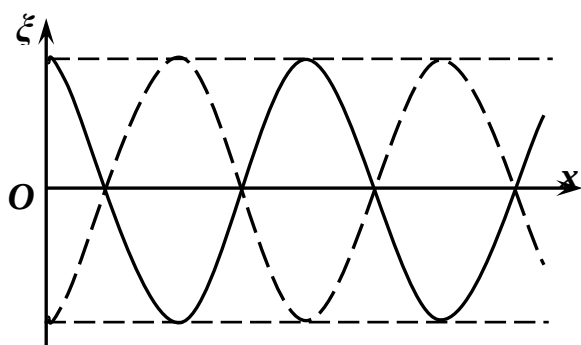
$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \beta \sin \alpha)$$

одержуємо:

$$\xi = 2A \sin \omega t \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (6.116)$$

$$\text{Рівняння} \quad (6.116)$$

називають рівнянням стоячої



мал. 6.20

хвилі. Воно показує, що в результаті накладання біжучої і відбитої хвиль точки середовища коливаються так, що всі вони одночасно проходять положення рівноваги ($\sin \omega t = 0$) і всі вони одночасно досягають своїх найбільших відхилень ($\sin \omega t = \pm 1$) (мал. 6.20).

Можна було б сказати, що частинки у стоячій хвилі коливаються в одній фазі. Оскільки множник $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ має алгебраїчний знак, частинки насправді коливаються або в одній фазі, якщо для них $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ має однаковий знак, або в

протифазі, якщо $\cos \frac{2\pi x}{\lambda}$ має для них різні знаки.

Із рівняння (6.116) видно, що амплітуда коливань частинок у стоячій хвилі залежить від їх координати x , але не залежить від часу:

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|. \quad (6.117)$$

В стоячій хвилі є такі точки, які залишаються весь час нерухомими. Їх називають *вузлами зміщення*. Положення вузлів визначають з умови:

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0 \quad \text{або} \quad \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0. \quad (6.118)$$

Рівняння (6.118) задовольняються при значеннях аргументу:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \pi(k+1/2), \quad (6.119)$$

де $k=0, 1, 2, \dots$

$$\text{Звідки} \quad x = \pm \frac{\lambda}{2} (k+1/2). \quad (6.120)$$

Отже, точки з координатами $x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda$ є вузлами.

Віддаль між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі $\lambda/2$.

Точки хвилі, які коливаються з найбільшими амплітудами, називаються *пучностями зміщення*. Координати цих точок визначаються з умови:

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 2A \quad \text{або} \quad \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1. \quad (6.121)$$

Рівняння (6.121) задовольняється при значеннях аргументу:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, \quad (6.122)$$

де $k=0, 1, 2, \dots$

$$\text{Звідси одержуємо: } x = \pm k \frac{\lambda}{2}. \quad (6.123)$$

Найбільшу амплітуду мають точки з координатами:

$$x=0, \pm\lambda/2, \pm\frac{2\lambda}{2}, \dots$$

Віддаль між двома сусідніми пучностями також дорівнює половині довжини хвилі $\lambda/2$.

6.5.3. Кінетична та потенціальна енергія стоячої хви

Виберемо в середовищі, де встановилася повздовжня стояча хвиля, елементарний об'єм ΔV , достатньо малий, щоби можна було вважати швидкості коливання руху частинок однаковими, а деформацію однорідною. Вибраний об'єм буде мати кінетичну енергію:

$$\Delta T = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V. \quad (6.124)$$

Для стоячої хвилі

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t, \quad \text{то} \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = 2A\omega \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (6.125)$$

Взявши до уваги (6.125), рівняння (6.124) запишемо так:

$$\Delta T = 2\rho A^2 \omega^2 \left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \omega t \Delta V. \quad (6.126)$$

З рівняння (6.126) робимо висновок, що кінетична енергія вибраного об'єму змінюється з часом, як квадрат косинуса, і що існують такі точки хвилі, у яких кінетична енергія дорівнює нулю у будь-який момент часу ($\cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$). Ці точки називають *вузлами кінетичної енергії*. Вони збігаються з вузлами зміщення. А точки, у яких ΔT має найбільше значення ($\cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} = 1$), називають *пучностями кінетичної енергії*. Ці точки збігаються з пучностями зміщення.

Вибраний об'єм середовища ΔV має також і запас потенціальної енергії:

$$\Delta U = \frac{E\varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V.$$

Але: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{4\pi A}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t$ і $E = v^2 \rho$. (6.127)

Тоді: $\Delta U = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{4A^2 \cdot 4\pi^2}{\lambda^2} \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \sin^2 \omega t \cdot \Delta V$. (6.128)

Знаючи, що $v = \lambda \nu$ і $\omega = 2\pi \nu$, рівняння (6.128) запишемо так:

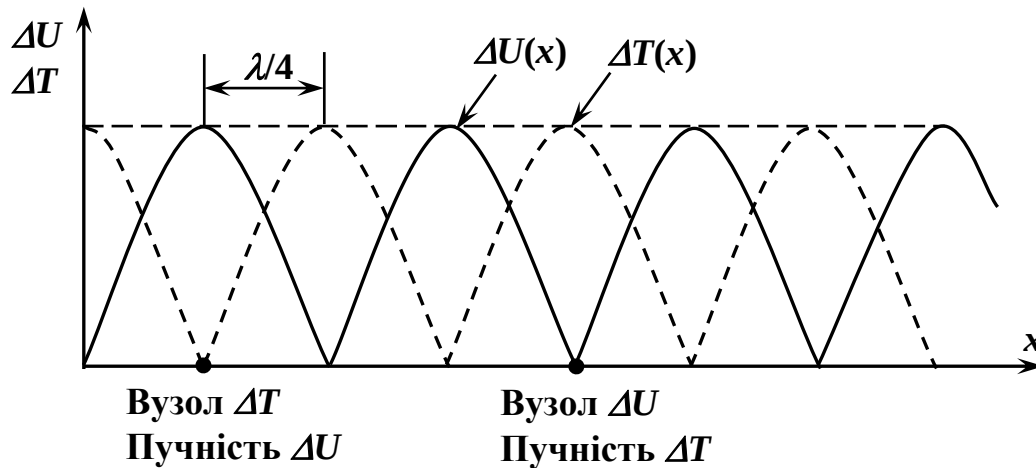
$$\Delta U = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \sin^2 \omega t \Delta V. \quad (6.129)$$

З рівняння (6.129) робимо висновок: потенціальна енергія фіксованого об'єму також змінюється з часом, але уже за законом синуса у квадраті. У ці моменти часу, коли кінетична енергія дорівнює нулю ($\cos \omega t = 0$), потенціальна енергія досягає максимуму ($\sin \omega t = 1$). Це означає, що коливання кінетичної і потенціальної енергії за часом зсунуті на чверть періоду ($T/4$).

Є такі точки в стоячій хвилі, де потенціальна енергія дорівнює нулю в будь-який момент часу ($\sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$). Ці точки називають вузлами потенціальної енергії. Існують і пучності потенціальної енергії ($\sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} = 1$). При цьому вузли потенціальної енергії припадають на пучності кінетичної енергії, і навпаки (мал. 6.21).

Видно, що пучності кінетичної енергії і пучності потенціальної енергії зсунуті на чверть довжини хвилі ($\lambda/4$). Отже, на відміну від біжучих хвиль максимумами кінетичної і потенціальної енергії стоячих хвиль відрізняються не тільки в часі (на $T/4$), але і в просторі (на $\lambda/4$).

На відміну від біжучих хвиль стоячі хвилі не переносять енергії, так як падаюча і відбита хвиля однакової амплітуди несуть однакову енергію у протилежних напрямках. Середній за кожен півперіод потік енергії через площадку, яка поставлена перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, буде дорівнювати нулю.



мал. 6.21

6.6. Власні коливання суцільного обмеженого середовища

Обмежене середовище (відрізок стержня з закріпленими або вільними кінцями, струна тощо) є коливальними системами з розподіленими параметрами.

Власні коливання таких систем пов'язані з утворенням у них стоячих хвиль, форма яких залежить від умов відбивання на границі середовища.

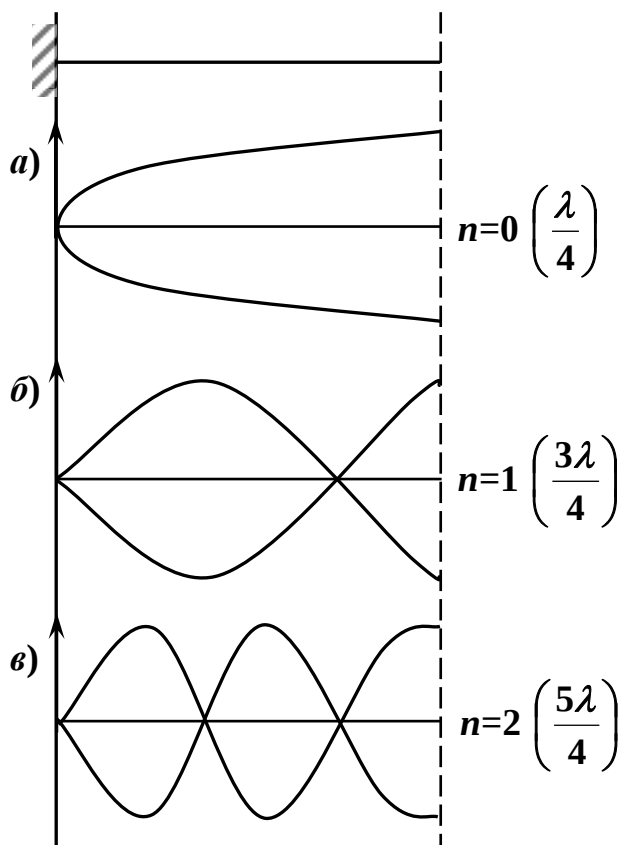
Збудити таку систему можна короткочасною дією на яку-небудь її частину (наприклад, ударом). У результаті короткочасної дії утворений хвильовий імпульс “побіжить” від місця свого утворення в усі доступні напрямки.

Оскільки середовище обмежене, то утворена хвиля дійшовши до границі середовища, відіб'ється і перебуватиме ніби “закритою” всередині обмеженої системи. Прямі та відбиті хвилі, накладаючись, утворюють стоячу хвилю, у якої положення вузлів і пучностей суттєво залежить від умов відбивання на границі середовища.

Оскільки стоячі хвилі в цей проміжок часу існують самі собою (тобто у відсутності дії зовнішньої сили), то зв'язані з ними коливання обмеженої системи (стержня, струни) називають власними. Власні коливання системи через наявність втрат є загасаючими.

Оскільки суцільне обмежене середовище має безмежно багато ступенів вільності (кількість точок, що коливаються, безмежно), то можна припустити, що системи повинні мати безконечну кількість власних частот.

Розглянемо власні коливання стержня, у якого закріплено один кінець (мал. 6.22). Якщо ударом молоточка збудити в ньому повздовжні або поперечні хвилі, то в ньому встановлюються стоячі хвилі, при цьому на закріпленому кінці обов'язково буде вузол зміщення, а на вільному – пучність. Ця умова задовольняється безконечним числом способів.



мал. 6.22

Насамперед ця умова буде задоволена, коли на довжині стержня l вкладеться четверта частина довжини хвилі (мал. 6.22, а). Вона також буде виконуватися, якщо на довжині l укладеться $3/4\lambda$, $5/4\lambda$ і т.д. або в загальному випадку $(2n+1)\lambda/4$ (де $n = 0, 1, 2, \dots$). Кожному із цих випадків буде відповідати своя частота коливань.

Ми бачимо, що такий стержень має безконечну кількість власних частот. Для нього справедливе співвідношення:

$$(2n + 1) \frac{\lambda_n}{4} = l \quad (6.130)$$

або $\lambda_n = \frac{4l}{2n+1}$. Тоді частоту власних коливань знайдемо за формулою (при відсутності дисперсії):

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v(2n+1)}{4l}, \quad (6.131)$$

де v – швидкість поширення пружних хвиль у стержні.

Якщо $n=0$, то частота:

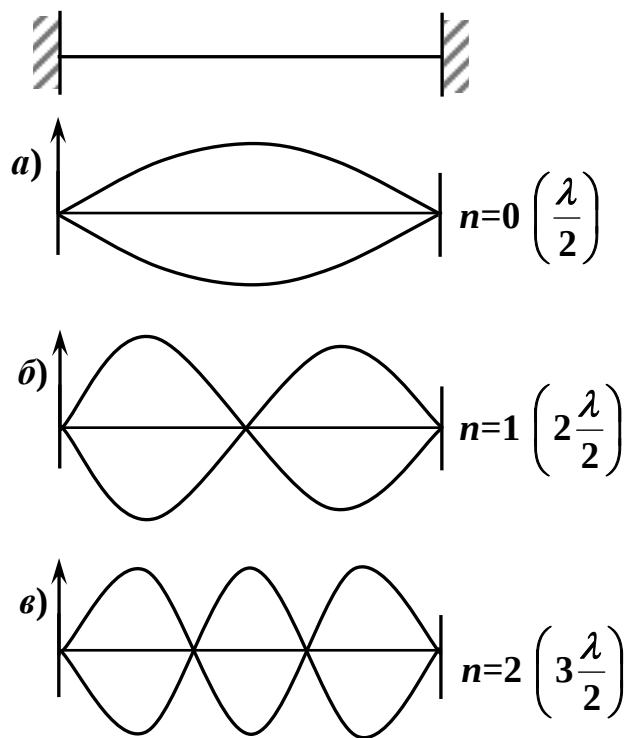
$$\nu_0 = \frac{v}{4l}. \quad (6.132)$$

Цю частоту називають основною (в акустиці – основний тон), а всі інші частоти (вищі) називають гармоніками (або обертонами).

Частоти гармонік, як видно із (6.131), кратні ν_0 :

$$\nu_n = \nu_0(2n+1)$$

Якщо стержень закріпити з двох кінців (як струну) (мал. 6.23),



мал. 6.23

то довжина хвилі і частоти власних коливань визначаються із наступного співвідношення:

$$k \frac{\lambda_k}{2} = l, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{або: } \nu_k = \frac{v}{\lambda_k} = \frac{v}{2l} k.$$

(6.133)

При збудженні стержня виникають коливання усіх частот, амплітуди яких, як правило, зменшуються із збільшенням номера гармоніки.

Якщо збудження

здійснюється періодичною силою, яка змінюється з частотою ν , що дорівнює частоті n -ої гармоніки, то система “відрезонує” якраз цю частоту: коливання цієї частоти будуть мати найбільшу амплітуду, а амплітуди інших гармонік і основного тону будуть дуже малі.

Коливання струни аналогічні до коливань стержня, закріпленого на обидвох кінцях. Тільки для струни треба мати на увазі, що швидкість поширення хвилі визначається за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (6.134)$$

де μ – маса, що припадає на одиницю довжини.

Коливання стовпа повітря у трубі аналогічні до коливань стержня, закріпленого на одному кінці.

Стержень, струна, стовп повітря у трубі – це приклади одномірних коливальних систем. Вузли та пучності стоячих хвиль у таких системах є точками (струна) або площинами, які перпендикулярні до повздовжніх осей системи (стержень, стовп повітря).

Власні коливання пластин пов'язані з утворенням двомірних стоячих хвиль, які є суперпозицією стоячих хвиль, що встановлюються у напрямках осей x і y . Насипаний на пластинку пісок “злітає” з тих ділянок, які коливаються, і залишається на частинах, які відповідають вузловим лініям, через що ці лінії стають видимими (фігури Хладні).

Будь-яке пружне тіло довільної форми також є коливальною системою (тривимірною), яка має основну частоту та безконечну кількість гармонік.

Отже, будь-яке пружне тіло є коливальною системою, яка має безконечний набір власних частот. Такі тіла здатні резонувати на частоти, що збігаються з основною частотою або з частотою будь-якої гармоніки.

6. 7. Природа звуку

Пружні хвилі, які поширюються у суцільних середовищах, називаються звуковими хвилями. Власне звуком називаються хвилі, частота яких лежить у межах сприйняття їх людським органом слуху, тобто від 16 до 20000 Гц. Хвилі з частотою, яка лежить за межами цих границь, не чутні, вони не створюють слухових відчуттів.

Пружні хвилі, що мають меншу частоту, ніж 16 Гц , називаються інфразвуком, а хвилі з частотою від $2 \cdot 10^4$ до 10^9 Гц – ультразвуком. Розділ фізики, який вивчає методи збудження звукових хвиль, їх поширення і взаємодію із середовищем, називають акустикою.

Одержані в попередніх розділах загальні закономірності коливального та хвильового видів механічного руху можна застосовувати і до вивчення акустичних явищ.

Для виникнення і поширення звукових хвиль необхідна наявність пружного середовища (тверде тіло, повітря, рідина).

Тверде тіло чинить опір деформаціям як повздовжнім, так і зсуву. Тому в твердому тілі звукові хвилі можуть бути і повздовжні, і поперечні.

У рідинах і газах, які не чинять у звичайних умовах опору деформації зсуву, можуть існувати звукові хвилі тільки повздовжні.

Звукові хвилі у середовищі створюються коливальним тілом. Наприклад, коливання мембрани телефона створює у прилеглому шарі повітря послідовно стиск і розтяг, які поширюються в усі сторони.

У кожній точці простору, який заповнений середовищем, що перебуває у стані звукового руху, відбуваються періодичні зміни:

- а) положення частинки відносно рівноважного стану;
- б) швидкості зміщення частинки;
- в) величини тиску (стиску і розрідження) відносно середнього їх значення, яке має місце в незбуреному середовищі.

Простір, заповнений середовищем у стані звукового руху, називається звуковим полем.

Швидкість поширення повздовжніх і поперечних звукових хвиль визначається формулами, зазначеними вище ($v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, $v_{\perp} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$).

У рідких і газоподібних середовищах поширення звуку відбувається адіабатично, оскільки внаслідок швидкої зміни стисків і розріджень теплообмін між збуреною і незбуреною частинами середовища не встигає встановлюватися.

Швидкість звуку в газах обчислюють за формулою:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (6.135)$$

де R – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, μ – молярна маса газу, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ (C_p – молярна теплоємність газу при $p = \text{const}$, C_v – молярна теплоємність цього газу при $V = \text{const}$).

6. 8. Характеристики звуку

Звук можна характеризувати двома системами фізичних величин: характеристиками, які не залежать від особливостей сприйняття звуку людиною (їх можна назвати об'єктивними), і такими, які, навпаки, ґрунтуються на сприйнятті звуку (їх називають суб'єктивними).

А) об'єктивні характеристики звуку.

До них належать фізичні величини, які описують будь-який хвильовий процес:

1) частота звуку ν , яка вимірюється числом коливань за секунду частинок середовища, що беруть участь у хвильовому процесі (Гц);

2) густина потоку енергії (або інтенсивність звуку), яка вимірюється кількістю енергії, що переноситься звуковою хвилею за 1 с через площадку 1 м^2 , поставлену перпендикулярно до напрямку поширення хвилі ($\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$ або $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$).

Нехай в деякому об'ємі середовища поширюється плоска звукова хвиля, у якій зміщення частинок відбувається за законом:

$$\xi = A \sin \omega(t - \frac{x}{v}). \quad (6.136)$$

Відомо, що середній за період потік хвильової енергії знаходиться за формулою:

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (6.137)$$

Величину I в акустиці прийнято називати інтенсивністю звуку (або силою звуку).

Спектральний склад звуку показує, з яких частот складений даний звук і як розподілені амплітуди між окремими складовими. Наприклад, акорд має лінійчастий спектр, а шум – суцільний спектр.

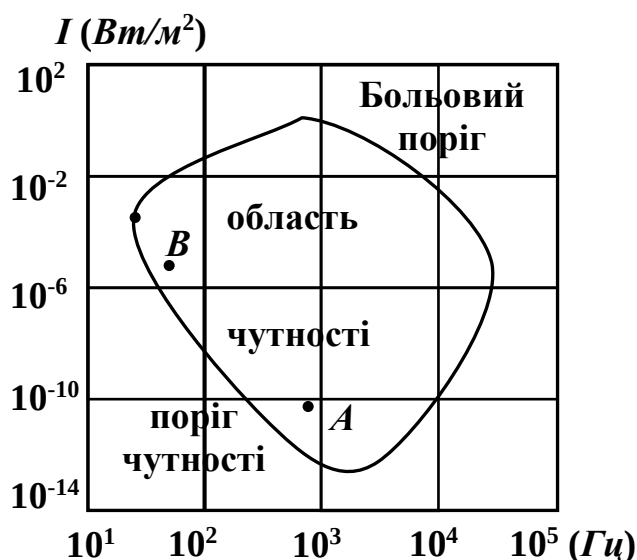
Б) суб'єктивні характеристики звуку.

До суб'єктивних характеристик звуку належать висота тону, гучність, тембр.

Висота тону – це суб'єктивна оцінка частоти звуку, чим більша частота, тим вищий тон звуку, що сприймається. Але здатність вуха розрізняти звуки за їх частотою залежить від частоти. При малих і великих частотах зміна частоти звуку має бути значною, щоб вуха могло відчутти зміну тону. Область найбільшої гостроти

вуха припадає на частоти 600–1000 Гц.

Гучність (голосність) є суб'єктивною оцінкою інтенсивності звуку. Сприйняття інтенсивності залежить від частоти звуку. Може виявитися, що звук великої інтенсивності однієї частоти сприймається нами як менш гучний, ніж звук малої інтенсивності іншої частоти.



мал. 6.24

Дослід показує, що для кожної частоти в області чутних звуків (20–20000 Гц) існує так званий поріг чутності. Це мінімальна інтенсивність, коли вуха не реагує на звук.

Дослідом також встановлено, що для кожної частоти існує так званий поріг больових відчуттів, тобто таке значення інтенсивності звуку, яке викликає больові відчуття у вухах (мал. 6.24).

Сукупність точок, які відповідають порогу чутності, і точок, які відповідають порогу больових відчуттів на діаграмі (I, ν) утворюють

дві криві. Область обмежена цими кривими називається областю чутності.

З мал. 6.24 видно, що менш інтенсивний звук, який відповідає т. *A*, буде сприйматися голосніше, ніж інтенсивніший звук, що відповідає т. *B*, оскільки точка *A* далі віддалена від порогу чутності, ніж точка *B*.

