

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

В. Блашків, О. Даньків, О. Кузик, Д. Шуптар

**МЕХАНІКА.
МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА ТА
ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ.
ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ**

Т е к с т и л е к ц і й

Дрогобич, 2011

УДК Б31/634 (0775.8)

Б 68

Механіка. Молекулярна фізика та основи термодинаміки. Тексти лекцій / В. Блашків, О. Даньків, О. Кузик, Д. Шуптар. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ ім. І. Франка, 2011. – 377 с.

Навчально-методичний посібник **“Механіка. Молекулярна фізика та основи термодинаміки. Тексти лекцій”** написаний відповідно до програми навчальної дисципліни “Загальна фізика. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка” для підготовки фахівців ОКР “Бакалавр” напрямів підготовки “Технологічна освіта і “Професійна освіта”, затверджені вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

У посібнику подані тексти лекцій з основних розділів механіки, молекулярної фізики і термодинаміки, до кожного з яких підібрані питання для самоконтролю та задачі.

Розрахований на студентів, які вивчають механіку, молекулярну фізику і термодинаміку, та учнів, які цікавляться фізикою.

Бібліографія 20 назв

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 4 від 21 квітня 2011 р.)

Відповідальний за випуск: **Пелешак Роман Михайлович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

Редактор: **Невмержицька Ірина Михайлівна**

Рецензенти:

- **Павлик Богдан Васильович**, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри електроніки Львівського національного університету імені Івана Франка;
- **Бойчук Василь Іванович**, доктор фізико-математичних наук, професор завідувач кафедри теоретичної фізики і методики викладання фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

З М І С Т

Частина 1. Механіка	4
1. Кінематика матеріальної точки	4
2. Динаміка матеріальної точки	18
3. Сили в механіці	35
4. Робота й потужність	59
5. Механіка твердого тіла	75
6. Механіка рідини	92
7. Основи спеціальної теорії відносності (СТВ)	112
8. Коливання та хвилі	128
Частина 2. Молекулярна фізика і термодинаміка ...	164
1. Молекулярно-кінетична теорія ідеального газу	164
2. Явища переносу	196
3. Перше начало термодинаміки	207
4. Друге начало термодинаміки	233
5. Реальні гази	262
6. Рідини	293
7. Тверді тіла	317
8. Рівновага фаз і фазові переходи	350
Іменний покажчик	371
Предметний покажчик	372
Література	376

ЧАСТИНА 1. МЕХАНІКА

1. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1. Механіка матеріальної точки. Системи відліку. Вектори переміщення, швидкості та прискорення

1.1.1. Механіка матеріальної точки

Для побудови моделей механічних систем найважливішою абстракцією є поняття матеріальної точки. За *матеріальну точку* приймають матеріальне тіло, розміри якого дуже малі порівняно з віддаллю між тілами. Іншими словами, матеріальна точка – це тіло, яке не має розмірів, але має масу.

Тіла, різні частини яких стійко зберігають своє положення одна до одної, називаються *твердими*. Найменша довжина між двома точками називається віддаллю між точками, а відповідна лінія – прямою. *Абсолютно тверде тіло* – це тіло, віддаль між будь-якими точками якого є незмінною.

1.1.2. Системи відліку

Для опису руху матеріальної точки насамперед треба вибрати систему відліку, тобто координатну систему та годинник для відліку часу, яка зв'язана з певним реальним тілом, що умовно приймається за нерухоме.

З точки зору кінематики, всі системи відліку є рівноправними. При розв'язуванні практичних завдань намагаються вибирати таку систему, яка при розгляді даної задачі найвигідніша, тобто забезпечує найбільшу наочність та простоту обчислень.

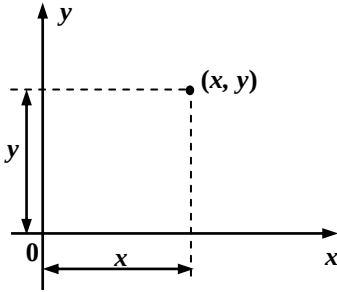
Але при розгляді динаміки руху матеріальної точки не всі системи відліку є рівноправними.

З величезної кількості можливих систем координат найпростішими і важливими, які найчастіше використовуються на практиці, є лише деякі:

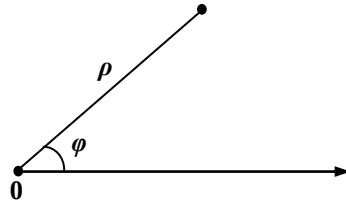
1) на площині:

1а) прямокутна декартова, у якій двом числам (x, y) , що задають положення точки, відповідають довжини відрізків x та y (мал.1.1);

1б) полярна, у якій двома числами (ρ, φ) , що задають положення точки, є довжина ρ та кут φ (мал.1.2);



мал. 1.1



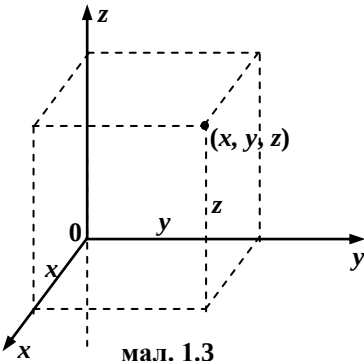
мал. 1.2

2) у просторі:

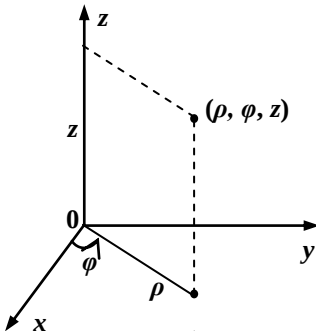
2а) прямокутна декартова, у якій трьом числам (x, y, z) , що задають положення точки, відповідають довжини відрізків x, y, z (мал. 1.3);

2б) циліндрична, у якій трьома числами (ρ, φ, z) , які задають положення точки, є довжина ρ , кут φ , довжина z (мал.1.4);

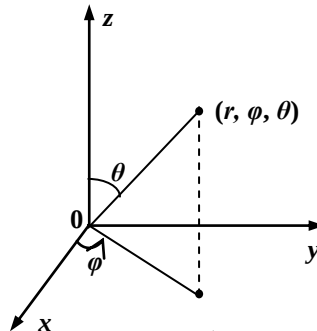
2в) сферична, у якій трьома числами (r, φ, θ) , які задають положення точки, є довжина r , кути φ та θ (мал. 1.5).



мал. 1.3



мал. 1.4



мал. 1.5

Числа, які визначають положення точки в деякій системі координат, називаються *координатами точки*. Формули, що пов'язують координати точки в одній системі координат з її координатами в іншій системі, називаються *перетвореннями координат*.

1.1.3. Способи аналітичного опису руху матеріальної точки

Спостерігаючи рух тіла ми зауважуємо, що його положення з часом змінюється відносно деяких інших тіл, які в цьому русі участі не беруть. Тому ми говоримо, що рух тіла є рухом відносним, а саме рухом відносно тіл $A, B, C, \dots$. Будь-який рух є відносним, немає іншого руху, ніж відносний.

У вибраній системі відліку в результаті спостереження ми встановлюємо положення рухомої точки в просторі для кожного моменту часу. Безліч точок простору, через які проходить матеріальна точка, утворюють лінію, яка називається *траєкторією руху*. За виглядом траєкторії у даній системі всі рухи можна поділити на прямолінійні і криволінійні. Вигляд траєкторії залежить від вибору системи відліку. Рух однієї і тієї ж точки в одній системі є прямолінійним, а в іншій – криволінійним.

Головне завдання кінематики полягає в тому, щоб у вибраній системі відліку описати рух точки аналітично, тобто за допомогою формул. Рух матеріальної точки буде визначено, якщо будуть знайдені координати точки як функції часу:

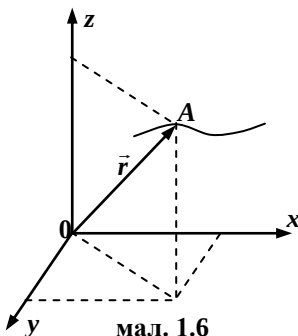
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1.1)$$

Положення точки A в просторі визначається у прямокутній системі координат заданням трьох координат x, y, z . При русі точки усі координати змінюються з часом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (1.2)$$

Функції (1.2), якщо вони відомі визначають положення точки в просторі у будь-який момент часу. Кожен вектор $\vec{r}$ в декартовій системі координат може бути представлений у вигляді суми трьох векторів, які спрямовані вздовж осей x, y, z (мал.1.6):

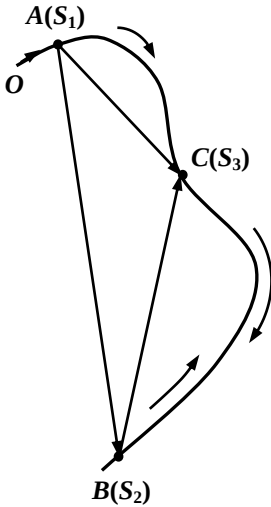
$$\vec{r} = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z, \quad (1.3)$$



де r_x, r_y, r_z – проекції вектора $\vec{r}$ на відповідні осі; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти), напрямлені вздовж осей x, y, z . Однак

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z, \quad \text{тому} \quad \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (1.4)$$

1.1.4. Вектори переміщення, швидкості та прискорення



мал. 1.7

Прямолінійний відрізок (мал.1.7), проведений з точки A в точку B , називають переміщенням $\overline{AB}$. Переміщенням точки є вектор $\overline{AB}$, який має довжину $|\overline{AB}|$ і напрям від A до B .

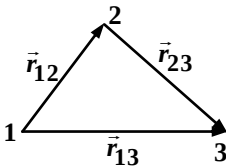
Якщо ж точка перейде по траєкторії від точки B до C , то переміщення буде $\overline{BC}$ (мал.1.7). Переміщення точки від A до C відображається вектором $\overline{AC}$. З мал.1.7 бачимо, що

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}, \quad (1.5)$$

тобто переміщення додаються геометрично.

За таким правилом додаються усі вектори (мал.1.8):

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} \quad (1.6)$$

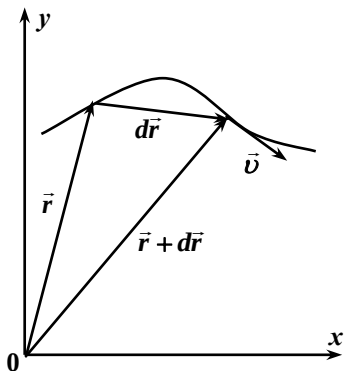


мал. 1.8

У фізиці для характеристики руху матеріальної точки використовують величину, яка дістала назву швидкості. Під швидкістю розуміють векторну величину, яка характеризує не тільки швидкість переміщення частинки траєкторією, але і напрям, у якому рухається частинка в кожний момент часу.

Розглянемо рух частинки, поданий на мал.1.9, і розіб'ємо траєкторію руху точки на нескінченно малі ділянки dS . Кожну таку ділянку співставимо з нескінченно малим переміщенням $d\vec{r}$.

Розділивши це переміщення $d\vec{r}$ на відповідний проміжок часу dt , одержимо миттєву швидкість частинки в даній точці траєкторії:



мал. 1.9

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.7)$$

Отже, швидкість є похідною від радіус-вектора частинки по часу. Переміщення $d\vec{r}$ співпадає з нескінченно малим елементом траєкторії $d\vec{S}$. Тому вектор швидкості $\vec{v}$ завжди направлений по дотичній до траєкторії.

Відношення $\frac{d\vec{r}}{dt}$ дає середнє значення швидкості за час Δt .

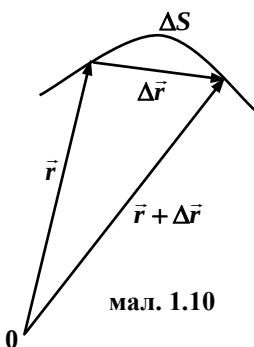
Якщо ж $\Delta t \rightarrow 0$, то

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.8)$$

Знайдемо модуль швидкості v :

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

З мал.1.10 бачимо, що шлях ΔS відрізняється за величиною від модуля переміщення $|\Delta \vec{r}|$. Однак, якщо розглядати відрізки шляху ΔS і переміщення $\Delta \vec{r}$, які відповідають все меншим проміжкам часу Δt , то різниця між ΔS та $|\Delta \vec{r}|$ буде зменшуватися і границя їх відношення буде:



мал. 1.10

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{|\Delta \vec{r}|} = 1. \quad (1.10)$$

Взявши до уваги (1.10), можна записати, що

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (1.11)$$

Відповідно до (1.8) елементарне переміщення частинки дорівнює:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \text{або} \quad dS = v dt. \quad (1.12)$$

Вектор швидкості, як і будь-який вектор, можна представити у вигляді:

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z. \quad (1.13)$$

А його модуль:

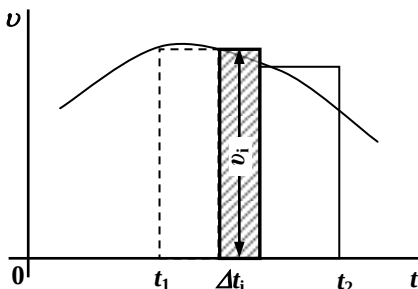
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (1.14)$$

Розглянемо, як, знаючи величину швидкості в кожний момент часу, обчислити шлях, що проходить частинка від моменту часу t_1 до моменту t_2 . Розіб'ємо проміжок часу $t_1 - t_2$ на N малих, не обов'язково однакових, проміжків: $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_N$. Весь шлях S можна подати як суму шляхів $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_N$, які пройдені за відповідні проміжки часу Δt_i (мал.1.11):

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_N = \sum_{i=1}^N \Delta S_i. \quad (1.15)$$

Кожен з елементарних шляхів ΔS_i можна записати у вигляді:

$$\Delta S_i \approx v_i \Delta t_i.$$



мал. 1.11

Відповідно, весь шлях

$$S \approx \sum_{i=1}^N \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.16)$$

Добуток $v_i \Delta t_i$ чисельно дорівнює площі заштрихованої (i -тої) смужки. Сума таких добутків буде дорівнювати площі фігури, обмеженої віссю t , прямими $t = t_1$ і $t = t_2$, а також ламаною лінією, утвореною

верхніми краями всіх подібних смужок. При $\Delta t_i \rightarrow 0$ ширина всіх смужок зменшується і ламана лінія в границі переходить у криву залежності $v = v(t)$. Тоді

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N v_i \Delta t_i. \quad (1.17)$$

Вираз (1.17) є визначенням інтегралом від функції $v(t)$, взятим у межах від t_1 до t_2 . Отже, шлях, пройдений частинкою за проміжок часу від t_1 до t_2 , дорівнює

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (1.18)$$

Швидкість частинки $\vec{v}$ може змінюватися з часом як за величиною, так і за напрямом. Швидкість зміни вектора $\vec{v}$, як і швидкість зміни довільної функції від часу, визначається похідною вектора $\vec{v}$ по часу t . Позначають цю похідну так:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.19)$$

Величина, що визначається формулою (1.19), називається *прискоренням частинки*. Для прямолінійного рівноприскореного руху матеріальної точки прискорення

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z. \quad (1.20)$$

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

то

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}. \quad (1.22)$$

Рух називається *рівномірним*, якщо матеріальна точка за однакові, довільно вибрані проміжки часу проходить однакові шляхи.

Рух називають *нерівномірним*, якщо шляхи, які пройшла точка за довільні однакові проміжки часу, будуть неоднаковими.

Рівноприскорений рух – це такий рух, при якому швидкість матеріальної точки за довільні однакові проміжки часу змінюється на однакову величину.

При рівномірному русі модуль швидкості матеріальної точки не змінюється ($v = \text{const}$).

Розглянемо рух матеріальної точки довільною криволінійною траєкторією. Увівши поняття орта дотичної до траєкторії $\vec{e}$, який має такий самий напрям, що і швидкість $\vec{v}$, можемо записати:

$$\vec{v} = v\vec{\tau} . \quad (1.23)$$

Підставивши (1.23) у (1.19), одержуємо:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n . \quad (1.24)$$

У цьому випадку вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді суми двох складових. Одна з них має напрям $\vec{\tau}$, тобто напрямлена по дотичній до траєкторії і тому позначається $\vec{a}_{\tau}$ та називається тангенціальним прискоренням. Вона дорівнює:

$$\vec{a}_{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} . \quad (1.25)$$

Друга складова, яка дорівнює $v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, напрямлена по нормалі до траєкторії і тому позначається $\vec{a}_n$ та називається нормальним прискоренням:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} . \quad (1.26)$$

Тангенціальне прискорення $\vec{a}_{\tau}$ характеризує зміну швидкості за величиною. Якщо швидкість за величиною не змінюється, то тангенціальне прискорення дорівнює нулю і $\vec{a} = \vec{a}_n$.

Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ характеризує зміну швидкості за напрямом. Якщо напрям швидкості не змінюється, то рух точки відбувається прямолінійною траєкторією. Тоді нормальне прискорення дорівнює нулю і $\vec{a} = \vec{a}_{\tau}$.

Відповідні обчислення похідної орта по часу дають таку кінцеву формулу для нормального прискорення:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{n} , \quad (1.27)$$

де $\vec{n}$ – орт нормалі до траєкторії, напрямлений в цю ж сторону, в яку повертається вектор $\vec{\tau}$ при русі точки по траєкторії; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Вектор прискорення при русі точки плоскою кривою задається наступним виразом:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (1.28)$$

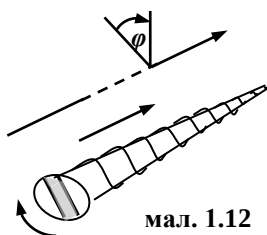
А модуль вектора $\vec{a}$ в цьому випадку дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (1.29)$$

1.2. Рух по колу. Кутові та лінійні характеристики руху

Поворот тіла на деякий кут φ можна описати у вигляді відрізка, довжина якого дорівнює φ , а напрям співпадає з віссю, навколо якої відбувається поворот.

Для того, щоб вказати, в яку сторону відбувається поворот навколо даної осі, пов'язують напрям повороту і напрям відрізка, яким його позначають, *правилом правого гвинта (свердлика)*. Формулюється це правило так: напрям відрізка повинен бути таким, щоб дивлячись вздовж нього, ми бачили поворот, що відбувається за годинниковою стрілкою (мал. 1.12).



мал. 1.12

Отже, повороту тіла можна приписати числове значення і напрям. Однак цього замало, щоб поворот можна було вважати вектором: потрібно, щоб таким методом зображувані повороти можна було додавати за правилом паралелограма.

Для поворотів довільної величини остання умова не завжди виконується. Відомо, що малі повороти можна розглядати як вектори. Їх записують у вигляді $\Delta\vec{\varphi}$ або $d\vec{\varphi}$.

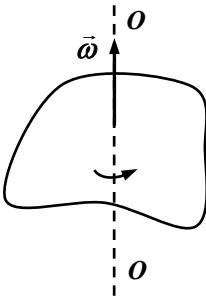
Такі вектори, напрям яких пов'язується з напрямом обертання (або обходу), називають *аксіальними* векторами.

Для опису обертового руху точки використовують такі величини, які одержали назву кутова швидкість і кутове прискорення.

Векторна величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.30)$$

називається *миттєвою кутовою швидкістю*. Кутова швидкість $\vec{\omega}$ напрямлена вздовж осі, навколо якої обертається тіло в сторону, яку визначає правило правого гвинта (свердлика), і є аксіальним вектором (мал. 1.13). Модуль кутової швидкості дорівнює $d\varphi/dt$. Обертання із сталою кутовою швидкістю називається *рівномірним*.



мал. 1.13

Якщо обертання є рівномірним, то $\omega = \varphi/t$, де φ – кут повороту за час t . При рівномірному обертанні ω показує, на який кут повертається тіло за одиницю часу. Рівномірне обертання характеризують періодом обертання T , під яким розуміють час, протягом якого тіло зробить один оберт, тобто повернеться на кут 2π . Оскільки для одного оберту $\Delta t = T$, $\Delta\varphi = 2\pi$, то кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.31)$$

або

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.32)$$

Знаючи період обертання T , можна обчислити кількість обертів ν за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (1.33)$$

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ може змінюватися як за рахунок зміни швидкості обертання ν навколо осі (в цьому випадку він зміниться за величиною), так і за рахунок повороту осі обертання в просторі (в цьому випадку $\vec{\omega}$ зміниться за напрямом).

Нехай за час Δt вектор $\vec{\omega}$ одержує приріст $\Delta\vec{\omega}$. Зміна вектора кутової швидкості з часом характеризується величиною

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (1.34)$$

яка називається *кутовим прискоренням*. Кутове прискорення є також аксіальним вектором.

При обертovому русі окремі точки тіла мають різні лінійні швидкості $\vec{v}$. Швидкість кожної точки неперервно змінює свій напрям. Величина ж швидкості $|\vec{v}|$ визначається кутовою швидкістю тіла $\vec{\omega}$ і віддаллю точки від осі обертання R .

Лінійна швидкість цієї точки знаходиться так (мал.1.14):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

$$\text{Отже, } v = \omega R. \quad (1.35)$$

Формула (1.35) пов'язує модулі лінійної і кутової швидкостей.

Знайдемо вираз, що пов'язує вектори лінійної $\vec{v}$ і кутової $\vec{\omega}$ швидкостей.

Положення точки A будемо визначати радіус-вектором $\vec{r}$, проведеним з вибраного на осі обертання початку координат O (мал.1.15). З мал.1.15 бачимо, що векторний добуток $[\vec{\omega} \vec{r}]$ співпадає за напрямом з вектором швидкості $\vec{v}$ і його модуль дорівнює $\omega r \sin \alpha = \omega R$, де $R = r \sin \alpha$.

Отже, можна записати:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (1.36)$$

Знайдемо зв'язок між лінійними і кутовими характеристиками руху матеріальної точки.

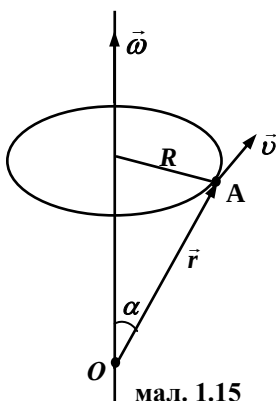
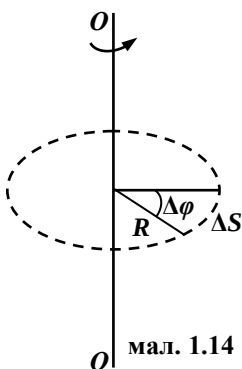
Нормальне прискорення точок обертового тіла

$$a_n = v^2/R = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \quad (1.37)$$

Модуль тангенціального прискорення при обертovому русі:

$$a_\tau = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t} \right| = R \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right| = R\beta, \quad (1.38)$$

де β – модуль вектора кутового прискорення.



Щоб одержати зв'язок між векторами $\vec{a}_\tau$, $\vec{\beta}$ і $\vec{r}$, потрібно у формулі (1.36) вектори $\vec{v}$ і $\vec{\omega}$ замінити на $\vec{a}_\tau$ і $\vec{\beta}$:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \vec{r}]. \quad (1.39)$$

Вектор нормального прискорення можна представити формулою:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \vec{v}], \quad (1.40)$$

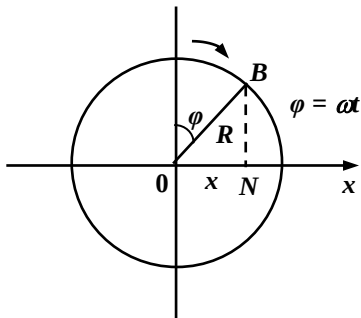
а повне прискорення:

$$\vec{a} = [\vec{\beta} \vec{R}] + [\vec{\omega} \vec{v}]. \quad (1.41)$$

1.3. Коливальний рух матеріальної точки

Коливальним називається рух, у якому матеріальна точка, багатократно відхиляючись від свого положення рівноваги, щоразу знову повертається до нього.

Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла точно повторюються через однакові проміжки часу, називають *періодичним*. Час, за який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом*.



мал. 1.16

Гармонічним називають коливальний рух, у якому зміщення матеріальної точки від положення рівноваги змінюється за законом синуса або косинуса.

Прикладом гармонічного коливання може бути рух проекції точки B , яка рівномірно рухається по колу, на довільну пряму в площині руху (мал.1.16). Якщо радіус кола R , а кутова швидкість точки ω , то координата її проекції:

$$x = R \sin \omega t. \quad (1.42)$$

Відстань точки, що коливається, від положення рівноваги позначають через x . Її називають *зміщенням*.

Найбільше значення зміщення точки в коливальному русі ($x = R = A$) називають *амплітудою*.

Період коливань T точки B , виходячи з періодичності функції синуса (або косинуса):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.43)$$

де ω – циклічна (або колова) частота гармонічних коливань.

Кількість коливань ν за секунду називають частотою коливань:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \quad (1.44)$$

Добуток ωt називають фазою. *Фаза* – це аргумент, який дає змогу визначати числове значення і напрям зміщення, тобто положення точки в коливальному русі в будь-який момент часу.

Рівняння гармонічного коливального руху в загальному вигляді:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.45)$$

де α – початкова фаза, тобто значення фази в момент часу $t = 0$.

Швидкість точки в гармонічному коливальному русі:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.46)$$

або

$$v = \omega A \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (1.47)$$

Прискорення точки в гармонічному коливальному русі:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.48)$$

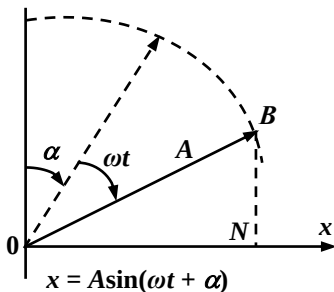
інакше

$$a = -\omega^2 x, \quad (1.49)$$

або

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi). \quad (1.50)$$

Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі є змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею за фазою, відповідно, $\pi/2$ і π .



мал. 1.17

Окрім аналітичного відображення гармонічного коливання у вигляді рівняння координати x точки B , його можна також відобразити у вигляді зміни проекції вектора амплітуди A , що рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω (мал.1.17). Ця проекція $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ чисельно дорівнює зміщенню точки B у коливальному русі.

Запитання для самоконтролю

1. Які ви знаєте способи опису руху матеріальної точки?
2. Що називають швидкістю рівномірного прямолінійного руху?
3. При яких умовах довжина вектора переміщення буде дорівнювати шляху, пройденому матеріальною точкою?
4. Що називають миттєвою швидкістю нерівномірного руху?
5. Що називають прискоренням рівномірного руху?
6. Який зв'язок існує між швидкістю і положенням точки на траєкторії при рівномірному русі?
7. Що називають тангенціальним прискоренням? Що воно характеризує при криволінійному русі? Як направлений вектор тангенціального прискорення?
8. Що називають нормальним прискоренням? Що воно характеризує? Куди він направлений?
9. Як модуль повного прискорення пов'язаний з модулями тангенціального та нормального прискорень?
10. Що називають кутовою швидкістю руху точки по колу?
11. Який існує зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю при рівномірному русі точки по колу?
12. Що називають кутовим прискоренням рівнозмінного руху по колу?
13. Який зв'язок існує між тангенціальним прискоренням a_t і кутовим прискоренням β ?
14. Як записується закон рівнозмінного руху точки по колу через кутові величини?
15. Запишіть формулу зв'язку між векторами $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$.
16. Запишіть формулу зв'язку між векторами $\vec{a}_n$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$.
17. Який рух називають коливальним?
18. Запишіть формули зміщення матеріальної точки, швидкості та прискорення при коливальному русі.
19. Тіло рухається рівноприскорено без початкової швидкості. До кінця п'ятої секунди його швидкість дорівнює 10 м/с . Який шлях тіло пройшло за п'яту секунду? *Відповідь: 9 м.*
20. Скільки часу вільно падало тіло, якщо за останню секунду воно пройшло таку ж віддадь, як і за весь попередній час? *Відповідь: 3,4 с.*
21. Два тіла кинуті одночасно одне одному назустріч. Початкова швидкість цих тіл однакова і дорівнює 40 м/с . Одне тіло рухається вертикально вгору, інше – вертикально вниз із точки найвищого підняття першого тіла. На якій висоті від поверхні землі і через який час ці тіла зустрінуться? *Відповідь: 35,1 м; 1 с.*

2. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1. Перший закон Ньютона

Динаміка вивчає рух тіл у зв'язку з причинами, які зумовлюють той чи інший характер руху. *Практичні завдання динаміки зводяться до визначення прискорення руху за даними діючими силами або до знаходження діючих сил за змінами руху, який відбувається під дією цих сил.*

В основі так званої класичної механіки лежать три закони, які сформулював Ньютон у 1687 р. Закони Ньютона стали наслідком узагальнення величезної кількості дослідних фактів.

Ньютонівська механіка досягла протягом двох століть таких великих успіхів, що вважалося, щоб пояснити будь-яке явище його потрібно звести до механічного процесу, який підлягає законам Ньютона.

Але з розвитком науки виявилися нові факти, які не вкладалися у рамки класичної механіки. Ці факти одержали своє пояснення у нових теоріях – спеціальній теорії відносності (СТВ) і квантовій механіці.

У 20-их роках XIX століття виникла квантова механіка в результаті дослідження фізики атома. З рівнянь квантової механіки в граничному випадку (для великих мас порівняно з масами атомів) одержуються рівняння класичної механіки. *Розвиток науки не відкинув класичну механіку, а лише вказав на її обмежене застосування.*

Перший закон Ньютона формулюється так: будь-яке тіло перебуває у стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху, доки дія зі сторони інших тіл не змусить його змінити цей стан.

Цей закон виконується не в кожній системі відліку. Система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називається *інерціальною*. Сам закон іноді називають *законом інерції*.

Властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називають *інертністю*. *Інертність* – властивість матерії зберігати швидкість свого руху, перебуваючи в русі. Саме це явище збереження швидкості руху або стану спокою у випадку зрівноваження зовнішніх дій на тіло називають *інерцією*. З першого

закону Ньютона впливає, що природним станом матерії є стан руху, а сила взаємодії є лише причиною зміни швидкості руху – прискорення.

Система відліку, в якій перший закон Ньютона не виконується, називається *неінерціальною системою відліку*.

Будь-яка система відліку, яка рухається відносно деякої інерціальної системи прямолінійно та рівномірно ($\vec{v} = \text{const}$), є також інерціальною. Дослідним шляхом встановлено, що система відліку, центр якої співпадає з Сонцем, а осі спрямовані на відповідні зорі, є інерціальною.

2.2. Маса та імпульс тіла

Дія на дане тіло інших тіл викликає зміну його швидкості, тобто надає даному тілу прискорення. Дослід показує, що однакова дія надає різним тілам різні за величиною прискорення.

Як було сказано вище, властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називається *інертністю*. Кількісною характеристикою інертності є величина, яка називається *масою тіла*.

Найзагальнішими проявами маси тіл є дві властивості: *гравітація* – властивість тіл притягувати до себе інші тіла і притягуватися ними та згадана вже *інерція* тіл. Гравітація та інерція – властивості, притаманні всім видам матерії.

Численні досліди, проведені Ньютоном, а також Етвешем, показали, що для будь-яких двох тіл відношення мас тяжіння дорівнює відношенню їх інертних мас. Через те у фізиці не розрізняють числових значень маси тяжіння й інертної маси.

Систему тіл (частинок, матеріальних точок), які взаємодіють тільки між собою і не взаємодіють з іншими тілами, називають замкнутою системою.

Якщо примусити ці частинки взаємодіяти (через зіткнення одна з одною), то їх швидкості одержать приріст $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$. Результати досліду показують, що ці прирости завжди мають протилежні напрями, тобто відрізняються знаком. Відношення ж модулів

приростів швидкостей не залежить від способу та інтенсивності взаємодії даних двох тіл. Ця взаємодія дорівнює оберненому відношенню мас тіл, що взаємодіють:

$$\left| \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta \vec{v}_2} \right| = \frac{m_2}{m_1}. \quad (2.1)$$

Тіло з великою масою, тобто інертніше тіло зазнає меншої зміни швидкості.

Взявши до уваги напрями векторів $\Delta \vec{v}_1$ і $\Delta \vec{v}_2$, запишемо:

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2. \quad (2.2)$$

У ньютонівській механіці маса тіла вважається сталою величиною, яка не залежить від швидкості тіла. Тому (2.2) перепишемо так:

$$\Delta(m_1 \vec{v}_1) = -\Delta(m_2 \vec{v}_2). \quad (2.3)$$

Добуток маси тіла на його швидкість називають імпульсом тіла. Позначають імпульс буквою $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (2.4)$$

Тоді (2.3) можна записати як

$$\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2 \quad \text{або} \quad \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0. \quad (2.5)$$

Рівність нулю приросту величини означає, що сама величина залишається сталою. Тому з (2.5) можна зробити висновок, що повний імпульс замкнутої системи, яка складається з двох взаємодіючих тіл, залишається сталим:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}. \quad (2.6)$$

2.3. Другий закон Ньютона

Другий закон Ньютона в загальному вигляді формулюється так: зміна механічного імпульсу тіла пропорційна прикладеній силі і відбувається у напрямі діючої сили:

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.7)$$

де $m \vec{v} = \vec{p}$ – імпульс тіла, $\vec{F}$ – результуюча зовнішня сила.

Рівняння (2.7) можна записати у вигляді:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \quad (2.8)$$

звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від величини прикладеної сили, але і від часу її дії. Добуток сили на час її дії називають *імпульсом сили*.

Вирази (2.7) і (2.8) називають рівняннями динаміки матеріальної точки.

Якщо $m = \text{const}$, то другий закон Ньютона, відповідно до (2.7), можна записати ще так:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.9)$$

У широкому розумінні силами називаються взаємодії тіл, у результаті яких тіла одержують прискорення або деформуються, або ж має місце одне і друге одночасно.

При розв'язуванні задач про рух тіл сталої маси спочатку складають рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.10)$$

а потім записують його у проекціях на координатні осі:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_z. \quad (2.11)$$

Розглянемо деякі наслідки, які випливають з другого закону Ньютона:

1. Другий закон Ньютона стосується, точно кажучи, матеріальної точки, а не тіла взагалі, оскільки тіло може обертатися і тоді різні його точки будуть мати різні прискорення, або у випадку лише поступального руху всього тіла.
2. Дослід показує, що постійна сила викликає постійне прискорення. Якщо сила з часом змінюється, то величини $\vec{a}$ та $\vec{F}$ мають зміст миттєвих значень.
3. Відомо, що прискорення – величина векторна. Тому сила також є векторною величиною.

4. Якщо на матеріальну точку масою m одночасно діє декілька незалежних між собою сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, то повне прискорення точки дорівнює:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{m}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.12)$$

Отже, одночасна дія на матеріальну точку декількох сил еквівалентна дії однієї сили (рівнодійної сили). Рівнодійна сила дорівнює геометричній сумі діючих сил:

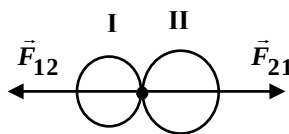
$$m\vec{a} = \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.13)$$

де $\vec{a}$ – повне прискорення матеріальної точки, $\vec{F}$ – рівнодійна всіх сил. Рівняння (2.13) можна переписати ще так:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2.13')$$

2.4. Третій закон Ньютона

Ньютон сформулював *третій закон динаміки* так: *дії завжди відповідає рівна і протилежна протидія*.



мал. 2.1

Це означає, що сили, з якими два тіла діють одне на одне, завжди рівні за модулями і направлені у протилежні сторони. Сили дії і протидії прикладені до різних тіл, тому вони не мають рівнодійної, та ще й такої, що дорівнює нулю (мал.2.1).

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.14)$$

Згідно з другим законом Ньютона, перше тіло набуває прискорення:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}, \text{ а друге: } \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}, \quad (2.15)$$

тоді

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2. \quad (2.16)$$

Отже, два тіла, що взаємодіють, одержують прискорення, спрямовані в протилежні сторони і обернено пропорційні до їх мас.

Згідно з третім законом Ньютона, дія не існує без протидії, через що жодна машина не може сама почати рухатися. Тому будь-яка машина є системою пар взаємодіючих тіл. Щоб машина почала рухатися, потрібна взаємодія її хоча б з одним зовнішнім відносно неї тілом.

Основою кількісного дослідження механічного руху є рівняння руху тіл. Вони дають можливість розв'язувати два типи задач. *Пряму, або основну, задачу динаміки – знаходити за заданими силами стан руху тіла (знаходити прискорення, швидкість, траєкторію тощо). Обернену задачу динаміки – знаходження сил за заданим рухом тіла (кінематичними та динамічними характеристиками руху).*

2.5. Закон збереження імпульсу

Розглянемо систему з n взаємодіючих частинок. Нехай, окрім внутрішніх сил $\vec{F}_{ik}$, на i -ту частинку діють зовнішні сили, результуюча яких дорівнює $\vec{F}_i$. Запишемо рівняння руху для всіх n частинок:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{1n} + \vec{F}_1 = \sum_{k=2}^n \vec{F}_{1k} + \vec{F}_1 \\ . &. \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots + \vec{F}_{ik} + \dots + \vec{F}_{in} + \vec{F}_i = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^n \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Додамо ці n рівнянь. Оскільки $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \mathbf{0}$ і т.д. у правих частинах рівнянь (2.17) залишаться тільки зовнішні сили. І ми отримаємо співвідношення:

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \quad (2.18)$$

Суму імпульсів частинок, які утворюють механічну систему, називають *імпульсом системи*. Позначимо його символом $\bar{p}$, тоді

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i. \quad (2.19)$$

Перепишемо рівняння (2.18) у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \bar{p} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F}, \quad (2.20)$$

де $\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил.

З рівняння (2.20) випливає закон збереження імпульсу: при відсутності зовнішніх сил ($\bar{F} = \mathbf{0}$), коли система замкнута, імпульс системи тіл $\bar{p}$ зберігається:

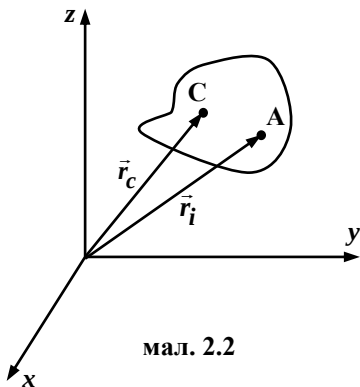
$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \bar{p} = \text{const}. \quad (2.21)$$

Імпульс залишається постійним і у випадку незамкненої системи при умові, що дія зовнішніх сил компенсується (їх рівнодійна дорівнює нулю). Коли сума зовнішніх сил не дорівнює нулю, але проекція цієї суми на деякий напрям дорівнює нулю, то зберігається складова імпульсу в цьому напрямі. Наприклад:

$$\frac{d}{dt} p_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} = \mathbf{0}, \quad \text{то} \quad p_x = \text{const}. \quad (2.22)$$

Імпульс системи частинок можна подати у вигляді добутку сумарної маси частинок на швидкість центра інерції (мас) системи. *Центром мас тіла (системи тіл)* називають точку перетину прямих, вздовж яких мають бути направлені сили, щоб тіло рухалося поступально.

Іншими словами, центром інерції (мас) системи матеріальних точок називається точка C , положення якої задається радіус-вектором $\bar{r}_C$ (мал.2.2):



мал. 2.2

$$\begin{aligned}\vec{r}_c &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \\ &= \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m},\end{aligned}\quad (2.23)$$

де m_i – маса i -тої частинки, $\vec{r}_i$ – радіус-вектор, який визначає положення цієї частинки, m – маса всієї системи.

Декартові координати центра інерції дорівнюють проекціям $\vec{r}_c$ на координатні осі:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \quad (2.24)$$

Зазначимо, що в однорідному полі сил тяжіння центр інерції співпадає з центром ваги системи.

Швидкість центра інерції знаходимо шляхом диференціювання радіус-вектора $\vec{r}_c$ по часу:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (2.25)$$

де $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$ – імпульс системи.

Якщо система тіл є замкнута, то

$$\vec{p} = m\vec{v}_c = \text{const}. \quad (2.26)$$

Згідно з (2.26) центр інерції замкнутої системи або рухається прямолінійно та рівномірно, або залишається в стані спокою.

2.6. Неінерціальні системи відліку

До цього часу ми говорили про рухи тіл в інерціальних системах відліку. Тепер розглянемо складніший випадок руху тіл.

Системи відліку, що рухаються прискорено відносно однієї з інерціальних систем, називаються неінерціальними. Розглянемо рух тіла в неінерціальній системі відліку, системі, що рухається прямолінійно та прискорено відносно інерціальної.

Нехай як і у випадку інерціальної системи

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}', \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}', \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}', \quad (2.27)$$

де $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0 \mathbf{t}$, $\mathbf{v}_0$ – деяка функція часу.

Продиференціюємо (2.27) по часу $\mathbf{t}$; тоді:

$$\mathbf{v}_x = \mathbf{v}'_x + \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_y = \mathbf{v}'_y, \quad \mathbf{v}_z = \mathbf{v}'_z. \quad (2.28)$$

Після диференціювання по часу $\mathbf{t}$ рівняння (2.28), одержимо:

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}'_x + \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{a}_y = \mathbf{a}'_y, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{a}'_z, \quad (2.29)$$

де
$$\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

У загальному випадку співвідношення (2.28) і (2.29) можна записати так:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{v}}_0, \quad (2.30)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}' + \vec{\mathbf{a}}_0. \quad (2.31)$$

Отже, у випадку руху тіла в неінерціальній системі відліку абсолютна швидкість дорівнює геометричній сумі відносної $\vec{\mathbf{v}}'$ і переносної $\vec{\mathbf{v}}_0$ швидкостей. Абсолютне прискорення також дорівнює геометричній сумі відносного $\vec{\mathbf{a}}'$ і переносного $\vec{\mathbf{a}}_0$ прискорень.

Запишемо рівняння руху точки масою m відносно рухомої (неінерціальної) системи відліку $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$.

Нехай прискорення цієї точки відносно нерухомої системи дорівнює $\vec{\mathbf{a}}$, а сила, що діє на неї, $\vec{\mathbf{F}}$.

Тоді для нерухомої (інерціальної) системи згідно з другим закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.32)$$

Оскільки $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$, формула (2.32) перепишеться так:

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_0) = \vec{F}, \quad (2.32')$$

тому

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0. \quad (2.33)$$

Отже, другий закон Ньютона в системах відліку, які рухаються з прискоренням, в число сил, що діють на тіло, зараховує взятий з протилежним знаком добуток маси тіла на переносне прискорення ($-m\vec{a}_0$). Цей добуток, який враховує прискорений рух системи відліку, називається силою інерції.

При складанні рівнянь руху тіла в неінерціальній системі відліку до результуючих сил $\vec{F}$, прикладених до тіла, слід додавати силу інерції $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0$.

Рівняння (2.32) і (2.33) вказують два шляхи, якими можна вивчати рух тіл відносно системи відліку, що рухається прискорено.

Перший шлях: записують рівняння руху тіла відносно інерціальної системи відліку (2.32). Потім, враховуючи, що $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$, рівняння (2.32) перетворюють до вигляду (2.32'), розв'язують його відносно $\vec{a}$ та інтегрують.

Другий шлях: записують рівняння руху тіла відразу відносно неінерціальної системи відліку (2.33), врахувавши всі сили, що діють на тіло та сили інерції. Одержане рівняння інтегрують.

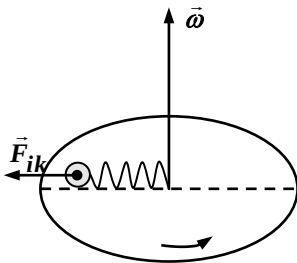
2.7. Відцентрова сила інерції. Коріолісова сила інерції

Розглянемо деякі види сил інерції.

1. Якщо неінерціальна система перебуває у поступальному русі з прискоренням $\vec{a}_0$ відносно інерціальної системи відліку, то $-m\vec{a}_0$ буде прискоренням тіла в неінерціальній системі відліку. І сила інерції матиме такий вигляд:

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_0. \quad (2.34)$$

2. Якщо неінерціальна система перебуває в обертальному русі відносно інерціальної системи відліку, то різні точки неінерціальної системи матимуть різне прискорення і сила інерції залежатиме від положення тіла в обертальній системі відліку.



мал. 2.3

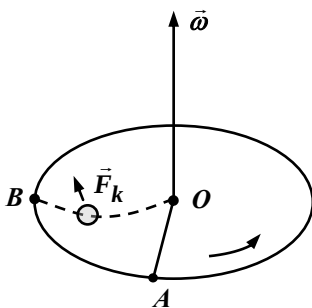
Нехай на диску, що обертається з кутовою швидкістю ω , одночасно обертається наколота на спицю і прикріплена до осі пружиною кулька (мал.2.3). З точки зору спостерігача в інерціальній системі кулька перебуває в обертальному русі під дією доцентрової сили $F = m\omega^2 r$, якою є сила пружності розтягнутої пружини.

З точки зору спостерігача, в неінерціальній системі кулька перебуває в стані спокою, оскільки сила інерції зрівноважується силою пружності розтягнутої пружини. Тут сила інерції направлена по радіусу від центра, її називають *відцентровою силою інерції*. Вона знаходиться за формулою:

$$F_{in} = m\omega^2 r. \quad (2.35)$$

Відцентрова сила інерції в неінерціальній системі діє на тіло незалежно від того, чи воно перебуває у цій системі в стані спокою, чи в стані відносного руху.

3. При русі тіла відносно обертової системи відліку, окрім відцентрової сили інерції, проявляється ще одна сила, яку називають *силою Коріоліса* або *коріолісовою силою інерції*.

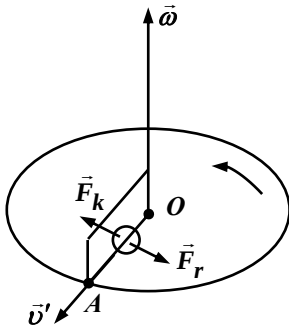


мал. 2.4

Появу цієї сили можна виявити на такому прикладі. Пустимо в напрямі від O до A кульку із швидкістю $\vec{v}'$ (мал.2.4). Якщо диск не обертається, кулька буде котитися вздовж лінії OA .

Якщо ж диск почне обертатися у напрямі, позначеному стрілкою, то кулька покотиться кривою OB .

Отже, щодо обертової системи відліку кулька веде себе так, наче на неї подіяла сила F_k , перпендикулярна до швидкості $\vec{v}'$ (мал.2.4).



мал. 2.5

Щоб примусити кульку котитися по обертовому диску вздовж радіуса, треба зробити направляючу, наприклад, у вигляді ребра OA (мал.2.5).

При коченні кульки направляюче ребро діє на неї з деякою силою F_r . Відносно обертової системи (диска) кулька рухається з постійною за напрямом швидкістю $\vec{v}'$. Це можна формально пояснити тим, що сила F_r зрівноважується прикладеною до кульки силою інерції F_k , яка є перпендикулярною до швидкості кульки $\vec{v}'$. Ця сила F_k і є коріолісовою силою інерції. Її обчислюють за формулою:

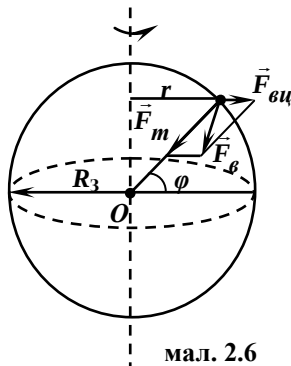
$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}], \quad (2.36)$$

де $\vec{v}'$ – довільна відносна швидкість тіла в обертовій системі відліку, $\vec{\omega}$ – кутова швидкість системи відліку, m – маса тіла.

Внаслідок коріолісової сили, зумовленої добовим обертанням Землі, у ріках, що течуть у північній півкулі, більше підмивається правий берег, зміщуються морські течії, вітри, снаряди.

2.8. Прояв відцентрових сил інерції

Відносно інерціальної системи відліку Земля здійснює добове обертання навколо своєї осі. Через те система відліку, пов'язана із Землею, буде неінерціальною. У цій системі одержують цілком реальне значення відцентрова та коріолісова сила інерції (мал.2.6).



мал. 2.6

Тіло на поверхні Землі зазнає дії двох сил: сили тяжіння $F_m = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg_0$ та

відцентрової сили $F_{вц} = ma = m\omega^2 r$.

Рівнодійна цих сил, яка називається силою ваги (вага тіла), дорівнює

$$\vec{F}_e = \vec{F}_m + \vec{F}_{вц}. \quad (2.37)$$

Якщо тіло вільне, то воно одержить прискорення $\mathbf{g}_\varphi$ і $\vec{F}_e = m\vec{g}_\varphi$.

Тому $m\vec{g}_\varphi = m\vec{g}_0 + m\vec{a}_{вц}$.

Отже, спостережуване прискорення вільного падіння на широті φ дорівнює:

$$\vec{g}_\varphi = \vec{g}_m + \vec{a}_{вц}. \quad (2.38)$$

Прискорення вільного падіння (мал.2.6) не направлене до центра Землі і не дорівнює тому прискоренню $\mathbf{g}_0$, яке мало б тіло, якби Земля не оберталася. Найбільша різниця між $\mathbf{g}_\varphi$ та $\mathbf{g}_0$ є на екваторі:

$$\mathbf{g}_\varphi = \mathbf{g}_0 - a_{вц}\cos\varphi, \quad (2.39)$$

або

$$\mathbf{g}_\varphi = \mathbf{g}_0 - \omega^2 R_3 \cos^2\varphi. \quad (2.40)$$

За означенням, вагою називають силу, з якою тіло діє на підвіс або опору, які утримують тіло від падіння. Вага, відповідно, є сила пружності, бо взаємодія тіла з опорою здійснюється через сили пружності.