Із мал. 6.24 також видно, що наше вухо може сприймати звуки, які відрізняються за інтенсивністю в 10^{13} разів. Дослід показує, що суб'єктивна оцінка інтенсивності звуку – гучність зростає значно повільніше, ніж сама інтенсивність звуку; при зростанні інтенсивності звуку в геометричній прогресії гучність зростає приблизно в арифметичній прогресії, тобто лінійно.

Тому гучність доцільно визначати як десятковий логарифм відношення інтенсивності I до деякої інтенсивності I_0 , яка прийнята за початкову:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (6.138)$$

За початкову беруть інтенсивність $I_0 = 10^{-9} \frac{\text{ерг}}{\text{см}^2}$. Це є інтенсивність порогу чутності на частоті 10^3 Гц . Гучність звуку, що відповідає цій інтенсивності, дорівнює нулю (звук не сприймається).

Одиниця гучності L називається белом. Часто гучність звуку виражають у децибелах (дб); цю дольну одиницю ще називають фоном (фон):

$$1 \text{ бел} = 10 \text{ дб (фон)}.$$

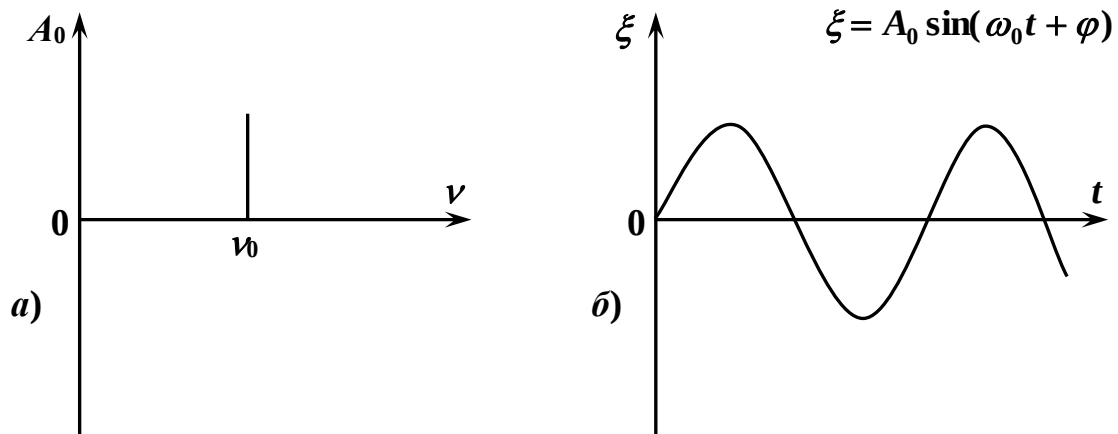
Якщо гучність виражається у децибелах, то формулу (6.138) переписують так:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (6.139)$$

Усьому діапазону інтенсивностей звуку, які сприймаються вухом від порогу чутливості до порогу больових відчуттів, відповідають значення чутливості від нуля до 130 дб.

Тембр – суб'єктивна оцінка спектрального складу звуку.

Найпростішим звуком є чистий тон (чистий звук). Під ним розуміють слухове відчуття, яке одержується від простого гармонічного (синусоїдального) коливання (мал. 6.25).



мал. 6.25

На мал. 6.2 показані спектр чистого тону (а) і графік зміщення частинок (б) у відповідній хвилі залежно від часу. Складні звуки є сумішшю тонів, результатом суперпозиції чистих тонів з частотами $\nu, 2\nu, 3\nu$. Висота звуку визначається основною частотою ν . А гармоніки (обертони) з частотами $2\nu, 3\nu, \dots$ створюють тембр звуку.

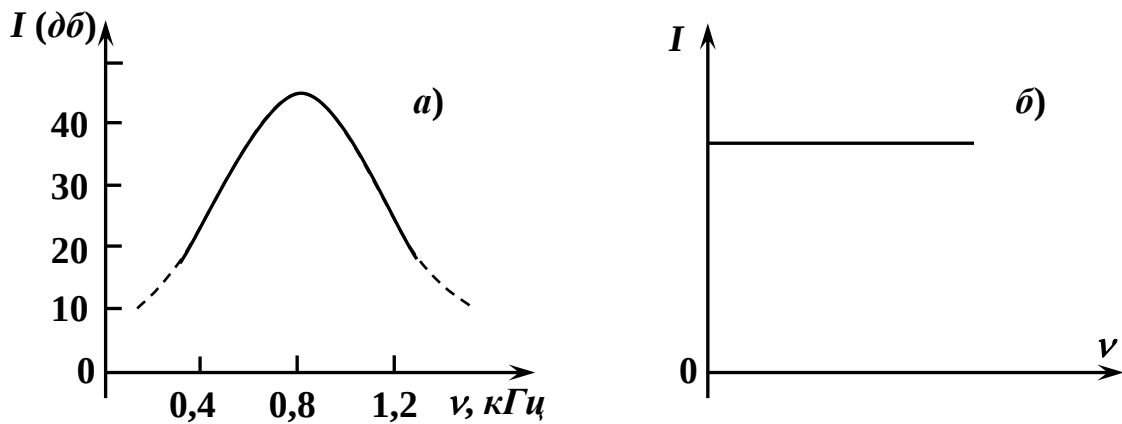
Отже, тембр – певний відтінок, яким відрізняють звуки однакової висоти та сили від різних джерел. З фізичної точки зору, тембр визначається набором частот простих коливань, що входять до складу звуку.

Наявність у людини парного слухового органу обумовлює так званий бінауральний ефект, тобто можливість визначати положення джерела звуку. Коли вуха розміщені симетрично відносно напрямку на джерело, звукова хвиля приходить до них в одній фазі, а при несиметричному розміщенні хвилі попадають у вуха з деякою різницею фаз. Через високу чутливість до цієї різниці фаз людина здатна визначати напрям на джерело звуку з точністю до $2,5\text{--}3^\circ$. Бінауральний ефект можна підсилити, якщо до вух прикласти довгі рупори. Цей принцип застосовують у звукоуловлювачах.

Акорд – це одночасне звучання двох або декількох чистих тонів. Він може викликати приємне відчуття – консонанс або неприємне – дисонанс.

Шумом називається аперіодична складна суміш звуків, спектр якої у деякому інтервалі частот є неперервним.

На мал. 6.26, *а* показано спектр мови людини, а на мал. 6.3, *б* – спектр шуму водоспаду, лісу, моря.



мал. 6.26

6.9. Поширення звуку. Ефект Доплера

6.9.1. Поширення звуку

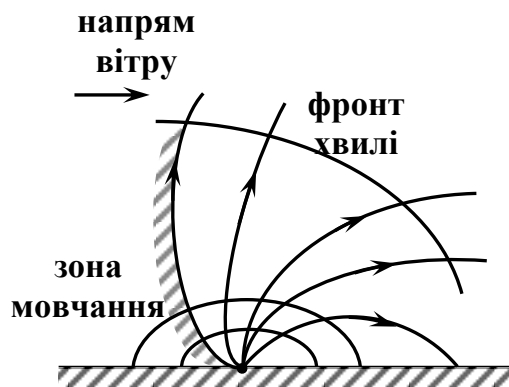
Розрахунки поглинання звуку в повітрі показують, що хвиля з частотою 10^3 Гц при 20°C послаблюється в e разів на віддалі приблизно 115 км. Урахування впливу теплопровідності понижує цю величину до 81 км. Але насправді звук в атмосфері затухає значно швидше. Причина цього в тому, що на його поширення впливають вітер, температура та вологість повітря, наявність шарів різної густини.

Сферична хвиля від точкового джерела в однорідній атмосфері повинна поширюватися з однаковою швидкістю в усіх напрямках.

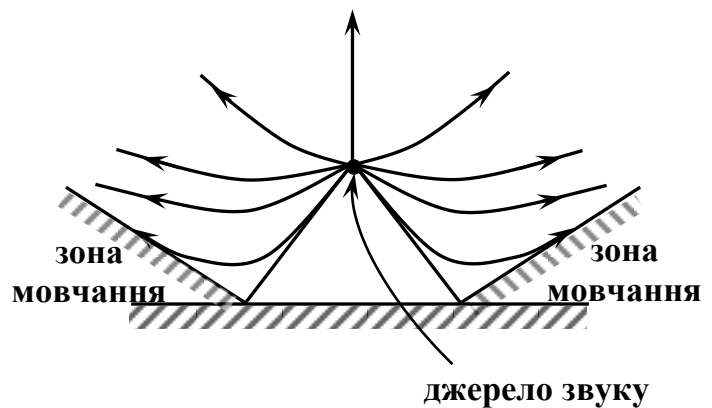
Але якщо має місце вітер, то його швидкість і швидкість хвилі додаються геометрично. Оскільки швидкість вітру біля землі менша (внаслідок тертя), а із збільшенням висоти зростає, то окремі частини фронту хвилі рухаються відносно землі з різною швидкістю (мал. 6.27).

Промені загинаються вгору, а з протилежного боку від джерела притискаються до землі. Тому звук чути на більший від джерела віддалі з противітряного боку, ніж з вітрового боку (мал. 6.27).

На мал. 6.28 показано поширення звукової хвилі, коли температура повітря зменшується з висотою. У теплому повітрі звук поширюється швидше, ніж в холодному. Тому в звуковій хвилі промені загинаються вгору.



мал. 6.27



мал. 6.28

Якщо ж температура шарів повітря, які прилягають до землі, нижча, ніж на деякій висоті (що буває в ясні ночі, коли земля і прилеглі до неї шари повітря швидко вистигають внаслідок випромінювання), промені притискаються до землі.

У гарячий день, коли земля і нижні шари повітря сильно нагріті, віддаль, на якій чути звук, помітно менша, ніж в ясну ніч.

У воді звук поширюється на значно більші віддалі, ніж у повітрі. А оскільки світлові хвилі та радіохвилі затухають у воді дуже швидко, то єдиним способом сигналізації під водою залишаються звукові та ультразвукові хвилі.

6.9.2. Ефект Доплера

Коли джерело і приймач звуку нерухомі відносно середовища, у якому поширюється звук, то частота коливань, які сприймає приймач, буде дорівнювати частоті ν_0 коливань джерела.

Вплив руху джерела або приймача на сприйняття звуку (його частоту) установив австрійський фізик Доплер. У 1842 році він дослідив, що частота ν звуку, який сприймається приймачем, залежить як від швидкості руху джерела (відносно середовища), так і від швидкості руху спостерігача (приймача): вона вища від частоти ν_0 джерела, якщо спостерігач і джерело зближаються, і нижча від ν_0 , якщо вони віддаляються. У цьому суть ефекту Доплера.

Якщо і джерело, і спостерігач рухаються одночасно, то частота, що сприймається приймачем, буде визначатися за формулою:

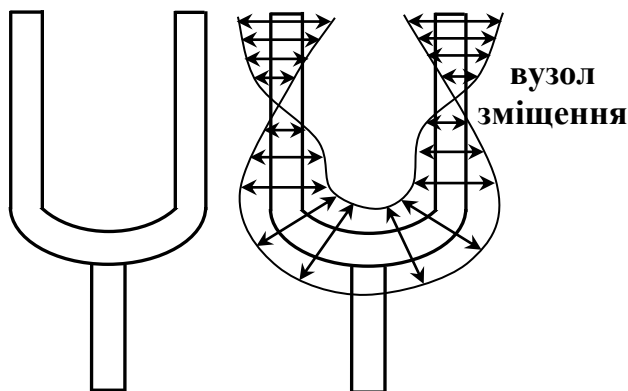
$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{v_n}{c}}{1 - \frac{v_d}{c}}, \quad (6.140)$$

де v_n – швидкість приймача, v_d – швидкість джерела, c – швидкість світла, ν_0 – частота хвиль, що випромінюються джерелом. При цьому $v_n > 0$, якщо приймач рухається назустріч джерелу; $v_d > 0$, якщо джерело рухається до приймача. У протилежному разі обидві величини треба вважати від’ємними.

Якщо швидкості v_n і v_d не направлені по прямій, яка їх з’єднує, то у формулу (6.140) треба підставляти не самі швидкості v_n і v_d , а їх проєкції на пряму, що з’єднує джерело і приймач.

6.10. Джерела звуку. Ультразвук

6.10.1. Джерела звуку



мал. 6.29

Джерелом звуку може бути будь-яке тіло, у якому виникли власні або вимушені коливання звукової частоти. Розрізняють три види джерел.

1. Джерела, які випромінюють звук у результаті вільних коливань системи з розподіленими

параметрами.

До таких джерел належать камертони (мал. 6.29), дзвони, пластини, стержні, а також струни, що збуджуються ударом (рояль) або щипком (гітара, арфа і т.д.). Перераховані джерела мають мале затухання і одержані від них звуки наближаються до чистих тонів (до синусоїдального виду). Особливо треба виділити камертон (мал. 6.29). При вільних коливаннях у ньому встановлюється стояча хвиля тільки основного тону. Форма камертона така, що збудження в ньому гармонік утруднено.

1. Автоколивальні системи.

До них належать смичкові та духові інструменти, органні труби, свистки тощо.

Розглянемо наприклад, як виникають автоколивання струни у смичкового інструмента. При русі волосу смичка струна під дією сили тертя спокою почне віддалятися від положення рівноваги. Коли сила пружності деформованої струни перевищує силу тертя спокою, струна відривається від волоска, переходить на другий бік від положення рівноваги і момент найбільшого відхилення знову захоплюється смичком. Так, два рази за період струна одержує поповнення енергії, що і забезпечує коливання з незмінною амплітудою.

2. Системи, які здійснюють вимушені коливання.

Такі системи лише відтворюють коливання, до яких їх примушують зовнішні періодичні сили. Прикладом джерел звуку даного виду є гучномовці, мембрани грамофонів, сирени тощо.

У гучномовці головною частиною є дифузор: він коливається з частотою струму, що живить звукову обмотку приладу.

Коливання мембрани грамофона викликаються голкою, яка ковзає борознами грамплатівки.

У сирені потік повітря періодично переривається обертовим диском, що має ряд отворів.

6.10.2. Ультразвук

Ультразвук – механічна хвиля, частота якої перевищує $2 \cdot 10^4$ Гц. Для отримання ультразвуку використовують три явища:

- обернений п'єзоелектричний ефект,
- магнітострикцію,
- електрострикцію.

Обернений п'єзоелектричний ефект полягає в тому, що пластинка, яка вирізана певним чином із кристалу кварцу (або іншого анізотропного кристалу), під дією електричного поля вкорочується або видовжується залежно від напрямку поля.

Якщо розмістити таку пластину між обкладками плоского конденсатора, на які подається змінна напруга, то пластинка зазнає вимушених коливань. Ці коливання будуть мати найбільшу амплітуду, коли частота зміни електричної напруги збігається з частотою власних коливань пластинки.

Коливання пластинки передаються частинкам навколишнього середовища (повітря або рідини), що і викликає ультразвукову хвилю.

Явище магнітострикції полягає в тому, що феромагнітні стержні (сталі, залізо, нікель і їх сплави) змінюють свої лінійні розміри під дією магнітного поля, направленого по осі стержня.

Помістивши такий стержень у змінне магнітне поле (наприклад, всередину котушки, по якій тече змінний струм), у стержні збуджуються вимушені коливання, амплітуда яких буде особливо високою при резонансі.

Торець стержня, що коливається, створює у навколишньому середовищі ультразвукові хвилі, інтенсивність яких перебуває у прямій залежності від амплітуди коливань стержня.

Деякі матеріали (наприклад, кераміка) мають властивість змінювати свої розміри в електричному полі. Це явище, яке одержало назву електрострикції, відрізняється від оберненого п'єзоелектричного ефекту тим, що зміна розмірів залежить тільки від напруженості прикладеного поля, але не залежить від його знаку. До числа таких матеріалів належать титанат барію і титанат-цирконат свинцю.

Перетворювачі, у яких використовуються описані вище явища, називаються відповідно п'єзоелектричними, магнітострикційними й

електрострикційними. Останні знайшли найбільше застосування у техніці.

Реєстрація ультразвуку здійснюється перетворювачем, дія якого ґрунтується або на прямому п'єзоелектричному ефекті, або на явищі, оберненому до електрострикції.

При стиску кварцової пластини на її паралельних площинах виникають різнойменні заряди, тобто утворюється різниця потенціалів, яка залежить від стиску.

Дія кварцового й електрострикційного керамічного перетворювача така: звукові хвилі створюють змінний тиск на поверхню пластини, що веде до появи на її поверхні змінної різниці потенціалів, яка і фіксується електричною частиною приймального пристрою.

Відзначимо два напрямки практичного використання ультразвуку.

Один із них пов'язаний з використанням ультразвуку великої інтенсивності, який може чинити на матеріал руйнівну дію.

Другий полягає у використанні ультразвуку малої інтенсивності з метою одержання інформації про середовище, у якому поширюються ультразвукові хвилі (звукові локатори, ехолоти тощо).

А.Застосування ультразвуку великої інтенсивності:

1) кавітація – утворення у рідині бульбашок, які заповнені газом або парою. Ультразвукові хвилі, проходячи через рідину, утворюють області стиску та розрідження. Якщо тиск всередині рідини не дорівнює тиску насиченої пари, то відбувається розрив рідини. В утвореній порожнині перебуває, як правило, повітря, яке туди проникає з оточуючої рідини, і пара рідини. Час життя такої порожнини дуже малий, бо за розрідженням швидко настає стиск, що веде до зникнення порожнин. Коли порожнина зникає (захлопується), утворюються сильні ударні хвилі. Дію цих хвиль і використовують на практиці для очистки від бруду різних предметів. Для цього деталь розміщують у ванні, заповненій певним розчином, у який опускають випромінювач ультразвуку (частинки бруду

прилипають до повітряних бульбашок і виносяться на поверхню рідини у вигляді піни);

2) інтенсивний ультразвук знайшов застосування для приготування однорідних сумішей і, зокрема, для одержання емульсій (фарби, лаки, косметичні засоби, фармацевтичні засоби, продукти дитячого харчування, мазі, соуси, плавлені сирки, маргарин, майонез, зубна паста тощо);

3) ультразвук використовують для паяння алюмінієвих деталей (на повітрі алюміній швидко покривається тонкою плівкою окислу, яка перешкоджає паянню, і яку не можна забрати за допомогою флюсів). Проходячи через ванну ультразвукові хвилі викликають кавітацію, яка знищує плівку окису алюмінію і забезпечує з'єднання деталей за допомогою припою;

4) ультразвук також застосовується для зварювання двох різних металів. Ультразвукова (точкова) зварка застосовується для з'єднання деталей напівпровідникових приладів (діодів і тріодів). Ультразвук дає змогу робити отвори різноманітної форми в крихких матеріалах (скло, кераміка) і в дуже твердих матеріалах (карбіди, бори́ди, алмази)⁴

5) у медицині інтенсивний ультразвук знайшов застосування, наприклад, при лікуванні хвороби Паркінсона (неконтрольоване хитання голови та кінцівок). Хвороба виліковується при ультразвуковій дії на деякі ділянки мозку.

Б) Застосування слабого ультразвуку:

1) ультразвукова локація, яка дає можливість заглянути як в глибину металу, так і всередину людини;

2) ультразвукова локація застосовується на морських пароплавах для виявлення перешкод у воді (сонари) і для дослідження рельєфу морського дна (ехолоти);

3) у медицині слабкий ультразвук знайшов застосування в діагностиці хвороб.

6. 10. 3. Інфразвук

Звукові хвилі, частота яких є меншою ніж 20 Гц, називають інфразвуком.

Інфразвукова область частот ще мало вивчена. Але встановлено, що на противагу ультразвуку, інфразвук має високу проникаючу здатність. В атмосфері, наприклад, він може поширюватися на десятки тисяч кілометрів.

Дослідження останніх років показали, що як природний, так і штучний інфразвук чинить сильну дію на стан і поведінку людей і тварин.

У природних умовах інфразвук породжується морськими хвилями, штормом, виверженням вулканів, землетрусами, смерчами. Є позитивний досвід прогнозування за допомогою інфразвуку наближення цунамі – гігантських припливних хвиль, що утворюються підводними землетрусами.

Джерелами ультразвуку можуть бути об'єкти, створені людиною: турбіни, двигуни внутрішнього згорання, сталеплавильні печі тощо.

Для виявлення інфразвуку порівняно високих частот часто використовують мікрофони великих розмірів. А взагалі індикатори інфразвуку дуже складні і ми їх будову розглядати не будемо.

Запитання для самоконтролю

1. Який рух називають коливальним? Які коливання називають гармонічними?
2. Що таке фаза коливань і що вона визначає?
3. Що визначає початкова фаза?
4. Якою буде швидкість і прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання за законом: $X = A \cos(\omega t + \varphi)$?
5. При яких умовах два гармонічні коливання “погасять” одне одного?
6. Що мають на увазі, коли говорять про зв'язок гармонічного коливання з обертовим рухом радіус-вектора?
7. За якою формулою визначають амплітуду результуючого коливання, яке утворилося від додавання двох гармонічних коливань одного напрямку?

8. Запишіть рівняння руху, яке утворюється при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань.
9. При яких умовах рух по колу буде відбуватися за годинниковою стрілкою при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань?
10. При яких умовах результуюче коливання буде відбуватися вздовж прямої при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань? По еліпсу?
11. Яка сила називається квазіпружною? Наведіть приклади квазіпружних сил.
12. Запишіть формули періодів коливання математичного, пружинного та фізичного маятників.
13. На підставі якого рівняння можна зробити висновок про гармонійність коливального руху?
14. Які коливання називають вільними? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює вільні коливання.
15. Які коливання називають загасаючими? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює загасаючі коливання?
16. Що таке логарифмічний декремент затухання, коефіцієнт затухання та добротність коливальної системи?
17. Які коливання називають вимушеними? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює вимушені коливання.
18. Що таке резонанс? Запишіть формули резонансної частоти й амплітуди.
19. Що називають механічною хвилею? Що таке біжуча хвиля? Що таке синусоїдальна хвиля?
20. Чому в рідинах і газах не можуть виникнути поперечні хвилі?
21. Запишіть формули для швидкості повздовжньої і поперечної хвиль.
22. Що називають довжиною хвилі? Запишіть дисперсійне співвідношення.
23. Що називають фронтом хвилі? Що називають хвильовою поверхнею, променем?