Однак вагу тіла можна представити через силу тяжіння і відцентрову силу. Ми вже знаємо, що на нерухоме тіло діє сила

$$\vec{F}_{р\ddot{и}вн} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц}.$$

З такою ж силою нерухоме тіло діє на підтримуючу його опору. Тому вага тіла $\vec{P}$ на поверхні Землі дорівнює

$$\vec{P} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц}. \quad (2.41)$$

Вага тіла відрізняється від діючої на нього сили тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ як за модулем, так і за напрямом. Оскільки $\vec{F}_{вц}$ залежить від географічної широти, то і вага тіла буде залежати від широти. Вагу тіла можна подати у такому вигляді:

$$\vec{P} = m\vec{g}_\varphi. \quad (2.42)$$

Рівність (2.42) справедлива лише у випадку, коли тіло і опора нерухомі відносно Землі.

У рухомій з прискоренням $\vec{a}$ системі відліку на тіло діють, окрім сили тяжіння, сили інерції, які пов'язані з обертанням Землі ($\vec{F}_{вц}$ і $\vec{F}_k$), та сили інерції $\vec{F}_{ін.пост.}$, зумовлені поступальним рухом системи відліку K' : $\vec{F}_{ін.пост.} = -m\vec{a}'$.

Результуюча цих сил дорівнює

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц} + \vec{F}_{кор.} + \vec{F}_{ін.пост.} \quad (2.43)$$

Тому вага тіла дорівнює

$$\vec{P} = \vec{F}_{рез} = m\vec{g}_\varphi + \vec{F}_{кор.} - m\vec{a}, \quad (2.44)$$

де $m\vec{g}_\varphi = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{вц}$.

Формула (2.44) визначає вагу тіла в найзагальнішому випадку.

Як було показано вище, сили інерції виникають у прискорених (неінерціальних) системах відліку — як поступальних, так і обертальних. Значення сили інерції визначають як добуток маси тіла на прискорення системи. Характерним у цьому є те, що для тіл різних мас у заданій неінерціальній системі прискорення є однаковим, тобто сили інерції надають різним тілам однакового прискорення.

Відомо, що такі ж властивості притаманні і силам тяжіння. Ці факти дають підставу говорити про еквівалентність сил інерції та сил тяжіння. Якщо інертні та гравітаційні властивості тіл взаємопов'язані, то повинні існувати більш загальні фізичні закони, які відображали б ці зв'язки, тобто включали б в себе як закони руху, так і закон тяжіння. Саме ці завдання спонукали А.Ейнштейна до пошуку загальної теорії відносності.

2.9. Рівняння Мещерського та Ціолковського

У природі й сучасній техніці часто трапляються рухи тіл, маса яких змінюється з часом. Загальні закони динаміки тіл із змінною масою були відкриті й досліджені І.В.Мещерським і К.С.Ціолковським. К.Ціолковський розробив фундаментальні проблеми реактивної механіки, які і зараз є основою для міжпланетних польотів.

Для одержання основного рівняння руху тіла змінної маси будемо розглядати ракету як достатньо мале тіло, положення центра ваги якого не змінюється у процесі згоряння палива. У такому випадку можна вважати ракету матеріальною точкою змінної маси, яка співпадає з центром ваги ракети.

Будемо вважати, що викинута з ракети частина газу dM взаємодіє з ракетою M тільки в момент їх безпосереднього контакту. Нехай зміна маси ракети M відбувається неперервно, без стрибків (не розглядаємо багатоступеневі ракети, маси яких змінюються стрибкоподібно). Це припущення дає можливість вважати, що існує похідна по часу від маси ракети.

Розглянемо рух ракети детальніше. У момент часу t маса ракети дорівнює M , а її швидкість відносно нерухомої системи координат $\vec{v}$. Припустимо, що за час dt від ракети відокремилася частинка масою $-dM$ зі швидкістю (відносно тієї ж системи), яка дорівнює $\vec{u}$. Знак “мінус” перед приростом маси вказує на те, що цей приріст від’ємний, маса ракети зменшується. Нехай рівнодійна зовнішніх сил $\vec{F}$ (сила тяжіння і опір середовища). У момент відокремлення частинки масою $-dM$ між нею і ракетою діє реактивна сила $\vec{F}_p$. Ця сила для системи ракета-частинка є внутрішньою.

Використавши закон зміни імпульсу системи ракета-частинка і відкинувши члени другого порядку малості $dM \cdot d\vec{v}$, одержуємо основне рівняння руху точки змінної маси:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt} = \vec{F} + \vec{w} \frac{dM}{dt}, \quad (2.45)$$

де $\vec{w}$ – відносна швидкість.

Це рівняння називається *рівнянням Мецгерського*. Другий член правої частини рівняння (2.45) має назву *реактивної сили*

($\vec{F}_p = (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dM}{dt}$), яка діє на масу M зі сторони частинки, що вилітає.

Отже, для будь-якого моменту часу добуток маси тіла на його прискорення дорівнює векторній сумі рівнодійної прикладених до тіла зовнішніх сил і реактивної сили.

Якщо відносна швидкість $\vec{w}$ частинок, що покидають ракету дорівнює нулю ($\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \mathbf{0}$), то рівняння руху точки змінної маси має формально такий самий вигляд, що і для точки постійної маси:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.46)$$

Але в цьому випадку маса M є функцією часу t .

Важливий внесок у механіку тіл змінної маси вніс відомий російський учений К.Е.Ціолковський. Він обґрунтував і довів можливість практичного використання реактивного руху. Ціолковський встановив формулу, за якою можна обчислювати швидкість руху тіла змінної маси:

$$v = v_0 + w \ln \frac{M_0}{M}, \quad (2.47)$$

де v_0 – початкова швидкість, w – відносна швидкість, M і M_0 – початкова та кінцева маси тіла.

Якщо маса ракети в кінці процесу горіння M_p , а втрачена маса (маса палива) – m , то при нульовій початковій швидкості ($\vec{v}_0 = \mathbf{0}$) для розрахунку швидкості в кінці процесу горіння $\vec{v}_1$ одержуємо вираз:

$$v_1 = w \ln \frac{M_p + m}{M_p} \approx 2.3w \lg(1 + \frac{m}{M_p}) \approx 2.3w \lg(1 + z), \quad (2.48)$$

де $z = \frac{m}{M_p}$ – число Ціолковського.

З формули (2.48) випливає:

- 1) швидкість тіла змінної маси в кінці активної ділянки тим більша, чим більша швидкість викидання частинок;
- 2) швидкість в кінці активної ділянки тим більша, чим більше число Ціолковського;
- 3) швидкість тіл змінної маси в кінці активної ділянки не залежить від закону зміни маси;
- 4) для одержання великих швидкостей тіла змінної маси в кінці активної ділянки вигідніше йти шляхом збільшення відносної швидкості викидання частинок, ніж шляхом збільшення запасів палива.

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте перший закон Ньютона. Який фізичний зміст цього закону?
2. Які системи відліку називають інерціальними, які неінерціальними?
3. Чому система відліку, пов'язана із Землею, строго кажучи, не є інерціальною?
4. Що таке інертність тіла? Інерція?
5. Яка фізична величина є мірою інертності тіла?
6. Чому на практиці тіло, залишене само на себе, не зберігає як завгодно довго свою швидкість?
7. Який зміст має поняття сили в ньютонівській механіці?
8. Яка різниця між ньютонівськими силами та силами інерції?
9. Сформулюйте другий закон Ньютона. Запишіть формули другого закону Ньютона (які ви знаєте) і поясніть їх.
10. У чому полягає принцип незалежної дії сил? Які наслідки впливають з нього?
11. Сформулюйте третій закон Ньютона. Як слід розуміти рівність $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$?
12. Що називають імпульсом тіла? Сформулюйте закон збереження імпульсу та запишіть формули.
13. Що називають імпульсом сили?
14. Доведіть, що в замкнутій системі сума внутрішніх сил дорівнює нулю.
15. Що таке центр мас (інерції) системи?
16. Сформулюйте закон збереження імпульсу системи через рух центру мас системи.
17. Який рух називають реактивним?
18. Запишіть рівняння руху точки, маса якої змінюється. Поясніть його.
19. Чому не можна досягнути космічних швидкостей за допомогою одноступеневої ракети?

3. СИЛИ В МЕХАНІЦІ

3.1. Пружні сили. Поняття про пружне тіло. Закон Гука

Під дією сил, які діють на тіло змінюється форма тіла. Тверде тіло деформується. У багатьох задачах механіки необхідно знати закони, які пов'язують дію сил на тіло з тими деформаціями, що викликаються цими силами.

Сили, які виникають між різними частинами деформованого тіла називаються внутрішніми (на відміну від зовнішніх сил).

Тіла, в яких після припинення дії зовнішніх сил деформація цілком зникає і попередня форма тіла та його об'єм цілком відновлюється, називаються абсолютно пружними, а сама деформація – пружною.

Тіла, які після припинення дії зовнішніх сил не відновлюють свою початкову форму і об'єм називаються *непружними* або *пластичними*; відповідно їх деформацію називають *непружною*, *пластичною*.

Властивість тіл відновлювати форму й об'єм після припинення дії зовнішніх сил називають пружністю. Розрізняють об'ємну пружність і пружність форми.

Об'ємна пружність – універсальна властивість усіх тіл, включаючи рідини та гази.

Пружність форми – властивість багатьох твердих тіл, перш за все кристалічних.

У природі, звичайно, нема абсолютно пружних і абсолютно neprужних тіл. Але є багато тіл, залишкові деформації у яких настільки малі, що ними можна знехтувати. З іншого боку, є такі тіла, які уже при малих деформаціях ведуть себе як абсолютно neprужні.

Внутрішні сили, які виникають у пружних тілах при невеликих деформаціях, називають пружними.

Внутрішні сили в neprужних тілах належать до сил, які називаються *силами в'язкості* або *силами внутрішнього тертя*.

А) Види пружних деформацій

Існує багато видів пружних деформацій:

- односторонній розтяг (стиск);
- всесторонній розтяг (стиск);

- згин;
- зсув;
- кручення тощо.

Але не всі види деформацій є незалежними, багато з них можна звести до сукупності невеликого числа простіших деформацій. Так, згин стержня можна звести до деформації неоднорідного розтягу і стиску; кручення – до неоднорідного зсуву; зсув – до неоднорідного розтягу і стиску в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Відомо, що будь-яку пружну деформацію можна звести до сукупності двох деформацій, які одержали назву головних, розтягу (або стиску) і зсуву.

Деформації, які не змінюються у часі, називаються стаціонарними. Вони поділяються на два типи: статичні та динамічні. *Статичною* називають деформацію нерухомого тіла або тіла, що рухається рівномірно, а *динамічною* – деформацію тіла, яке рухається з прискоренням.

Стаціонарні деформації можуть бути однорідні та неоднорідні. *Однорідною* називають деформацію, при якій пружна напружка розподілена по всьому об'єму рівномірно. Якщо пружна напружка розподілена по об'єму нерівномірно, то таку деформацію називають *неоднорідною* (згин, кручення).

Динамічні деформації завжди неоднорідні, бо біля точок прикладання сили вони завжди більші.

Б) Закон Гука

При будь-якій деформації (простій чи складній) у тілі виникають пружні сили. Роберт Гук (англійський фізик, сучасник Ньютона) ще в 1675 році встановив, що величина і напрямки сил пружності певним чином залежать як від виду, так і від величини деформації.

Встановлений Гуком закон полягає у наступному:

а) при будь-якій малій деформації сила пружності пропорційна величині деформації;

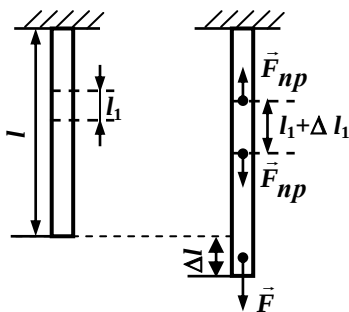
б) малі деформації пропорційні прикладеним силам.

Цей закон записують у такому вигляді:

$$F_{np} = -kx, \quad (3.1)$$

де k – коефіцієнт жорсткості (коефіцієнт пропорційності), x – величина деформації.

3.2. Сили пружності та закон Гука при деформації одностороннього розтягу (стиску)



мал. 3.1

Деформація одностороннього розтягу виникає, наприклад, у тонкому стержні, один кінець якого закріплений, а до другого прикладено зовнішню силу $\vec{F}$, яка намагається розтягнути стержень (мал. 3.1).

Під дією прикладеної сили стержень видовжується на величину Δl .

Кількісною характеристикою деформації може служити абсолютне

видовження Δl або відносне видовження $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

Сила пружності $\vec{F}_{np}$, що виникає в розтягнутому стержні, дорівнює зовнішній розтягуючій силі $\vec{F}$. З умови рівноваги стержня маємо:

$$\vec{F}_{np} = -\vec{F}. \quad (3.2)$$

Навантажуючи нижній кінець стержня вантажами і вимірюючи при кожному вантажі абсолютне видовження, одержуємо, що

$$\Delta l = \alpha \frac{F}{S} l = \alpha \frac{F}{S} l, \quad (3.3)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який залежить від роду матеріалу.

$\sigma = \frac{F}{S}$ – механічна напруга.

Використаємо таку заміну: $\frac{1}{\alpha} = E$, $F = -F_{np}$, тоді (3.3) перепишеться так:

$$F_{np} = -\frac{E \cdot S}{l} \Delta l = -k \Delta l, \quad (3.4)$$

де $k = \frac{E \cdot S}{l}$, E – модуль Юнга (модуль пружності).

Співвідношення (3.4) є одним із математичних записів закону Гука для деформації розтягу. Знак “мінус” у формулі (3.4) показує, що напрям сили пружності F_{np} протилежний до напрямку розтягу.

Коефіцієнт пропорційності k для даного тіла залежить від його розмірів (S і l) і модуля пружності матеріалу E .

Коефіцієнт пружності k називають коефіцієнтом сили пружності (для пружини – жорсткістю).

Повернемося до співвідношення (3.3):

$$\Delta l = \alpha \frac{F}{S} l.$$

Визначимо з нього α :

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l} \frac{S}{F} = \frac{\frac{\Delta l}{l}}{\frac{F}{S}} = \frac{\varepsilon}{\sigma}. \quad (3.5)$$

Але

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{\frac{S}{\Delta l}}{\frac{l}{l}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

Із співвідношення (3.5) випливає, що коефіцієнт пружності α чисельно дорівнює відносному видовженню ε , яке виникає під дією механічної напруги, що дорівнює одиниці.

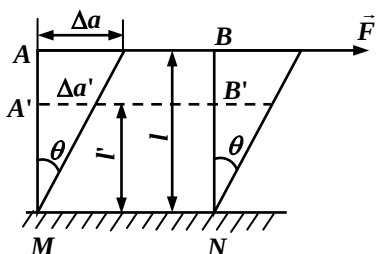
Із (3.6) маємо, що модуль Юнга E чисельно дорівнює механічній напрузі, яка створює відносне видовження, рівне одиниці. Якщо $\Delta l = l$, то відносне видовження ε дорівнює одиниці. Отже, модуль Юнга чисельно дорівнює механічній напрузі σ , яка розтягує стержень вдвічі.

Для деформації розтягу закон Гука можна записати ще і так:

$$\sigma_{np} = -E \frac{\Delta l}{l} = -E \varepsilon. \quad (3.7)$$

Отже, при малих деформаціях пружна напруга, яка виникає в тілі, прямо пропорційна відносній деформації.

3.3. Пружні сили та закон Гука при деформації зсуву



мал. 3.2

Деформацію зсуву можна одержати в паралелепіпеді, якщо одну його грань закріпити, а до протилежної прикласти силу $\vec{F}$, яка лежить у площині цієї грані (мал. 3.2).

Величина Δa є абсолютне зміщення (зсув) шару AB відносно нерухомого (закріпленого) шару MN .

На малюнку бачимо, що абсолютний зсув неоднаковий для різних шарів паралелепіпеда: він більший для тих шарів, які розміщені даліше від нерухомого шару.

Відношення абсолютного зсуву Δa до віддалі l між зсунутим і нерухомим шаром називають відносним зсувом. Його позначають через γ . Відносний зсув γ однаковий для всіх шарів і дорівнює тангенсу кута зсуву θ .

$$\gamma = \frac{\Delta a}{l} = \frac{\Delta a'}{l'} = \dots = \operatorname{tg} \theta. \quad (3.8)$$

При малих кутах зсуву $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$, отже, $\gamma \approx \theta$: при малій деформації відносний зсув дорівнює виміряному в радіанах куту зсуву.

При зсуві всередині тіла виникають пружні сили, які при статичній деформації зрівноважують зовнішню силу:

$$F_{\text{пр}} = -F$$

Встановлено, що при малих деформаціях абсолютний зсув:

$$\Delta a = \beta l \frac{F}{S}, \quad (3.9)$$

де β – коефіцієнт пропорційності, що має назву коефіцієнта зсуву, l – віддаль від зсунутої грані до нерухомої, F – сколююча сила, S – площа шару, що зазнав зсуву.

Дослід показує, що коефіцієнт зсуву β залежить тільки від матеріалу зразка і є кількісною характеристикою пружних властивостей тіла до деформації зсуву.

На практиці частіше використовують величину N , яку називають модулем зсуву:

$$N = \frac{1}{\beta}.$$

Відношення $\frac{F}{S} = \tau$ називають сколюючою напругою. Це відношення дорівнює силі, яка діє на одиницю площі поверхні та направлена по дотичній (тангенціально) до цієї поверхні.

Взявши до уваги, що $\frac{\Delta a}{l} = \gamma$, рівняння (3.9) запишеться так:

$$\gamma = \beta \tau. \quad (3.10)$$

Отже, відносний зсув прямо пропорційний сколюючій напрузі.

При статичній і однорідній деформації пружна тангенціальна напруга $\frac{F_{np}}{S} = \tau_{np}$, яка виникає в тілі, буде за модулем дорівнювати (а за напрямом – протилежна) сколюючій напрузі:

$$\tau_{np} = -\tau.$$

Тоді можна записати, що

$$\tau_{np} = -N\gamma = -\frac{1}{\beta}\gamma. \quad (3.11)$$

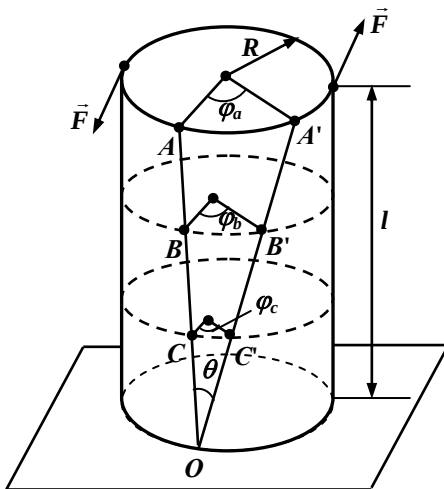
Отже, при невеликих деформаціях пружна тангенціальна напруга прямо пропорційна до відносного зсуву.

Із співвідношення (3.10) і (3.11) впливає фізичний зміст коефіцієнта та модуля зсуву:

- коефіцієнт зсуву чисельно дорівнює відносному зсуву, який одержує тіло при дії на нього одиначної сколюючої напруги (1 Н/м^2 або 1 Па);
- модуль зсуву дорівнює тангенціальній напрузі, яка виникає у тілі при куті зсуву $\theta = 45^\circ$ ($\text{tg } 45^\circ = 1$).

3.4. Сили пружності і закон Гука при деформації кручення

Розглянутий вище зсув прямокутного бруска є однорідною деформацією, тобто відносний зсув γ для всіх паралельних шарів однаковий.



мал. 3.3

Кручення – деформація неоднорідного зсуву (мал.3.3). Така деформація виникає у стержні, якщо закріпити його один кінець і

закручувати другий.

При цьому різні перерізи стержня повертаються на різні кути відносно закріпленої основи стержня ($\varphi_a > \varphi_b > \varphi_c$). При крученні об'єм тіла не змінюється, так як не змінюється ні діаметр, ні довжина стержня.

Нехай верхній переріз повернувся на кут φ_a . Тоді кожна із твірних циліндричної поверхні (наприклад, твірна OA) повернеться на кут θ , який називається кутом зсуву або кутом кручення.

При малих зсувах відносний зсув дорівнює:

$$\gamma = \tan \theta \approx \theta = \frac{|AA'|}{l} = \frac{R\varphi}{l}.$$

Встановлено, що кут закручування φ верхнього перерізу пропорційний силі $\vec{F}$, яка прикладена по дотичній до поверхні стержня (циліндра) в площині його перерізу, і радіусу стержня:

$$\varphi \sim F \cdot R.$$

Увівши коефіцієнт пропорційності, запишемо:

$$\varphi = d \cdot M, \quad (3.12)$$

де d – коефіцієнт пружності при деформації кручення.

При закручуванні всередині стержня виникають пружні сили, які створюють пружний момент M_{np} , що зрівноважує момент зовнішніх сил: $M_{np} = -M$.

Із (3.12) маємо, що:

$$M_{np} = -D \cdot \varphi, \quad (3.13)$$

де $D = \frac{1}{d}$ – коефіцієнт жорсткості стержня, модуль кручення.

Модуль кручення D пов'язаний із модулем зсуву N і розмірами стержня таким співвідношенням:

$$D = \frac{\pi N R^4}{2l}, \quad (3.14)$$

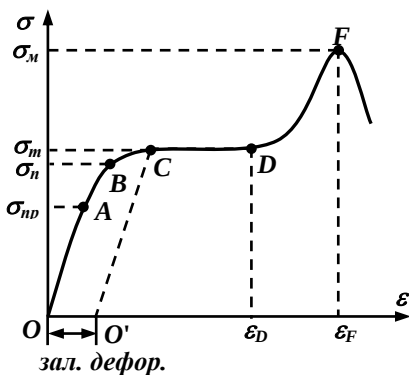
де R – радіус стержня, l – його довжина.

3.5. Границі пружності та міцності

Отже, пружні деформації будь-якого виду підлягають закону Гука. Але цей закон має місце тільки в певній області: *коли деформація лежить нижче деякої границі, яка визначається експериментально.*

Розглянемо це питання на прикладі деформації одностороннього розтягу.

Результати вимірювань подано на мал. 3.4. По осі абсцис відкладено відносний розтяг $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, по осі ординат – внутрішню пружну напругу σ_{np} , яка за модулем дорівнює зовнішній напрузі, що розтягує стержень.



мал. 3.4

На графіку бачимо, що лінійна залежність σ від ε , яка відповідає закону Гука, виконується лише в певних границях зміни деформації ε . Ця границя для багатьох тіл невелика. Так, для сталі $\varepsilon_p \approx 10^{-3}$; для інших матеріалів ε_p ще менше.

Граничне значення напруги, при якому ще виконується лінійна залежність σ від ε , називається *границею пропорційності σ_{np}* .

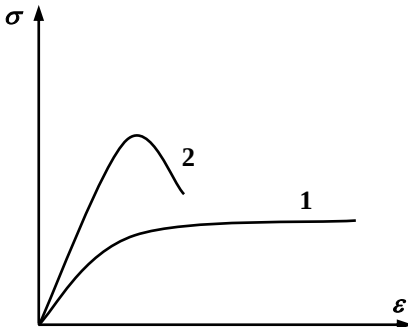
Граничне значення напруги, при якому ще не виникають залишкові деформації, називається *границею пружності* – σ_n ($\sigma_{пр} \approx \sigma_n$).

Напругу σ_m , при якій залишкова деформація досягає умовно вибраної величини (0,002), називається *границею текучості*. Ділянка графіка *CD* показує, що деформація зростає без збільшення напруги, тіло ніби “тече”. Область *CD* має назву пластичних деформацій. На цьому виді деформації ґрунтуються такі способи обробки металів, як ковка, пресування, прокат, волочіння, чеканка.

Для деформацій, більших ніж ϵ_D , пружні сили знову зростають, тобто тіло знову починає протидіяти розтягу.

Максимальну напругу, яка виникає в тілі до його руйнування, називають *границею міцності* σ_m .

При деформації, більшій ніж ϵ_F , пружні сили різко зменшуються, і зовнішня сила не врівноважується, тіло безперешкодно розтягується і швидко розривається (руйнується).



мал. 3.5

Матеріали, які мають область текучості *CD* значного розміру (крива 1, мал. 3.5), називаються *в'язкими* або *пластичними* (глина, вар, свинець тощо).

Матеріали, у яких область текучості практично відсутня (крива 2, мал. 3.5), називаються *крихкими* (скло, бетон, фарфор тощо).

Потрібно пам'ятати, що властивості тіл залежать від зовнішніх факторів (температура, тривалість дії сили).

3.6. Пружна післядія і пружний гістерезис

Реальні тверді тіла виявляють досить складну залежність деформації від часу. Ця залежність не міститься у законі Гука, і ми її до цього часу не враховували.

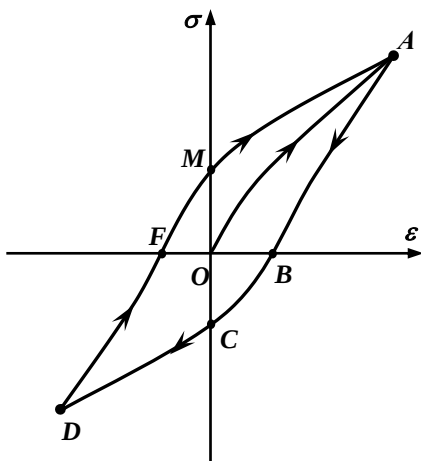
Дослід показує, що після початку дії зовнішньої сили деформація досягає відповідного значення не відразу (миттєво), а лише через певний проміжок часу.

Після припинення дії зовнішньої сили деформація зникає також не миттєво: спочатку вона зменшується до деякої малої величини, а в наступні моменти часу вона зменшується дуже повільно. Тіло повільно відновлює свою форму. Це явище називають *пружною післядією*.

Якщо взяти зразок, який раніше не зазнавав деформації, то при розтягу в ньому виникає напруга σ , яка змінюється із збільшенням ϵ вздовж кривої OA (мал. 3.6).

Після досягнення стану A будемо поступово зменшувати ϵ . При цьому графік залежності $\sigma = f(\epsilon)$ піде нижче від кривої OA , і зразок перейде в стан B ($\sigma = 0$), при якому він зберігає частину одержаної ним деформації. Ділянка OB відповідає залишковій деформації. Щоб цю залишкову деформацію ліквідувати, тіло треба стиснути, досягнути стану, що відповідає точці C . У цьому стані тіло повністю відновило свою форму ($\epsilon = 0$), але має внутрішню напругу, величина якої відповідає відрізку OC .

Якщо продовжувати стиск, то залежність $\sigma = f(\epsilon)$ піде по кривій CD . Після досягнення зразком стану D почнемо поступово зменшувати зовнішнє зусилля, довівши його до нуля (крива DF). У стані F тіло має залишкову деформацію (стиску) OF . Для її ліквідації тіло треба розтягнути (т. M , $\epsilon = 0$). Здійснивши розтяг далі, переведемо зразок по кривій MA у стан A . Наступне зменшення розтягу тіла піде уже по кривій AB .



мал. 3.6

При зміні зовнішнього навантаження залежність $\sigma = f(\epsilon)$ буде виражатися петлею $ABCD FMA$ (мал. 3.6), яка називається *петлею пружного гістерезису*. Гістерезис з грецького — відставання.

Площа петлі гістерезису пропорційна енергії, що виділяється у тілі (нагрівання), при кожному циклі періодично змінної деформації. Чим більша площа петлі, тим тіло сильніше нагрівається. Для зменшення нагрівання відповідальні деталі

машин виготовляють з матеріалів, які мають вузьку петлю гістерезису (пружини, ресори тощо).

Пояснення пружної післядії і гістерезису потрібно шукати в тому, що всі тіла (навіть монокристали) складаються із дуже маленьких областей, які дотикаються одна до одної. Ці області при пружній деформації можуть зміщуватися, повертатися і при певних умовах зачіплятися одна за одну, перекошуючись і розтягуючись. Звільнення від зачеплень відбувається поступово, внаслідок безладного теплового руху. Воно відбувається інтенсивніше при високих температурах. Зміщуючись і повертаючись, такі області труться одна до одної, внаслідок чого виділяється тепло і тіло нагрівається.

3.7. Енергія пружної деформації

Зовнішня сила, переміщуючи частини деформованого тіла, виконує деяку роботу проти внутрішніх сил, які виникають в тілі під час деформації. Якщо тіло абсолютно пружне, то робота зовнішньої сили дорівнює роботі внутрішніх сил (пружних сил).

У реальних тілах частина внутрішніх сил має характер внутрішнього тертя. Тому робота деформуючої сили частково йде на необоротне збільшення внутрішньої, а не потенціальної енергії тіла. Але при деформаціях, для яких справджується закон Гука, можна вважати, що вся робота зовнішніх сил і для реальних тіл йде на збільшення тільки їх потенціальної енергії.

Знайдемо потенціальну енергію розтягнутої пружини. Сила, яка розтягує пружину, прямо пропорційна її видовженню:

$$F = k x . \quad (3.15)$$

Тоді елементарна робота буде:

$$dA = F dx . \quad (3.16)$$

Для знаходження певної роботи A проінтегруємо вираз (3.16):

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} k x dx = k \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} . \quad (3.17)$$

На таку величину зміниться потенціальна енергія розтягнутої пружини.

Виділимо в деформованому тілі куб, ребро якого дорівнює l , тоді елементарна робота:

$$\Delta A = F \Delta x = \sigma S \Delta x = \sigma S \Delta x \frac{l}{l} = \sigma l^3 \frac{\Delta x}{l} = \sigma l^3 \Delta \varepsilon. \quad (3.18)$$

Тоді повну роботу сили F , яка викликала деформацію ε , знайдемо, проінтегрувавши вираз (3.19):

$$A = \int_x^x F dx = l^3 \int_0^l \sigma d\varepsilon. \quad (3.19)$$

Взявши до уваги, що $\sigma_{np} = -E\varepsilon$ ($\sigma = E \cdot \varepsilon$), запишемо:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E}, \quad \text{бо } E - \text{модуль Юнга, стала величина.}$$

Тоді:

$$A = l^3 \int_0^\sigma \sigma \frac{d\sigma}{E} = \frac{l^3}{E} \int_0^\sigma \sigma d\sigma = \frac{l^3}{E} \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2 l^3}{2E},$$

якщо $l^3 = V$ (об'єм тіла), то

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (3.20)$$

За рахунок роботи деформуючих сил пружно деформоване тіло має енергію:

$$U = A = \frac{\sigma^2}{2E} V. \quad (3.21)$$

3.8. Сили тертя. Сухе тертя

При механічних процесах завжди відбувається більшою чи меншою мірою перетворення механічного руху (у теплову форму руху, найчастіше). У цьому випадку взаємодія між тілами має назву сил тертя.

Отже, силами тертя називають тангенціальні взаємодії, що виникають між тілами, які перебувають у безпосередньому контакті при їх відносному переміщенні.

Сили тертя, які виникають між поверхнями твердих тіл, при їх відносному переміщенні називають силами зовнішнього (сухого)

тертя. Сили тертя виникають і при відносному переміщенні частин одного і того ж тіла.

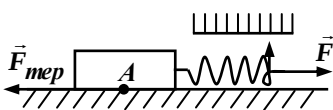
Сила тертя, яка виникає між рухомими шарами одного і того ж тіла (газу, рідини), називається внутрішнім тертям.

У реальних рухах завжди виникають сили тертя більшої або меншої величини. Рівняння другого закону динаміки з урахуванням сил тертя записується у вигляді:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}}. \quad (3.22)$$

Із (3.22) випливає, що для рівномірного руху тіла в реальних умовах до нього треба прикласти силу $\vec{F}$, яка зрівноважить силу тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. Підкреслюємо, що сила тертя завжди має напрям, протилежний до руху тіла.

Розрізняють три види сухого тертя: тертя спокою, тертя ковзання і тертя кочення.



мал. 3.7

А) Тертя спокою

Покладемо масивний брусок на горизонтальну поверхню (мал. 3.7) і поспробуємо зсунути його з місця, приклавши до нього в горизонтальному напрямку силу $\vec{F}$. Дослід показує, що брусок залишається у стані спокою навіть тоді, коли на нього діє зі сторони нитки деяка сила. Цю силу називають *силою тертя спокою*.

При збільшенні натягу нитки брусок залишається у стані спокою до тих пір, доки натяг не досягне певного значення, при якому брусок починає рівномірно ковзати по поверхні стола:

$$0 \leq \vec{F}_{\text{пр}} \leq \vec{F}_{\text{пр.мак}} = -\vec{F}_{\text{нат.нит}}. \quad (3.23)$$

Силу тертя спокою, рівну за модулем тій зовнішній силі, при якій починається ковзання даного тіла по поверхні іншого, називають максимальною силою тертя спокою. Сила, яка менша за модулем від максимальної сили тертя спокою, не викликає ковзання. Ця

особливість властива тільки сухому тертю. У випадку рідинного тертя ніякого порогу для зовнішньої сили не існує.

Працями вчених Амонтона (франц. фізик) у 1699 році і Кулона (франц. фізик) у 1785 році було встановлено наступне:

1) максимальна сила тертя спокою пропорційна силі нормального тиску:

$$F_{\text{тер.мак}} \sim N,$$

де N – сила нормального тиску.

Увівши безрозмірний коефіцієнт пропорційності k , названий коефіцієнтом тертя спокою, одержуємо рівняння, яке називається рівнянням Кулона-Амонтона:

$$F_{\text{тер.мак}} = kN; \quad (3.24)$$

2) при одній і тій самій силі нормального тиску N максимальна сила тертя спокою (а отже і коефіцієнт k) залежить від фізичної природи тіл, які стикаються, і стану обробки їх поверхонь;

3) при одній і тій самій силі нормального тиску N максимальна сила тертя спокою (а також і k) не залежить від площі поверхонь, що стикаються.

Згадані закономірності мають наближений характер. Це пов'язано з тим, що $F_{\text{тер.мак}}$ залежить від великої кількості факторів, багато з яких не піддаються врахуванню (наявність на поверхні окислів, вологи, адсорбованих газів тощо).

Поверхні тіл, коли їх розглядати в масштабах атома, нерівні. При підвищенні чистоти обробки поверхні ці нерівності зменшуються. Дослід показує, що при дуже акуратному шліфуванні поверхонь тіл, що стикаються, вони прилипають одне до одного.

Отже, можна сказати, що у грубо обробленій поверхні основну роль у виникненні сили тертя спокою (і ковзання) відіграють зачеплення нерівностей, а при детальній обробці – молекулярне (або атомне) зчеплення (міжмолекулярна взаємодія).

Б) Значення тертя спокою у техніці

Тертя спокою має виключно важливе значення у житті людини, у її практичній діяльності. Сили тертя спокою забезпечують можливість ходьби людини. Між людиною і землею в площині їх стикання

виникають сили тертя спокою. Одна із них (тангенціальна) – це сила, з якою підшва людини діє на землю. Інша (тангенціальна) – це сила, з якою земля діє на підшву. Обидві ці сили рівні за величиною і протилежні за напрямком. Друга із згаданих сил і забезпечує переміщення людини по землі.

Сила тертя спокою є рушійною і гальмівною силою для всіх наземних колісних видів транспорту. Але сили тертя спокою мають і негативні прояви. Це стосується, насамперед, вимірювальних приладів, які мають деталі, що труться.

В) Тертя ковзання

Розглянемо знову рух бруска по поверхні стола. Коли модуль зовнішньої сили досягає значення, яке дорівнює $F_{\text{тер.спок.макс}}$, виникає ковзання (рух) бруска. Тепер цю силу тертя називають *тертям ковзання*.

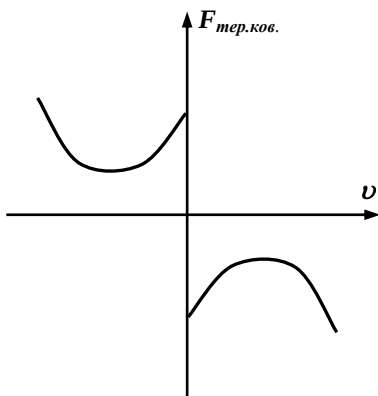
Сили тертя ковзання також діють вздовж поверхні контакту двох тіл. Вони прикладені до обидвох поверхонь, що труться, згідно з третім законом Ньютона. Сила тертя ковзання також має напрям, протилежний до швидкості руху тіла.

Модуль сили тертя ковзання залежить від матеріалу тіл і стану поверхонь, що труться. Але він також ще залежить від відносної швидкості руху тіл. (мал. 3.8).

Із збільшенням швидкості сила $F_{\text{тер.ков.}}$ спочатку зменшується, а потім знову починає зростати (при $v = 0$, $F_{\text{тер.ков.}} = F_{\text{тер.спок.макс}}$). Зменшення сили тертя ковзання при невеликих швидкостях можна

пояснити тим, що при русі тіла наявні на його поверхні мікроскопічні виступи не встигають глибоко заходити у заглиблення на поверхні другого тіла, як при спокої тіла. Деформуються тільки “вершки” виступів і тому сила опору (пружної деформації) зменшується.

Вважають, що збільшення сили тертя ковзання при великих швидкостях пов’язане із руйнуванням виступів, які є на поверхні тіл, і їх роздрібненням. Але повного розуміння цього питання нема ще до сих пір.



мал. 3.8

Нагрівання поверхонь при русі тіл пояснюють тим, що при розриві зачеплень виступи деякий час коливаються, перетворюючи в тепло нагромаджену енергію пружної деформації (виступів).

Сила тертя ковзання залежить від нормального тиску на поверхню стикання. При незмінній відносній швидкості руху сила тертя ковзання пропорційна силі нормального тиску:

$$F_{\text{тер.ков}} = k_{\text{ков}} \cdot N, \quad (3.25)$$

де $k_{\text{ков}}$ – коефіцієнт тертя ковзання. Він залежить від матеріалу та стану поверхні тіл, а також від відносної швидкості руху; N – сила нормального тиску.

У першому наближенні можна вважати, що $k_{\text{ков}}$ дорівнює коефіцієнту тертя спокою k .

Г) Тертя кочення

При коченні одного тіла по поверхні іншого виникає особлива сила – сила тертя кочення, яка перешкоджає коченню тіла.

Установлено, що сила тертя кочення для тих самих матеріалів завжди менша від сили тертя ковзання.

Кулон дослідним шляхом встановив, що сила тертя кочення пропорційна силі нормального тиску, яка діє на поверхні тіл, що стикаються, і обернено пропорційна радіусу рухомого циліндра (або колеса):

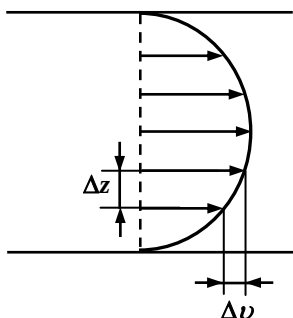
$$F_k = k' \frac{N}{R}, \quad (3.26)$$

де k' – коефіцієнт тертя кочення, R – радіус циліндра, N – сила нормального тиску.

Коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини і в системі СІ вимірюється у метрах (коефіцієнти k' і $k'_{\text{ков}}$ – безрозмірні величини). Коефіцієнт тертя кочення не залежить від швидкості кочення і радіуса циліндра, але залежить від матеріалу взаємодіючих тіл і стану їх поверхонь. Коефіцієнт тертя кочення k' зменшується із збільшенням твердості матеріалу і чистоти його обробки.

3.9. Внутрішнє (в'язке) тертя

Внутрішнім називають тертя між шарами рідин і газів. До нього також належить тертя на межі твердих тіл з рідинами або газами. Механізм виникнення внутрішнього тертя такий. Коли рідина тече трубою, то швидкість її шару прилипло до стінок, дорівнює нулю, а в міру віддалення шару від стінок до осі труби вона поступово збільшується (мал. 3.9). Одні шари рідини наче ковзають по поверхні інших і між ними виникає сила тертя.



мал. 3.9

Сила внутрішнього тертя є результатом дії сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів і переходу молекул з одного шару в інший. Молекули переходять з одного шару в інший, особливо в газах, внаслідок теплового хаотичного руху, і при цьому вони переносять певний імпульс направлений шару. Тому імпульс шару з більшою швидкістю зменшується. За другим законом Ньютона, зміна імпульсу шару газу (рідини) за одиницю часу визначає силу, що діє на нього, тобто силу внутрішнього тертя.

Підкреслимо деякі характерні особливості внутрішнього тертя:

- при в'язкому терті відсутня сила тертя спокою;
- при відсутності швидкості сила внутрішнього (в'язкого) тертя дорівнює нулю;
- при виникненні відносної швидкості величина в'язкого тертя із збільшенням швидкості спочатку росте лінійно, а потім пропорційно квадрату швидкості;
- при швидкостях, більших від швидкості звуку в даному середовищі, сила внутрішнього тертя пропорційна приблизно кубу швидкості.

Для малих швидкостей:

$$F = -\beta_1 v, \quad (3.27)$$

а для великих швидкостей:

$$F = \pm \beta_2 v^2. \quad (3.28)$$

Значення коефіцієнтів β_1 і β_2 залежать від властивостей середовища, розмірів і форми тіла та стану поверхні тіл. Знак у формулі (3.28) вибирається протилежний до знаку швидкості.

Рівняння руху тіла у випадку дії сили внутрішнього тертя записується так:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_r, \quad (3.29)$$

де $\vec{F}$ – зовнішня сила, що діє на тіло, $\vec{F}_r$ – сила тертя, яка залежить від швидкості (3.27), (3.28), m – маса тіла.

І.Ньютон установив, що сила внутрішнього тертя пропорційна градієнту швидкості ($\frac{\Delta v}{\Delta z}$) і площі шарів рідини чи газу S , між якими визначається сила тертя:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S, \quad (3.30)$$

де η – коефіцієнт внутрішнього тертя, або в'язкість. В'язкість η залежить від роду рідини або газу та їх температури. Установлено, що з підвищенням температури в'язкість рідин дуже зменшується, а в'язкість газів – збільшується.

Градієнт швидкості ($\frac{\Delta v}{\Delta z}$) у формулі (3.30) виражає зміну швидкості, розраховану на одиницю відстані по нормалі між шарами, що розглядаються, Δz – відстань між шарами.

Важливе практичне значення мають точніші формули для визначення сил внутрішнього тертя. Учений Стокс установив формулу для лобового опору кульки при малих швидкостях її руху у в'язкому середовищі:

$$F_c = 6\pi r \eta v, \quad (3.31)$$

де r – радіус кульки, η – в'язкість середовища, v – швидкість кульки.

Формула Ньютона для лобового опору будь-якого тіла має вигляд:

$$F = c_x \rho S v^2, \quad (3.32)$$

де ρ – густина середовища, S – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напрямку руху (міделевий переріз), c_x – коефіцієнт опору. Коефіцієнт опору c_x є функцією від числа Рейнольдса і залежить від форми тіла.

Відомо, що Рейнольдс, досліджуючи потоки рідин і газів, установив, що характер будь-якого потоку визначається безрозмірним числом Re :

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \quad (3.33)$$

де ρ – густина рідини або газу, v – швидкість потоку, D – діаметр труби, η – в'язкість. Знайдене за цією формулою число дістало назву числа Рейнольдса.

Було встановлено, що доки для потоку в круглій трубі $Re < 2000$, потік ламінарний, а коли $Re > 2000$, то потік нестійкий і легко переходить у турбулентний.

Функція $c_x = f(Re)$ складного характеру. Велика заслуга в її вивченні належить М.Є.Жуковському (1847–1921). Він вивів теоретичні формули для визначення коефіцієнта опору та розробив методику дослідження моделей, геометрично подібних до реальних тіл, за допомогою аеродинамічної труби. Зокрема було встановлено, що результати досліджень на моделі відповідають співвідношенню сил, що діють на об'єкт, коли для їх рухів будуть однакові значення числа Рейнольдса.

3.10. Закон всесвітнього тяжіння. Гравітаційна стала

Закони Кеплера розв'язують основні питання кінематики сонячної системи. Природу сил, що зумовлюють відомі рухи планет, з'ясовує закон всесвітнього тяжіння. Його встановив Ньютон, детально проаналізувавши закони Кеплера.

Закон всесвітнього тяжіння стверджує, що будь-які матеріальні частинки притягуються одна до одної із силою, прямопропорційною добутку їх мас і оберненопропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (3.34)$$

де γ – гравітаційна стала.

Увесь подальший розвиток астрономії можна назвати тріумфом закону всесвітнього тяжіння:

- за цим законом почали заздалегідь розраховувати рухи небесних тіл і явище затемнення;
- було встановлено, що припливи та відпливи води в морях і океанах зумовлюються притяганням Місяця;
- доведено, що планета повинна дещо зміщуватися з кеплерівської орбіти під дією сусідньої планети;
- за зміщенням планети Уран було передбачено, а потім і відкрито планету Нептун (1846 р.);
- за зміщенням планети Нептун спочатку розрахували, а потім і відкрили планету Плутон (1930 р.);
- за законом всесвітнього тяжіння розраховують траєкторії сучасних космічних кораблів.

Як уже сказано вище, коефіцієнт пропорційності γ у законі всесвітнього тяжіння називається гравітаційною сталою.

Фізичний зміст її можна встановити, якщо у рівнянні (3.34) прийняти $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ і $r = 1 \text{ м}$. Тоді:

$$F = \gamma,$$

тобто гравітаційна стала чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок з масами по 1 кг кожна, що перебувають на віддалі одна від одної 1 метр.

Закон всесвітнього тяжіння у лабораторних умовах перевіряв англ. учений Кавендіш (1798 р.) за допомогою крутильних терезів. Він вперше визначив величину гравітаційної сталої.

З багатьох дослідів було встановлено, що гравітаційна стала:

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2.$$

Знання гравітаційної сталої дало можливість визначити масу Землі та інших небесних тіл. Зокрема, прискорення сили тяжіння на поверхні Землі визначається за формулою:

$$g = \gamma \frac{M_3}{R^2}, \quad (3.35)$$

де M_3 – маса землі, R – її радіус.

Щоб знайти масу Сонця, можна йти таким самим шляхом: вважаємо, що сила тяжіння між Сонцем і планетою є доцентровою силою в обертальному русі планети навколо Сонця:

$$\gamma \frac{M_c \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

звідки:

$$M_c = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{4\pi^2}{\gamma T^2} \cdot r^3, \quad (3.36)$$

де T – період обертання планети навколо Сонця, r – середня відстань від планети до Сонця (відстань між центрами цих тіл).

3.11. Поле тяжіння

У сучасній фізиці механізм гравітаційної взаємодії уявляється наступним чином. Кожне тіло масою M створює навколо себе поле. Якщо в деяку точку цього поля помістити пробне тіло масою m , то поле діє на цю пробну масу m з деякою силою F , яка залежить від властивостей поля у цій точці і від величини маси пробного тіла m . Природно, що пробне тіло створює навколо себе своє поле, яке своєю чергою діє на тіло з масою M .

Вільний від речовини простір має ряд геометричних і фізичних властивостей. Так, найкоротшою віддалю між двома точками є пряма лінія; хід часу в усіх точках простору один і той самий; промені світла є прямими лініями.

Відповідно до теорії А.Ейнштейна, тіло масою M , яке внесене в деяку область простору, змінює властивості останнього. Зокрема, найкоротшою віддалю між двома точками буде уже не пряма, а деяка крива, форма якої залежить від маси M тіла і від віддалі між цим тілом і досліджуваними точками простору.

Світло і тепер поширюється найкоротшою віддалю між двома точками, але тепер уже світлові промені викривляються. Відповідно і час біля масивних тіл сповільнюється.

Отже, гравітаційне поле викликає зміну фізичних і геометричних властивостей простору біля масивних тіл.

Гравітаційне поле матеріальне. Воно існує незалежно від нашої свідомості і може бути виявлене за його дією на фізичні об'єкти (прилади). Гравітаційне поле є одним із видів матерії.

Для кількісної характеристики поля тяжіння вводиться фізична величина, яка називається напруженістю гравітаційного поля $\vec{G}$. Вона чисельно дорівнює відношенню сили тяжіння, яка діє на пробне тіло, до маси цього тіла:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.37)$$

Використавши закон тяжіння (3.34) і поклавши в ньому $m_1 = M$, $m_2 = m$, одержуємо:

$$G = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad (3.38)$$

напруженість поля тяжіння визначається масою тіла, яке створює поле і віддалю від цього тіла до точки поля, яке нас цікавить. Напруженість поля не залежить від маси пробного тіла, яке поміщене в цій точці.

За своїм фізичним змістом напруженість гравітаційного поля співпадає з прискоренням пробного тіла. Оскільки напруженість поля не залежить від маси пробного тіла, то всі тіла, незалежно від їх маси, рухаються у даній точці гравітаційного поля з однаковим прискоренням. Зокрема, всі тіла падають в полі сили тяжіння з однаковим прискоренням $\vec{g}$.

Напруженість поля є векторною величиною, її напрям скерований в ту ж сторону, що і сили тяжіння. Якщо радіус-вектор $\vec{r}$ направити від джерела поля M до досліджуваної точки поля, то вектор напруженості скерований завжди протилежно до радіус-вектора. Щоб це показати, то формулу (3.38) треба записувати із знаком “мінус”:

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{r^2}. \quad (3.39)$$

Якщо позначити масу тіла, яке створює поле через M , а масу пробного тіла через m , то потенціальна енергія пробного тіла на віддалі r від джерела поля буде:

$$U = \gamma \frac{Mm}{r}, \quad (3.40)$$

бо робота сили тяжіння дорівнює зменшенні потенціальної енергії:

$$dA = -dU,$$

або

$$dA = Fdr = \gamma \frac{Mm}{r^2} dr. \quad (3.41)$$

Проінтегрувавши (3.41) і взявши до уваги, що для $r = \infty$, $U_r(\infty) = 0$, одержуємо рівність (3.40).

Знаючи потенціальну енергію, можна знайти потенціал поля:

$$\varphi_{zp} = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r}. \quad (3.42)$$

Потенціал точки поля чисельно дорівнює відношенню потенціальної енергії пробного тіла маси m , до величини цієї маси.