24. Запишіть рівняння плоскої біжучої хвилі.
25. Запишіть вирази кінетичної, потенціальної і повної енергії невеликого об'єму середовища, у якому поширюється біжуча синусоїдальна хвиля.
26. Що називають потоком енергії? Густиною потоку енергії?
27. У чому суть принципу суперпозиції хвиль?
28. Що називається інтерференцією? При яких умовах виникає інтерференція двох хвиль?
29. При якій умові виникають максимуми інтерференції?
30. При якій умові виникають мінімуми інтерференції?
31. Коли утворюється стояча хвиля? Запишіть рівняння стоячої хвилі?
32. При яких умовах виникають вузли й пучності у стоячій хвилі?
33. Чому стояча хвиля не переносить енергії?
34. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні повітряного стовпа (стержня, закріпленого одним кінцем).
35. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні стержня, закріпленого з обидвох кінців.
36. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні струни.
37. Коли виникають фігури Хладні?
38. Яка частота називається основною? А яка гармоніками?
39. Перечисліть властивості, якими стояча хвиля відрізняється від біжучої.
40. У якому випадку у стержня довжиною l основна частота нижча: коли він закріплений на двох кінцях чи на одному?
41. Як зміниться період коливань маятника, якщо перенести його від основи (підніжжя) гори на її вершину?
42. Годинник з маятником мав точний хід у Стокгольмі. Його перевезли в Стамбул. Буде годинник спізнюватися чи поспішати?
43. Що називають звуком?

44. Запишіть формулу для швидкості звуку в твердих тілах і газах. Поясніть їх.
45. Назвіть об'єктивні характеристики звуку. Поясніть їх фізичний зміст.
46. Назвіть суб'єктивні характеристики звуку. Поясніть їх фізичний зміст.
47. Як гучність звуку пов'язана з його інтенсивністю?
48. Що називають порогом чутності? Больовим порогом?
49. Намалюйте діаграму чутності. Поясніть її.
50. Що називають чистим тоном? Від чого залежить тембр звуку?
51. Що називають акордом? Шумом?
52. Замалюйте спектри чистого тону та шуму. Поясніть їх.
53. У чому суть ефекту Доплера? Запишіть формулу та поясніть її.
54. Які є види джерел звуку? Поясніть їх особливості.
55. Що називають ультразвуком? Які є методи утворення ультразвуку? Поясніть їх.
56. Де використовують ультразвук? Наведіть приклади та поясніть їх.
57. Що називають інфразвуком? Чим інфразвук відрізняється від ультразвуку?
58. Через який час від початку руху точка, що здійснює гармонічні коливання, буде мати зміщення від положення рівноваги, яке дорівнює половині амплітуди? Період коливань дорівнює 24 с, початкова фаза дорівнює нулю.
- Відповідь: 3 с.*
59. Довжина математичного маятника 1 м, амплітуда його коливань 5 см. Знайти період коливань і максимальне прискорення маятника.
- Відповідь: 2 с; 0,49 м/с¹.*
60. Фізичний маятник у вигляді тонкого стержня довжиною 1 м коливається навколо горизонтальної осі, яка проходить через

кінець стержня. Знайти зведену довжину маятника і період його коливань.

Відповідь: 0,67 м; 1,63 с.

61. Фізичний маятник складається із дуже легкого стержня, на якому закріплені два однакові вантажі: один на віддалі 30 см від осі, другий на віддалі 15 см від осі. Вісь проходить через кінець стержня. Знайти період коливань цього маятника.

Відповідь: 1 с.

62. Знайти амплітуду і початкову фазу гармонічного коливання, яке одержали від додавання однаково направлених коливань, які задаються рівняннями:

$$x_1 = 2\sin(5\pi t + \pi/2) \text{ см}$$

$$x_2 = 3\sin(5\pi t + \pi/4) \text{ см.}$$

Відповідь: 4,6 см; 62°.

63. З якою швидкістю поширюється хвиля вздовж прямої, якщо різниця фаз коливань двох точок, що розміщені на віддалі одна від одної на 10 см, дорівнює $\pi/2$ і частота коливань 3 с^{-1} ?

Відповідь: 1,2 м/с.

64. По сталевій рейці ударяють молотком. Спостерігач, приклавши вухо до рейки, почув звук на 3 секунди швидше, ніж він дійшов по повітрі. На якій віддалі від спостерігача було зроблено удар? Швидкість звуку в повітрі вважати 340 м/с.

Відповідь: 16,4 км.

65. Спостерігач, який стоїть біля прямолінійної ділянки залізничної колії, побачив пару над свистком паровоза, що наближається, а через 4 с почув звук. Через 1 хвилину паровоз пройшов повз спостерігача. Яка швидкість паровоза, якщо швидкість звуку в повітрі 340 м/с.

Відповідь: 82 км/год.

66. При вимірюванні глибини моря під кораблем за допомогою ехолота виявилось, що моменти відправлення і приймання

звуку розділені проміжком часу 0,8 с. Яка глибина моря під кораблем?

Відповідь: 600 м.

67. У скільки разів швидкість поширення звуку влітку (температура $+27^{\circ}\text{C}$) більша від швидкості поширення звуку взимку (температура -33°C)?

Відповідь: 1,12 раз.

ТЕМА 7. МЕХАНІКА РІДИН

ПЛАН

1. Рідкі та газоподібні тіла.
2. Закони Паскаля й Архімеда.
3. Основні поняття і визначення гідродинаміки.
4. Теорема Бернуллі та її наслідки.
5. Сили в'язкості. Коефіцієнт в'язкості.
6. Рух в'язкої рідини. Формула Пуазейля.
7. Ламінарний і турбулентний рух рідин. Число Рейнольдса.
8. Рух тіл у рідинах і газах.
9. Рух з надзвуковими швидкостями.

7.1. Рідкі та газоподібні тіла

У рідині сили, що діють між молекулами, значно менші, ніж у твердих тілах, і швидше зменшуються з віддаллю. Тому в рідині деяка впорядкованість у розміщенні молекул спостерігається лише біля кожної молекули і короткотривало, доки молекула коливається біля деякого положення рівноваги. Потім під дією імпульсів сусідніх молекул вона покидає це положення і вільно рухається до якогось іншого положення рівноваги, біля якого знову коливається короткий час і т.д.

У газах при звичайних умовах сили міжмолекулярної взаємодії настільки малі, що молекули вільно і безладно (хаотично) рухаються, час від часу взаємодіють за законами, які близькі до законів пружного удару куль.

У твердих тілах сили притягання і відштовхування зрівноважують одна одну. Така рівновага в рідинах існує між силами в середньому для багатьох молекул, але для окремих молекул то порушується, то відновлюється. У газах при звичайних умовах сили взаємодії між молекулами проявляються лише при їх зближенні.

Якщо на деякий об'єм рідини діють зовнішні сили, які викликають в ньому деформацію всестороннього стиску, то сили

відштовхування, що при цьому виникають, чинять протидію зближенню молекул уже при звичайних умовах.

У газах сили відштовхування починають проявлятися лише тоді, коли газ стиснутий і віддалі між його молекулами достатньо малі.

У звичайних умовах газу легко піддаються стиску, а рідини можна вважати практично нестисливими. Рідини не чинять ніякого опору при зміні їх форми, але зберігають свій об'єм. Газу не зберігають ні форми, ні об'єму.

При розв'язуванні задач з механіки різниця між рідинами і газами, за винятком особливих випадків руху, не суттєва. Тому термін «рідини» використовується як при дослідженні рідин, так і при дослідженні газів.

7.2. Закони Паскаля й Архімеда

7.2.1. Закон Паскаля

Рідини та газу розглядаються у механіці як суцільні середовища, які неперервно заповнюють частину простору. Так само як і тверді тіла, рідини і газу приймають за систему матеріальних точок, кожна з яких є елементарним об'ємом.

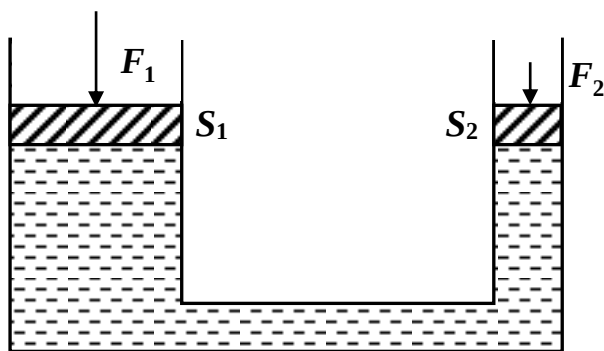
Як і для твердого тіла, результуючу внутрішніх сил, віднесену до одиниці площі перерізу, називають напругою. У нерухомій рідині напруги можуть бути направлені тільки нормально до поверхні елемента рідини. Якщо виникає хоч би мала складова внутрішніх сил у напрямку, дотичному до поверхні елемента, частинки рідини почнуть рухатися.

У більшості випадків сили, які діють на поверхню елемента рідини, стискають його, тобто направлені всередину елемента.

Сили, які скеровані по нормалі до поверхні об'єму всередину нього, називають силами тиску.

Тиск має розмірність сили, розділеної на площу. За одиницю тиску в СІ приймають паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

Для нерухомої рідини Паскаль установив такий закон: тиск у будь-якій точці нерухомої рідини однаковий в усіх напрямках і однаково передається рідиною в усі сторони.



мал. 7.1

Закон Паскаля використовується у так званих гідравлічних пресах (мал. 7.1).

Гідравлічний прес складається із двох сполучених посудин різного діаметра, заповнених рідиною і закритих поршнями S_1 і S_2 , до яких прикладено сили F_1 і F_2 .

Рівновага в цих посудинах можлива при умові:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{або} \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (7.1)$$

Із (7.1) видно, що гідравлічний прес є такою машиною, яка дає можливість дістати вигаш у силі, що дорівнює:

$$n = \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}. \quad (7.2)$$

Якщо один поршень опустився з висоти h_1 , а другий піднявся на висоту h_2 , то з закону рівності робіт $A_1 = A_2$, або $F_1 h_1 = F_2 h_2$, знайдемо, що:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{h_2}{h_1} = n. \quad (7.3)$$

Висновок:

- вигаш у силі супроводжується програшем у віддалі;
- при великій різниці розмірів поршнів можна одержати великий вигаш у силі.

Гідравлічні преси широко використовуються у техніці для штампування виробів, для піднімання вантажів (домкрати).

7.2.2 Закон Архімеда

Архімед (приблизно 287–212 рр. до н.е.) установив, що на занурене в рідину тіло діє виштовхувальна сила, направлена вертикально вгору і рівна вазі рідини, витісненої цим тілом:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_p V_T g, \quad (7.4)$$

де ρ_p – густина рідини, V_T – об’єм тіла (або частини тіла, зануреного в рідину), g – прискорення вільного падіння.

Закон Архімеда можна вивести із закону збереження енергії. Припустимо, що тіло, вага якого дорівнює P , занурене цілком в рідину і піднімається вгору так, що центр ваги його переміщується вертикально вгору на відстань h . У зв’язку з цим потенціальна енергія системи зростає на Ph . Але одночасно з підняттям тіла вниз опускається рідина, яка займає його місце. Вага такої рідини дорівнює $\rho g V$, через що потенціальна енергія системи зменшується на $\rho g V h$. Отже, енергія системи загалом зростає на

$$Ph - \rho g V h. \quad (7.5)$$

Щоб рівномірно підняти тіло на висоту h , треба прикласти до нього таку силу Q , щоби її робота дорівнювала $Ph - \rho g V h$; звідси випливає, що:

$$Q = P - \rho V g. \quad (7.6)$$

Отже, занурене в рідину тіло виявляється на величину $\rho g V$ легшим, ніж воно важить насправді; відповідно одержуємо:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_p V_T g.$$

На тіло, занурене в рідину, діє сила тяжіння $\vec{G}$ і виштовхувальна сила $\vec{F}$, яка має напрям, протилежний до напрямку сили тяжіння.

Якщо вага тіла менша від ваги витісненої рідини $\rho g V$ (корок у воді), то рівнодійна сил $\vec{F}$ і $\vec{G}$ буде направлена вгору і тіло буде підніматися, воно спливає назовні і частково виходить з рідини.

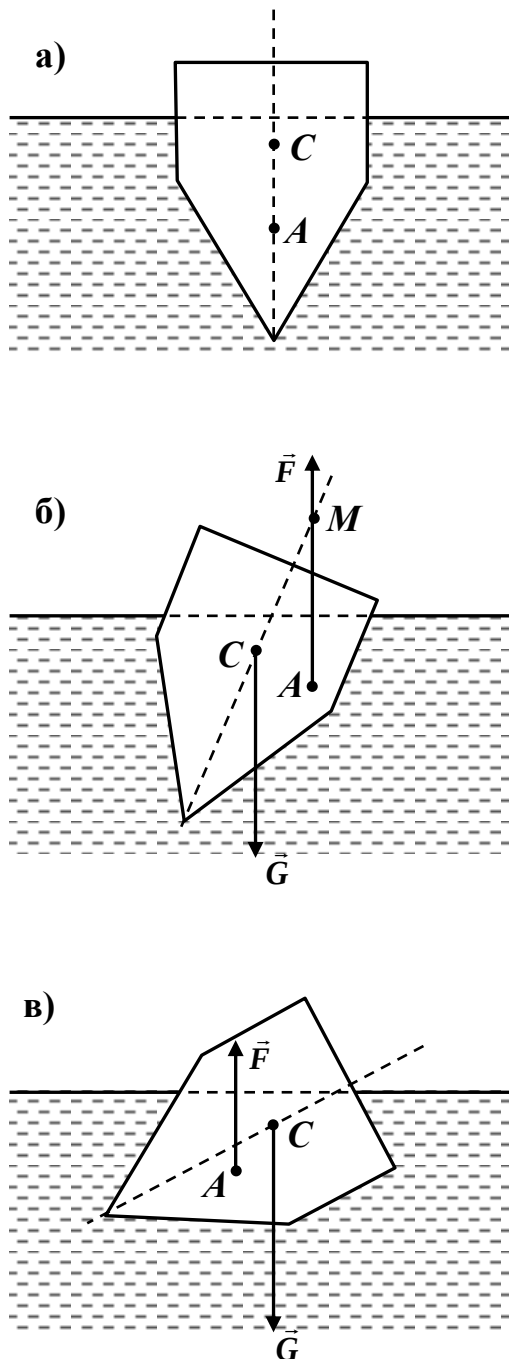
Першою умовою рівноваги тіла, що плаває на поверхні рідини, є: вага тіла дорівнює вазі витісненої ним рідини:

$$|\vec{F}| = |\vec{G}|. \quad (7.7)$$

Другою умовою є: результуючий момент сил, які діють на тіло, дорівнює нулю.

Ця умова щодо плаваючого тіла вимагає, щоб точки прикладання сил $\vec{G}$ і $\vec{F}$, тобто центр тяжіння C і центр тиску A , були на одній прямій лінії (мал. 7.2, а).

Якщо точки C і A будуть не на одній прямовисній лінії, то виникає пара сил, яка обертає тіло доти, доки вони не стануть на одній прямовисній лінії. Зазвичай центр тяжіння C плаваючого тіла лежить вище центра тиску A , як, наприклад, на кораблі, зображеному на мал. 7.2, а.



мал. 7.2

Нехай корабель нахилиється так, що його площина симетрії вже не є вертикальною. Центр тиску A переміститься і вже не є на одній вертикалі з центром тяжіння корабля C (мал. 7.2, б). Вертикаль, яка проходить через точку A , перетинає площину симетрії корабля у точці M , яка називається метacentром. У цьому випадку (мал. 7.2, б) пара сил $\vec{G}$ і $\vec{F}$ намагається повернути корабель у положення рівноваги. На мал. 7.2, в пара цих сил намагається ще більше віддалити корабель від положення рівноваги.

Плавання корабля буде стійким доти, доки його центр ваги (тяжіння) розміщений нижче метacentра. Чим вище буде метacentр над центром тяжіння корабля, тим більшою буде його стійкість.

Мірою плавучості корабля є об'єм витіснення ним води (водотоннажність корабля).

7. 3. Основні поняття і визначення гідродинаміки

7.3.1. Основні поняття гідродинаміки

Гідродинаміка (від грецького гюдор – вода, динаміка – сила) – наука про рух рідин під дією зовнішніх сил і про механічну взаємодію між рідиною та тілами, що з нею стикаються, при їх відносному русі.

У завдання гідродинаміки входить:

- вивчення законів руху рідин;
- вивчення сил, з якими рідина діє на занурені в неї тіла, коли вони рухаються.

Закони гідродинаміки порівняно просто вивести у випадку нестисливої і нев'язкої (ідеальної) рідини. Гідродинаміка як наука виникла у XVIII ст. Її заснували члени Петербурзької академії наук Л.Ейлер і Д.Бернуллі.

Розглянемо основні поняття й визначення гідродинаміки. Сукупність рухомих частинок рідини називається потоком. Проведемо через різні точки потоку лінії так, щоб дотична, проведена в кожній точці до кожної лінії, збігалася з напрямом швидкості рідини в цій точці. Ці лінії називаються лініями течії.

Лінії течії проводять так, щоб їх густина була пропорційна швидкості рідини в даній ділянці потоку.

Якщо течія рідини така, що частинка рідини, яка проходить у будь-яку точку простору, має завжди одну і ту саму за величиною і напрямом швидкість, то лінії течії зберігають з часом незмінну форму. Таку течію називають стаціонарною.

Хибною є думка, що при стаціонарній течії певна частинка рідини рухається із сталою за величиною швидкістю. Через різні точки частинка може проходити з різними швидкостями, але всі частинки проходять через дану точку з однією і тією ж самою за величиною і напрямом швидкістю.

Оскільки в стаціонарному потоці розподіл швидкостей не змінюється з часом, то лінії течії в цьому випадку збігаються з траєкторіями частинок рідини.

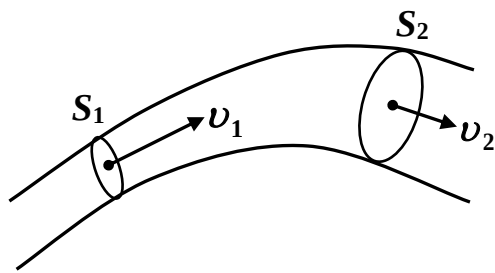
Якщо виділити в середині потоку площадку S і провести через точки її контуру лінії течії, то дістанемо частину потоку, яка називається трубкою течії.

При стаціонарній течії трубка течії не змінює своєї форми і не обмінюється частинками рідини з сусідніми трубками.

Потік, у якому розподіл швидкостей змінюється з часом, називається нестаціонарним потоком. У нестаціонарному потоці лінії потоку в різні моменти часу проходять через різні частинки рідини і не збігаються з їх траєкторіями.

7.3.2. Теорема про нерозривність потоку

Виділимо в рідині трубку, бічна поверхня якої складена із прилеглих одна до одної ліній потоку. Якщо течія стаціонарна, то всі частинки рідини, які перебувають всередині цієї поверхні, перебуватимуть там під час всього руху.



мал. 7.3

Поверхня, утворена лініями потоку в рідині, є ніби трубою, через яку не може проникнути рідина. Її називають, як уже сказано вище, трубкою течії (мал. 7.3).

Розміри та положення трубки течії вибираються такими, щоби в межах трубки швидкість течії можна було вважати постійною і направленою по дотичній до контура.

З'ясуємо питання про кількість рідини або газу, що протікає через будь-який поперечний переріз трубки течії за одиницю часу. Якщо площа перерізу трубки в одному місці S_1 , швидкість потоку v_1 і густина ρ_1 , а в другому місці – відповідно v_2 , S_2 , ρ_2 (мал. 7.3), то $\rho_1 S_1 v_1$, і $\rho_2 S_2 v_2$ будуть шукані кількості рідини або газу.

У стаціонарному потоці ці кількості рідини або газу будуть однаковими:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \quad (7.8)$$

бо інакше між перерізами S_1 і S_2 кількість речовини весь час буде або збільшуватися, або зменшуватися і не буде існувати стаціонарного потоку.

Розрахунки показують, що в стаціонарному потоці змінами густини не тільки рідини, а й газу можна знехтувати. Тому рівняння (7.8) можна записати так:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (7.9)$$

або в узагальненому вигляді

$$Sv = \text{const}. \quad (7.10)$$

Рівняння (7.10) становить суть теореми про нерозривність течії (потоку) рідини або газу.

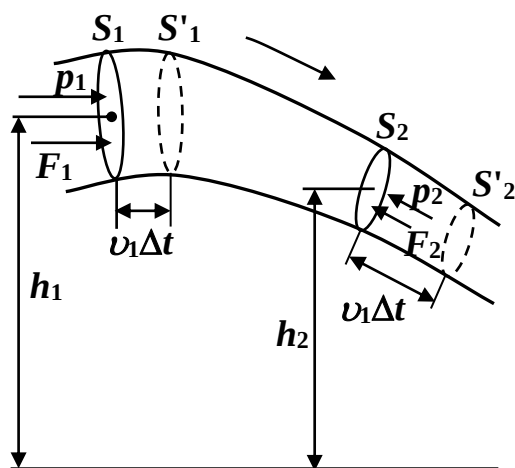
Із рівняння (7.9) випливає, що

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (7.11)$$

де переріз трубки течії більший, там швидкість частинок рідини (чи газу) менша, і навпаки.

7.4. Теорема Бернуллі та її наслідки

7.4.1. Теорема Бернуллі



мал. 7.4

Розглянемо ділянку трубки течії, обмежену двома поперечними перерізами S_1 і S_2 (мал. 7.4). Площі перерізів вибираємо дуже малими, щоби швидкість частинок і тиск у межах кожного із перерізів можна було вважати сталими. Рухаючись від перерізу S_1 до перерізу S_2 , рідина зазнає прискорення. Отже, на рідину, яка перебуває у даний момент у звуженій частині трубки течії, діє деяка сила зі сторони рідини,

що перебуває у ширшій її частині, яка може виникнути тільки внаслідок різниці тисків у різних перерізах трубки. Ця сила направлена в бік вузької частини трубки, тому в місцях звуження тиск є менший, ніж в місцях розширення.

Знайдемо зв'язок між тиском і швидкістю рідини в різних перерізах трубки, обмежуючись розглядом ідеальної рідини (не враховуючи в'язкості і стисливості рідини), що дає змогу вважати роботу внутрішніх сил у рідині рівною нулю.

Додатково на рух рідини накладемо ще такі умови:

- тертям між рідиною і стінками трубки течії (посудини) нехтуємо;
- рух рідини є цілком установленим (маса рідин постійна);
- лінії течії слабо викривлені (що дає змогу знехтувати доцентровим прискоренням частинок рідини і пов'язаною із ним зміною тиску в поперечному перерізі трубки течії).

До рідини, яка перебуває у зазначеному об'ємі, можна застосовувати другий закон динаміки і написати для неї рівняння руху. Але оскільки в ідеальній рідині відсутнє розсіювання (втрати) механічної енергії, то результат простіше одержати, застосувавши закон збереження енергії.

Знайдемо зміну повної механічної енергії виділеної маси рідини за малий проміжок часу Δt . За цей час ця рідина переміститься вправо, у результаті чого вона буде обмежена перерізами S'_1 і S'_2 . Очевидно, частина рідини між перерізами S'_1 і S'_2 ніяких змін не зазнає.

Змін зазнала маса рідини m , що перебуває між перерізами S_1 і S'_1 і має повну енергію:

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1,$$

бо вона ніби перемістилася у положення $S_2 - S'_2$ і її енергія змінилася та дорівнює:

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

Отже, при переміщенні згаданого об'єму рідини із положення S_1 і S_2 в положення S'_1 і S'_2 її повна енергія змінилася на величину:

$$\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right). \quad (7.12)$$

Відповідної до закону збереження енергії ця зміна повної механічної енергії дорівнює роботі ΔA зовнішніх (щодо рідини в об'ємі S_1 , S_2) сил тиску на перерізи S_1 і S_2 (за умовою, сили тертя не враховуємо):

$$\Delta W = \Delta A. \quad (7.13)$$

Робота сили тиску F_1 додатна (мал. 7.4) і вона дорівнює:

$$\Delta A_1 = F_1 v_1 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t.$$

Робота сили тиску F_2 від'ємна (сила F_2 направлена проти переміщення рідини):

$$\Delta A_2 = -F_2 v_2 \Delta t = -p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Повна робота зовнішніх сил буде дорівнювати:

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V. \quad (7.14)$$

Врахувавши рівняння неперервності, запишемо:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t = \Delta V,$$

де ΔV – об'єм рідини, що розглядається.

Тоді, враховуючи (7.12), (7.13) і (7.14), одержуємо:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 \Delta V = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 \Delta V. \quad (7.15)$$

Розділимо обидві частини рівняння (7.15) на ΔV , і взявши до уваги, що $\rho = \frac{m}{V}$, знайдемо:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1. \quad (7.16)$$

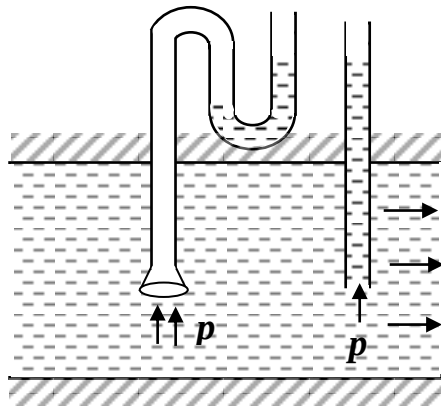
Або:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (7.17)$$

Співвідношення (7.16) називається рівнянням (теоремою) Бернуллі. Це рівняння справедливе для стаціонарної течії нестисливої і нев'язкої рідини. Воно відіграє дуже важливу роль у динаміці ідеальної рідини.

Розглянемо фізичний зміст складових, які входять до рівняння Бернуллі. Усі складові мають розмірність тиску. Складова p означає тиск всередині рухомої рідини; його називають статичним тиском.

Статичний тиск треба вимірювати за допомогою манометра, який переміщується разом з рідиною.



мал. 7.5

Однак на практиці статичний тиск вимірюють нерухомим манометром, мембрана якого або площина отвору манометричної трубки розміщена паралельно до ліній течії (мал. 7.5).

Статичний тиск згідно з (7.17) визначається співвідношенням:

$$p = \text{const} - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h. \quad (7.18)$$

Якщо при $v = 0$ і $h = 0$ статичний тиск $p = p_0$, то одержуємо: $p_0 = \text{const}$. Звідси випливає, що постійна в рівнянні Бернуллі має зміст тиску всередині нерухомої рідини на рівні, який прийнято за початок відліку.

Отже, співвідношення (7.17) показує, що в нерухомій рідині статичний тиск P зменшується із збільшенням швидкості потоку і з підняттям трубки течії над нульовим рівнем.

Складова $\frac{\rho v^2}{2}$, яка називається динамічним тиском, показує, на яку величину зменшився тиск всередині рідини внаслідок її руху.

Складова $\rho g h$ називається гідравлічним тиском; вона показує, наскільки зменшується статичний тиск при піднятті трубки на висоту h .

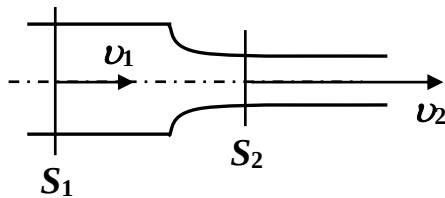
7.4.2. Наслідки з рівняння Бернуллі

1. Кавітація. При великих швидкостях потоку тиск всередині рідини може бути від'ємним (7.18). У тих місцях трубки течії, де тиск наближається до нуля, відбувається порушення неперервності потоку і утворюється область, заповнена бульбашками, всередині яких є газ і пара рідини. Це явище називається кавітацією.

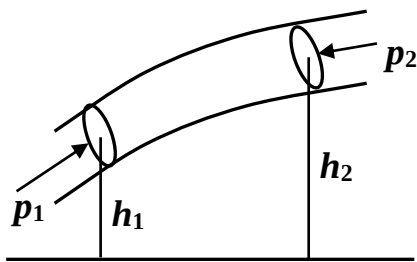
При подальшому зниженні тиску малі бульбашки об'єднуються і в потоці виникають великі порожнини – каверни, які заповнені газом і парами рідини. Виникнення кавітації суттєво впливає на закони руху рідини: рівняння Бернуллі стає непридатним. Отже, якщо в потоці тиск не менший деякого додатного значення p_k , то течія реальної рідини підлягає закону Бернуллі.

1. Якщо трубка течії розміщена горизонтально (мал. 7.6), то ρgh постійне і рівняння Бернуллі має вигляд:

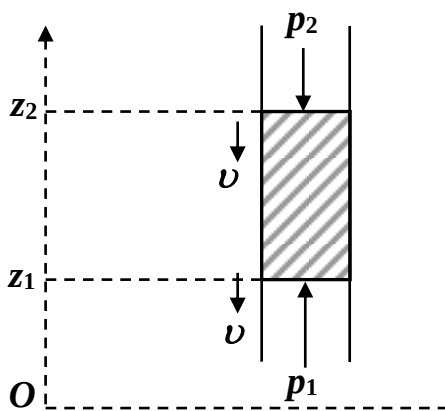
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{const}, \quad h_1 = h_2. \quad (7.19)$$



мал. 7.6



мал. 7.7



мал. 7.8

$p + \frac{\rho v^2}{2}$ – називається повним тиском.

Отже, у будь-якому перерізі горизонтально розміщеної трубки течії повний тиск залишається сталим.

2. Якщо трубка течії має постійний переріз ($S = \text{const}$), то згідно з нерозривністю течії швидкість в усіх перерізах буде однакою і рівняння Бернуллі має вигляд:

$$p_1 + \rho gh_1 = p_2 + \rho gh_2 = \text{const}. \quad (7.20)$$

Суму $p + \rho gh$ називають

гідростатичним тиском. Отже, в трубці течії постійного перерізу гідростатичний тиск однаковий по всій трубці (для будь-якого перерізу). Але статичний тиск p неоднаковий. Він більший для перерізів, які розміщені нижче ($p_1 > p_2$, мал. 7.7).

Розглянемо частину рідини, яка перебуває між перерізами S_1 і S_2 , вертикально розміщеної трубки (мал. 7.8).

На цю частину рідини діють сили тиску p_2S і p_1S та сила тяжіння рідини $F_{\text{тяж}} = \rho g(z_2 - z_1)S$. (Сили реакції стінок зрівноважують одна одну).

Рівняння руху для зазначеного об'єму з урахуванням напрямку діючих сил запишеться так:

$$ma = p_1S - p_2S - F_{\text{тяж}}, \quad (7.21)$$

де m і a – маса та прискорення виділеної частини рідини.

Якщо $S_1 = S_2 = S$, то рівняння Бернуллі має вигляд:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2 \quad (7.22)$$

Перемножимо (7.22) на S і виконаємо групування величин, тоді:

$$p_1S - p_2S = \rho g(z_2 - z_1)S. \quad (7.23)$$

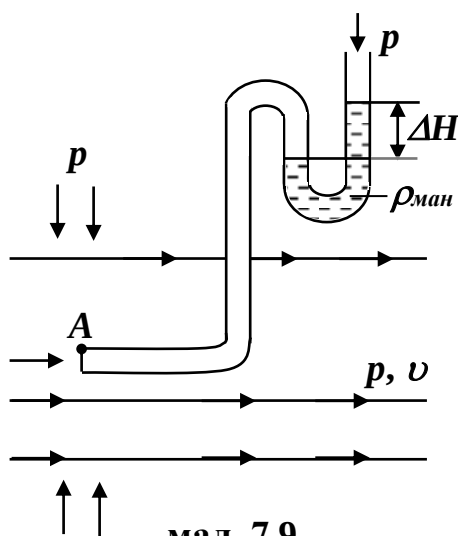
Підставимо (7.23) в (7.21):

$$ma = p_1S - p_2S - F_{\text{тяж}} = \rho g(z_2 - z_1)S - \rho g(z_2 - z_1)S = 0 \quad (7.24)$$

Отже, $a = 0$; ідеальна рідина тече вертикальною трубою однакового перерізу (вниз або вгору) рівномірно тому, що сила тяжіння зрівноважується різницею тисків.

Для реальних рідин ця різниця тисків повинна бути більшою, ніж для ідеальної рідини, так як вона повинна зрівноважувати не тільки силу тяжіння, але й силу тертя.

7.4.3. Застосування рівняння Бернуллі



мал. 7.9

густиною $\rho_{\text{ман}} > \rho$ (де ρ – густина рідини або газу, що досліджується).

1. Вимірювання повного тиску всередині рухомої рідини та газу. Трубка Піто.

Розмістимо в потоці рухомого газу або рідини манометричну трубку (трубку Піто), зріз якої перпендикулярний до потоку (мал. 7.9).

У U-подібній трубці міститься манометрична рідина з

Покажемо, що різниця рівнів ΔH манометричної рідини визначає повний тиск всередині рухомого газу (чи рідини):

$$\Delta p = \rho_{\text{ман}} g \Delta H = p + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (7.25)$$

Для цього виділимо в потоці горизонтальну трубку течії, яка починається на зрізі A , і яка йде в безмежність назустріч потоку.

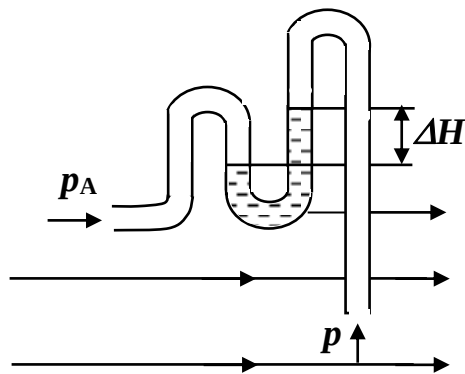
Нехай тиск і швидкість на великій віддалі від A будуть відповідно p і v . Такі ж значення p і v будуть у незбуреній частині потоку біля трубки Піто. На зрізі A швидкість дорівнює нулю ($v_A = 0$). Запишемо рівняння Бернуллі для цих двох перерізів трубки течії:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p_A \quad (\text{бо } v_A = 0). \quad (7.26)$$

Отже, в розглянутому випадку виміряний манометром тиск дорівнює повному тиску в незбуреному потоці.

2. *Вимірювання швидкостей потоку рідини (трубка Прандтля).*

Комбінуючи трубку Піто з манометричною трубкою, яка вимірює статичний тиск p , одержуємо новий прилад, названий трубкою Прандтля (мал. 7.10)



мал. 7.10

Покажемо, що цей прилад вимірює динамічний тиск і може використовуватися для визначення швидкості потоку рідини.

Із малюнка видно, що тиск на рідину у лівому коліні U-подібної трубки дорівнює:

$$p_A = p + \frac{\rho v^2}{2}, \text{ а в правому коліні } - p.$$

Отже, за різницею рівнів ΔH манометричної рідини можна судити про різницю тисків у колінах:

$$\Delta p = \rho_{\text{ман}} g \Delta H = p_A - p, \text{ або}$$

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (7.27)$$

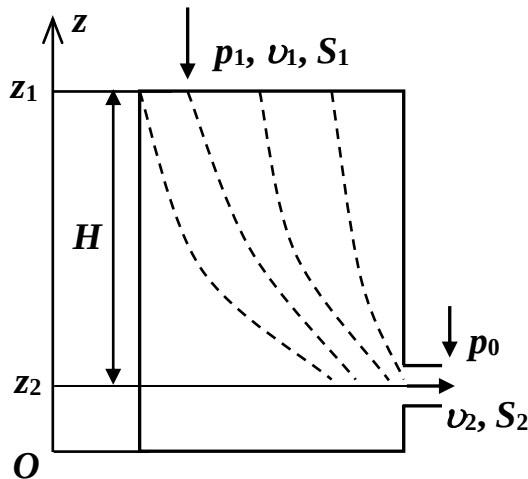
Вимірявши манометром різницю тисків Δp , можна із (7.27) визначити швидкість течії рідини:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{ман}} \cdot g \Delta H}{\rho}}. \quad (7.28)$$

3. Витікання рідини з отвору.

1. Розглянемо посудину із отвором внизу як трубку течії (мал. 7.11). Для неї запишемо рівняння Бернуллі для перерізів S_1 і S_2 :

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2, \quad (7.29)$$



мал. 7.11

де p_0 – тиск у течії, яка витікає з отвору (він дорівнює атмосферному тиску, так як течія відкрита); p_1 – тиск над вільною поверхнею води в посудині. Швидкість v_1 течії рідини в посудині мала і її можна прийняти рівною нулю ($v_1 \approx 0$, v_1 – швидкість в перерізі S_1). Це все врахувавши, рівняння (7.29) запишеться так:

$$p_1 + \rho g z_1 = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2$$

Звідси:

$$v_2 = \sqrt{2Hg + \frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}}. \quad (7.30)$$

Якщо $p_1 = p_0$, тобто тиск на вільну поверхню рідини дорівнює атмосферному, то

$$v_2 = \sqrt{2gH} \quad (7.31)$$

Вираз (7.31) називається формулою Торрічеллі.

Як відомо, таку ж швидкість v_2 одержує матеріальна точка, яка вільно падає з висоти H .

2. Знайдемо сили, які діють зі сторони рідини на стінки посудини або на тіла, що є у потоці рідини.

Як відомо, рідина витікає із отвору зі швидкістю $v = \sqrt{2gH}$. Якщо площа отвору дорівнює S , то маса рідини, що витікає за час dt , дорівнює:

$$m = \rho S v dt,$$

а її імпульс:

$$dp = \rho S v^2 dt = 2\rho S g H dt. \quad (7.32)$$

Отже, на витікаючу рідину згідно з другим законом Ньютона повинна діяти сила:

$$dF = \frac{dp}{dt} = 2\rho g S H, \quad (7.33)$$

направлена в сторону течії (горизонтальна). Така сама сила діє на рідину зі сторони посудини (сила тяжіння діє вертикально і не може змінювати імпульс рідини в горизонтальному напрямі).

За третім законом Ньютона і рідина діє на посудину з рівною, але протилежною за напрямом силою

$$\vec{F}' = -\vec{F}.$$

При вільному витіканні ($p_1 = p_0$ – атмосфер. тиск) результуюча сила тиску рідини на стінки посудини дорівнює

$$F' = 2\rho g S H. \quad (7.34)$$

Якщо рідину і посудину розглядати як замкнену систему, то F' і F є внутрішніми силами взаємодії, які не можуть змінити загального імпульсу системи. Який імпульс одержує витікаюча частина рідини, такий самий імпульс, але в протилежну сторону одержить посудина із рештою рідини.

Силу F' називають силою реакції струмини, а рух, викликаний цією силою, називають реактивним рухом.

3. Обчислимо результуючу силу тиску на стінки труби при витіканні із неї рідини чи газу.

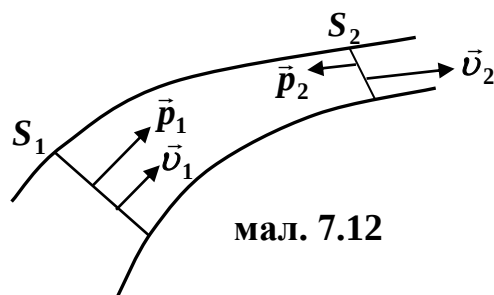
Розглянемо рух рідини в зігнутих трубах. Із загальних міркувань відомо, що на кожную частинку рідини, яка рухається криволінійною траєкторією, повинна діяти деяка сила, скерована до центра кривизни траєкторії. Для внутрішніх частинок ця сила

зумовлена різницею тисків у напрямку, перпендикулярному до лінії течії. У зігнутих трубах тиск по площі поперечного перерізу не може бути однаковим: він тим більший, чим даліше від центра кривизни ліній течії перебуває відповідна точка.

Необхідна для криволінійного руху різниця тисків виникає внаслідок тиску стінок труби на рідини, що по ній тече. Результируюча всіх сил тиску, який діє збоку стінки труби на рідину, відмінна від нуля і направлена в сторону згину труби.

Згідно з третім законом Ньютона, рідина буде чинити на трубу рівну і протилежну за напрямом дію. Ця дія і є результируючою сил тиску рідини на стінки труби.

Для знаходження результируючої сил тиску рідини на стінки труби використаємо теорему про зміну імпульсу.



У нерухомій вигнутій трубі виділимо об'єм рідини між перерізами S_1 і S_2 (мал. 7.12). Будемо вважати течію встановленою, рідину ідеальною і невагомою. Швидкість рідини в перерізах S_1 і S_2 позначимо $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$.

Тоді за час Δt через переріз S_1 протече маса рідини, яка дорівнює $\rho S_1 v_1 dt$. Вона перенесе імпульс $\rho S_1 v_1 dt \vec{v}_1$. За цей час через переріз S_2 перетече маса рідини: $\rho S_2 v_2 dt = \rho S_1 v_1 dt$, що перенесе імпульс $\rho S_1 v_1 dt \vec{v}_2$, що візниться від першого за модулем і напрямом.

Тоді зміна імпульсу буде:

$$d\vec{p} = (\rho S_2 v_2 \vec{v}_2 - \rho S_1 v_1 \vec{v}_1) dt = \rho S_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) dt. \quad (7.35)$$

За другим законом Ньютона зміна імпульсу за одиницю часу дорівнює результиуючій $\vec{F}$ всіх сил, які діють на виділений об'єм рідини:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

або:

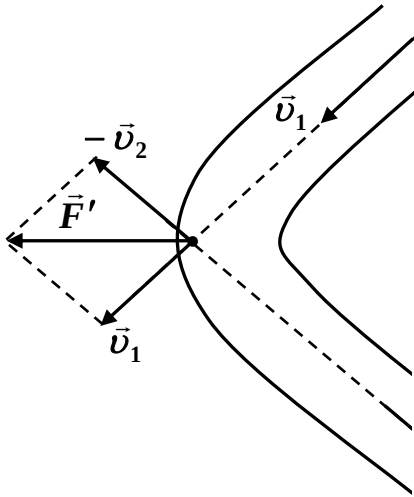
$$\vec{F} = \rho S_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (7.36)$$

Так як вагою рідини ми знехтували (рідина невагома), то сила $\vec{F}$ є результуючою усіх сил, які діють на рідину зі сторони труби.

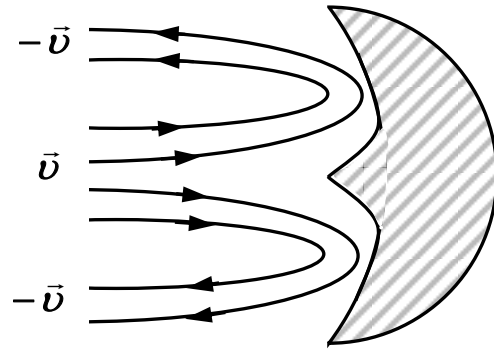
За третім законом Ньютона результуюча сил, з якими рідина діє на трубу між перерізами S_1 і S_2 , дорівнює:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = \rho S_1 v_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad (7.37)$$

де $\vec{F}'$ – сила реакції рідини, що тече трубою (мал. 7.13).