Якщо пробне тіло перемістити із точки поля з потенціалом φ_1 в точку поля з потенціалом φ_2 , то при цьому поле виконає роботу:

$$A = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.43)$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають деформацією тіла? Назвіть основні види деформацій.
2. Яка деформація називається однорідною, а яка – неоднорідною?
3. Коли виникає деформація зсуву? Кручення?
4. У чому суть закону Гука? Запишіть його математично в загальному вигляді.
5. Запишіть закон Гука для деформації розтягу. Який фізичний зміст модуля Юнга?
6. Запишіть закон Гука для деформації зсуву. Який фізичний зміст модуля зсуву?

7. Запишіть закон Гука для деформації кручення. Який фізичний зміст модуля кручення?
8. Замалуйте залежність $\sigma_{np} = f(\epsilon)$. Поясніть її.
9. Що називають пружним гістерезисом? Намалуйте петлю пружного гістерезису. Що виражає площа петлі?
10. Як обчислити потенціальну енергію пружно деформованого тіла?
11. Яке тертя називають сухим і яке – в'язким (внутрішнім)?
12. Що означає сила тертя спокою? Яке значення може приймати ця сила? Запишіть закон Кулона-Амонтона.
13. Вкажіть приклади корисного та шкідливого прояву сили тертя спокою.
14. Що таке сила тертя ковзання? Від чого вона залежить?
15. Поясніть, чому тертя ковзання супроводжується нагріванням тіл, що труться, а тертя спокою – ні?
16. Що називають тертям кочення? Запишіть закон Кулона і поясніть його.
17. Поясніть механізм виникнення сили тертя кочення.
18. Що називають в'язким (внутрішнім) тертям. Запишіть формулу Ньютона для сили внутрішнього тертя. Поясніть її.
19. Запишіть формулу Стокса, формулу числа Рейнольдса. Поясніть їх.
20. Сформулюйте і запишіть математично закон всесвітнього тяжіння.
21. Який фізичний зміст гравітаційної сталої?
22. Поясніть дослід Кавендіша. Що досліджував учений?
23. Як знайти масу Місяця, Землі? Які величини треба для цього знати?
24. Що називають напруженістю і потенціалом поля?
25. Чи дорівнює сила всесвітнього тяжіння силі тяжіння (вазі тіла)? Як знайти g_φ ?
26. Поясніть чому прискорення вільного падіння залежить від географічної широти? Де воно більше, а де менше?

4. РОБОТА Й ПОТУЖНІСТЬ

4.1. Інтеграли руху

Тіла, що утворюють механічну систему, можуть взаємодіяти як між собою, так і з тілами, які не належать до даної системи. Згідно з цим, сили, що діють на тіла системи, можна розділити на внутрішні та зовнішні.

Внутрішніми силами називають сили, з якими взаємодіють між собою тіла, що належать до даної системи.

Зовнішніми силами називають сили, зумовлені дією тіл, які не належать до даної системи.

Якщо зовнішні сили відсутні, то така система називається *замкнутою*.

Для замкнутих систем існують певні функції координат і швидкостей частинок, які утворюють систему і які зберігають при русі сталі значення. Ці функції називаються *інтегралами руху*. У механіці важливе значення мають лише ті інтеграли руху, які мають властивість адитивності. Ця властивість полягає у тому, що значення інтеграла руху для системи, яка складається із частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень інтегралів руху, взятих для кожної частини окремо. *Адитивних інтегралів руху є три: енергія, імпульс, момент імпульсу.*

Отже, для замкнутих систем є незмінними три фізичні величини: енергія, імпульс, момент імпульсу. Відповідно є *три закони збереження: закон збереження енергії, закон збереження імпульсу та закон збереження моменту імпульсу*. Усі вони тісно пов'язані з основними властивостями простору та часу.

В основі збереження енергії лежить однорідність часу, тобто рівноцінність усіх моментів часу. Рівноцінність треба розуміти так: заміна моменту часу t_1 на момент t_2 без зміни значень координат і швидкостей частинок не змінює механічних властивостей системи.

В основі збереження імпульсу лежить однорідність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх точках. Однаковість треба розуміти так, що паралельне перенесення замкнутої системи із

одного місця простору в інше без зміни взаємного розташування і швидкостей частинок не змінює механічних властивостей системи.

В основі збереження моменту імпульсу лежить ізотропність простору, тобто однаковість властивостей простору в усіх його напрямках. Цю однаковість слід розуміти так: повертання замкнутої системи як цілого не впливає на її механічні властивості.

4.2. Кінетична енергія частинки

Перейдемо до знаходження адитивних інтегралів руху. Розглянемо найпростішу механічну систему, яка складається з однієї частинки. Запишемо рівняння руху для цієї частинки:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (4.1)$$

де $\vec{F}$ – рівнодійна сил, які діють на частинку.

Перемножимо (4.1) на переміщення частинки $d\vec{S} = \vec{v}dt$. Тоді:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}dt = \vec{F}d\vec{S}. \quad (4.2)$$

Добуток $\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt$ є приростом швидкості частинки $d\vec{v}$ за час dt .

Тоді:

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\vec{v}d\vec{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \quad (4.3)$$

Або:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{S}. \quad (4.4)$$

Якщо система замкнута ($\vec{F} = 0$), то $d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0$,

$$T = \left(\frac{mv^2}{2}\right) = \text{const}, \quad (4.5)$$

де T – кінетична енергія частинки.

Отже, якщо частинка перебуває у замкнутій системі, то її кінетична енергія не змінюється.

Після множення чисельника та знаменника виразу (4.5) на m і прийнявши, що $m\mathbf{v} = \mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ – імпульс частинки), вираз для кінетичної енергії набуває вигляду:

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \cdot \frac{m}{m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (4.6)$$

Якщо ж на частинку діє сила $\vec{F}$, то її кінетична енергія не залишається сталою (постійною величиною). У цьому випадку відповідно до (4.4) приріст кінетичної енергії частинки за час dt дорівнює скалярному добутку $\vec{F}d\vec{S}$. Величина

$$dA = \vec{F}d\vec{S} \quad (4.7)$$

називається *роботою*, яку виконує сила $\vec{F}$ на шляху $d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ – є модуль переміщення $d\vec{S}$).

Скалярний добуток (4.7) можна записати через добуток проекції сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $d\vec{S}$ і елементарного шляху $d\vec{S}$:

$$dA = \vec{F}_S d\vec{S}, \quad (4.8)$$

де $\vec{F}_S$ – проекція сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $d\vec{S}$.

Виходячи із співвідношення (4.4), можна зробити висновок, що робота характеризує зміну кінетичної енергії, яка зумовлена дією сил на частинку, що рухається.

Проінтегруємо співвідношення (4.4) вздовж деякої траєкторії від точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right) = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S}.$$

Ліва частина цього рівняння є різницею значень кінетичної енергії в точках 2 і 1, тобто є приростом кінетичної енергії на шляху 1 – 2. Тоді можна записати:

$$T_2 - T_1 = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{S}. \quad (4.9)$$

Величина

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F}_S d\vec{S} \quad (4.10)$$

є роботою сили $\vec{F}$ на шляху 1 – 2. Іноді будемо вживати символ A_{12} замість A .

Отже, робота рівнодійної усіх сил, які діють на частинку, йде на приріст кінетичної енергії частинки:

$$A_{12} = T_2 - T_1. \quad (4.11)$$

Із (4.11) випливає, що кінетична енергія має таку ж розмірність, як і робота. І згідно з цим енергія вимірюється у тих самих одиницях, що й робота. Одиницею роботи в системі СІ є Джоуль (Дж).

4.3. Робота. Потужність

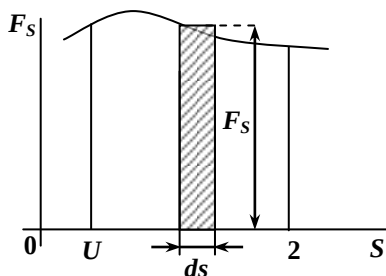
Розглянемо величину, названу роботою, детальніше. Вираз (4.7) можна подати у вигляді:

$$dA = \vec{F} d\vec{S} = F \cos \alpha dS F_S dS, \quad (4.12)$$

де α – кут між напрямом сили $\vec{F}$ і напрямом переміщення $d\vec{S}$, F_S – проекція сили на напрям переміщення.

Якщо $\cos \alpha > 0$ (гострий кут), то робота додатна ($dA > 0$). Якщо кут α тупий ($\cos \alpha < 0$), то робота від'ємна ($dA < 0$). При $\alpha = \pi/2$ робота дорівнює нулю.

З мал. 4.1 бачимо, що елементарна робота $dA = F_S dS$ чисельно дорівнює площі заштрихованої смужки, а робота A на шляху 1 – 2 чисельно дорівнює площі фігури, що обмежена кривою F_S , вертикальними прямими 1 і 2 та віссю S .



мал. 4.1

Якщо траєкторія руху не прямолінійна, а сила не є постійною, то при розрахунку роботи треба весь шлях ΔS розбити на такі малі елементи ΔS_i , щоби кожен із них можна було вважати прямолінійним, а силу F_i на ньому постійною.

Тоді роботу на елементарній ділянці ΔS_i можна обчислити за формулою:

$$\Delta A_i = F_i \cos \alpha_i \Delta S_i = F_{Si} \Delta S_i.$$

А повна робота буде дорівнювати сумі робіт, виконаних на всіх елементарних ділянках від точки 1 до точки 2:

$$A \approx \sum_i \Delta A_i = \sum_i F_{Si} \Delta S_i. \quad (4.13)$$

При безконечному збільшенні числа елементарних ділянок сума (4.13) переходить в означений інтеграл і повна робота буде дорівнювати:

$$A = \int_1^2 F_S dS. \quad (4.14)$$

Робота, виконана за одиницю часу, називається потужністю:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v} dt}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.15)$$

Потужність N дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка прикладання сили. Одиницею потужності є ват (Вт).

$$1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{м}}{1 \text{ с}}.$$

За одиницю потужності приймається така потужність, при якій за одиницю часу виконується робота, що дорівнює одиниці роботи. Одиницею роботи в СІ є Джоуль (Дж), який дорівнює роботі, яку виконує сила в 1 Н на шляху 1 м.

4.4. Консервативні сили. Потенціальне поле

Якщо на частинку в кожній точці простору діють інші тіла, то кажуть, що ця частинка перебуває у полі сил. Наприклад, частинка біля поверхні Землі перебуває у полі сили тяжіння – в кожній точці простору на неї діє сила $\vec{P} = m\vec{g}$.

Існують поля, для яких напрямки сили, яка діє на частинку в будь-якій точці простору, проходить через нерухомий центр, а величина сили залежить тільки від віддалі до цього центра: $\vec{F} = \vec{F}(\mathbf{r})$. Поле сил, яке має такі властивості, називається центральним.

Якщо в кожній точці поля сила, яка діє на частинку, однакова за величиною і напрямком ($\vec{F} = \text{const}$), то таке поле називається *однорідним*.

Силowe поле, яке можна описати за допомогою функції $\Pi(x, y, z, t)$, для якої:

$$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (4.16)$$

називається *потенціальним*. Функція $\Pi(x, y, z, t)$ має назву *потенціальної функції* (або *потенціалу*). Якщо час t входить у функцію $\Pi(x, y, z, t)$ явно, то силowe поле буде змінюватися з часом: сила в кожній точці буде залежати від t . Таке поле називають *нестационарним*. А поле, яке не змінюється з часом, називають *стационарним*. Для стационарного поля $\Pi = \Pi(x, y, z)$.

Вектор з компонентами $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, де φ – скалярна функція координат x, y, z (і навіть часу t), називається *градієнтом функції φ* ; його позначають символом **grad φ** або $\nabla\varphi$ (∇ називається оператором набла; $\nabla\varphi$ читається: “набла фі” або “градієнт фі”). З визначення градієнта випливає, що

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z, \quad (4.17)$$

де $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орти координатних осей x, y, z .

Порівняння (4.16) з (4.17) показує, що у випадку потенціального силowego поля

$$\vec{F} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{e}_z = \nabla \Pi. \quad (4.18)$$

Робота сили, яка задовольняє умову (4.18), дорівнює

$$dA = \vec{F}d\vec{S} = \nabla \Pi d\vec{S} = \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz. \quad (4.19)$$

Якщо час не входить явно у функцію $\Pi(x, y, z)$, то права частина рівняння (4.19) є повним диференціалом функції Π . Відповідно, робота, виконана над частинкою у стационарному силovому полі, дорівнює:

$$dA = d\Pi(x, y, z, t). \quad (4.20)$$

Проінтегруємо вираз (4.20) вздовж деякої траєкторії від точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 dA = \int_1^2 d\Pi . \quad (4.21)$$

Ліва частина рівняння (4.21) – це робота A_{12} , яку виконують сили поля на шляху 1–2. Права частина (4.21) дорівнює сумі елементарних приростів $d\Pi$ функції Π , що є повним приростом цієї функції на шляху 1–2:

$$\int_1^2 d\Pi = \Pi_2 - \Pi_1 . \quad (4.22)$$

Тоді рівність (4.21) можна записати так:

$$A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1 . \quad (4.23)$$

Форма траєкторії, вздовж якої здійснювалося інтегрування, була вибрана довільною. Тому робимо висновок, що робота, виконана над частинкою силами стаціонарного потенціального поля, не залежить від форми шляху, яким рухається частинка. Вона залежить тільки від початкового та кінцевого положення її у просторі.

Ті сили, робота яких не залежить від шляху, яким частинка переходить із одного положення в інше, називають *консервативними*.

Зі сказаного випливає, що сили, які діють на частинку в стаціонарному потенціальному полі, є консервативними.

З незалежності роботи консервативних сил від шляху випливає, що робота таких сил по замкнутому шляху дорівнює нулю.

4.5. Потенціальна енергія у зовнішньому полі сил

Ми вже знаємо, що робота, виконана над частинкою силами стаціонарного поля, дорівнює:

$$A_{12} = \Pi_2 - \Pi_1 , \quad (4.24)$$

де Π_1 і Π_2 – значення потенціальної функції $\Pi(x, y, z)$ у початковій і кінцевій точках. Уся виконана робота йде на приріст кінетичної енергії частинки.

Тому:

$$T_2 - T_1 = \Pi_2 - \Pi_1 . \quad (4.25)$$

Перейдемо від функції $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ до функції $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, які пов'язані співвідношенням:

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = -\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}). \quad (4.26)$$

Тоді формулу (4.25) перепишемо так:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 \quad \text{або} \quad T_1 + U_1 = T_2 + U_2. \quad (4.27)$$

Позначимо: $E_1 = T_1 + U_1$; $E_2 = T_2 + U_2$. І рівняння (4.27) матиме вигляд:

$$E_1 = E_2, \quad (4.28)$$

тобто вираз $E = T + U$ для частинки, яка перебуває в полі консервативних сил, залишається сталою величиною (є інтегралом руху).

Функцію $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ називають потенціальною енергією частинки у зовнішньому полі. Величину E , яка дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергії частинки, називають повною механічною енергією частинки.

Перейшовши від потенціальної функції $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ до потенціальної енергії $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, рівняння (4.24) перепишемо так:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \quad (4.29)$$

з якого випливає, що робота, виконана над частинкою консервативними силами, дорівнює зменшенню потенціальної енергії частинки. Або можна говорити, що робота виконується за рахунок запасу потенціальної енергії.

Замінивши функцію $\Pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ потенціальною енергією $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, знаходимо зв'язок між потенціальною енергією і силою:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = -\nabla U. \quad (4.30)$$

Отже, сила, що діє на частинку в стаціонарному потенціальному силовому полі, дорівнює градієнту потенціальної енергії, який взято з оберненим знаком.

Проекціями сили на відповідні осі є вирази:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.31)$$

Розглянемо випадок, коли на частинку одночасно діють консервативні $\vec{F}$ і неконсервативні сили $\vec{F}^*$. Тоді при переході частинки із точки 1 в точку 2 над нею буде виконана робота:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} + \int_1^2 \vec{F}^* d\vec{S} = A_{кон} + A_{12}^*, \quad (4.32)$$

де A_{12}^* – робота неконсервативних сил. Роботу консервативних сил $A_{кон}$ можна записати: $A_{кон} = U_1 - U_2$. Тоді (4.32) перепишемо так:

$$A_{12} = U_1 - U_2 + A_{12}^*, \quad (4.33)$$

Але з рівняння (4.11) ми знаємо, що сумарна робота всіх прикладених до частинки консервативних сил йде на приріст кінетичної енергії частинки. *Це твердження називається теоремою про кінетичну енергію.*

Отже, рівняння (4.33) перепишемо так:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{12}^* \quad \text{або} \quad T_1 + U_1 + A_{12}^* = T_2 + U_2.$$

Взявши до уваги (4.33), одержуємо:

$$E_2 - E_1 = A_{12}^*. \quad (4.34)$$

Одержаний результат означає, що робота неконсервативних сил витрачається на приріст повної механічної енергії частинки.

Потенціальна енергія, як і потенціальна функція, визначається з точністю до деякої довільної постійної величини. Це, проте, не має ніякого значення, бо в усі фізичні співвідношення входить або різниця значень потенціальної енергії, або похідні від функції U .

4.6. Закон збереження енергії

Розглянемо систему, яка складається із N частинок масами $m_1, m_2, \dots, m_N$. Нехай частинки взаємодіють одна з одною з силами $\vec{F}_{ik}$, модулі яких залежать тільки від віддалі між частинками. Такі сили, як ми уже знаємо, називають консервативними (робота таких сил визначається початковою і кінцевою конфігурацією системи). Припустимо, що на i -ту частинку діє ще і зовнішня консервативна сила

$\vec{F}_i$ і зовнішня неконсервативна сила $\vec{F}^*$. Тоді рівняння руху i -ої частинки буде мати вигляд:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i + \vec{F}_i^* . \quad (4.35)$$

Перемножимо i -е рівняння на $d\vec{S}_i = d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ і додавши усі N рівнянь, одержуємо:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} d\vec{r}_i \right\} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{S}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{S}_i . \quad (4.36)$$

Ліва частина (4.36) є приростом кінетичної енергії системи:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = dT . \quad (4.37)$$

Перший член правої частини (4.36) дорівнює зменшенню потенціальної енергії взаємодіючих частинок:

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \vec{F}_{ik} \right) d\vec{r}_i = -dU_{\text{вз}} . \quad (4.38)$$

Другий член правої частини рівняння (4.36) дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи в зовнішньому полі консервативних сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{S}_i = -dU_{\text{зов}} . \quad (4.39)$$

Останній член в (4.36) виражає роботу неконсервативних (зовнішніх) сил:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^* d\vec{S}_i = \sum_{i=1}^N dA_i^* = dA_{\text{зов}}^* . \quad (4.40)$$

Урахувавши всі ці співвідношення, рівняння (4.36) запишемо так:

$$d(T + U_{\text{вз}} + U_{\text{зов}}) = dA_{\text{зов}}^* . \quad (4.41)$$

Величина

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{зов}} . \quad (4.42)$$

є повною механічною енергією системи.

Якщо зовнішні неконсервативні сили відсутні, то права частина рівняння (4.41) дорівнює нулю і повна енергія системи залишається сталою (незмінною):

$$E = T + U_{\text{вз.}} + U_{\text{зов.}} = \text{const} \quad (4.43)$$

Отже, повна механічна енергія системи тіл, на які діють лише консервативні сили, залишається сталою. Це і є закон збереження механічної енергії.

Для замкнутої системи, тобто системи, на тіла якої не діють ніякі зовнішні сили, співвідношення (4.43) набирає вигляду:

$$E = T + U_{\text{вз.}} = \text{const}, \quad (4.44)$$

повна механічна енергія замкнутої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою.

Якщо в замкнутій системі, крім консервативних сил, діють також неконсервативні сили, то повна енергія системи не зберігається. Її зміна дорівнює роботі неконсервативних сил:

$$dE = d(T + U_{\text{вз.}}) = dA^* \quad \text{або} \quad E_2 - E_1 = A_{12}^*. \quad (4.45)$$

4.7. Умови рівноваги механічної системи

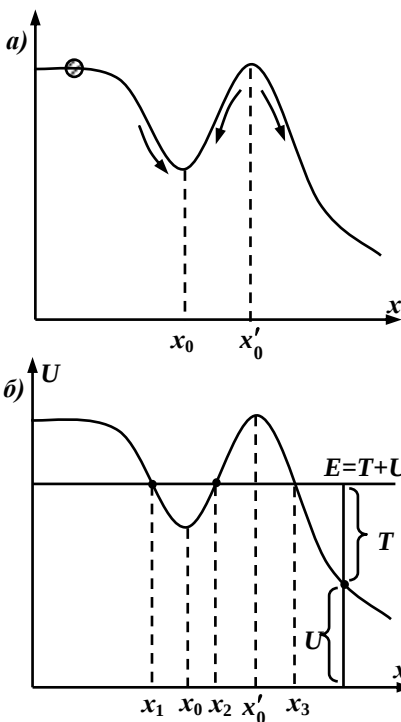
Розглянемо матеріальну точку, рух якої обмежено так, що вона має лише одну ступінь вільності. (Ступенями вільності називають незалежні величини, за допомогою яких можна задати положення системи. Наприклад, рух матеріальної точки, що рухається лише поступально, можна описати трьома ступенями вільності).

Якщо точка має одну ступінь вільності (як в зазначеному випадку), то її положення можна визначати за допомогою однієї координати; нехай цією координатою є координата x .

Для прикладу розглянемо кульку, яка ковзає без тертя по закріпленій нерухомо, зігнутій у вертикальній площині дротині (мал. 4.2, а).

На кульку діє консервативна сила – сила тяжіння. Графік потенціальної енергії $U(x)$ показано на мал. 4.2, б.

Оскільки кулька рухається по дротині без тертя, то сила, з якою дротина діє на кульку перпендикулярна до швидкості кульки і, відповідно, роботи над кулькою не виконує. Тому має місце закон збереження енергії згідно з формулою:



мал. 4.2

$$E = T + U = \text{const.} \quad (4.46)$$

З (4.46) випливає, що кінетична енергія може зростати тільки за рахунок зменшення потенціальної енергії. Тому якщо кулька перебуває у такому стані, що її швидкість дорівнює нулю, а потенціальна енергія має мінімальне значення, то без зовнішньої дії вона не може почати рухатися, тобто вона буде перебувати в рівновазі (у стані спокою).

Мінімум потенціальної енергії $U(x)$ відповідає на графіку значення $x=x_0$. Умова мінімуму потенціальної енергії має вигляд:

$$\frac{dU}{dx} = 0,$$

але

$$\frac{dU}{dx} = F_0 = 0. \quad (4.47)$$

(Якщо U є функцією тільки однієї змінної, то $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx} = F_x$).

Отже, положення, яке відповідає мінімуму потенціальної енергії, має ту властивість, що сила, яка діє на тіло, дорівнює нулю.

Для випадку, який зображено на малюнку, умова (4.47) виконується також для $x = x'_0$ (для максимуму $U(x)$). Визначене цим значенням x'_0 положення кульки буде також рівноважним. Але ця рівновага на відміну від рівноваги при x_0 буде нестійкою: достатньо легко вивести кульку із цього положення, як виникає сила, яка віддаляє кульку від положення x'_0 . При стійкій же рівновазі виникають сили, які намагаються вернути кульку в положення рівноваги.

Якщо повна енергія частинки має значення, як показано на мал. 4.2, б, то частинка може здійснювати рух або в межах від x_1 до x_2 , або в межах від x_3 до безконечності.

В області $x < x_1$ і $x_2 < x < x_3$ частинка проникнути не може, так як потенціальна енергія не може стати більшою за повну енергію.

Отже, область $x_2 < x < x_3$ є потенціальним бар'єром, через який частинка не може проникнути, маючи даний запас повної енергії. Область $x_1 < x < x_2$ називається потенціальною ямою.

Якщо частинка при своєму русі не може віддалитися на безконечність, то такий рух називають *фінітним*. Якщо ж частинка може відходити як завгодно далеко, то такий рух називають *інфінітним*. Частинка, перебуваючи у потенціальній ямі, здійснює фінітний рух.

4.8. Космічні швидкості

Рухи тіл, що їх посиляють з Землі в космічний простір, розраховують, виходячи із закону всесвітнього тяжіння.

Припустимо, що ці тіла посиляють у горизонтальному напрямі високо над Землею, де опору атмосфери вже немає. Розрахунки показують, якщо швидкість тіла становить $\sim 7,9$ км/с, то воно буде обертатися навколо Землі як супутник. Щоб визначити цю швидкість, виходимо з того, що в обертальному русі тіла навколо Землі доцентровою силою мусить бути сила тяжіння:

$$mg = \frac{mv_z^2}{r}; \quad v_I = \sqrt{gr}, \quad (4.48)$$

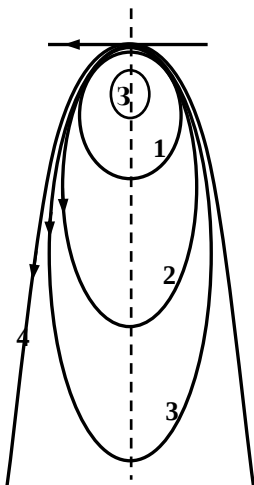
де r – відстань тіла від центра Землі. Таку швидкість v_I називають *першою космічною*.

Якщо швидкість тіла збільшувати, то орбіта його руху навколо Землі витягується і при швидкості 11,2 км/с тіло перейде на параболічну орбіту та залишить Землю (мал. 4.3). Цю швидкість називають другою космічною.

Її обчислюють за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло, щоб виконати роботу виходу за межі тяжіння до Землі (роботу проти сили тяжіння):

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM_3}{r^2} dr. \quad (4.49)$$

Виконавши інтегрування (4.49), одержуємо



мал. 4.3

- 1 – колова орбіта;
- 2 – еліпс при $v_0 = 10 \text{ км/с}$;
- 3 – еліпс при $v_0 = 11,1 \text{ км/с}$;
- 4 – парабола при $v_0 = 11,6 \text{ км/с}$;
- 5 – напрям v_0

Третю космічну швидкість можна обчислити за тією кінетичною енергією, яку повинно мати тіло для виконання роботи виходу за межі тяжіння спочатку Землі, а потім і Сонця. Зауважимо, що рух космічного корабля зручно розраховувати в системі координат, пов'язаній з тим небесним тілом, у сфері тяжіння якого перебуває корабель.

Щоб вийти за сферу тяжіння Сонця, корабель повинен мати кінетичну енергію, достатню для виконання роботи виходу:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \int_R^{\infty} \gamma \frac{mM_c}{r^2} dr. \quad (4.51)$$

Звідки:

$$v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_c}{R_0}} = \sqrt{2}v_3, \quad (4.52)$$

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = \gamma \frac{mR_3}{R},$$

$$v_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_3}{R}} = \sqrt{2gR} \quad (4.50)$$

де R – радіус Землі.

Надаючи космічному апарату швидкості понад $11,2 \text{ км/с}$, можна посилати його у сферу тяжіння інших планет і Сонця.

Запускаючи космічний апарат з Землі, йому можна надати і такої швидкості, при якій він залишить Сонячну систему. Таку швидкість називають третьою космічною. Її величина залежить від напрямку запуску корабля щодо орбітального руху Землі; найменше її значення буде тоді, коли корабель запустять у напрямі орбітального руху Землі.

де v_{II} – параболічна швидкість корабля в Сонячній системі, M_c – маса Сонця, R_0 – Радіус орбіти Землі, v_3 – орбітальна швидкість Землі. Знаючи, що $v_3 = 29,75 \text{ км/с}$, знаходимо, що $v_{II} = 42 \text{ км/с}$. Така параболічна швидкість корабля у Сонячній системі. Ця швидкість у геоцентричній системі (системі, пов'язаній із Землею) при умові, що швидкість корабля на границі тяжіння з Землею співпадає з швидкістю орбітального руху Землі, буде:

$$v'_{II} = v_{II} - v_3 = 12,25 \text{ км/с}.$$

Отже, щоб запустити корабель з Землі для польоту за межі тяжіння Сонця, йому треба надати кінетичну енергію, достатню для виходу за сферу тяжіння Землі і збереження параболічної швидкості v'_{II} , достатньої для виходу за сферу тяжіння Сонця.

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{mv'_{II}^2}{2}. \quad (4.53)$$

Звідки $v_{III} = \sqrt{v_{II}^2 + v'_{II}^2} = 16.7 \text{ км/с}$. Таке мінімальне значення третьої космічної швидкості.

Питання для самоконтролю

1. Як обчислити роботу сталої сили?
2. Що називають потужністю? Виведіть формулу $N = \vec{F} \vec{v}$.
3. Якими одиницями вимірюється робота і потужність у системі СІ?
4. Які сили називають консервативними?
5. Що називають кінетичною енергією тіла? Якими одиницями вимірюється кінетична енергія? Чому?
6. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії.
7. Що називають потенціальною енергією? Від чого вона залежить?
8. Установіть зв'язок роботи сили із зміною потенціальної енергії.
9. Гравітаційне поле в кожній точці можна охарактеризувати двома величинами. Про які величини йде мова? Дайте означення цих величин. Запишіть їх формули.

10. Чому дорівнює кінетична енергія тіла, яке впало з висоти $h = 1000 \text{ м}$, якщо його початкова швидкість дорівнює нулю?
11. У чому суть закону збереження механічної енергії матеріальної точки, що рухається у потенціальному полі?
12. Що називають потенціальним бар'єром? Замалюйте графік потенціальної енергії тіла, яке має одну ступінь вільності?
13. Що називають першою, другою і третьою космічними швидкостями?
14. Як знайти першу космічну швидкість?
15. Як знайти другу космічну швидкість?
16. Як знайти третю космічну швидкість?
17. Сформулюйте і запишіть закон збереження механічної енергії для замкнутої системи: а) у якій діють тільки консервативні сили; б) у якій діють консервативні та неконсервативні сили.
18. Сформулюйте закон збереження механічної енергії для незамкнутої системи. Запишіть його.
19. Які види рівноваги є для тіла? Поясніть їх.
20. Який існує зв'язок між консервативною силою і потенціальною енергією?
21. Як обчислити потенціальну енергію пружно деформованого тіла?
22. Чому сила тяжіння є консервативною?
23. Як обчислити роботу сили, що змінюється?
24. Чому сили, які діють в центральному полі, є консервативними?
25. Який удар називають непружним? Як обчислити енергію, що перетворюється в тепло при абсолютно непружному ударі?
26. Який удар називають пружним? Запишіть формули, за якими знаходять швидкості двох взаємодіючих тіл при абсолютно пружному ударі.
27. Які інтеграли руху є в механіці? Як вони пов'язані з властивостями простору та часу?
28. Які відбуваються перетворення енергії, коли куля вилітає із гвинтівки при пострілі і коли кулі трапляється на шляху перешкода?

5. МЕХАНІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

5.1. Поняття твердого тіла як системи матеріальних точок.

Поступальний і обертовий рух твердого тіла

У задачах цього розділу механіки реальні тіла замінюють моделлю – абсолютно твердим тілом. Рух абсолютно твердого тіла розглядають як рух системи великого числа матеріальних точок, які зберігають незмінними положення однієї точки відносно іншої.

Для кожної такої матеріальної точки є справедливим другий закон динаміки. Якщо маса i -ої точки $\mathbf{m}_i$ і швидкість її $\vec{\mathbf{v}}_i$, то

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i) = \vec{\mathbf{F}}_i + \vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}, \quad (5.1)$$

де $\vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}}$ – рівнодійна внутрішніх сил, що діють на дану точку зі сторони інших точок тіла; $\vec{\mathbf{F}}_i$ – рівнодійна діючих на точку зовнішніх сил.

Запишемо рівняння (5.1) для кожної точки тіла і просумуємо їх. Пам'ятаючи, що $\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{вн}} = \mathbf{0}$, одержимо:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(\mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i) = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (5.2)$$

або

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\mathbf{m}_i \vec{\mathbf{v}}_i) = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i, \quad (5.3)$$

Тобто, похідна по часу від повного імпульсу тіла дорівнює сумі зовнішніх сил, які діють на тіло.

Рівність (5.2) можна переписати у вигляді:

$$\sum_i \mathbf{m}_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i. \quad (5.4)$$

При поступальному русі тіла прискорення всіх його точок однакове і, взявши до уваги, що $\sum_i \mathbf{m}_i = \mathbf{M}$ (маса тіла), одержуємо:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (5.5)$$

де $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$. Одержане рівняння (5.5) має назву рівняння

поступального руху твердого тіла.

Порівнюючи вираз (5.5) з рівнянням руху матеріальної точки, робимо висновок, що поступальний рух твердого тіла можна розглядати як рух матеріальної точки з масою, що дорівнює масі тіла, яка перебуває під дією сили, що дорівнює рівнодійній зовнішніх сил.

Якщо механічна система замкнута, то $\vec{F} = \mathbf{0}$, тоді:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}) = \mathbf{0} \text{ або } M\vec{v}_c = \text{const}, \quad (5.6)$$

де $\vec{v}_c$ – швидкість центра мас (центра інерції) механічної системи.

Згідно з (5.6), центр мас замкнутої механічної системи перебуває у стані спокою або рухається рівномірно та прямолінійно.

Обертальним називається такий рух, при якому всі точки твердого тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання.

При нерухомій осі обертання всі точки твердого тіла рухаються по колах, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання. Відомо, що рух точки по колу можна описати як лінійними характеристиками (дуговою координатою S , лінійною швидкістю $\vec{v}$, лінійним прискоренням $\vec{a}$), так і кутовими (кутом повороту φ , кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, кутовим прискоренням $\vec{\beta}$).

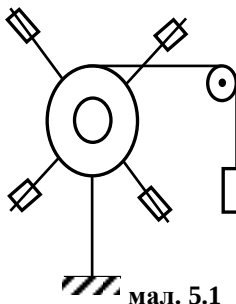
Оскільки лінійні кінематичні характеристики руху точок залежать від їх віддалі до осі обертання, то вони не можуть бути характеристиками обертального руху тіла як цілого.

З іншого боку, кутові характеристики (φ , $\vec{\omega}$, $\vec{\beta}$) для всіх точок твердого тіла мають бути однаковими, бо в іншому випадку ці точки перемістилися б одна відносно іншої, що для абсолютно твердого тіла є неможливим.

Отже, кут повороту φ , кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\beta}$, обчислені для будь-якої точки, будуть одночасно характеризувати обертання тіла як цілого.

5.2. Момент сили

Щоби зрозуміти від чого залежить характер обертання тіла навколо нерухомої осі, розглянемо такий дослід (мал. 5.1).



Візьмемо тіло у вигляді легкої хрестовини, на кінцях якої закріплено рівні масивні вантажі m . Тертям знехтуємо.

Будемо змінювати величину вантажу P , радіус шківів R , масу вантажів m та їх відстань l від осі обертання, досліджуючи, як ці зміни впливатимуть на величину кутового прискорення β .

За результатами такого дослідження приходимо до висновку, що кутове прискорення β :

- 1) прямо пропорційне натягу нитки $\vec{F}$ і радіусу шківів R ;
- 2) обернено пропорційне масі вантажів m і квадрату їх віддалі l від осі обертання.

Отже, прискорення обертального руху β залежить не тільки від величини діючої на тіло сили $\vec{F}$ і від віддалі R від осі обертання до лінії, вздовж якої діє сила. Добуток FR дає величину так званого моменту сили відносно осі обертання.

Із цього досліджу, як показано вище, випливає, що величина кутового прискорення β залежить не тільки від маси обертального тіла, але і від розподілу цієї маси відносно осі обертання. Величина, яка залежить від обидвох цих причин, має назву моменту інерції тіла відносно осі обертання.

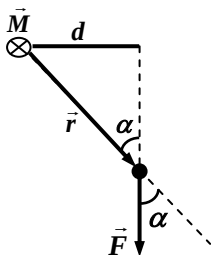
Отже, при вивченні обертального руху тіла треба брати до уваги ці дві нові фізичні величини: момент сили і момент інерції.

Моментом сили $\vec{F}$ відносно деякої точки O називається векторна величина $\vec{M}$, яка визначається виразом:

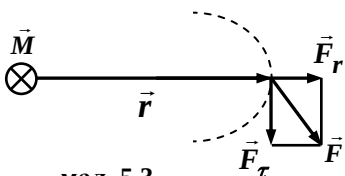
$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad (5.7)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із точки O до точки прикладання сили $\vec{F}$ (мал. 5.2).

З рівняння (5.7) робимо висновок, що момент сили $\vec{M}$ є аксіальним вектором. Його напрямок вибрано так, що обертання навколо точки O в напрямку сили $\vec{F}$ і вектором $\vec{M}$ утворюють правогвинтову систему.



мал. 5.2



мал. 5.3

Модуль вектора $\vec{M}$ дорівнює:

$$M = rF \sin \alpha = F \cdot d, \quad (5.8)$$

де α – кут між напрямками векторів $\vec{M}$ і $\vec{F}$, а $d = r \sin \alpha$ – довжина перпендикуляра, який опущено з точки O на напрямок дії сили. Цю довжину d називають плечем сили $\vec{F}$ відносно точки O . (мал. 5.2)

Формули (5.7) і (5.8) можна записати в іншому вигляді. Для цього розкладемо вектор $\vec{F}$ на дві складові: колінеарну з радіус-вектором $\vec{r}$ складову $\vec{F}_r$ і перпендикулярну до радіус-вектора $\vec{r}$ складову $\vec{F}_\tau$ (мал. 5.3).

Тоді:

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\tau.$$

А момент сили $\vec{M}$ запишемо так:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}(\vec{F}_r + \vec{F}_\tau)] = [\vec{r}\vec{F}_r] + [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \quad (5.9)$$

Перший доданок у правій частині (5.9) дорівнює нулю, бо вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}_r$ колінеарні (паралельні). Тому:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}\vec{F}_\tau]. \quad (5.10)$$

Але вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}_\tau$ перпендикулярні, тому модуль вектора $\vec{M}$

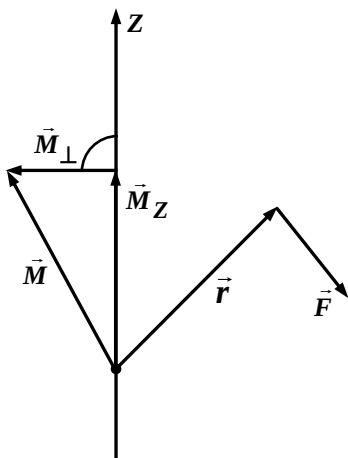
$$M = r \cdot F_\tau. \quad (5.11)$$

Із властивості векторного добутку випливає, що момент суми сил, які мають спільну точку прикладання, дорівнює сумі моментів складових сил:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= [\vec{r}\vec{F}] = [\vec{r}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N)] = [\vec{r}\vec{F}_1] + [\vec{r}\vec{F}_2] + \dots + [\vec{r}\vec{F}_N] = \\ &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Якщо тіло може обертатися тільки навколо деякої фіксованої осі, то здатність сили обертати тіло навколо цієї осі характеризується величиною, яка називається моментом сили відносно осі. (мал. 5.4)

Щоби вияснити, що таке момент сили $\vec{F}$ відносно осі $\vec{Z}$, знайдемо момент сили $\vec{F}$ відносно точки O (мал. 5.4) і відкладемо цей вектор $\vec{M}$ з точки O (вважається, що вектори $\vec{F}$, $\vec{r}$ і $\vec{M}$ не лежать у площині малюнка). Тоді проведемо через точку O вісь, яку назовемо віссю Z , і розкладемо вектор $\vec{M}$ на дві складові:



мал. 5.4

$\vec{M}_Z$ – паралельну до осі Z і $\vec{M}_\perp$ – перпендикулярну до осі Z . Паралельну до осі Z складову моменту сили $\vec{M}_Z$ називають моментом сили відносно осі.

Позначивши момент сили відносно осі Z символом $\vec{M}_Z$, можна записати:

$$\vec{M}_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z. \quad (5.13)$$

При заданому $\vec{M}$ величина і напрямок вектора $\vec{M}_Z$ залежить від вибору осі Z . Якщо вісь Z співпадає з напрямками вектора $\vec{M}$, то $\vec{M}_Z$ буде дорівнювати $\vec{M}$. Якщо ж вісь Z буде перпендикулярна до вектора $\vec{M}$, $\vec{M}_Z$ дорівнює нулю.

Подамо вектор $\vec{F}$ у вигляді суми трьох складових: $\vec{F}_\Pi$ – паралельна до осі Z , $\vec{F}_R$ – колінарна до вектора $\vec{R}$ і $\vec{F}_\tau$ – перпендикулярна до площини, у якій лежить вісь Z і вектор $\vec{R}$.

Тобто:

$$\vec{F} = \vec{F}_\Pi + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau. \quad (5.14)$$

Врахувавши (5.14), рівняння (5.13) запишемо так:

$$\begin{aligned}\vec{M}_Z &= [\vec{R}\vec{F}]_Z = [\vec{R}(\vec{F}_\Pi + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau)]_Z = \\ &= [\vec{R}\vec{F}_\Pi]_Z + [\vec{R}\vec{F}_R]_Z + [\vec{R}\vec{F}_\tau]_Z.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Розглянемо кожен із доданків рівняння (5.15) окремо:

- вектор $[\vec{R}\vec{F}_\Pi]$ перпендикулярний до осі Z , тому його складова на цю вісь дорівнює нулю;
- вектор $[\vec{R}\vec{F}_R]$ дорівнює нулю, бо вектори $\vec{R}$ і $\vec{F}_R$ колінеарні;
- вектор $[\vec{R}\vec{F}_\tau]_Z = [\vec{R}\vec{F}_\tau]$ паралельний до осі Z .

Тому:

$$\vec{M}_Z = [\vec{R}\vec{F}]_Z = [\vec{R}\vec{F}_\tau]. \quad (5.16)$$

Вектори $\vec{R}$ і $\vec{F}_\tau$ взаємно перпендикулярні. Модуль вектора $\vec{M}_Z$ дорівнює

$$|\vec{M}_Z| = R F_\tau. \quad (5.17)$$

Величину R називають плечем сили $\vec{F}_\tau$ відносно осі Z .

Із рівняння (5.17) робимо висновки, що момент сили $\vec{M}_Z$ характеризує здатність сили $\vec{F}$ повертати тіло навколо осі Z . Дійсно, складові сили $\vec{F}_\Pi$ і $\vec{F}_R$ не можуть викликати обертання тіла навколо осі Z . Це обертання може викликати тільки складова $\vec{F}_\tau$.

5.3. Момент інерції

Моментом інерції матеріальної точки масою m_i , яка перебуває на відстані r_i від осі обертання, називається фізична величина

$$J = m_i r_i^2. \quad (5.18)$$

Фізична величина J , що дорівнює сумі добутків мас матеріальних точок на квадрат їх відстаней від деякої осі Z , називається моментом інерції системи матеріальних точок (тіла) відносно осі Z .

$$J = \sum_i m_i r_i^2 . \quad (5.19)$$

З (5.19) робимо висновок, що момент інерції тіла дорівнює сумі моментів інерції його частин.

Якщо тіло однорідне, тобто його властивості в усіх точках однакові, то густину його знаходимо за формулою:

$$\rho = \frac{m}{V} , \quad (5.20)$$

де m – маса тіла, V – його об'єм. У випадку однорідного тіла густина дорівнює масі, що припадає на одиницю об'єму тіла.

Для неоднорідних тіл вираз (5.20) дає середню густину. Тоді густина в даній точці визначається так:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} . \quad (5.21)$$

Згідно (5.21) елементарна маса Δm_i дорівнює:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i .$$

Тоді момент інерції тіла можна записати:

$$J = \sum_i \rho_i r_i^2 \Delta V_i . \quad (5.22)$$

Коли густина тіла стала, то:

$$J = \rho \sum_i r_i^2 \Delta V_i . \quad (5.23)$$

Для точніших розрахунків переходимо до інтегрування:

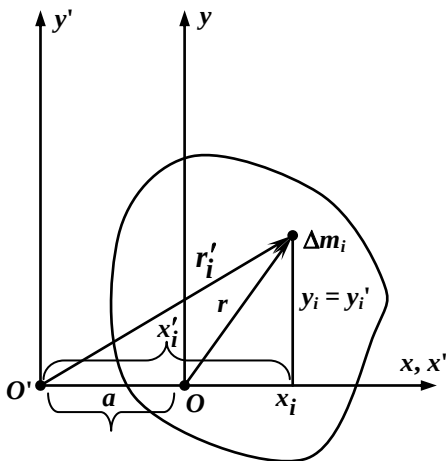
$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV . \quad (5.24)$$

Інтеграли в (5.24) беруться по всьому об'єму тіла.

5.4. Теорема Штейнера

Теорема Штейнера формулюється так: момент інерції J тіла відносно довільної осі $O'O'$ дорівнює сумі моменту інерції J_0 відносно осі, яка паралельна до даної і проходить через центр інерції тіла (вісь OO), і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між цими осями.

$$J = J_0 + ma^2 . \quad (5.25)$$



мал. 5.5

Для доведення теореми Штейнера розглянемо тіло довільної форми (мал. 5.5).

Виберемо дві паралельні одна до одної осі OO і $O'O'$. вісь OO проходить через центр інерції тіла. Проведемо осі координат так, що вісь z співпадає з віссю OO , а z' – з віссю $O'O'$. Осі x і x' вибираємо так, щоби вони співпадали і проходили через центр інерції тіла. Тоді:

$$x'_i = a + x_i; \quad y'_i = y_i, \quad (5.26)$$

де a – віддаль між осями. Квадрат віддалі елементарної маси Δm_i від осі OO дорівнює:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (5.27)$$

а квадрат її віддалі від осі $O'O'$ дорівнює:

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2. \quad (5.28)$$

Тоді момент інерції тіла відносно осі OO буде:

$$J_0 = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i, \quad (5.29)$$

а момент інерції його відносно осі $O'O'$ буде:

$$\begin{aligned} J &= \sum_i r_i'^2 \Delta m_i = \sum_i [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i = \\ &= \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum_i \Delta m_i + 2a \sum_i x_i \Delta m_i. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Перша сума в (5.30) тотожна із (5.29), тобто є J_0 ; друга сума дає ma^2 ; третя сума дорівнює нулю.

Оскільки вісь z проходить через центр інерції тіла, то координата центра інерції тіла x_c дорівнює нулю. Але за означенням

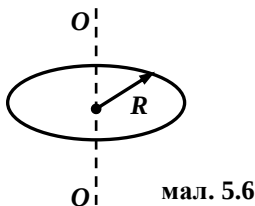
$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{m}, \text{ а отже } \sum \Delta m_i x_i = 0 \text{ (бо } x_c = 0).$$

Тоді вираз (5.30) набирає вигляду:

$$J = J_0 + ma^2. \quad (5.31)$$

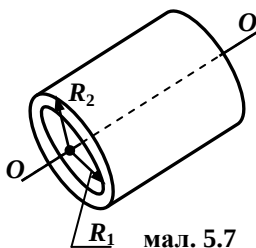
Вираз (5.31) тотожний виразу (5.25), а отже, теорема Штейнера доведена.

5.5. Моменти інерції деяких тіл



1. Момент інерції тонкого кільця відносно осі, що проходить через його центр, перпендикулярно до його площини (мал. 5.6):

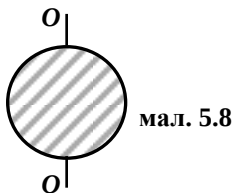
$$J = mR^2. \quad (5.32)$$



2. Момент інерції товстостінного циліндра відносно осі симетрії (мал. 5.7):

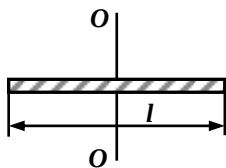
$$J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2), \quad (5.33)$$

де R_1 – внутрішній і R_2 – зовнішній радіуси.



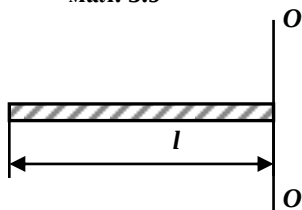
3. Момент інерції диска відносно осі, яка співпадає з одним із його діаметрів (мал. 5.8):

$$J = \frac{1}{4}mR^2. \quad (5.34)$$



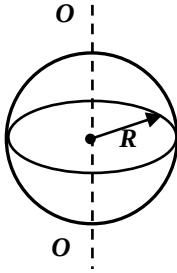
4. Момент інерції тонкого стержня відносно осі, яка проходить через його середину (мал. 5.9):

$$J = \frac{1}{12}ml^2. \quad (5.35)$$



5. Момент інерції тонкого стержня відносно осі, яка проходить через один із його кінців (мал. 5.10):

$$J = \frac{1}{3}ml^2. \quad (5.36)$$

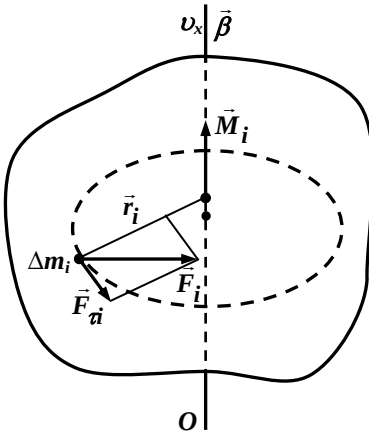


мал. 5.11

6. Момент інерції кулі відносно осі, яка співпадає з одним із його діаметрів (мал. 5.11):

$$J = \frac{2}{5} m R^2. \quad (5.37)$$

5.6. Основне рівняння динаміки обертового руху



мал. 5.12

Розглянемо тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі (мал. 5.12). Рух будь-якої елементарної маси Δm_i , на які можна розбити тіло, є рухом точки по колу. Оскільки швидкість будь-якої елементарної маси Δm_i лежить весь час у площині кола, то рівнодійна всіх сил (зовнішніх і внутрішніх), прикладених до цієї маси Δm_i , теж лежить в тій самій площині. Позначимо цю рівнодійну через $\vec{F}_i$.

Запишемо рівняння другого закону Ньютона для тангенціальних складових сил:

$$\Delta m a_{\tau i} = F_{\tau i}, \quad (5.38)$$

де $a_{\tau i}$ – тангенціальне прискорення. Нормальна складова сили забезпечує доцентрове прискорення і на кутове прискорення не впливає. Врахувавши, що $a_{\tau i} = \beta r_i$, і помноживши обидві частини (5.38) на r_i , одержуємо:

$$\Delta m_i \beta r_i^2 = F_{\tau i} r_i. \quad (5.39)$$

Але $F_{\tau i} r_i = M_i$, тому

$$\Delta m_i r_i^2 \vec{\beta} = \vec{M}_i, \quad (5.40)$$

де $\vec{M}_i$ – величина моменту сили $\vec{F}_i$ відносно осі OO .