мал. 7.13



мал. 7.14

Формула (7.37) справедлива не тільки для труби, але і взагалі для будь-якого тіла, яка змінює рух течії. При цьому сила реакції струмени:

$$F' = \rho S_1 v_1 \vec{v}_1 - \rho S_2 v_2 \vec{v}_2 = m \vec{v}_1 - m \vec{v}_2. \quad (7.38)$$

Найбільша сила реакції має місце при згині труби на 180° , тобто коли труба змінює напрямок руху рідини на протилежний (мал. 7.14):

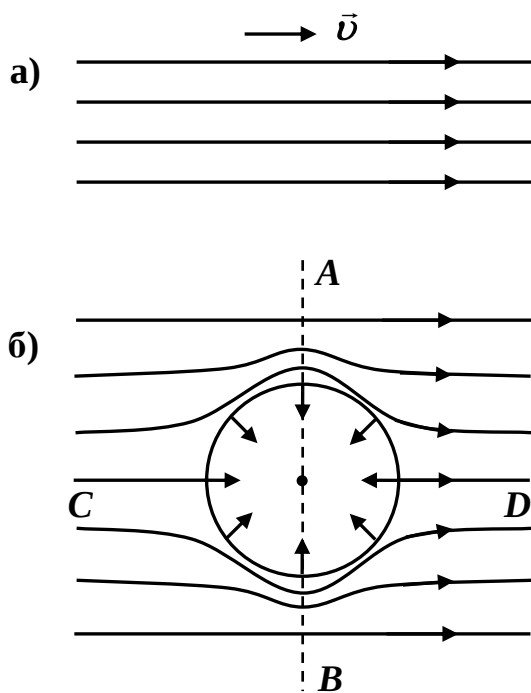
$$|\vec{F}'| = \rho S_1 v_1 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 2\rho S_1 v_1 v_1. \quad (7.39)$$

7.5. Сили в'язкості. Коефіцієнт в'язкості

Реальні рідини та гази характеризуються в'язкістю і стисливістю. І якщо для рідини характернішою рисою є в'язкість, то для газу при достатньо великій швидкості ($v > 70 \frac{m}{c}$) визначальною властивістю буде стисливість. Стиск газу супроводжується

нагріванням, тому повно описати рух стисливого газу в рамках механіки (без врахування теплоти, що виділяється) неможливо. Тому будемо розглядати в основному рух рідини та газу з урахуванням лише внутрішнього тертя.

У деяких випадках в'язкістю рідин (газів) можна знехтувати. Але є такі явища, які пояснити не можна, не врахувавши сили внутрішнього тертя (в'язкості), наприклад, обтікання кулі горизонтальним потоком рідини.



мал. 7.15

Розглянемо цей випадок детальніше (мал. 7.15). На мал. 7.15, а показано лінії течії у незбуреному потоці, а на мал. 7.15, б – лінії течії у збуреному потоці.

Якщо не враховувати в'язкості, то лінії течії будуть симетричні відносно площини AB , яка перпендикулярна до течії, і площини CD , яка паралельна до незбуреного потоку.

Згідно з рівнянням Бернуллі з такою ж симетрією розподіляється і тиск рідини на поверхню кулі.

Тиск на лінії AB менший, ніж на лінії CD , так як трубки течії біля лінії AB звужені і швидкість течії тут більша, ніж біля лінії CD .

Через симетричний розподіл тиску рівнодійна всіх сил тиску на поверхню кулі дорівнює нулю. Ми робимо висновок, що куля ніякого тиску зі сторони обтікаючої її рідини не зазнає.

Але досвід показує, що куля в потоці зазнає дії сил в напрямку руху рідини. Отже, нехтувати тут в'язкістю неприпустимо.

А. Сили в'язкості

Сили в'язкості, або сили внутрішнього тертя, виникають при відносному русі шарів рідини (або газу). Вони прикладені до шарів рідини і діють по дотичній до них.

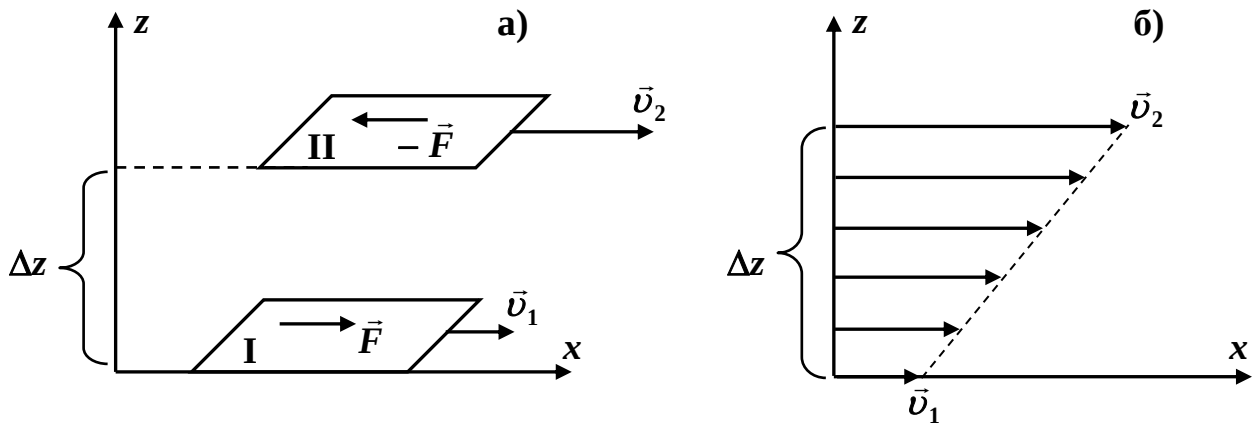
Два шари, які рухаються один відносно одного, взаємодіють вздовж поверхні розподілу з рівними за величиною і протилежними за напрямками силами внутрішнього тертя.

У рідинах ці сили зумовлені головню зчепленнями між молекулами, які належать до різних шарів.

У газах зчеплення між молекулами мале, а їх рухливість, навпаки, велика. Тому сили внутрішнього тертя у газах виникають за рахунок обміну імпульсами молекул, що переходять з одного шару в інший.

Але досвід показує, що і в рідинах, і в газах сили внутрішнього тертя підлягають одному закону.

Розглянемо його на прикладі течії, при якій плоскі шари рухаються паралельно один до одного з різними швидкостями (мал. 7.16).



мал. 7.16

Виділимо в потоці два паралельних, рівних за площею шари, які перебувають один від одного на віддалі Δz (мал. 7.16, а). Зміна швидкості від шару до шару із збільшенням координати x відбувається лінійно (мал. 7.16, б).

Дослід показує, що на кожний шар діє сила $\vec{F}$, яка пропорційна площі шарів S і величині $\frac{\Delta v}{\Delta z}$, що характеризує швидкість зміни швидкості при переході від шару до шару, тобто в напрямку, перпендикулярному до шарів (по осі z):

$$F \sim S \frac{\Delta v}{\Delta z}, \quad (7.40)$$

де $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ – градієнт швидкості.

Увівши коефіцієнт пропорційності η , формулу (7.40) запишемо так:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S. \quad (7.41)$$

Рівняння (7.41) називають законом Ньютона (формулою Ньютона).

Б. Коефіцієнт в'язкості.

Коефіцієнт пропорційності η залежить, як завжди, від вибору одиниць вимірювання величин, які входять у рівняння (7.41). Але дослід показує, що цей коефіцієнт також залежить від роду рідини або газу і, відповідно, характеризує в'язкі властивості рідини або газу. Тому він називається коефіцієнтом внутрішнього тертя або коефіцієнтом в'язкості (або просто в'язкістю).

Одиниця вимірювання в'язкості встановлюється із співвідношення:

$$\eta = \frac{F}{\frac{\Delta v}{\Delta z} S}. \quad (7.42)$$

Отже, за одиницю в'язкості в системі СІ приймається в'язкість такої рідини, у якій між двома шарами площею $S = 1 \text{ м}^2$ при градієнті швидкості $\frac{\Delta v}{\Delta z} = 1 \frac{1}{\text{с}}$ виникає сила внутрішнього тертя F , що дорівнює 1 Н . Цю одиницю називають Ньютон-секунда на метр у квадраті або Паскаль-секунда.

В'язкість газів у сотні разів менша від в'язкості рідин. В'язкість залежить від температури: у рідинах з підвищенням температури в'язкість зменшується, а в газах – збільшується.

Повертаємося до формули (7.41). Якщо швидкість шарів змінюється з віддаллю нелінійно, то замість відношення $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ треба використати його границю:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{dv}{dz} . \text{ Тоді можна записати:}$$

$$F = \eta \frac{dv}{dz} S . \quad (7.43)$$

Використаємо поняття дотичної напруги $\tau = \frac{F}{S}$, яке буде мати смисл сили в'язкості, яка діє на одиницю поверхневого шару та формулу (7.43) перепишемо так:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dz} . \quad (7.44)$$

Сила в'язкості, яка діє на елемент поверхні dS , дорівнює:

$$dF = \tau dS . \quad (7.45)$$

Тоді повну силу в'язкості знаходимо так:

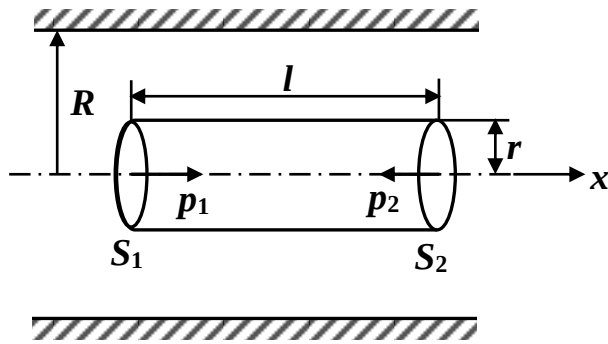
$$F = \int_S \tau dS . \quad (7.46)$$

7.6. Рух в'язкої рідини. Формула Пуазейля

7.6.1. Рух в'язкої рідини циліндричною трубою

При стаціонарній течії в трубці постійного радіуса R всі шари рідини рухаються рівномірно. Але швидкості різних шарів різні. Шар, що прилип до стінок трубки, нерухомий. Цей шар має форму циліндричної трубки. Усі інші рухомі шари рідини є циліндричними трубками, вставленими одна в одну, швидкість яких збільшується при наближенні до осі трубки.

Знайдемо розподіл швидкості рідини вздовж перерізу (діаметра) трубки.



мал. 7.17

Виділимо в потоці циліндричний елемент рідини довжиною l , розміщений по осі трубки (мал. 7.17). На виділений елемент, крім сили тяжіння, діють ще зі сторони оточуючої рідини сили нормального тиску й сили внутрішнього тертя, дотичні

до бічної поверхні циліндра.

При стаціонарній течії сума діючих сил дорівнює нулю ($\sum \vec{F} = 0$, $m\vec{a} = 0$, $\vec{v} = \text{const}$). Сили тиску на бічну поверхню урівноважуються силою тяжіння, яка діє на виділений об'єм рідини; сили тиску на основи циліндра урівноважуються силами внутрішнього тертя, дотичними до його бічної поверхні.

Якщо тиск в деякому перерізі трубки вважати сталим по всьому перерізу (нехтуємо вагою рідини), то умовою стаціонарності буде рівняння:

$$\vec{F}_{1\text{тиску}} + \vec{F}_{2\text{тиску}} + \vec{F}_{\text{вязк.}} = 0, \quad (7.47)$$

або

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0, \quad (7.47')$$

де p_1 і p_2 – тиск у перерізах S_1 і S_2 ; τ – сила в'язкості, що припадає на одиницю поверхні. Врахуємо, що

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dz} = -\eta \frac{dv}{dr},$$

Знак “мінус” береться тому, що швидкість течії шару зменшується із збільшенням радіуса r .

Тоді рівняння (7.47) можна записати так:

$$r(p_1 - p_2) + 2\eta l \frac{dv}{dr} = 0. \quad (7.48)$$

Звідки:

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)r dr}{2\eta l}. \quad (7.49)$$

Проінтегрувавши (7.49), одержуємо:

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)r^2}{4\eta l} + C \quad (7.50)$$

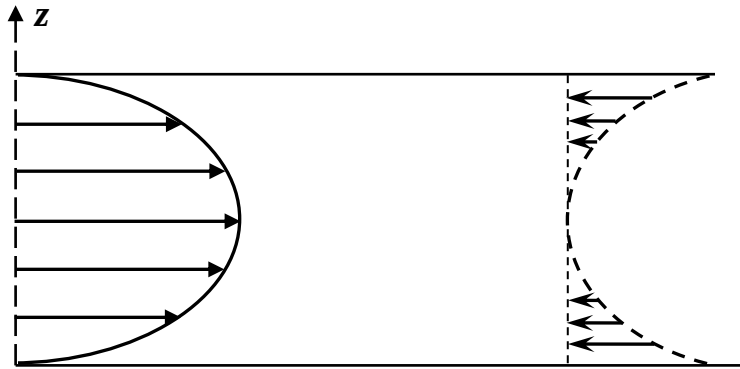
Використаємо граничні умови, щоб знайти сталу інтегрування C . Біля стінок труби ($r = R$) швидкість частинок рідини дорівнює нулю, тому:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (7.51)$$

Отже, розподіл швидкості рідини по перерізу труби буде визначатися формулою:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (7.52)$$

З рівняння (7.52) видно, що зміна швидкості вздовж радіуса відбувається за параболічним законом (мал. 7.18). Швидкість рідини максимальна на осі труби, де вона має значення ($r = 0$):



мал. 7.18

розподіл
швидкості

розподіл сили
в'язкості

$$v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (7.53)$$

Із формули (7.52) і мал. 7.18 видно, що градієнт швидкості має найбільше значення біля стінок труби і найменше на осі (нульове). У відповідності із цим і будуть розподілятися і сили в'язкості.

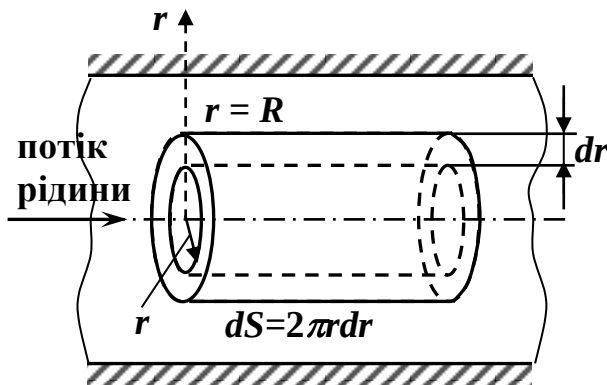
7.6.2. Формула Пуазейля

Виділимо в рідині циліндричний шар радіусом r і товщиною dr (мал. 7.19). Об'єм рідини, що перетікає за одиницю часу (витрата рідини) для цього шару дорівнює:

$$dV = v dS = v 2\pi r dr. \quad (7.54)$$

Для всього перерізу витрату рідини знайдемо шляхом інтегрування (7.54):

$$V = \int_0^R dV = \int_0^R \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4, \quad (7.55)$$



мал. 7.19

Це і є відома формула (закон) Пуазейля-Гагена.

Згідно з цим законом при стаціонарній течії рідини в циліндричній трубці витрата рідини пропорційна радіусу в четвертій степені (R^4) і перепаду тиску, який припадає на одиницю довжини труби ($\frac{p_1 - p_2}{l}$).

Закон (формула) Пуазейля дає можливість вимірювати коефіцієнт в'язкості η рідини шляхом визначення її витрати в циліндричній трубці.

Знаючи витрату V рідини, можна визначити середню швидкість течії рідини трубою:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{V}{S}. \quad (7.56)$$

Із співвідношення (7.55) випливає, що перепад тиску у в'язкій рідині пропорційний середній швидкості:

$$p_1 - p_2 = \Delta P = \frac{8\eta l}{R^2} v_{\text{сеп}}. \quad (7.57)$$

Залежність Δp від середньої швидкості для в'язких рідин зумовлена тим, що із збільшенням середньої швидкості зростає градієнт швидкості, бо біля стінок труби швидкість течії дорівнює

нулю, а із збільшенням градієнта швидкості збільшується сила в'язкого тертя між усіма шарами рідини.

7.7. Ламінарний і турбулентний рух рідин. Число Рейнольдса

7.7.1. Ламінарний і турбулентний рух рідин

Якщо при русі рідини її частинки не переходять з одного шару в інший, то така течія є шаруватою і шари рідини ковзають один відносно одного, не перемішуючись, то такий рух рідини називають ламінарним.

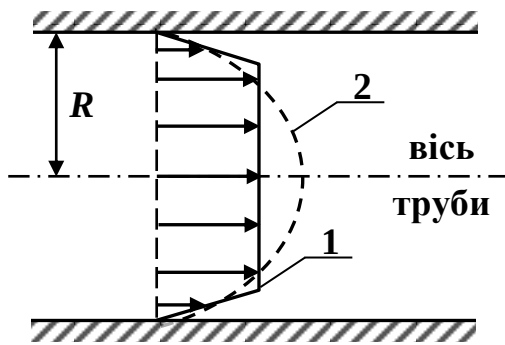
Якщо збільшувати швидкість течії рідини, то шари рідини починають перемішуватися, в рідині виникають бульбашки, утворюються вихри. Такий рух рідини називають турбулентним. При русі в'язкої рідини спостерігаються обидва види руху: ламінарний і турбулентний.

До ламінарного виду руху належить встановлена (стаціонарна) течія ідеальної рідини. Але в ідеальній рідині між рухомими шарами не виникають сили внутрішнього тертя. Тому ламінарна течія залишається такою при будь-яких швидкостях.

Сили внутрішнього тертя, які виникають між шарами реальної (в'язкої) рідини, суттєво впливають на характер руху. Якщо вони не великі і середня швидкість течії мала, то рух є ламінарним. При цьому швидкість шарів змінюється від осі труби до стінок за параболічним законом (7.52).

Якщо ж сили внутрішнього тертя досягають певної величини, то їх дія на шари рідини настільки велика, що це приводить до порушення шаруватості течії і виникнення перемішування шарів рідини.

7.7.2. Число Рейнольдса



мал. 7.20

Турбулентний рух не стаціонарний: швидкість v і тиск p в кожній точці коливаються біля деяких середніх значень. Тому при турбулентному русі можна говорити лише про середні (в часі) значення швидкості і тиску в кожній точці перерізу труби (мал. 7.20).

Зміна середньої швидкості залежно від віддалі від осі труби має вигляд, показаний кривою 1 (кривою 2 показано зміну швидкості при ламінарній течії). У результаті перемішування шарів рідини середня швидкість практично однакова по всьому перерізу. Тільки в дуже тонкому шарі, який прилягає до стінок труби, зберігається градієнт швидкості, який в цьому випадку набагато більший від градієнта в цьому шарі при ламінарній течії.

Формула Пуазейля непридатна для турбулентного руху. Для одного і того ж Δp витрата рідини V при турбулентному русі менша, ніж при ламінарному. Це пояснюється тим, що при турбулентному русі різко зростають сили внутрішнього тертя ($\frac{\Delta v}{\Delta r}$ – дуже велике). Збільшення внутрішнього тертя зумовлене ще і тим, що коефіцієнт в'язкості η зростає при переході до турбулентного руху.

Досліджуючи питання про виникнення турбулентності при течії рідини трубами, Рейнольдс Осборн (1842–1912, англ. фіз.) установив, що характер течії залежить від значення безрозмірної величини:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \quad (7.58)$$

де ρ – густина рідини; η – її в'язкість; v – середня по перерізу труби швидкість потоку; D – діаметр труби.

Величину **Re** називають числом Рейнольдса. Дослід показує, що при малих значеннях **Re** течія рідини (або газу) є ламінарною, а при великих – турбулентною.

Значення числа Рейнольдса і значення швидкості v , що йому відповідає, яке характеризує перехід від ламінарного до турбулентного потоку, називають критичними (**Re_{кр}**, $v_{кр}$).

Вивчаючи на досліді рух рідин і газів трубами у звичайних умовах, встановлено, що:

$$\text{Re}_{кр} = \frac{\rho v_{кр} D}{\eta} = 2300. \quad (7.59)$$

Це означає, що коли **Re** < 2300, то течія ламінарна. Якщо **Re** > 2300, то течія турбулентна. Дослід показує, що при **Re**, близькому до **Re_{кр}**, ламінарна течія нестійка і дуже чутлива до різного виду факторів (різкі переходи в трубі, шороховатість стінок, вібрації тощо).

Ліквідовуючи ці фактори, тобто створюючи спеціальні умови, можна домогтися, що ламінарна течія зберігається аж до значень **Re** = 10000. Це явище одержало назву затягування ламінарного режиму.

Оскільки сили внутрішнього тертя при ламінарній течії значно менші, ніж при турбулентній, то при одній і тій самій витраті **V** перекачка рідини при ламінарній течії вимагає менших перепадів тиску і, відповідно, менших витрат енергії.

Потік, який обтікає тіло, також може бути або ламінарним, або турбулентним. При цьому встановлено, що характер течії також залежить від числа Рейнольдса, але його записують у загальній формі:

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (7.60)$$

де **l** – деякий характерний розмір тіла (якщо розглядати трубу, то треба прийняти **l** = **D**).

Потоки рідини з різними ρ , v , η , які обтікають тіла різного масштабу, будуть цілком однаковими (динамічно подібними), якщо числа Рейнольдса **Re** для течій однакові і тіла мають подібну форму.

Наприклад, для виявлення особливостей обтікання повітрям спортивного літака, який має швидкість $v = 200 \text{ км/год}$, можна використати модель, зменшену в три рази. Але при цьому модель треба обдувати повітрям із швидкістю, яка визначається із рівності чисел Рейнольдса:

$$\text{Re}_{\text{lim}} = \text{Re}_{\text{mod}} \quad \text{або} \quad \frac{\rho L u}{\eta} = \frac{\rho l v}{\eta}. \quad (7.61)$$

$$\text{Звідки } v = \frac{L}{l} u = 3 \cdot 200 = 600 \text{ км/год}.$$

Обдування моделей відбувається у спеціальних пристроях, які називають аеродинамічними трубами.

7.8. Рух тіл в рідинах і газах

7.8.1. Пограничний шар

Дослід показує, що тіла, які рухаються у реальній рідині (або газі) зазнають дії сили лобового опору (тобто опору рухові), а при деяких умовах і підіймальної сили. Як виникають ці сили і яка їх природа?

Як показав Прандталь, процеси, які зумовлюють появу вказаних сил, відбуваються у шарі рідини, який безпосередньо прилягає до поверхні тіла і який одержав спеціальну назву пограничного шару.

За означенням пограничний шар, це такий шар рідини, у якому швидкість потоку змінюється від нуля (на поверхні тіла) до значення, що дорівнює швидкості незбуреного потоку.