Вектори $\vec{\beta}$ і $\vec{M}_i$ мають однакові напрямки, які співпадають з віссю OO . Тому рівність (5.40) можна переписати у векторній формі:

$$\Delta m_i r_i^2 \vec{\beta} = \vec{M}_i. \quad (5.41)$$

Скалярна величина $\Delta m_i r_i^2$ називається моментом інерції матеріальної точки відносно осі OO .

Момент сил $\vec{M}_i$ можна подати як

$$\vec{M}_i = \vec{M}_{i\text{вн}} + \vec{M}_{i\text{зв}}, \quad (5.42)$$

де $\vec{M}_{i\text{вн}}$ – результуючий момент усіх внутрішніх сил, $\vec{M}_{i\text{зв}}$ – результуючий момент всіх зовнішніх сил відносно тієї ж осі OO .

Просумуємо рівняння (5.40) за всіма елементарними масами

$$\sum_i \Delta m_i r_i^2 \vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_{i\text{вн}} + \vec{M}_{i\text{зв}}. \quad (5.43)$$

Беручи до уваги, що $\sum_{i\text{вн}} \vec{M}_{i\text{вн}} = 0$ і $\vec{\beta}$ – однакове для усіх точок, запишемо:

$$(\sum_i \Delta m_i r_i^2) \vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_{i\text{зв}}. \quad (5.44)$$

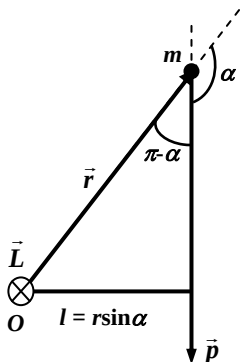
Але $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = J$, а $\sum_{i\text{зв}} \vec{M}_{i\text{зв}} = \vec{M}$. Вектор $\vec{M}$ скерований вздовж осі OO і в ту ж сторону, що $\vec{\beta}$ ($\sum_i \Delta m_i r_i^2 > 0$).

Тоді рівняння (5.44) набирає вигляду:

$$J \vec{\beta} = \vec{M}. \quad (5.45)$$

Рівняння (5.45) називають **основним рівнянням динаміки обертового руху**. За формою воно подібне до другого закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. Але при обертовому русі роль сили відіграє момент сили, роль маси – момент інерції, роль лінійного прискорення – кутове прискорення.

5.7. Момент імпульсу твердого тіла



мал. 5.13

Подібно до моменту сили визначається момент імпульсу матеріальної точки. Момент імпульсу матеріальної точки O дорівнює:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{v}], \quad (5.46)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений із точки O до цієї точки простору, у якій перебуває матеріальна точка, $\vec{p} = m\vec{v}$ – імпульс точки (мал. 5.13).

Увівши плече $l = r\sin\alpha$, модуль вектора моменту імпульсу можна записати:

$$L = rp\sin\alpha = p \cdot l. \quad (5.47)$$

Моментом імпульсу матеріальної точки відносно осі Z називається складова $\vec{L}_Z$ на цю вісь моменту імпульсу $\vec{L}$ відносно точки O , яка лежить на цій осі.

Знайдемо як змінюється момент імпульсу із часом. Для цього продиференціюємо (5.46) по часу t , використавши правило диференціювання добутку:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right]. \quad (5.48)$$

Перший векторний добуток у правій частині рівняння (5.48) дорівнює нулю (обидва вектори $\vec{v}$ і $\vec{p}$ мають однаковий напрям).

Вектор $\frac{d\vec{p}}{dt}$, що входить у другий векторний добуток рівняння

(5.48), дорівнює силі $\vec{F}$ ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, за II законом Ньютона), тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}, \quad (5.49)$$

де $\vec{M}$ – момент сил, прикладених до матеріальної точки, взятий відносно тієї ж точки O , відносно якої розглядається момент імпульсу $\vec{L}$.

Із співвідношення (5.49) можна зробити висновок: якщо результуючий момент діючих на матеріальну точку сил відносно якої-небудь точки O дорівнює нулю, то момент імпульсу матеріальної точки, взятий відносно тієї ж точки O , буде залишатися сталим (незмінним).

Використавши складові по осі Z від векторів, які входять у формулу (5.49), одержуємо вираз:

$$\frac{d\vec{L}_Z}{dt} = \vec{M}_Z. \quad (5.50)$$

Порівнюючи вирази $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ і $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, робимо висновок, що подібно до того, як похідна по часу від імпульсу дорівнює силі, яка діє на матеріальну точку, так само похідна по часу від моменту імпульсу дорівнює моменту сили.

Вектор моменту імпульсу твердого тіла відносно даної осі дорівнює сумі векторів моментів імпульсу всіх його елементів відносно тієї ж осі. Тобто,

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i m_i \vec{v}_i, \quad (5.51)$$

але $\vec{v}_i = \omega \vec{r}_i$, тоді

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i m_i \omega \vec{r}_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2. \quad (5.52)$$

Відомо, що $\sum_i m_i r_i^2 = J$. Відповідно:

$$\vec{L} = J\omega. \quad (5.53)$$

J – завжди скалярна величина, тоді у векторній формі співвідношення (5.53) набуває вигляду:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \quad (5.54)$$

Момент імпульсу тіла відносно деякої осі обертання чисельно дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість його обертання.

5.8. Закон збереження моменту імпульсу твердого тіла

Запишемо основне рівняння динаміки обертового руху тіла у вигляді:

$$\vec{M} = J\vec{\beta} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (5.55)$$

Так як момент інерції твердого тіла відносно даної осі, що зберігає своє положення в тілі, не змінюється, то рівняння (5.55) можна записати так:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = \frac{d}{dt} \vec{L}, \quad (5.56)$$

де $\vec{L} = J\vec{\omega}$ – момент імпульсу тіла. А зміну моменту імпульсу знайдемо за формулою:

$$d\vec{L} = \vec{M}dt. \quad (5.57)$$

Отже, зміна моменту імпульсу твердого тіла відносно деякої осі обертання дорівнює імпульсу моменту прикладених до тіла зовнішніх сил (відносно тієї ж осі).

Із співвідношення (5.56) можна зробити такий висновок: при відсутності моменту зовнішніх сил ($\vec{M} = 0$) момент імпульсу тіла залишається сталим (при $\vec{M} = 0$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ і $\vec{L} = \text{const}$). Цей закон називається законом збереження моменту імпульсу.

Для обертового руху твердого тіла навколо нерухомої осі при $\vec{M} = 0$ момент імпульсу:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}. \quad (5.58)$$

При незмінному моменті інерції тіла (при $\vec{M} = 0$) кутова швидкість обертання тіла залишається сталою. Якщо момент інерції тіла змінюється, то одночасно змінюється і кутова швидкість так, що

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = \text{const}. \quad (5.59)$$

У цьому випадку переміщення мас у тілі, яке змінює момент його інерції, відбувається у результаті дії внутрішніх сил.

5.9. Кінетична енергія обертового руху твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла скінчених розмірів дорівнює сумі кінетичних енергій елементів, на які поділено тіло.

У загальному випадку тіло може рухатися поступально й одночасно обертатися. Розглянемо спочатку випадок обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кінетична енергія кожного елемента (матеріальної точки) тіла:

$$\Delta T_i = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (5.60)$$

де m_i – маса i -го елемента тіла, v_i – його лінійна швидкість.

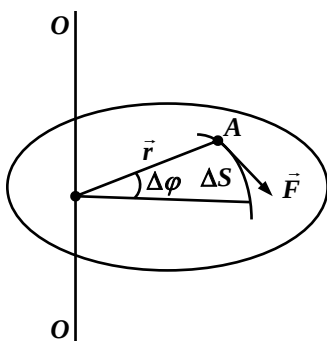
Якщо віддаль цього елемента (його центра) від осі обертання v_i , то, беручи до уваги, що $v_i = \omega r_i$, рівність (5.60) запишемо так:

$$\Delta T_i = \omega^2 \frac{m_i r_i^2}{2}. \quad (5.61)$$

Просумувавши за всіма елементами рівняння (5.61), одержуємо вираз для кінетичної енергії тіла:

$$T = \sum_i \Delta T_i = \sum_i \omega^2 \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (5.62)$$

Висновок: формула (5.62) відрізняється від відповідної формули для кінетичної енергії поступального руху тим, що замість лінійної швидкості до неї входить кутова швидкість, а замість маси – момент інерції.



мал. 5.14

Розглянемо зміну кінетичної енергії тіла, що обертається, під дією сили $\vec{F}$ (мал. 5.14). Нехай тіло обертається навколо нерухомої осі OO' .

Нехай результуюча сила $\vec{F}$, прикладена в точці A тіла, яка є на віддалі $\vec{r}$ від осі. Сила $\vec{F}$ лежить у площині траєкторії точки і направлена по дотичній до неї.

При повороті тіла на кут $\Delta\varphi$ точка прикладання сили перемістилася на довжину дуги ΔS . Якщо кут повороту досить малий, то дугу dS можна прийняти рівною переміщенню dS . Але елементарна робота dA сили $\vec{F}$ на шляху dS дорівнює:

$$dA = FdS = Frd\varphi = Md\varphi, \quad (5.63)$$

бо $dS = rd\varphi$, $M = Fr$.

Повна робота при повороті на кут φ :

$$A = \int_0^{\varphi} Md\varphi. \quad (5.64)$$

Якщо момент рівнодійної зовнішніх сил – величина стала, то із співвідношення (5.64) одержуємо:

$$A = M\varphi, \quad (5.65)$$

При обертовому русі робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту тіла.

Якщо момент сили змінюється в часі, то робота обчислюється виразом (5.64).

Знайдемо зміну кінетичної енергії тіла при обертовому русі. Для цього використаємо основне рівняння динаміки обертового руху:

$$M = J \frac{d\omega}{dt}. \quad (5.66)$$

Перемножимо обидві частини рівняння (5.66) на кут повороту $d\varphi = \omega dt$, де ω – кутова швидкість обертання і dt – дуже малий інтервал, протягом якого можна вважати $M = \text{const}$:

$$Md\varphi = J \frac{d\omega}{dt} d\varphi = J \frac{d\omega}{dt} \omega dt = Jd\left(\frac{\omega^2}{2}\right). \quad (5.67)$$

Проінтегрувавши (5.67), одержуємо:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Md\varphi = \int_{\omega_0}^{\omega_1} Jd\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = J \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = J \frac{\omega_1^2}{2} - J \frac{\omega_0^2}{2}. \quad (5.68)$$

$$\text{Або: } A = \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{J\omega_0^2}{2}. \quad (5.69)$$

Отже, зміна кінетичної енергії тіла при обертовому русі дорівнює роботі сил, момент яких надає тілу кутового прискорення.

Запитання для самоконтролю

1. Які фізичні величини характеризують кінематику поступального руху твердого тіла?

2. Який рух називається обертальним?
3. Які кінематичні величини характеризують обертання твердого тіла відносно осі?
4. Дайте визначення кутової швидкості та кутового прискорення. Як скеровані ці вектори для тіла із закріпленою віссю?
5. Які зв'язки існують між кутовими та лінійними величинами?
6. Що називають ступенями вільності твердого тіла? Скільки ступенів вільності має матеріальна точка? Якою є максимальна кількість ступенів вільності? У якому випадку їх використовують?
7. Дайте визначення моменту інерції тіла відносно осі. Запишіть формулу.
8. Що називають моментом сили відносно точки? Як знайти напрям моменту сили відносно точки? Як знайти модуль момента сили?
9. Що називають моментом сили відносно осі?
10. Що називають плечем сили?
11. Виведіть основний закон динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
12. Порівнюючи $\vec{M} = J\vec{\beta}$ з законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$, зазначте, в чому є їх аналогія і які її наслідки.
13. Що називають моментом імпульсу матеріальної точки твердого тіла?
14. Сформулюйте і доведіть теорему Штейнера.
15. Виведіть формулу для підрахунку моменту інерції диска відносно осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через центр його інерції.
16. Запишіть формули моментів інерції деяких тіл, вказуючи осі, відносно яких вони розглядаються.
17. Виведіть формулу для кінетичної енергії тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.
18. Запишіть формулу для кінетичної енергії тіла, яке котиться по горизонтальній поверхні.
19. Сформулюйте закон збереження моменту імпульсу. Запишіть формулу.
20. Як знайти зміну моменту імпульсу тіла? Запишіть формулу та поясніть її.
21. Опишіть (розкажіть), які досліди можна продемонструвати з використанням лави Жуковського?

6. МЕХАНІКА РІДИН

6.1. Основні поняття і визначення гідродинаміки

Гідродинаміка (від грецького *гюдор* – вода, *динаміка* – сила) – наука про рух рідин під дією зовнішніх сил і про механічну взаємодію між рідиною та тілами, що з нею стикаються, при їх відносному русі.

У завдання гідродинаміки входить:

- вивчення законів руху рідин;
- вивчення сил, з якими рідина діє на занурені в неї тіла, коли вони рухаються.

Закони гідродинаміки порівняно просто вивести у випадку нестисливої і нев'язкої (ідеальної) рідини. Гідродинаміка як наука виникла у XVIII ст. Її заснували члени Петербурзької академії наук Л.Ейлер і Д.Бернуллі.

Розглянемо основні поняття й визначення гідродинаміки. Сукупність рухомих частинок рідини називається *поток*ом. Проведемо через різні точки потоку лінії так, щоб дотична, проведена в кожній точці до кожної лінії, збігалася з напрямом швидкості рідини в цій точці. Ці лінії називаються *лініями течії*.

Лінії течії проводять так, щоб їх густина була пропорційна швидкості рідини в даній ділянці потоку.

Якщо течія рідини така, що частинка рідини, яка проходить у будь-яку точку простору, має завжди одну і ту саму за величиною і напрямом швидкість, то лінії течії зберігають з часом незмінну форму. Таку течію називають *стаціонарною*.

Хибною є думка, що при стаціонарній течії певна частинка рідини рухається із сталою за величиною швидкістю. Через різні точки частинка може проходити з різними швидкостями, але всі частинки проходять через дану точку з однією і тією ж самою за величиною і напрямом швидкістю.

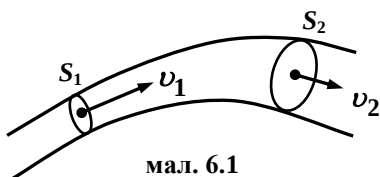
Оскільки в стаціонарному потоці розподіл швидкостей не змінюється з часом, то лінії течії в цьому випадку збігаються з траєкторіями частинок рідини.

Якщо виділити в середині потоку площадку S і провести через точки її контуру лінії течії, то дістанемо частину потоку, яка називається трубкою течії.

При стаціонарній течії трубка течії не змінює своєї форми і не обмінюється частинками рідини з сусідніми трубками.

Потік, у якому розподіл швидкостей змінюється з часом, називається *нестационарним потоком*. У нестационарному потоці лінії потоку в різні моменти часу проходять через різні частинки рідини і не співпадають з їх траєкторіями.

6.2. Теорема про нерозривність потоку



Поверхня, утворена лініями потоку в рідині, є ніби трубкою, через яку не може проникнути рідина. Її називають, як уже сказано вище, трубкою течії (мал. 6.1).

Розміри та положення трубки течії вибираються такими, щоби в межах трубки швидкість течії можна було вважати постійною і направленою по дотичній до контура.

З'ясуємо питання про кількість рідини або газу, що протікає через будь-який поперечний переріз трубки течії за одиницю часу. Якщо площа перерізу трубки в одному місці S_1 , швидкість потоку v_1 і густина ρ_1 , а в другому місці – відповідно v_2 , S_2 , ρ_2 (мал. 6.1), то $\rho_1 S_1 v_1$, і $\rho_2 S_2 v_2$ будуть шукані кількості рідини або газу.

У стаціонарному потоці ці кількості рідини або газу будуть однаковими:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2, \quad (6.1)$$

бо інакше між перерізами S_1 і S_2 кількість речовини весь час буде або збільшуватися, або зменшуватися і не буде існувати стаціонарного потоку.

Розрахунки показують, що в стаціонарному потоці змінами густини не тільки рідини, а й газу можна знехтувати. Тому рівняння (6.1) можна записати так:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (6.2)$$

або в узагальненому вигляді

$$S v = \text{const}. \quad (6.3)$$

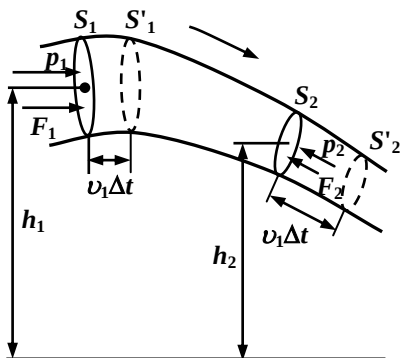
Рівняння (6.3) становить суть теореми про нерозривність течії (поток) рідини або газу.

Із рівняння (6.2) випливає, що

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}, \quad (6.4)$$

де переріз трубки течії більший, там швидкість частинок рідини (чи газу) менша, і навпаки.

6.3. Теорема Бернуллі та її наслідки



мал. 6.2

Розглянемо ділянку трубки течії, обмежену двома поперечними перерізами S_1 і S_2 (мал. 6.2). Площі перерізів вибираємо дуже малими, щоби швидкість частинок і тиск у межах кожного із перерізів можна було вважати сталими. Рухаючись від перерізу S_1 до перерізу S_2 , рідина зазнає прискорення. Отже, на рідину,

яка перебуває у даний момент у звуженій частині трубки течії, діє деяка сила зі сторони рідини, що перебуває у ширшій її частині, яка може виникнути тільки внаслідок різниці тисків у різних перерізах трубки. Ця сила направлена в бік вузької частини трубки, тому в місцях звуження тиск є менший, ніж в місцях розширення.

Знайдемо зв'язок між тиском і швидкістю рідини в різних перерізах трубки, обмежуючись розглядом ідеальної рідини (не враховуючи в'язкості і стисливості рідини), що дає змогу вважати роботу внутрішніх сил у рідині рівною нулю.

Додатково на рух рідини накладемо ще такі умови:

- тертям між рідиною і стінками трубки течії (посудини) нехтуємо;
- рух рідини є цілком установленим (маса рідин постійна);
- лінії течії слабо викривлені (що дає змогу знехтувати доцентровим прискоренням частинок рідини і пов'язаною із ним зміною тиску в поперечному перерізі трубки течії).

До рідини, яка перебуває у зазначеному об'ємі, можна застосовувати другий закон динаміки і написати для неї рівняння руху. Але оскільки в ідеальній рідині відсутнє розсіювання (втрати) механічної енергії, то результат простіше одержати, застосувавши закон збереження енергії.

Знайдемо зміну повної механічної енергії виділеної маси рідини за малий проміжок часу Δt . За цей час ця рідина переміститься вправо, у результаті чого вона буде обмежена перерізами S_1' і S_2' . Очевидно, частина рідини між перерізами S_1' і S_2' ніяких змін не зазнає.

Змін зазнала маса рідини m , що перебуває між перерізами S_1 і S_1' і має повну енергію:

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1,$$

бо вона ніби перемістилася у положення $S_2 - S_2'$ і її енергія змінилася та дорівнює:

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2.$$

Отже, при переміщенні згаданого об'єму рідини із положення S_1 і S_2 в положення S_1' і S_2' її повна енергія змінилася на величину:

$$\Delta W = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 \right). \quad (6.5)$$

Відповідно до закону збереження енергії ця зміна повної механічної енергії дорівнює роботі ΔW зовнішніх (щодо рідини в об'ємі S_1, S_2) сил тиску на перерізи S_1 і S_2 (за умовою, сили тертя не враховуємо):

$$\Delta W = \Delta A. \quad (6.6)$$

Повна робота зовнішніх сил буде дорівнювати:

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V, \quad (6.7)$$

де ΔV – об'єм рідини, що розглядається.

Тоді одержуємо:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 \Delta V = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 \Delta V. \quad (6.8)$$

Розділимо обидві частини рівняння (6.8) на ΔV , і взявши до уваги,

що $\rho = \frac{m}{V}$, знайдемо:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1. \quad (6.9)$$

Або

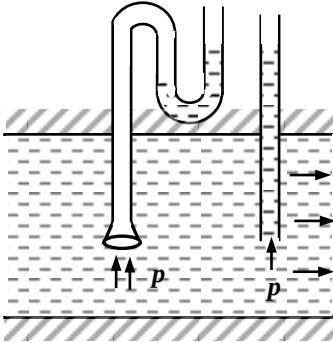
$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (6.10)$$

Співвідношення (6.9) називається *рівнянням (теоремою) Бернуллі*. Це рівняння справедливе для стаціонарної течії нестисливої і нев'язкої рідини. Воно відіграє дуже важливу роль у динаміці ідеальної рідини.

Усі складові цього рівняння мають розмірність тиску. Складова p означає тиск всередині рухомої рідини; його називають *статичним тиском*.

Статичний тиск треба вимірювати за допомогою манометра, який переміщується разом з рідиною.

Однак на практиці статичний тиск вимірюють нерухомим манометром, мембрана якого або площа отвору манометричної трубки розміщена паралельно до ліній течії (мал. 6.3).



мал. 6.3

Статичний тиск згідно з (6.10) визначається співвідношенням:

$$p = \text{const} - \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h. \quad (6.11)$$

Якщо при $v = 0$ і $h = 0$ статичний тиск $p = p_0$, то одержуємо:

$p_0 = \text{const}$. Звідси випливає, що постійна в рівнянні Бернуллі має зміст тиску всередині нерухомої рідини на рівні, який прийнято за початок відліку.

Складова $\rho v^2 / 2$, яка називається *динамічним тиском*, показує, на яку величину зменшився тиск всередині рідини внаслідок її руху. Складова $\rho g h$ називається *гідралічним тиском*; вона показує, наскільки зменшується статичний тиск при піднятті трубки на висоту h .

6.4. Сили в'язкості. Коефіцієнт в'язкості

Реальні рідини та гази характеризуються *в'язкістю* і *стисливістю*. І якщо для рідини характернішою рисою є в'язкість, то для газу при достатньо великій швидкості ($v > 70 \text{ м/с}$) визначальною властивістю буде стисливість. Стиск газу супроводжується нагріванням, тому повно описати рух стисливого газу в рамках механіки (без врахування теплоти, що виділяється) неможливо. Тому будемо розглядати в основному рух рідини та газу з урахуванням лише внутрішнього тертя.

Сили в'язкості, або сили внутрішнього тертя, виникають при відносному русі шарів рідини (або газу). Вони прикладені до шарів рідини і діють по дотичній до них.

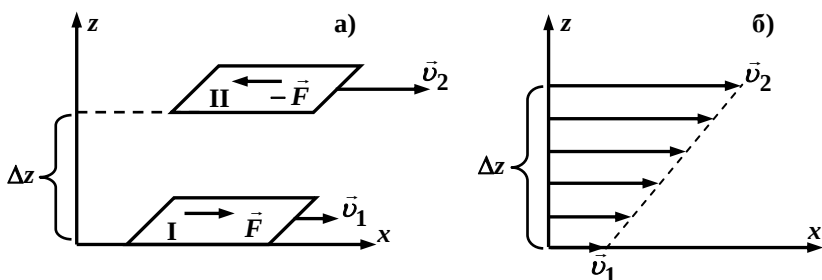
Два шари, які рухаються один відносно одного, взаємодіють вздовж поверхні розподілу з рівними за величиною і протилежними за напрямками силами внутрішнього тертя.

У рідинах ці сили зумовлені головно зчепленнями між молекулами, які належать до різних шарів.

У газах зчеплення між молекулами мале, а їх рухливість, навпаки, велика. Тому сили внутрішнього тертя у газах виникають за рахунок обміну імпульсами молекул, що переходять з одного шару в інший.

Але досвід показує, що і в рідинах, і в газах сили внутрішнього тертя підлягають одному закону.

Розглянемо його на прикладі течії, при якій плоскі шари рухаються паралельно один до одного з різними швидкостями (мал. 6.4).



мал. 6.4

Виділимо в потоці два паралельних, рівних за площею шари, які перебувають один від одного на віддалі Δz (мал. 6.4, а). Зміна швидкості від шару до шару із збільшенням координати x відбувається лінійно (мал. 6.4, б).

Дослід показує, що на кожний шар діє сила $\vec{F}$, яка пропорційна площі шарів S і величині $\frac{\Delta v}{\Delta z}$, що характеризує швидкість зміни швидкості при переході від шару до шару, тобто в напрямку, перпендикулярному до шарів (по осі z):

$$F \sim S \frac{\Delta v}{\Delta z}, \quad (6.12)$$

де $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ – градієнт швидкості.

Увівши коефіцієнт пропорційності η , формулу (6.12) запишемо так:

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} S. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.13) називають *законом Ньютона (формулою Ньютона)*.