Як показує теорія, товщину цього δ -шару можна оцінити за формулою:

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (7.62)$$

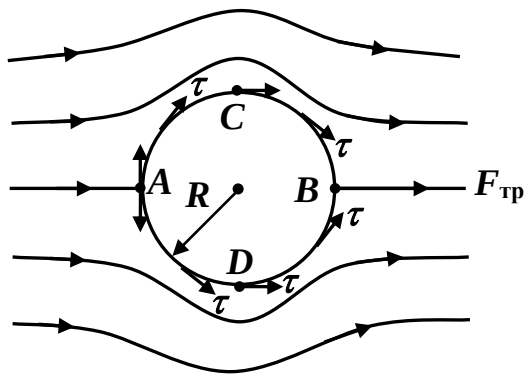
де l – характерний розмір тіла; Re – число Рейнольдса.

Товщина пограничного шару δ зменшується із збільшенням числа Рейнольдса. Як показує розрахунок, при $\text{Re} \geq 10^4$ товщина шару стає меншою від 0,01 розміру тіла. Поза цим шаром (де

в'язкість практично не проявляється) рідину можна вважати ідеальною. Тому для пояснення деяких явищ (підіймальної сили, наприклад) вигідно розглядати тіло і прилеглий до нього тонкий пограничний шар як одне ціле (потовщене тіло), яке обтікається потоком ідеальної рідини.

У пограничному шарі, як і при течії в трубі, режими течії рідини можуть бути як ламінарними, так і турбулентними. Режим течії в пограничному шарі визначає і характер сили взаємодії тіла з потоком рідини. Як і при русі рідини в трубах, існують характерні числа Рейнольдса, при яких в пограничному шарі ламінарна течія переходить у турбулентну.

7.8.2. Опір рухові. Опір тертя. Формула Стокса



мал. 7.21

Розрізняють опір тертя і опір тиску. Розглянемо сили тертя, які виникають при русі тіл у рідинах, що одержали назву опір тертя.

При невеликих швидкостях течії ($Re < 100$), коли в пограничному шарі є ламінарний режим течії, рідина плавно обтікає тіло; лінії течії мають такий вигляд, як і при обтіканні ідеальною рідиною.

Як приклад розглянемо обтікання кулі (мал. 7.21). Ми знаємо, що результуюча сила тиску на поверхню кулі через симетрію ліній течії дорівнює нулю. Через цю ж причину ця ж сила буде дорівнювати нулю і у випадку ламінарного обтікання в'язкою рідиною.

Сила, що діє на кулю зі сторони рідини, є силою внутрішнього тертя, результуючою сил тертя τdS , прикладених до кожного елемента поверхні кулі.

Напруга τ залежить від градієнта швидкості, а градієнт швидкості – від товщини пограничного шару. Пограничний шар має найменшу товщину в точках C і D , і найбільшу – у точках A і B . Тому градієнт швидкості, а відповідно і τ , будуть мати найбільше значення у точках C і D , і найменше – у точках A і B .

Результуюча F_{mp} усіх сил через симетрію обтікання направлена за течією. Сила тертя F_{mp} залежить тільки від в'язкості η , відносної швидкості v_0 (швидкість незбуреного потоку) і радіуса кулі R .

Вигляд функції можна встановити із міркувань розмірності. Запишемо вираз для сили тертя у загальному вигляді:

$$F_{mp} = k \eta^x v_0^y R^z. \quad (7.63)$$

Визначимо невідомі x, y, z із рівності показників степені у формулах розмірностей лівої і правої частини формули (7.63).

Розмірність лівої частини рівності (7.63):

$$[F_{mp}] = L M T^{-2}, \quad (7.64)$$

де L, M, T - розмірності довжини, маси та часу відповідно.

Розмірність правої частини рівності (7.63):

$$[\eta]^x [v_0]^y [R]^z = (L^{-x} M^x T^{-x}) (L^y T^{-y}) (L^z) = L^{-x+y+z} M^x T^{-x-y}. \quad (7.65)$$

Порівнюючи (7.64) і (7.65), одержимо систему рівнянь:

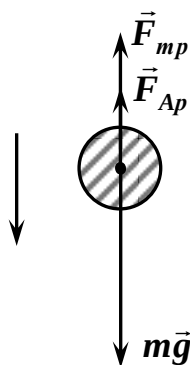
$$-x + y + z = 1, \quad x = 1, \quad -x - y = -2. \quad (7.66)$$

Звідки знаходимо, що:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

Отже,

$$F_{mp} = k \eta v_0 R,$$



мал. 7.22

$$(7.67)$$

де k – безрозмірний коефіцієнт (для кулі $k = 6\pi$).

У результаті одержуємо формулу Стокса:

$$F_{mp} = 6\pi \eta v_0 R. \quad (7.68)$$

Формула Стокса вказує на лінійну залежність

F_{mp} від v_0 .

Із формули Стокса можна визначити встановлену швидкість падіння кульки у в'язкій

рідині (мал. 7.22). На цьому принципі ґрунтується один із методів визначення коефіцієнта в'язкості η . Якщо $v_0 = \text{const}$, то:

$$mg = F_{mp} + F_{Арх} \text{ (бо прискорення } \vec{a} = 0 \text{)}.$$

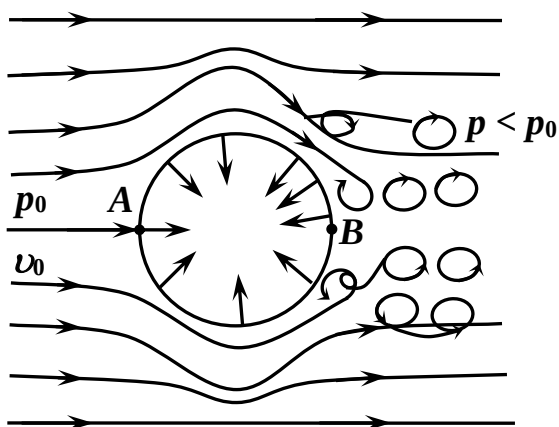
$$\text{Але } m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g, \quad F_{Арх} = \rho' \frac{4}{3} \pi R^3 g,$$

де ρ і ρ' – густини кульки і рідини відповідно, то

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho')g}{9\eta} R^2. \quad (7.69)$$

Отже, швидкість кульки пропорційна квадрату її радіуса. При малих радіусах ($R \ll 1$) швидкість дуже мала. Цим пояснюються явища, які пов'язані з утворенням зависання у газах і рідинах дуже малих частинок (хмарки, туман тощо).

7.8.3. Опір тиску



мал. 7.23

Дослід показує, що при збільшенні швидкості течії настає такий момент, коли картина обтікання тіла різко змінюється; за тілом утворюється вихор (мал. 7.23), який відривається від тіла і відноситься течією, утворюючи так звану вихрову доріжку. Тіло і ця вихрова доріжка обтікаються шаруватою течією.

При симетричній формі тіла позаду нього утворюються звичайно два вихори з однаковими за модулем, але протилежними за напрямками моментами імпульсу (відповідно до закону збереження моменту імпульсу для замкнутої системи тіло–рідина).

Утворені вихори порушують симетрію у розподілі тиску рідини на поверхню циліндра. Якщо в незбуреному потоці тиск дорівнює p_0 , то в області, зайнятій вихором (позаду тіла), він менший від p_0 .

З іншого боку, в області, що прилягає до передньої частини циліндра (т. А). тиск рідини згідно з законом Бернуллі дорівнює

$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$, тобто більший, ніж у незбуреному потоці. Отже, результуюча сила тиску, яка розподілена по поверхні циліндра, відмінна від нуля і направлена внаслідок симетрії за потоком.

Цю силу опору називають силою опору тиску $F_{\text{тиску}}$.

Так як різниця тисків спереду і ззаду циліндра оцінюється величиною $\frac{\rho v_0^2}{2}$, то і результуюча сила буде пропорційна до тієї ж величини, тобто буде залежати від густини ρ рідини і квадрата відносної швидкості v_0 .

Зрозуміло, що результуюча сила $F_{\text{тиску}}$ повинна залежати також і від величини області, яка зайнята вихорем позаду тіла, що в свою чергу визначається розмірами тіла.

Приймемо за характерний розмір найбільшу площу S перерізу тіла площиною, яка перпендикулярна до потоку – міделевий переріз.

Отже, $F_{\text{тиску}}$ може залежати від ρ , S , v_0 .

Записавши цю залежність у загальному вигляді:

$$F_{\text{тиску}} = \frac{c_x}{2} \rho^x S^y v_0^z,$$

і застосувавши описаний вище метод розмірностей, одержуємо:

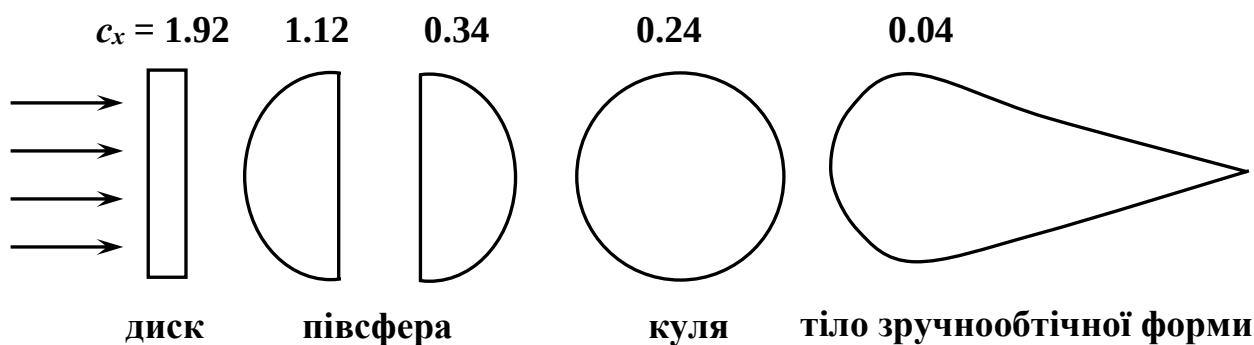
$$x=1, y=1, z=2.$$

Тоді приходимо до наступного закону, якому підлягає сила лобового опору ($F_{\text{тиску}}$) при наявності вихорів позаду тіла:

$$F_{\text{тиску}} = c_x S \rho \frac{v_0^2}{2}, \quad (7.70)$$

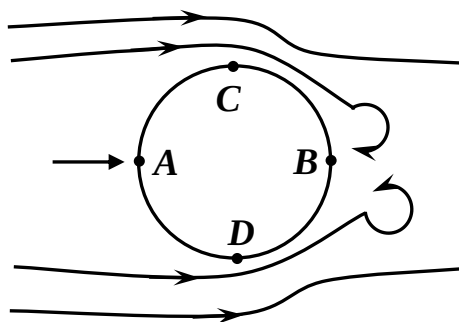
де c_x – безрозмірний коефіцієнт, названий коефіцієнтом лобового опору, c_x – функція числа Рейнольдса, що враховує в'язкі властивості рідини і форму тіла.

Зменшення лобового опору тіла можна досягти зменшенням зони вихроутворення. Для цього тілу треба надати такої форми, при якій потік плавно би з'єднувався за ним і зона вихрів була б мінімальною. На мал. 7.24 показано, як залежить коефіцієнт c_x від форми тіла.



мал. 7.24

Приклад з півкулями дуже наочний: він показує, що основний вплив на величину лобового опору чинить форма не передньої частини тіла, а задньої, тієї, за якою утворюються вихори.



мал. 7.25

Пояснимо з якісної сторони причину утворення завихрення (мал. 7.25).

У точці A циліндра швидкість частинок потоку дорівнює нулю, тому тут тиск рідини найбільший.

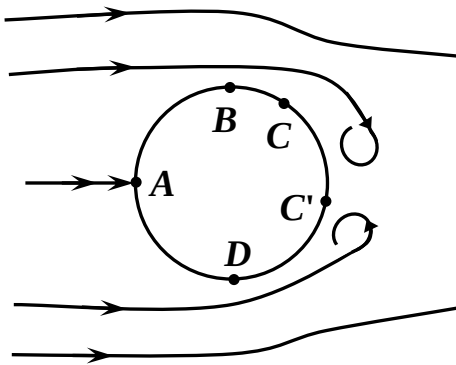
На боках циліндра на шляху від A до C і D швидкість частинок рідини збільшується, тому тиск зменшується. В т. C і D частинки мають найбільшу кінетичну енергію. Якби рідина була ідеальною, то за рахунок цієї енергії частинки далі переміщувалися б в область зростаючого тиску і якраз досягли б т. B , де їх швидкість дорівнює нулю, а тиск найбільший. Так закінчувалося б повне обтікання циліндра і результуюча сила тиску рідини на тіло дорівнювала б нулю.

У реальних рідинах в'язкість зумовлює зменшення енергії частинок при обтіканні тіла, тому енергії частинок у C і D буде замало, щоб перейти через область зростаючого тиску і потрапити в т. B . Частинки рідини зупинятимуться ближче від т. B , а потім рухатимуться назад у бік меншого тиску. Коли зворотний потік зустрінеться з основним, у тилівій частині циліндра виникнуть

завихрення. Завихрення відривають основний потік від тіла. За тілом в області завихрення тиск спадає, тому виникає надлишок тиску в лобовій (передній) частині.

Утворення завихрення супроводжується відривом пограничного шару в т. C і C' (мал. 7.26). У цьому випадку т. C і C' називають точками відриву, а саме обтікання з відривом пограничного шару.

Із малюнка видно, що чим ближче т. C і C' до точок B і D , тим більша частина поверхні обтікаючого тіла контактує з областю пониженого тиску і тому, відповідно, більшою буде сила лобового опору.



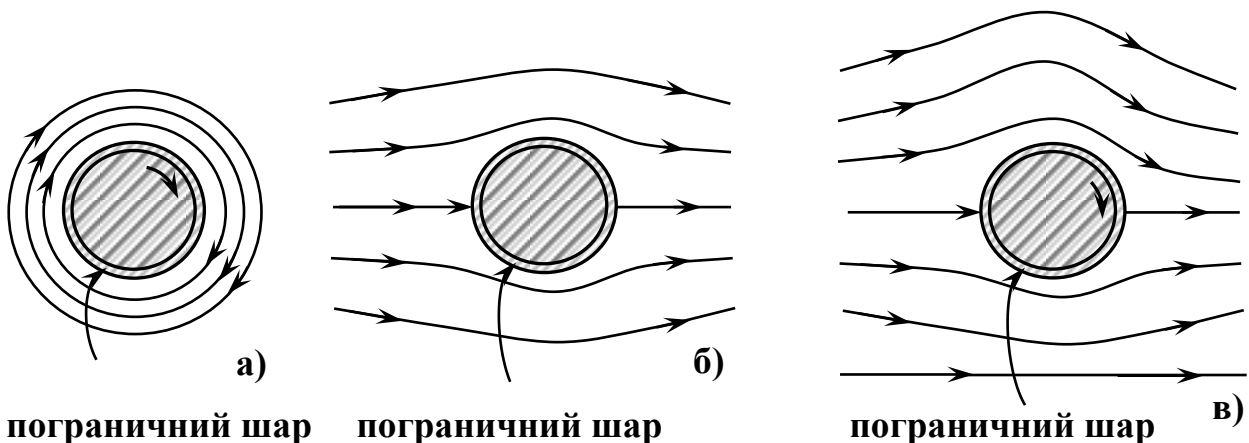
мал. 7.26

На закінчення зазначимо, що окрім лобового тиску, на рухоме тіло діють і сили тертя. Але сили тертя пропорційні швидкості лише в першій степені (тоді як $F_{\text{тиску}} \sim v_0^2$), ними при значних швидкостях нехтують.

7.9. Підймальна сила крила літака

7.9.1. Ефект Магнуса

Розглянемо основи теорії підймальної сили крила літака. Щоб краще зрозуміти це явище, попередньо розглянемо так званий ефект Магнуса (1802–1870, нім.фіз.).



мал. 7.27

Відомо, що обертовий твердий циліндр утворює у необмеженій масі в'язкої рідини коловий вихровий рух з інтенсивністю $\Gamma = 2 S \omega$ (S і ω – площа перерізу й кутова швидкість обертання циліндра) (мал. 7.27, а.).

Циліндр (що не обертається), що рухається поступально з відносною швидкістю v_0 (при малих v_0) обтікається ламінарним потоком, який є поза пограничним шаром також не вихровим (мал. 7.27, б).

Якщо ж циліндр обертається і одночасно рухається поступально, то два невихрові потоки, що оточують його накладаються один на одного і дають результуючий потік обтікання (мал. 7.27, в). У результуючому потоці швидкість течії рідини над циліндром стає більшою, ніж під циліндром. Тому, згідно з законом Бернуллі, тиск рідини на верхню частину циліндра буде менший, ніж на нижню. Це призводить до виникнення (мал. 7.27, в) вертикальної сили, названої підіймальною (ефект Магнуса).

Жуковський і незалежно від нього Кутт теоретично обчислили величину цієї сили, що припадає на одиницю довжини циліндра (при розрахунку вважалось, що циліндр має безконечну довжину):

$$F_{\text{нід}} = \Gamma \rho v_0, \quad (7.71)$$

де $\Gamma = 2 S \omega$, ρ – густина рідини, v_0 – відносна швидкість потоку.

Важливо підкреслити, що підіймальна сила є результатом колового руху рідини (чи газу) і визначається його інтенсивністю $\Gamma = 2 S \omega$.

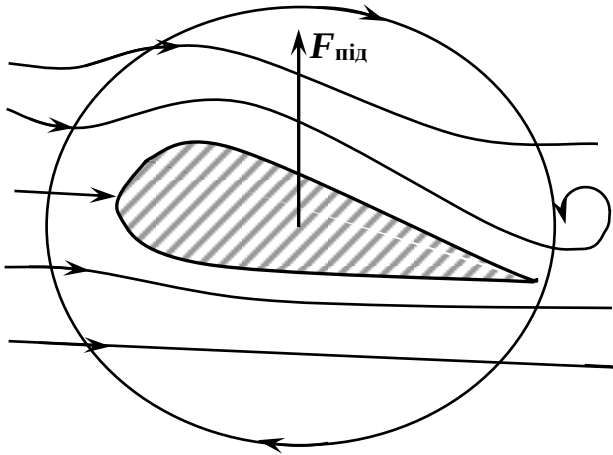
В ефекті Магнуса підіймальна сила $F_{\text{нід}}$ перпендикулярна до швидкості потоку $\vec{v}_0$. Щоби знайти напрям цієї сили, треба вектор відносної швидкості $\vec{v}_0$ повернути на кут 90° в сторону, протилежну до обертання циліндра.

Отже, на вихор, який обертається, діє зі сторони оточуючої рідини сила, яка перпендикулярна до відносної швидкості $\vec{v}_0$, і скерована в сторону, що визначається згаданим вище правилом повороту вектора.

7.9.2. Підіймальна сила крила літака

Механізм утворення підіймальної сили крила літака аналогічний до механізму виникнення сили в ефекті Магнуса. Але виникнення колового руху пояснюється цілком іншими причинами.

Дякуючи асиметричній формі крила (мал. 7.28), наявністю гострої задньої кромки внаслідок описаних вище процесів, які існують у пограничному шарі, за крилом утворюється вихор і при цьому один – розгінний вихор.



мал. 7.28

Розгінний вихор має певний момент імпульсу. Але момент імпульсу системи крило – повітря повинен залишатися сталим (дорівнювати нулю), так як зовнішніх моментів сил, які діють на систему, немає.

Тому поряд з вихором, який виникає позаду крила, повинен виникнути коловий рух повітря, яке би мало однаковий з вихором момент імпульсу, але протилежного напрямку.

Жуковський показав, що разом із вихором виникає коловий рух повітря навколо крила.

У результаті накладання швидкості потоку повітря і швидкості повітря у коловому русі швидкість течії повітря над крилом стає більшою, ніж під крилом. Звідси, згідно з законом Бернуллі, тиск повітря під крилом є більший, ніж над крилом, що і є причиною виникнення підіймальної сили.

Отже, при обтіканні крила повітрям виникають два вихори: розгінний і приєднаний. Підіймальну силу створює приєднаний вихор.

Вихор позаду крила є причиною лобового опору, тому разом з підіймальною силою обов'язково виникає лобовий опір. Технічне завдання з визначення профіля крила зводиться, таким чином, до

встановлення умов, при яких відношення $\frac{F_{n\partial}}{F_{\text{лоб}}} = W$, назване якістю крила, стає найбільшим. Цю задачу вперше розв'язав Жуковський.

При даному профілі якість крила W залежить від кута атаки α . Оскільки сила лобового опору $F_{\text{лоб}}$ і підймальна сила $F_{n\partial}$ залежать від вихора позаду крила, то їх можна знайти за формулами:

$$F_{\text{лоб}} = c_x S \rho \frac{v_0^2}{2}. \quad (7.72)$$

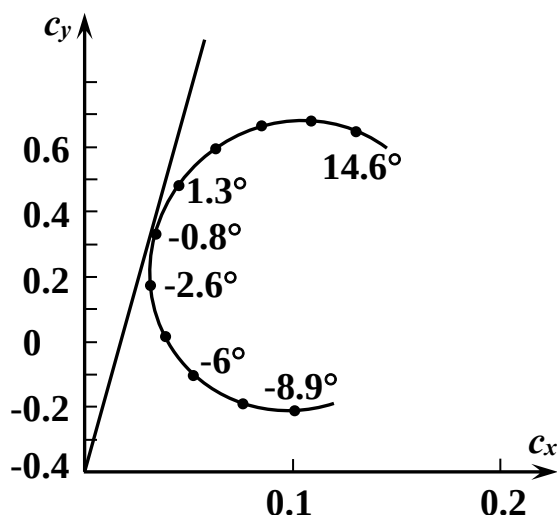
$$F_{n\partial} = c_y S \rho \frac{v_0^2}{2}, \quad (7.73)$$

де c_x і c_y – коефіцієнти відповідно лобового опору та підймальної сили, які залежать від форми профілю крила (а не від його розмірів) і кута атаки α .

Використовуючи (7.72) і (7.73), знаходимо:

$$W = \frac{F_{n\partial}}{F_{\text{лоб}}} = \frac{c_y}{c_x}. \quad (7.74)$$

Для визначення польотних якостей крила важливо знати, як змінюються одночасно обидві величини c_x і c_y залежно від кута атаки.



мал. 7.29

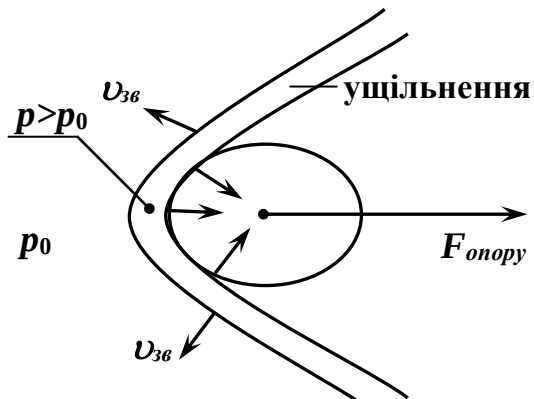
Ці дані одержують дослідним шляхом, обдуваючи моделі в аеродинамічній трубі. При заданому куті атаки вимірюють сили $F_{n\partial}$ і $F_{\text{лоб}}$ і, використавши гідродинамічну подібність, визначають c_x і c_y . Визначивши значення c_x і c_y для різних кутів атаки α , будують графік, названий полярною крилою (мал. 7.29).

По вертикальній осі відкладають c_y , а по горизонтальній – c_x . Вздовж кривої вказують значення кута атаки. З мал. 7.29 видно, що:

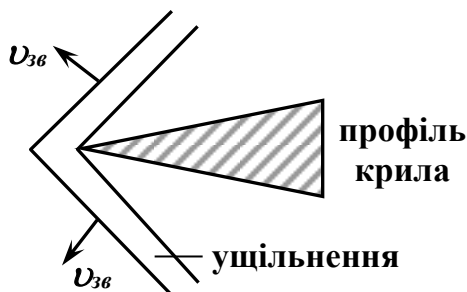
$$W = \frac{c_y}{c_x} = \operatorname{tg} \beta.$$

7.10. Рух з надзвуковими швидкостями

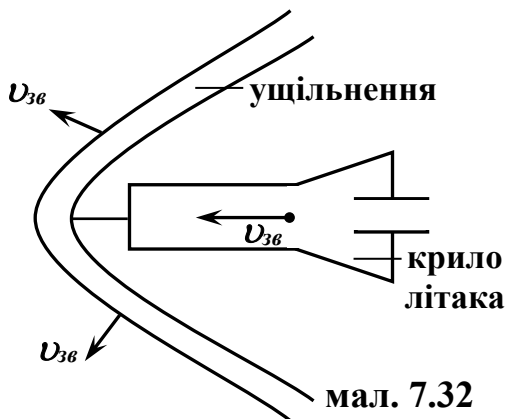
Доки швидкість тіла значно менша від швидкості звуку



мал. 7.30



мал. 7.31



мал. 7.32

($v \ll v_{зв}$), можна вважати, що збурення у середовищі, викликане рухом тіла, поширюється миттєво. Середовище в цьому випадку можна вважати нестискуваним (нестисливим). Рух тіла в такому середовищі розглянуто вище.

Якщо швидкість тіла в середовищі наближається до швидкості звуку $v_{зв}$ у цьому середовищі, то починає відігравати вирішальну роль не в'язкість середовища, а зміна його густини.

Рухоме тіло створює перед собою ущільнення, яке поширюється у середовищі із швидкістю звуку і випереджає тіло.

При $v \gg v_{зв}$ (рух із надзвуковою швидкістю) ущільнення не може відійти від тіла (ущільнення в цьому випадку має характер різкого стрибка: стрибком зростають густина, тиск і температура) (мал. 7.30).

Навпаки, рухоме тіло штовхає його перед собою і, таким чином, передня його частина весь час є у контакті з областю великого тиску. Це і створює силу опору рухові значної величини.

Сила опору F тим менша, чим менша площа контакту тіла з областю підвищеного тиску. Через цю причину передня частина крил надзвукових літаків робиться гострою, а самим крилам надають форму трикутника (мал. 7.31), направленою гострим кутом вперед;

крім цього, на носовій частині літака розміщують стержень, винесений далеко вперед (мал. 7.32).

Стрибок ущільнення, яке утворюється перед тілом (ударна хвиля), має форму конуса і рухається із швидкістю тіла $\vec{v}_0$, тобто із надзвуковою швидкістю. Відоме явище “пострілу”, яке сприймається при пролітанні надзвукових літаків, зумовлене проходженням ударної хвилі.

Зауважуємо, що рух тіла із швидкістю v , яка близька до $v_{зв}$, дуже нестійкий. Тому на практиці намагаються інтервал біля звукових швидкостей “проскочити” як можна швидше. Рух із швидкістю $v > v_{зв}$ знову стає стійким. Але лобовий опір при надзвукових швидкостях досить великий (він пропорційний v^3), і для підтримання цього руху потрібні потужні двигуни. Очевидно, що сила лобового опору буде меншою, якщо рух відбувається у верхніх (розріджених) шарах атмосфери.

Питання для самоконтролю

1. Що спільного між рідиною і газом, яка між ними різниця?
2. До яких видів деформації газ і рідина виявляють пружні властивості?
3. Чим відрізняються умови рівноваги рідини від умов рівноваги твердого тіла?
4. Сформулюйте закон Паскаля. Поясніть принцип дії гідравлічного преса.
5. Сформулюйте закон Архімеда. Від чого залежить величина архімедової сили? Запишіть формулу.
6. Що називають лінією течії?
7. Який вигляд має рівняння неперервності для нестискуваної і стискуваної рідини?
8. Яку течію називають стаціонарною?
9. Запишіть рівняння Бернуллі і поясніть його зміст.
10. Виведіть рівняння Бернуллі.
11. Для чого використовують трубку Піто?
12. Як можна виміряти статичний тиск всередині рухомої рідини?

13. Яка будова трубки Прандтля? Для чого її використовують? Запишіть формулу.
14. Виведіть формулу Торрічеллі.
15. Як можна знайти результуючу силу тиску рідини, що тече, на стінки зігнутої труби?
16. Виведіть формулу Пуазейля.
17. За яким законом розподіляється швидкість рідини вздовж перерізу труби? Запишіть формулу.
18. Яку течію рідини називають ламінарною? А яку турбулентною?
19. Запишіть формулу для знаходження числа Рейнольдса.
20. Що називають пограничним шаром? Від чого залежить його товщина?
21. На тіло, що рухається у в'язкому середовищі, діє сила лобового опору. При яких умовах спостерігається опір тертя і опір тиску?
22. Запишіть формулу Стокса. Як її можна вивести?
23. Поясніть, як утворюється вихор позаду тіла, яке обтікається рідиною або газом.
24. Що таке коефіцієнт лобового опору і від чого він залежить?
25. Поясніть, чому лобовий опір у диска більший, ніж у кулі?
26. Яке тіло називають зручнообтічним? Чому?
27. У чому суть ефекту Магнуса? Опишіть механізм утворення сили Магнуса.
28. Сформулюйте правило, за яким визначається напрямок сили Магнуса.
29. Який вихор називається розгінним? Який вихор називають приєднаним? Чому виникає приєднаний вихор?
30. Поясніть виникнення підйимальної сили крила літака.
31. Від чого залежить підйимальна сила? Як її виміряти?
32. Які особливості руху тіл з надзвуковими швидкостями?
33. Чому передню частину крила надзвукових літаків роблять гострою?
34. Що таке ударна хвиля?
35. Що таке поляра крила? Для чого її використовують?
36. Поясніть, чому рідини навіть при великих тисках погано (мало) стискаються.

37. На одному кінці соломинки видули мильну бульбашку, а другий кінець її розмістили біля полум'я свічки. Чому полум'я свічки при цьому відхилилося?
38. Чому маленькі краплі ртуті, розлиті на столі, мають форму, близьку до кулеподібної, а великі розтікаються по столі?
39. На яку висоту піднімається вода в капілярній трубці, площа поперечного перерізу якої 1 мм^2 ? Температура води 18°C . Коефіцієнт поверхневого натягу води $0,073 \text{ Н/м}$ (при температурі 18°C).

Відповідь: 2,65 см.

40. Знайдіть масу води, яка піднялася у капілярній трубці діаметром $0,5 \text{ мм}$ при температурі 18°C .

Відповідь: $1,17 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$.

41. Ртутний барометр має діаметр трубки 3 мм . Яку поправку до показів барометра треба внести, якщо врахувати капілярне опускання ртуті? Температура 20°C .

Відповідь: 4,8 мм.

42. При заповненні двох сполучених капілярних трубок різного діаметру водою, різниця рівнів води дорівнює $2,6 \text{ см}$, а при заповненні спиртом – 1 см . Знаючи коефіцієнт поверхневого натягу води, знайти коефіцієнт поверхневого натягу спирту.

Відповідь: $2,24 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$.

43. На яку висоту опуститься ртуть при 20°C між двома паралельними пластинками, віддаль між якими $0,15 \text{ мм}$?

Відповідь: 4,81 см.

44. На скільки тиск в мм.рт.ст. , під яким перебуває повітря всередині мильної бульбашки діаметром $0,8 \text{ мм}$, більший від зовнішнього атмосферного тиску? Коефіцієнт поверхневого натягу мильної води прийняти $0,06 \text{ Н/м}$.

Відповідь: 4,5 мм.рт.ст.

45. Сполучені капілярні трубки різного діаметру заповнені водою. Як зміниться різниця рівнів води в трубках при нагріванні води?

ТЕМА 8. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ (СТВ)

ПЛАН

1. Межі застосування класичних понять і законів у механіці.
2. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца.
3. Наслідки із перетворення Лоренца.
4. Релятивістська динаміка.
5. Маса, імпульс, енергія у СТВ.
6. Основний закон релятивістської динаміки. Дефект маси. Енергія зв'язку.

8.1. Межі застосування класичних понять і законів у механіці

Кінематика – розділ механіки, завданням якої є вивчення механічних рухів тіл без вияснення причин цих рухів. Для опису рухів тіл треба вибрати систему відліку. Цей вибір залежить від конкретних умов поставленого завдання.

У різних системах відліку, які рухаються одна відносно одної, значення багатьох кінематичних величин виявляються різними. Такі величини називаються *відносними*. *Відносними величинами в кінематиці є координати, переміщення, швидкість і прискорення. Відносною є і траєкторія рухомого тіла. Отже, у різних системах відліку рух одного і того ж тіла описується по-різному.*

Але з точки зору кінематики, усі системи відліку є рівноправними. Жодна із систем відліку не є “справжньою”, вибір кожної з них визначається лише міркуванням зручності й доцільності. За значеннями кінематичних величин в одній системі відліку можна розрахувати значення цих же величин у будь-якій іншій системі відліку.

Поряд з відносними кінематичними характеристиками є величини, однакові в різних системах відліку. Такі величини називаються *інваріантними*. *Прикладами інваріантних*

кінематичних величин є час Δt і довжина відрізка l . Дуже важливо підкреслити, що прискорення, яке є, взагалі кажучи, відносною величиною у системах відліку, що рухаються одна відносно одної із постійною швидкістю $\vec{v}_0$, є величиною інваріантною.

Треба звернути увагу, що поділ фізичних величин на відносні й інваріантні відбувається на основі узагальнення результатів досліду і, відповідно, усі наші висновки справедливі лише для умов, у яких ці досліди проводилися.

Наведені вище дані справедливі лише для класичної механіки, яка розглядає рух тіл із швидкостями, набагато меншими від швидкості світла.

Інтервал часу та довжина тіла, які є в класичній механіці інваріантними величинами, при русі із швидкостями, близькими до швидкості світла перестають бути інваріантними.

А швидкість світла, на відміну від усіх інших швидкостей матеріальних об'єктів, є інваріантною величиною.

Існують прямі докази відносності інтервалів часу в різних системах відліку. Наприклад, час життя нерухомого μ -мезона дорівнює $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Вимірювання ж часу життя μ -мезонів, які входять до складу космічних променів, які рухаються із швидкостями, близькими до швидкості світла, показало, що їх час життя значно більший. Його можна розрахувати за формулою, що випливає з теорії відносності:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.1)$$

У 1955 р. радянський фізик А.М.Бонч-Бруєвич виконав досліди, які показали, що швидкість світла не залежить від руху джерела світла, а це суперечить класичному закону додавання швидкостей:

$$\vec{v}' = \vec{v}'_0 + \vec{v}. \quad (8.2)$$

Для відшукування закону додавання швидкостей, який дав би змогу здійснювати перерахунок швидкостей руху реальних тіл використовують принцип відповідності, сформульований Н.Бором у 1913 р. Цей принцип стверджує: будь-яка нова теорія, яка

претендує на глибший опис фізичної реальності і на ширшу область застосування, ніж стара, повинна включати останню як граничний випадок.

Релятивістський закон додавання швидкостей має вигляд:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v'v_0}{c^2}}. \quad (8.3)$$

Якщо навіть $v' = v_0 = 11,2 \text{ км/с}$, то відхилення результатів, одержаних за допомогою релятивістського закону додавання швидкостей від класичного закону, дорівнює $\varepsilon = \frac{\Delta v}{v} = 10^{-9}$. Це відхилення набагато менше від відносної похибки вимірювання швидкості космічних кораблів. Тому при розрахунках траєкторії космічних міжпланетних польотів релятивістські поправки не враховуються.

8.2. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца

8.2.1. Принцип відносності

Як було показано вище, із багаточисленних дослідів випливає, що в усіх системах координат, які рухаються рівномірно та прямолінійно відносно системи нерухомих зірок і, відповідно, одна відносно одної, усі механічні явища протікають цілком однаково. Такі системи координат називаються *інерціальними*, оскільки в них справджується закон інерції Ньютона: тіло, яке віддалене достатньо далеко від інших тіл, рухається відносно цих систем координат рівномірно та прямолінійно.

Твердження, вперше висловлене Галілеєм, про те, що в усіх інерціальних системах координат механічні явища протікають однаково, називається *принципом відносності Галілея*.

Тепер цей принцип з великою точністю експериментально доказаний для механічних і електромагнітних явищ.

Але все одно принцип відносності є постулатом, тобто основним припущенням, яке виходить за межі експериментальної перевірки. Це зумовлено двома причинами.

По-перше, в межах кола фізичних явищ, що вивчаються, експеримент дає змогу перевірити твердження лише з певною точністю, яка доступна вимірюванням на даному етапі розвитку науки. Твердження, що є основою принципу відносності, має абсолютний характер, бо воно припускає, що при як завгодно великій точності результати експерименту мають узгоджуватися із ним.

По-друге, невідомі фізичні явища, які в теперішній час ще не відкриті, в майбутньому теж будуть підлягати під цей принцип.

Тому принцип відносності є постулатом і завжди буде залишатися ним.

Усі наукові поняття, закони, теорії вироблені для певного кола фізичних явищ і є справедливі в певних межах. Вихід за межі їх застосування не робить ці поняття, закони, теорії тощо неправильними. Вони лише вказують границі, умови і точність їх застосування. Прогрес науки якраз і полягає у виході за межі застосування існуючих теорій.

Галілей, сформулювавши принцип відносності, записав співвідношення, які забезпечують інваріантність фізичних законів у різних інерціальних системах координат:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (8.4)$$

Як уже сказано вище, співвідношення (8.4) називаються перетвореннями Галілея.

Основний принцип інваріантності фізичних законів справедливий завжди, але відповідні до нього точні рівняння перетворення координат і часу – це перетворення Лоренца, а не перетворення Галілея.

8.2.2. Перетворення Лоренца

Оскільки перетворення Галілея для достатньо великих швидкостей дають результати, що не узгоджуються з експериментом, то вони не встановлюють правильного зв'язку, який існує для координат і часу інерціальних систем відліку, які рухаються з великими швидкостями одна відносно одної.

Необхідно було знайти інші перетворення, які правильно описують експериментальні факти і, зокрема, ведуть до постійності швидкості світла.

Ці нові перетворення дістали назву перетворень Лоренца. Їх можна одержати, виходячи із двох постулатів (принципів):

- принципу відносності;
- принципу постійності швидкості світла.

Перетворення Лоренца мають такий вигляд:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\frac{v}{c^2})x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.5)$$

або

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\frac{v}{c^2})x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8.6)$$

Якщо $v/c \ll 1$, то перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея. При малих швидкостях різниця між перетворення Лоренца і перетвореннями Галілея незначна і тому неточність перетворень Галілея тривалий час не була виявлена.

8.3. Наслідки із перетворень Лоренца

8.3.1. Відносність одночасності

Дві події, які відбулися у різних точках x_1 і x_2 системи координат, називаються одночасними, якщо вони відбуваються в один і той самий момент часу за годинником цієї системи координат.

У кожній із точок момент події фіксується за годинником, який перебуває у відповідній точці.

Будемо вважати, що події відбулися одночасно в нерухомій системі координат у момент часу t_0 .

У рухомій системі координат ці події відбулися у точках x'_1 і x'_2 , у момент часу t'_1 і t'_2 , при цьому t'_1 і t'_2 є показами годинників рухомої системи координат, розміщеними відповідно в точках x'_1 і

x'_2 цієї системи в ті моменти часу, коли в кожній із точок відбулася згадана подія.

Зв'язок між штрихованими і нештрихованими величинами задається перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned}x'_1 &= \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & x'_2 &= \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\t'_1 &= \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t'_2 &= \frac{t_0 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Оскільки події відбуваються у точках на осі x , то координати y , z в обидвох системах дорівнюють нулю. Із (8.7) видно, що в рухомій системі координат, ці події відбуваються не одночасно ($t'_2 \neq t'_1$), вони розділені інтервалом часу:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{8.8}$$

Отже, події, одночасні в одній системі координат, виявилися неодноразовими в іншій.

8.3.2. Відносність одночасності та причинність

Із формули (8.8) видно, що при $x_1 > x_2$ у системі координат, яка рухається у напрямку додатних значень по осі x ($v > 0$), має місце нерівність $t'_2 > t'_1$, а у системі координат, що рухається у протилежному напрямку ($v < 0$), $t'_2 < t'_1$. Отже, послідовність одних і тих самих подій у різних системах координат різна. Постає запитання: чи не може статися так, що в одній системі координат причина випереджує наслідок, а в іншій, навпаки, наслідок випереджує причину?

Зрозуміло, що така ситуація не може бути допущена в теорії, яка визнає об'єктивну роль причинно-наслідкового зв'язку у світі: від зміни точки зору на події наслідок і причина не можуть мінятися місцями.

Щоб причинно-наслідковий зв'язок мав об'єктивний характер і не залежав від системи координат, у якій він розглядається, необхідно, щоби ніякі матеріальні події, які відбуваються у різних точках, не могли б передаватися із швидкістю, яка є більшою від швидкості світла.

Для доказу цього розглянемо дві події у нерухомій системі координат. Нехай подія у т. x_1 , що відбулася у момент часу t_1 , буде причиною події в точці $x_2 > x_1$, що відбулася у момент часу $t_2 > t_1$. Швидкість передачі “впливу” від точки x_1 до точки x_2 позначимо $v_{вл}$. Очевидно, за визначенням швидкості, маємо:

$$\frac{x_2 - x_1}{v_{вл}} = t_2 - t_1 \quad (8.9)$$

В рухомій системі координат ці події відбулися у деяких точках x'_1 і x'_2 в моменти t'_1 і t'_2 . Але

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \left(\frac{v}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v \cdot v_{вл}}{c^2}\right). \quad (8.10)$$

Якщо

$$1 - \frac{v \cdot v_{вл}}{c^2} < 0,$$

то в рухомій системі координат наслідок настає швидше, ніж причина. Але це неможливо. Тому завжди повинна виконуватися умова:

$$1 - \frac{v \cdot v_{вл}}{c^2} > 0, \quad \text{або} \quad v_{вл} < \frac{c}{v} \cdot c. \quad (8.11)$$

Так як перетворення Лоренца допускають для швидкості v значення, як завгодно близькі до швидкості світла, але не більші від її, то вимога (8.11) має бути записана так:

$$v_{вл} \leq c. \quad (8.12)$$

Отже, передача фізичного впливу із однієї точки в іншу не може відбуватися із швидкістю більшою, ніж швидкість світла. При цій умові причинний зв'язок подій має абсолютний характер: не

існує системи координат, у якій причина і наслідок міняються місцями.

8.3.3. Інваріантність інтервалу

Інваріантами перетворень Галілея є довжина тіл і проміжок часу між подіями. Тому поняття довжини й проміжку часу відіграють таку велику роль у класичній фізиці.

Але ні довжина тіл, ні проміжок часу між подіями не є інваріантами перетворень Лоренца. Це означає, що вони залежать від системи координат. Покажемо, як знайти просторово-часовий інтервал, який є інваріантом до перетворень Лоренца.

Нехай події відбулися в точці x_1, y_1, z_1 у момент t_1 і в точці x_2, y_2, z_2 у момент t_2 . Інтервалом між цими подіями, або, як прийнято говорити скорочено, інтервалом між точками x_1, y_1, z_1, t_1 і x_2, y_2, z_2, t_2 називається величина S , квадрат якої визначається формулою:

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (8.13)$$

Ця величина має в усіх системах координат одне і те ж значення, тобто є інваріантом перетворень Лоренца.

Щоб у цьому переконатися, запишемо таку систему рівнянь, використавши перетворення Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x_1 &= \frac{x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & y_2 - y_1 &= y'_2 - y'_1, & z_2 - z_1 &= z'_2 - z'_1, \\ t_2 - t_1 &= \frac{(t'_2 - t'_1) + \left(\frac{v}{c^2}\right)(x'_2 - x'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Підставимо вирази (8.14) у рівняння (8.13), у результаті:

$$\begin{aligned} S^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = \\ &= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = S'^2. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Рівняння (8.15) доводить, що квадрат інтервалу є інваріантом:

$$S^2 = S'^2 = \text{inv}. \quad (8.16)$$

8.3.4. Відносність довжини

Довжиною рухомого стержня називають віддаль між точками нерухомої системи координат, з якими збігаються початок і кінець рухомого стержня у даний момент часу за годинником нерухомої системи координат.

Отже, кінці рухомого стержня фіксуються одночасно в нерухомій системі координат. Годинники рухомої системи координат, які збігаються з кінцями стержня у моменти їх фіксації, будуть показувати різний час, тобто фіксація кінців відбувається не одночасно в рухомій системі координат. Це приводить до того, що довжина стержня не є інваріантом перетворень Лоренца і має різні значення у різних системах координат.

Нехай стержень довжиною l нерухомий у штрихованій системі координат, розміщений вздовж осі x' .

Зауважуємо, що коли говорять про тіло певної довжини, то мається на увазі довжина нерухомого тіла. Координати кінців стержня, що розглядається позначимо через x'_1 і x'_2 , при цьому, за означенням,

$$x'_2 - x'_1 = l.$$

Величина l написана тут без штриха, тому що вона означає довжину стержня в цій системі координати, у якій він нерухомий, тобто довжину нерухомого стержня.

Зафіксуємо положення кінців стержня, який рухається із швидкістю v в нештрихованій системі координат, у момент t_0 .

Виходячи із перетворень Лоренца, можна записати:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.17)$$

$$l = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.18)$$

де $l' = x_2 - x_1$ – довжина рухомого стержня.

$$\text{Або} \quad l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (8.19)$$

Отже, довжина рухомого стержня, розміщеного в напрямку руху, менша від довжини нерухомого. Розміри тіл в напрямку, перпендикулярному до відносної швидкості руху, не змінюються.

8.3.5. Сповільнення ходу рухомих годинників

Нехай в т. x_0' рухомої системи координат відбуваються послідовно дві події у моменти t_1' і t_2' .

У нерухомій нештрихованій системі координат ці події відбуваються у різних точках у моменти t_1 і t_2 . Інтервал часу між цими подіями в рухомій системі координат дорівнює $\Delta t' = t_2' - t_1'$, а в нерухомій – $\Delta t = t_2 - t_1$.

На основі перетворень Лоренца маємо:

$$t_1 = \frac{t_1' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.20)$$

Тоді:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.21)$$

Отже, інтервал часу між подіями, виміряний рухомими годинниками,

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (8.22)$$

менший, ніж інтервал часу Δt , між тими ж подіями, виміряний нерухомими годинниками.

Це означає, що темп ходу рухомих годинників є сповільнений відносно темпу нерухомих годинників.

8.3.6. Додавання швидкостей і перетворення прискорень

А. Додавання швидкостей

Нехай у рухомій системі координат рух матеріальної точки задано функціями:

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (8.23)$$

а в нерухомій системі – функціями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (8.24)$$

які знаходяться із перетворень Лоренца.

Установимо зв'язок між координатами швидкості точки в рухомій і нерухомій системах координат:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (8.25)$$

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8.26)$$

Із перетворень Лоренца маємо:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & dy &= dy' = dz = dz' \\ dt &= \frac{dt' + (v/c^2) dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt' \frac{1 + v u'_x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Підставляючи значення диференціалів із (8.27) у вирази (8.26) і врахувавши (8.25), знаходимо:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_y}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_z}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}. \quad (8.28)$$

Вирази (8.28) і є шуканими формулами додавання швидкостей у теорії відносності.

Із формул (8.28) випливає, що швидкість світла стала, і додавання швидкостей ніколи не приводить до швидкості, яка більша від швидкості світла. Покажемо це. Нехай $u'_y = u'_z = 0$, $u'_x = c$, тоді:

$$u_x = \frac{c + v}{1 + \frac{v \cdot c}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (8.29)$$

Б. Перетворення прискорень

Нехай у штрихованій системі координат матеріальна точка має прискорення, компоненти якого a'_x , a'_y , a'_z , але швидкість її в цей момент дорівнює нулю. Отже в штрихованій системі координат рух точки характеризується наступними формулами:

$$\frac{du'_x}{dt'} = a'_x, \quad \frac{du'_y}{dt'} = a'_y, \quad \frac{du'_z}{dt'} = a'_z, \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0. \quad (8.30)$$

Знайдемо рух точки в нештрихованій системі координат. Швидкість знайдемо за формулами (8.28):

$$u_x = v, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (8.31)$$

Прискорення у нештрихованій системі координат дорівнює:

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, \quad a_y = \frac{du_y}{dt}, \quad a_z = \frac{du_z}{dt} \quad (8.32)$$

Величини dt , du_x , du_y , du_z визначаються за формулами (8.28) і (8.27), при цьому швидкості u'_x , u'_y , u'_z можна вважати рівними нулю лише після обчислення диференціалу.

Наприклад, для du_x маємо:

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{du'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} - \frac{(u'_x + v)(v/c^2)du'_y}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} = \frac{du'_x}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) = \\ &= \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} du'_x. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням (8.27) знаходимо:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} \frac{du'_x}{dt'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} a'_x. \quad (8.33)$$

Аналогічно обчислюють диференціали du_y і du_z .

Тоді одержуємо наступні формули перетворення прискорення:

$$a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2} a'_x, a_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} a'_y, a_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} a'_z. \quad (8.34)$$

Точка при цьому рухається в нештрихованій системі із швидкістю v . Тому формули (8.34) означають таке. З рухомою матеріальною точкою можна зв'язати інерціальні систему координат, у якій вона в даний момент нерухома. Така система координат називається *супроводжуючою*. Якщо в цій системі координат точка рухається прискорено, то і в будь-якій іншій системі координат вона буде рухатися з прискоренням, але це прискорення буде іншим, проте завжди меншим.

Компонента прискорення вздовж руху зменшується пропорційно до множника $\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}$, де v – швидкість частинки в тій системі координат, у якій її прискорення визначається.

Поперечна складова прискорення, яка перпендикулярна до швидкості частинки, змінюється менше. Її зменшення пропорційне множнику $\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

8.4. Релятивістська динаміка

8.4.1. Маса, імпульс, енергія в СТВ

А. Маса

Із принципу відносності випливає, що математичний запис будь-якого закону фізики має бути однаковий у всіх інерціальних системах відліку. Це означає, що рівняння, які описують яке-небудь явище в системі відліку K' , виводять з рівнянь, які описують те саме явище в системі відліку K простою заміною в останніх усіх нештрихованих величин, тобто виміряних в системі K , на штриховані, тобто виміряні у системі K' . Цю умову називають умовою інваріантності рівнянь фізичних законів до перетворень Лоренца.

Основний закон класичної динаміки Ньютона для матеріальної точки має вигляд:

$$\mathbf{m} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{m} \vec{v}) = \vec{F}, \quad (8.35)$$

у якому масу точки $\mathbf{m}$ вважають сталою і однаковою в усіх інерціальних системах відліку, є неінваріантним відносно перетворень Лоренца. Тому цей закон не може бути основою релятивістської динаміки.

Ейнштейн показав, що маса того самого тіла неоднакова у двох інерціальних системах відліку, які рухаються одна відносно одної. Це пов'язано з тим, що маса тіла залежить від значення швидкості v руху тіла відносно інерціальної системи відліку:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.36)$$

де m_0 – маса цього тіла при $v = 0$, тобто виміряна в інерціальній системі відліку, відносно якої це тіло нерухоме.

Масу m_0 називають масою спокою тіла, а масу m – масою рухомого тіла, або релятивістською масою.

Залежність (8.36) можна пояснити, виходячи з припущення про те, що в релятивістській механіці виконується закон збереження імпульсу: при будь-яких процесах, що відбуваються у замкнутій системі, її повний (сумарний) імпульс не змінюється.

Із закону збереження імпульсу випливає закон збереження маси: при будь-яких процесах, які відбуваються в замкнутій системі, її повна релятивістська маса не змінюється.

Б. Релятивістський вираз для імпульсу

Як ми вже не один раз згадували, рівняння Ньютона інваріантні до перетворень Галілея. Але вони є неінваріантні до перетворень Лоренца.

Один із основних законів механіки – закон збереження імпульсу – у ньютонівському формулюванні є неінваріантним до перетворень Лоренца.

Знайдемо такий вираз для імпульсу, щоб закон збереження імпульсу був інваріантним до перетворень Лоренца при будь-яких за величиною швидкостях. При цьому будемо виходити з того, що при малих швидкостях ($v \ll c$) має місце ньютонівський вираз для імпульсу:

$$\vec{p} = m \vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (8.37)$$

Вище було показано, що інтервал S_{12} є інваріантом при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої ($S_{12} = S'_{12}$). При цьому проміжок часу t_{12} і віддаль l_{12} не є інваріантами. Відповідно, кожен із доданків, що утворюють величину

$$S^2_{12} = c^2 t^2_{12} - l^2_{12} \quad (8.38)$$

змінюються при переході від однієї системи до іншої, а сама величина S^2_{12} залишається постійною.

Уведемо поняття власного часу тіла, який визначається як час, відрахований за годинником, що рухається разом з тілом. Власний час будемо позначати буквою τ . Проміжок власного часу $\Delta\tau$ пов'язаний з проміжком Δt , відрахованим за годинником системи, відносно якої тіло рухається із швидкістю v , співвідношенням:

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (8.39)$$

Перетворимо (8.39) так:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - (v \Delta t)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2}, \quad (8.40)$$

де $\Delta l = v \Delta t$ – шлях, який проходить тіло за час Δt .

Порівнявши вирази (8.39) і (8.38), одержуємо, що

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \Delta S, \quad (8.41)$$

де ΔS – інтервал між подіями, розділеними проміжком часу Δt .

Із (8.41) випливає, що проміжок власного часу пропорційний інтервалу між подіями. Але інтервал ΔS між подіями є інваріантом, тобто однаковим в усіх системах відліку. Відповідно, власний час також є інваріантом, тобто не залежить від того, в якій системі відліку спостерігається рух даного тіла.

При $v_0 \ll c$ власний час частинки $d\tau$ практично не відрізняється від часу dt , відрхованого за годинником системи, у якій розглядається рух частинки. Тому вираз (8.37) можна переписати у вигляді:

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \quad (8.42)$$

де $d\tau$ – власний час частинки, для якої обчислюється імпульс.

Нагадаємо, що $d\vec{r}$ є переміщенням частинки в тій системі відліку, у якій визначається $\vec{p}$, проміжок же часу $d\tau$ відлічується за годинником, що рухається разом з частинкою.

Знайдемо вираз для імпульсу через час t тієї системи відліку, відносно якої спостерігається рух тіл. Відомо, що $d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$,

де v – швидкість тіла. Тоді (8.42) перепишеться так:

$$\vec{p} = \frac{m d\vec{r}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.43)$$

Маса, яка входить у формулу (8.43), є інваріантною і незалежною від швидкості тіла величиною.

Із рівняння (8.43) випливає, що залежність імпульсу від швидкості є складнішою, ніж це випливає з ньютонівської механіки.

При $v_0 \ll c$ вираз (8.43) переходить в ньютонівський вираз:

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$

Вираз (8.43) допускає наступне формулювання: імпульс тіла, як і в ньютонівській механіці, дорівнює добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m_r \vec{v} . \quad (8.44)$$

Але маса тіла не є інваріантною величиною, а залежить від швидкості за законом:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (8.45)$$

При такому трактуванні інваріантну масу m називають масою спокою і її часто позначають через m_0 , а залежна від швидкості неінваріантна маса m_r називається релятивістською або масою руху.

В. Релятивістський вираз для енергії

Другий закон Ньютона говорить, що похідна імпульсу частинки по часу дорівнює діючій на частинку силі. Рівняння другого закону динаміки є інваріантним до перетворень Лоренца, якщо під імпульсом розуміють вираз (8.43):

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Відповідно, релятивістський вираз другого закону Ньютона має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F} . \quad (8.45)$$

Щоби знайти релятивістський вираз для енергії, помножимо рівняння (8.45) на переміщення частинки $d\vec{S} = \vec{v} dt$. Одержуємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \vec{v} dt = \vec{F} d\vec{S} . \quad (8.46)$$

Права частина співвідношення (8.46) дає роботу dA , виконану над частинкою за час dt . Із закону збереження енергії випливає, що робота, виконана над частинкою, повинна дорівнювати приросту енергії частинки dE . Тому можна записати:

$$dE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \bar{v} dt = \bar{v} d \left(\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (8.47)$$

Перетворимо вираз (8.47), взявши до уваги, що $v dv = d(v^2/2)$.

Тоді

$$\begin{aligned} dE &= \bar{v} \left\{ \frac{m d\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{m\bar{v}(v dv/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right\} = \frac{m d(v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2 d(v^2/c^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \\ &= d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \end{aligned} \quad (8.48)$$

Проінтегрувавши рівняння (8.48), одержуємо:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \text{const}. \quad (8.49)$$

Якщо покласти в рівнянні (8.49) константу (*const*), рівну нулю, то з виразів для енергії і імпульсу можна утворити інваріант, тобто величину, незмінну до перетворень Лоренца.

Тому у відповідність з дослідом покладемо *const*=0. Тоді вираз для енергії має вигляд:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (8.50)$$

У випадку, коли швидкість частинки v дорівнює нулю, то енергія приймає значення:

$$E_0 = mc^2. \quad (8.51)$$

Величина (8.51) називається енергією спокою частинки. Ця енергія, очевидно, є внутрішньою енергією частинки, не пов'язаної з рухом частинки як цілого. Формули (8.50) і (8.51) справедливі не тільки для елементарної частинки, але і для системи, яка складається

з багатьох частинок. В енергію спокою, як і в повну енергію (8.50), не входить потенціальна енергія тіла у зовнішньому силовому полі.

Кінетичну енергію частинки T визначаємо як різницю між E і E_0 :

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (8.52)$$

У випадку малих швидкостей ($v \ll c$) формулу (8.52) можна перетворити так:

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} mv^2, \quad (8.53)$$

тобто одержати класичний вираз для кінетичної енергії частинок.

Використавши формули енергії і імпульсу ($E_0 = mc^2$ і $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$), можна знайти релятивістську залежність між повною енергією тіла і його імпульсом:

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2}, \quad p^2 c^2 = m^2 v^2 c^2. \quad (8.54)$$

Віднімемо від першого рівняння друге:

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2 \right)$$

або

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} \left(1 - v^2/c^2 \right) = m_0^2 c^4. \quad (8.55)$$

Тоді:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2. \quad (8.56)$$

Або:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (8.57)$$

Маса спокою m_0 і швидкість світла у вакуумі c мають в усіх інерціальних системах відліку незмінні значення. Ці величини

інваріантні до перетворень Лоренца. Щодо енергії E і імпульсу $\vec{p}$, то ці величини змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до другої. Але різниця $E^2 - p^2 c^2$ зберігається в усіх системах відліку (8.56). Отже, величина

$$E^2 - p^2 c^2 \quad (8.58)$$

є інваріантом до перетворень Лоренца.

Із формули (8.57) випливає, що релятивістську енергію мають і такі тіла, які не мають маси спокою ($m_0 = 0$). Зараз відомо дві такі частинки: фотон і нейтрино. Енергія цих частинок дорівнює:

$$E = p \cdot c, \quad (8.59)$$

а імпульс:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (8.60)$$

А це означає, що потік фотонів (світло), а також потік нейтрино повинні чинити тиск. Тиск світла був виміряний Лебедевим.

Із рівнянь:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{і} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{одержуємо:}$$

$$\vec{p} c^2 = \frac{m_0 c^2 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (8.61)$$

8.4.2. Основний закон релятивістської динаміки

Основне рівняння релятивістської механіки має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \right) = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{де} \quad \vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} = m \vec{v} \quad -$$

імпульс тіла в релятивістській механіці.

Як було показано вище, при зміні швидкості матеріальної точки зміна її кінетичної енергії і зміна маси пропорційні одна одній:

$$dT = c^2 dm. \quad (8.62)$$

Кінетична енергія точки, яка перебуває у стані спокою, дорівнює нулю ($v=0$), а її маса дорівнює m_0 . Тому проінтегрувавши (8.62), одержуємо:

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2 \left[\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right]. \quad (8.63)$$

За формулою біному Ньютона:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c} \right)^4 + \dots \quad (8.64)$$

Якщо $v \ll c$, то як було показано вище:

$$T = m_0c^2 \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{m_0v^2}{2}. \quad (8.65)$$

Отже, при малих швидкостях руху матеріальної точки її кінетична енергія, обчислена за релятивістською формулою (8.63), збігається із звичайним виразом (8.65) цієї енергії у ньютонівській механіці.

Але при великих швидкостях руху кінетична енергія матеріальної точки $T = (m - m_0)c^2$ відрізняється від $\frac{m_0v^2}{2}$ і від $\frac{mv^2}{2}$.

Із виразу (8.63) випливає, що при наданні тілу кінетичної енергії T його маса збільшується на величину:

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{T}{c^2}. \quad (8.66)$$

Однак відомо, що при різних процесах, які відбуваються в природі, одні види енергії можуть перетворюватися на інші. Наприклад, кінетична енергія поступального руху тіла може перетворюватися у внутрішню енергію. Тому маса тіла має збільшуватися не тільки при збільшенні його кінетичної енергії, а й при будь-якому збільшенні його повної енергії незалежно від того, за рахунок якого конкретного виду енергії тіла це збільшення відбулося.

Отже, якщо повна енергія тіла (або системи тіл) збільшується на dT , то маса цього тіла зростає на величину

$$dm = \frac{dT}{c^2}. \quad (8.67)$$

Інтегруючи (8.67), знаходимо універсальне співвідношення між m і T :

$$T=mc^2, \quad (8.68)$$

де стала інтегрування дорівнює нулю, бо рівняння $T=mc^2+const$ при будь-якому значенні $const \neq 0$ буде неінваріантне до перетворень Лоренца, тобто не задовольняє перший принцип (постулат) теорії відносності.

Рівняння (8.68) виражає один із найважливіших законів природи – закон взаємозв'язку (пропорційності) маси й енергії: повна енергія системи дорівнює добутку її повної релятивістської маси на квадрат швидкості світла у вакуумі.

Повну енергію

$$T_0=m_0c^2 \quad (8.69)$$

тіла, нерухомого відносно системи відліку, називають енергією спокою тіла. Енергію спокою вільної частинки називають власною енергією.

Неважко зрозуміти, що енергія спокою T_0 твердого тіла або будь-якої іншої системи взаємодіючих частинок (наприклад, молекули, атома, атомного ядра тощо), які мають деяку міцність, не дорівнює сумі власних енергій m_0c^2 усіх частинок, що входить до складу цієї системи.

Для розчеплення такої системи на її складові частини (наприклад, ядра – на вільні протони і нейтрони; атома – на електрони і ядро тощо), треба виконати певну роботу A проти сил зчеплення між частинками. Тому на підставі закону збереження енергії:

$$\sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 = T_0 + A \quad \text{або} \quad T_0 = \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 - \Delta T_{zg}, \quad (8.70)$$

де $\Delta T_{zg} = A > 0$ – енергія зв'язку системи, яка визначає ступінь її міцності.

Відповідно маса спокою системи m_0 є менша від суми мас спокою усіх її частинок у вільному стані:

$$m_0 - \sum_{i=1}^n m_{0i} = -\frac{\Delta T_{zg}}{c^2} < 0, \quad (8.71)$$

Закон взаємозв'язку маси й енергії (8.68) був надійно підтверджений багаточисленними експериментами в ядерній фізиці.

Ні співвідношення (8.71), ні жоден із дослідних фактів не підтверджують можливості “переходу маси в енергію”. Можливість такого “переходу” повністю виключається законом взаємозв'язку маси й енергії, з якого випливає, що в замкнутій системі одночасно мають виконуватися і закон збереження енергії, і закон збереження маси.

Перетворення енергії системи з однієї форми в іншу супроводжується перетворенням її маси. Але маса не “переходить в енергію”, а перетворюється з однієї форми маси (наприклад, маси спокою) в іншу форму маси (наприклад, масу електромагнітного випромінювання).

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте постулати теорії відносності.
2. Запишіть формули перетворень Галілея.
3. Запишіть формули перетворень Лоренца. Чим вони відрізняються від перетворень Галілея?
4. У чому суть відносності одночасності? Поясніть це за допомогою формул.
5. У чому суть ефекту сповільнення часу?
6. Чому довжина відрізка не є інваріантом до перетворень Лоренца? Поясніть це.
7. Запишіть формулу додавання швидкостей у класичній механіці.
8. Запишіть формулу додавання швидкостей у релятивістській механіці.
9. Доведіть, що інтервал є інваріантом до перетворень Лоренца.
10. Запишіть формули перетворень прискорень у релятивістській механіці.
11. Яка існує залежність маси від швидкості?
12. Який час називають власним?

13. Запишіть формулу релятивістського імпульсу.
14. Виведіть формулу релятивістської енергії.
15. Виведіть формулу кінетичної енергії частинки в релятивістській механіці.
16. Який існує взаємозв'язок енергії і маси?
17. Що називають дефектом маси? Чому існує дефект маси?
18. Які межі застосування законів у класичній механіці?

ЛІТЕРАТУРА

1. Блашків В. С. Механіка. Тексти лекцій / В. С. Блашків, О. О. Даньків, Д. Д. Шуптар. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2009. 291 с.
2. Блашків В. С. Лабораторний практикум. Методичні рекомендації до лабораторного практикуму / В. С. Блашків, Р. М. Пелешак, М. Г. Станько, Д. Д. Шуптар. Дрогобич : РВВ ДДПУ, 2004. 111 с.
3. Бушок Г. Ф., Венгер Є. Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Київ : Вища школа, 2002. 375 с.
4. Гаркуша І. П. Загальний курс фізики. Збірник задач. Київ : Техніка, 2003. 560 с.
5. Дущенко В. П., кучерук І. М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Київ : Вища школа, 1993. 540 с.
6. Кучерук І. М. Загальний курс фізики. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. Київ : Техніка, 2006. – 536 с.
7. Фелінський Г. С. Загальна фізика / М-во освіти і науки України, Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка. Київ : Каравела, 2022. 656 с.
8. Фізичний практикум / за редакцією В. П. Дущенка. Київ : Вища школа, 1981. 248 с.
9. Чолпан П. П. Фізика. Вища школа. Київ. 2003. 576 с.
10. Яворський Б. М. Курс фізики / Б. М. Яворський, А. А. Детлаф, Л. В. Милковська. Київ : Вища школа, 1978. 468 с.

Електронне навчально-методичне видання

*Вірослав Блашків, Олеся Даньків,
Олег Кузик, Дионізій Шуптар*

Загальна фізика

МЕХАНІКА

Тексти лекцій

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Редактор
Ірина Невмержицька

Технічний редактор
Артимко Ірина

Здано до набору 25.01.2025 р. Формат 60x90/16. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 18,00. Зам. 14.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка.
(Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.