Коефіцієнт пропорційності η залежить, як завжди, від вибору одиниць вимірювання величин, які входять у рівняння (6.13). Але дослід показує, що цей коефіцієнт також залежить від роду рідини або газу і, відповідно, характеризує в'язкі властивості рідини або газу. Тому він називається *коефіцієнтом внутрішнього тертя* або *коефіцієнтом в'язкості* (або просто *в'язкістю*).

За одиницю в'язкості в системі СІ приймається *Паскаль-секунда*.

В'язкість газів у сотні разів менша від в'язкості рідин. В'язкість залежить від температури: у рідинах з підвищенням температури в'язкість зменшується, а в газах – збільшується.

Використаємо поняття дотичної напруги $\tau = \frac{F}{S}$, яке буде мати смисл сили в'язкості, яка діє на одиницю поверхневого шару та формулу (6.13) перепишемо так:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dz}. \quad (6.14)$$

Сила в'язкості, яка діє на елемент поверхні dS , дорівнює:

$$dF = \tau dS. \quad (6.15)$$

Тоді повну силу в'язкості знаходимо так:

$$F = \int_s \tau dS. \quad (6.16)$$

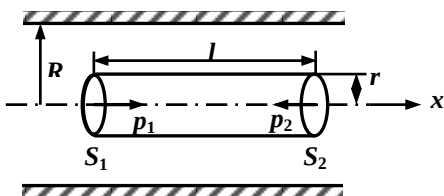
6.5. Рух в'язкої рідини. Формула Пуазейля

При стаціонарній течії в трубці постійного радіуса R всі шари рідини рухаються рівномірно. Але швидкості різних шарів різні. Шар, що прилип до стінок трубки, нерухомий. Цей шар має форму циліндричної трубки. Усі інші рухомі шари рідини є циліндричними

трубками, вставленими одна в одну, швидкість яких збільшується при наближенні до осі трубки.

Знайдемо розподіл швидкості рідини вздовж перерізу (діаметра) трубки.

Виділимо в потоці циліндричний елемент рідини довжиною l розміщений по осі трубки (мал. 6.5). На виділений елемент, крім сили тяжіння, діють ще зі сторони оточуючої рідини сили нормального тиску й сили внутрішнього тертя, дотичні до бічної поверхні циліндра.



мал. 6.5

При стаціонарній течії сума діючих сил дорівнює нулю

$$(\sum \vec{F} = 0, \quad m\vec{a} = 0, \quad \vec{v} = \text{const}).$$

Сили тиску на бічну поверхню зрівноважуються силою тяжіння, яка діє на виділений об'єм рідини; сили тиску на основи циліндра

зрівноважуються силами внутрішнього тертя, дотичними до його бічної поверхні.

Якщо тиск в деякому перерізі трубки вважати сталим по всьому перерізу (нехтуємо вагою рідини), то умовою стаціонарності буде рівняння:

$$\vec{F}_{1\text{тиску}} + \vec{F}_{2\text{тиску}} + \vec{F}_{\text{вязк.}} = 0, \quad (6.17)$$

або

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau 2\pi l = 0, \quad (6.18)$$

де p_1 і p_2 – тиск у перерізах S_1 і S_2 ; τ – сила в'язкості, що припадає на одиницю поверхні. Врахуємо, що

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dz} = -\eta \frac{dv}{dr},$$

Знак “мінус” береться тому, що швидкість течії шару зменшується із збільшенням радіуса r .

Тоді рівняння (6.18) можна записати так:

$$r(p_1 - p_2) + 2\eta l \frac{dv}{dr} = 0. \quad (6.19)$$

Звідки:

$$dv = - \frac{(p_1 - p_2) r dr}{2\eta l}. \quad (6.20)$$

Проінтегрувавши (6.20), одержуємо:

$$v = - \frac{(p_1 - p_2) r^2}{4\eta l} + C \quad (6.21)$$

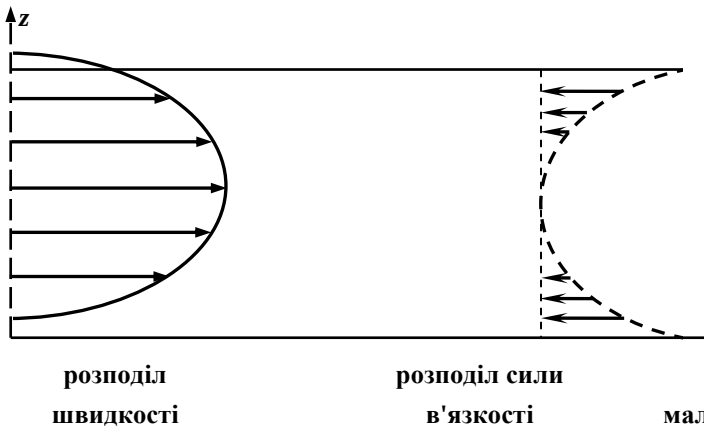
Використаємо граничні умови, щоб знайти сталу інтегрування C . Біля стінок труби ($r = R$) швидкість частинок рідини дорівнює нулю, тому:

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (6.22)$$

Отже, розподіл швидкості рідини по перерізу труби буде визначатися формулою:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (6.23)$$

З рівняння (6.23) видно, що зміна швидкості вздовж радіуса відбувається за параболічним законом (мал. 6.6). Швидкість рідини максимальна на осі труби, де вона має значення ($r = 0$):



$$v_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \quad (6.24)$$

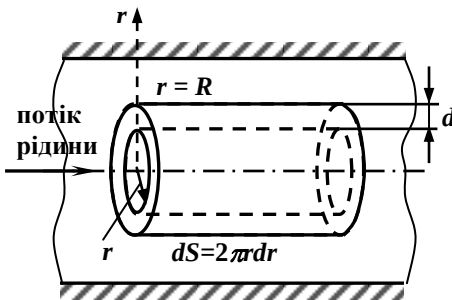
З формули (6.22) і мал. 6.6 видно, що градієнт швидкості має найбільше значення біля стінок труби і найменше на осі (нульове). У відповідності із цим і будуть розподілятися і сили в'язкості.

Виділимо в рідині циліндричний шар радіусом r і товщиною dr (мал. 6.7). Об'єм рідини, що перетікає за одиницю часу (витрата рідини) для цього шару дорівнює:

$$dV = v dS = v 2\pi r dr. \quad (6.25)$$

Для всього перерізу витрату рідини знайдемо шляхом інтегрування (6.25):

$$V = \int_0^R dV = \int_0^R \frac{R^2 - r^2}{4\eta l} (p_1 - p_2) 2\pi r dr = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4, \quad (6.26)$$



мал. 6.7

Це і є відома *формула (закон) Пуазейля-Гагена*.

Закон (формула) Пуазейля дає можливість вимірювати коефіцієнт в'язкості η рідини шляхом визначення її витрати в циліндричній трубці.

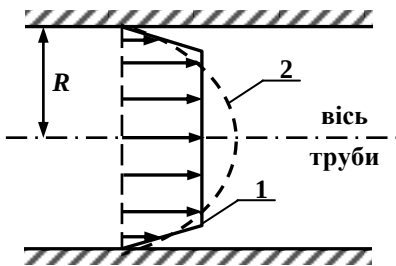
6.6. Ламінарний і турбулентний рух рідин. Число Рейнольдса

Якщо при русі рідини її частинки не переходять з одного шару в інший, то така течія є шаруватою і шари рідини ковзають один відносно одного, не перемішуючись, то такий рух рідини називають *ламінарним*.

Якщо збільшувати швидкість течії рідини, то шари рідини починають перемішуватися, в рідині виникають бульбашки, утворюються *вихри*. Такий рух рідини називають *турбулентним*. При

русі в'язкої рідини спостерігаються обидва види руху: ламінарний і турбулентний.

Якщо ж сили внутрішнього тертя досягають певної величини, то їх дія на шари рідини настільки велика, що це приводить до порушення шаруватості течії і виникнення перемішування шарів рідини.



мал. 6.8

Турбулентний рух не стаціонарний: швидкість v і тиск p в кожній точці коливаються біля деяких середніх значень. Тому при турбулентному русі можна говорити лише про середні (в часі) значення швидкості і тиску в кожній точці перерізу труби (мал. 6.8).

Зміна середньої швидкості залежно від віддалі від осі труби має вигляд, показаний кривою 1 (кривою 2 показано зміну швидкості при ламінарній течії). У результаті перемішування шарів рідини середня швидкість практично однакова по всьому перерізу. Тільки в дуже тонкому шарі, який прилягає до стінок труби, зберігається градієнт швидкості, який в цьому випадку набагато більший від градієнта в цьому шарі при ламінарній течії.

Формула Пуазейля непридатна для турбулентного руху. Для одного і того ж Δp витрата рідини V при турбулентному русі менша, ніж при ламінарному. Це пояснюється тим, що при турбулентному русі різко зростають сили внутрішнього тертя ($\frac{\Delta v}{\Delta r}$ – дуже велике). Збільшення внутрішнього тертя зумовлене ще і тим, що коефіцієнт в'язкості η зростає при переході до турбулентного руху.

Досліджуючи питання про виникнення турбулентності при течії рідини трубами, Рейнольдс Осборн (1842–1912, англ. фіз.) установив, що характер течії залежить від значення безрозмірної величини:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}, \quad (6.27)$$

де ρ – густина рідини; η – її в'язкість; v – середня по перерізу труби швидкість потоку; D – діаметр труби.

Величину **Re** називають *числом Рейнольдса*. Дослід показує, що при малих значеннях Re течія рідини (або газу) є ламінарною, а при великих – турбулентною.

Значення числа Рейнольдса і значення швидкості v , що йому відповідає, яке характеризує перехід від ламінарного до турбулентного потоку, називають *критичними* (**Re_{кр}**, **v_{кр}**).

Вивчаючи на досліді рух рідин і газів трубами у звичайних умовах, встановлено, що:

$$\text{Re}_{кр} = \frac{\rho v_{кр} D}{\eta} = 2300. \quad (6.28)$$

Це означає, що коли **Re** < 2300, то течія ламінарна. Якщо **Re** > 2300, то течія турбулентна. Дослід показує, що при **Re**, близькому до **Re_{кр}**, ламінарна течія нестійка і дуже чутлива до різного виду факторів (різкі переходи в трубі, шороховатість стінок, вібрації тощо).

6.7. Рух тіл в рідинах і газах. Формула Стокса

Дослід показує, що тіла, які рухаються у реальній рідині (або газі) зазнають дії сили лобового опору (тобто опору рухові), а при деяких умовах і підйимальної сили. Як виникають ці сили і яка їх природа?

Як показав Прандталь, процеси, які зумовлюють появу вказаних сил, відбуваються у шарі рідини, який безпосередньо прилягає до поверхні тіла і який одержав спеціальну назву пограничного шару.

У пограничному шарі, як і при течії в трубі, режими течії рідини можуть бути як ламінарними, так і турбулентними. Режим течії в пограничному шарі визначає і характер сили взаємодії тіла з потоком рідини. Як і при русі рідини в трубах, існують характерні числа

Рейнольдса, при яких в пограничному шарі ламінарна течія переходить у турбулентну.

Розрізняють опір тертя і опір тиску. Розглянемо сили тертя, які виникають при русі тіл у рідині, що одержали назву опір тертя.

При невеликих швидкостях течії ($Re < 100$), коли в пограничному шарі є ламінарний режим течії, рідина плавно обтікає тіло; лінії течії мають такий вигляд, як і при обтіканні ідеальною рідиною.

При обтіканні кулі результуюча сила тиску на поверхню кулі через симетрію ліній течії дорівнює нулю. Через цю ж причину ця ж сила буде дорівнювати нулю і у випадку ламінарного обтікання в'язкою рідиною.

Сила, що діє на кулю зі сторони рідини, є силою внутрішнього тертя, результуючою сил тертя τdS , прикладених до кожного елемента поверхні кулі.

Сила тертя F_{mp} залежить тільки від в'язкості η , відносної швидкості v_0 (швидкість незбуреного потоку) і радіуса кулі R .

Стокс встановив, що на кульку, яка рухається в рідині діє сила тертя:

$$F_{mp} = 6\pi\eta v_0 R. \quad (6.29)$$

Формула Стокса вказує на лінійну залежність F_{mp}

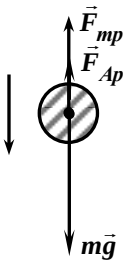
від v_0 .

З формули Стокса можна визначити встановлену швидкість падіння кульки у в'язкій рідині (мал. 6.9). На цьому принципі ґрунтується один із методів визначення коефіцієнта в'язкості η . Якщо $v_0 = \text{const}$, то:

$$mg = F_{mp} + F_{Apx} \quad (\text{бо прискорення } \vec{a} = 0).$$

$$\text{Але } mg = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g, \quad F_{Apx} = \rho' \frac{4}{3}\pi R^3 g,$$

де ρ і ρ' – густини кульки і рідини відповідно, то



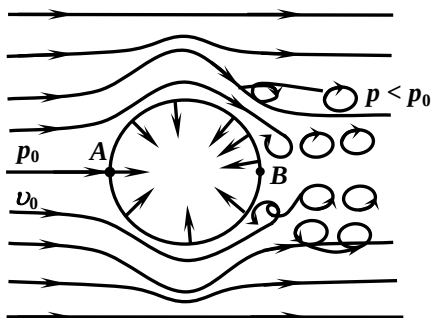
мал. 6.9

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho')g}{9\eta} R^2. \quad (6.30)$$

Отже, швидкість кульки пропорційна квадрату її радіуса. При малих радіусах ($R \ll 1$) швидкість дуже мала. Цим пояснюються явища, які пов'язані з утворенням зависання у газах і рідинах дуже малих частинок (хмарки, туман тощо).

6.8. Лобовий опір (опір тиску)

Дослід показує, що при збільшенні швидкості течії настає такий момент, коли картина обтікання тіла різко змінюється; за тілом утворюється вихор (мал. 6.10), який відривається від тіла і відноситься течією, утворюючи так звану вихрову доріжку. Тіло і ця вихрова доріжка обтікаються шаруватою течією.



мал. 6.10

При симетричній формі тіла позаду нього утворюються звичайно два вихори з однаковими за модулем, але протилежними за напрямками моментами імпульсу (відповідно до закону збереження моменту імпульсу для замкнутої системи тіло – рідина).

Утворені вихори порушують симетрію у розподілі тиску рідини на поверхню циліндра. Якщо в незбуреному потоці тиск дорівнює p_0 , то в області, зайнятій вихором (позаду тіла), він менший від p_0 .

З іншого боку, в області, що прилягає до передньої частини циліндра (т. А), тиск рідини згідно з законом Бернуллі дорівнює

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \text{ тобто більший, ніж у незбуреному потоці. Отже,}$$

результуюча сила тиску, яка розподілена по поверхні циліндра,

відмінна від нуля і направлена внаслідок симетрії за потоком. Цю силу опору називають *силою опору тиску* $F_{тиску}$.

Так як різниця тисків спереду і ззаду циліндра оцінюється величиною $\frac{\rho v_0^2}{2}$, то і результуюча сила буде пропорційна до тієї ж величини, тобто буде залежати від густини ρ рідини і квадрата відносної швидкості v_0 .

Зрозуміло, що результуюча сила $F_{тиску}$ повинна залежати також і від величини області, яка зайнята вихором позаду тіла, що в свою чергу визначається розмірами тіла.

Прийmemo за характерний розмір найбільшу площу S перерізу тіла площиною, яка перпендикулярна до потоку – міделевий переріз.

Отже, $F_{тиску}$ може залежати від ρ , S , v_0 .

Записавши цю залежність у загальному вигляді:

$$F_{тиску} = \frac{c_x}{2} \rho^x S^y v_0^z,$$

і застосувавши описаний вище метод розмірностей, одержуємо:

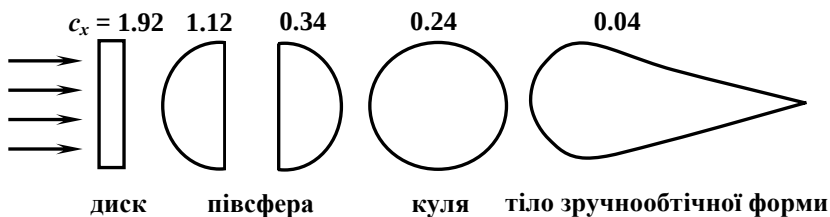
$$x=1, y=1, z=2.$$

Тоді приходимо до наступного закону, якому підлягає сила лобового опору ($F_{тиску}$) при наявності вихорів позаду тіла:

$$F_{тиску} = c_x S \rho \frac{v_0^2}{2}, \quad (6.31)$$

де c_x – безрозмірний коефіцієнт, названий коефіцієнтом лобового опору, c_x – функція числа Рейнольдса, що враховує в'язкі властивості рідини і форму тіла.

Зменшення лобового опору тіла можна досягти зменшенням зони вихроутворення. Для цього тілу треба надати такої форми, при якій потік плавно би з'єднувався за ним і зона вихрів була б мінімальною. На мал. 6.11 показано, як залежить коефіцієнт c_x від форми тіла.



мал. 6.11

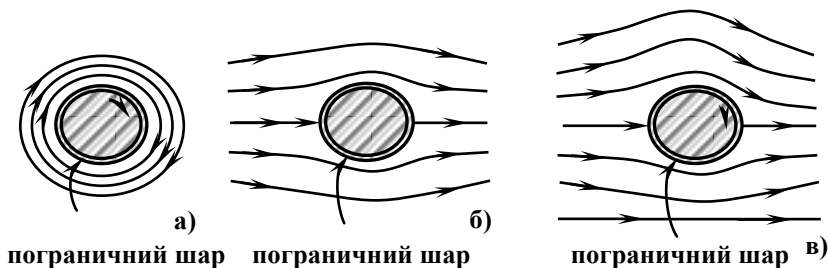
Приклад з півкулями дуже наочний: він показує, що основний вплив на величину лобового опору чинить форма не передньої частини тіла, а задньої, тієї, за якою утворюються вихори.

6.9. Ефект Магнуса. Підймальна сила крила літака

Основи теорії підймальної сили крила літака закладені Жуковським у 1906 р. Щоб краще зрозуміти це явище, попередньо розглянемо так званий ефект Магнуса (1802–1870, нім. фіз.).

Відомо, що обертовий твердий циліндр утворює у необмеженій масі в'язкої рідини коловий вихровий рух з інтенсивністю $\Gamma = 2S\omega$ (S і ω – площа перерізу й кутова швидкість обертання циліндра) (мал. 6.12, а).

Циліндр (що не обертається), що рухається поступально з відносною швидкістю v_0 (при малих v_0) обтікається ламінарним потоком, який є поза пограничним шаром також не вихровим (мал. 6.12, б).



мал. 6.12

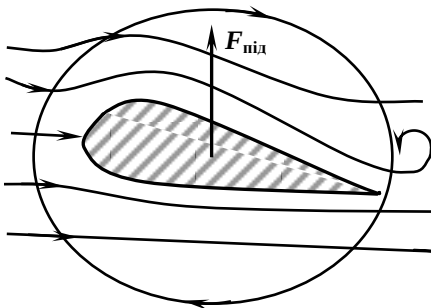
Якщо ж циліндр обертається і одночасно рухається поступально, то два оточуючих його невихрових потоки накладаються один на одного і дають результуючий потік обтікання (мал. 6.12, в). У результуючому потоці швидкість течії рідини над циліндром стає більшою, ніж під циліндром. Тому, згідно з законом Бернуллі, тиск рідини на верхню частину циліндра буде менший, ніж на нижню. Це призводить до виникнення (мал. 6.12, в) вертикальної сили, названої підйнятною (*ефект Магнуса*).

В ефекті Магнуса підймальна сила $F_{\text{під}}$ перпендикулярна до швидкості потоку $\vec{v}_0$. Щоби знайти напрям цієї сили, треба вектор відносної швидкості $\vec{v}_0$ повернути на кут 90° в сторону, протилежну до обертання циліндра.

Механізм утворення підймальної сили крила літака аналогічний до механізму виникнення сили в ефекті Магнуса. Але виникнення колового руху пояснюється цілком іншими причинами.

Дякуючи асиметричній формі крила (мал. 6.13), наявністю гострої задньої кромки внаслідок описаних вище процесів, які існують у пограничному шарі, за крилом утворюється вихор і при цьому один – розгінний вихор.

Розгінний вихор має певний момент імпульсу. Але момент імпульсу системи крило – повітря повинен залишатися сталим (дорівнювати нулю), так як зовнішніх моментів сил, які діють на систему, немає.



мал. 6.13

Тому поряд з вихором, який виникає позаду крила, повинен виникнути коловий рух повітря, яке б мало однаковий з вихором момент імпульсу, але протилежного напрямку.

Жуковський показав, що разом з вихором виникає коловий рух повітря навколо крила.

У результаті накладання швидкості потоку повітря і швидкості повітря у коловому русі швидкість течії повітря над крилом стає більшою, ніж під крилом. Звідси згідно з законом Бернуллі тиск повітря під крилом є більший, ніж над крилом, що і є причиною виникнення підйімальної сили.

Отже, при обтіканні крила повітрям виникають два вихори: розгінний і приєднаний. Підймальну силу створює приєднаний вихор.

Вихор позаду крила є причиною лобового опору. Відповідно одночасно з підйімальною силою обов'язково виникає лобовий опір. Оскільки сила лобового опору $F_{\text{лоб}}$ і підймальна сила $F_{\text{під}}$ залежать від вихора, що утворюється позаду крила, то їх можна знайти за формулами:

$$F_{\text{лоб}} = c_x S \rho \frac{v_0^2}{2}. \quad (6.32)$$

$$F_{\text{під}} = c_y S \rho \frac{v_0^2}{2}, \quad (6.33)$$

де c_x і c_y – коефіцієнти відповідно лобового опору та підйімальної сили, які залежать від форми профілю крила (а не від його розмірів) і кута атаки α .

Питання для самоконтролю

1. Що спільного між рідиною і газом, яка між ними різниця?
2. До яких видів деформації газ і рідина виявляють пружні властивості?
3. Чим відрізняються умови рівноваги рідини від умов рівноваги твердого тіла?
4. Сформулюйте закон Паскаля. Поясніть принцип дії гідравлічного преса.
5. Сформулюйте закон Архімеда. Від чого залежить величина архімедової сили? Запишіть формулу.
6. Що називають лінією течії?
7. Який вигляд має рівняння неперервності для нестискуваної і стискуваної рідини?
8. Яку течію називають стаціонарною?

9. Запишіть рівняння Бернуллі і поясніть його зміст.
10. Виведіть рівняння Бернуллі.
11. Для чого використовують трубку Піто?
12. Як можна виміряти статичний тиск всередині рухомої рідини?
13. Яка будова трубки Прандтля? Для чого її використовують? Запишіть формулу.
14. Виведіть формулу Торрічеллі.
15. Як можна знайти результуючу силу тиску рідини, що тече, на стінки зігнутої труби?
16. Виведіть формулу Пуазейля.
17. За яким законом розподіляється швидкість рідини вздовж перерізу труби? Запишіть формулу.
18. Яку течію рідини називають ламінарною? А яку турбулентною?
19. Запишіть формулу для знаходження числа Рейнольдса.
20. Що називають пограничним шаром? Від чого залежить його товщина?
21. На тіло, що рухається у в'язкому середовищі, діє сила лобового опору. При яких умовах спостерігається опір тертя і опір тиску?
22. Запишіть формулу Стокса. Як її можна вивести?
23. Поясніть, як утворюється вихор позаду тіла, яке обтікається рідиною або газом.
24. Що таке коефіцієнт лобового опору і від чого він залежить?
25. Поясніть, чому лобовий опір у диска більший, ніж у кулі?
26. Яке тіло називають зручнообтічним? Чому?
27. У чому суть ефекту Магнуса? Опишіть механізм утворення сили Магнуса.
28. Сформулюйте правило, за яким визначається напрямок сили Магнуса.
29. Який вихор називається розгінним? Який вихор називають приєднаним? Чому виникає приєднаний вихор?
30. Поясніть виникнення підйимальної сили крила літака.
31. Від чого залежить підйимальна сила? Як її виміряти?
32. Які особливості руху тіл з надзвуковими швидкостями?
33. Чому передню частину крила надзвукових літаків роблять гострою?
34. Що таке ударна хвиля?

7. ОСНОВИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ (СТВ)

7.1. Межі застосування класичних понять і законів у механіці

Кінематика – розділ механіки, завданням якої є вивчення механічних рухів тіл без в'яснення причин цих рухів. Для опису рухів тіл треба вибрати систему відліку. Цей вибір залежить від конкретних умов поставленого завдання.

У різних системах відліку, які рухаються одна відносно одної, значення багатьох кінематичних величин виявляються різними. Такі величини називаються *відносними*. *Відносними величинами в кінематиці є координати, переміщення, швидкість і прискорення. Відносною є і траєкторія рухомого тіла. Отже, у різних системах відліку рух одного і того ж тіла описується по-різному.*

Але з точки зору кінематики, усі системи відліку є рівноправними. Жодна із систем відліку не є “справжньою”, вибір кожної з них визначається лише міркуванням зручності й доцільності. За значеннями кінематичних величин в одній системі відліку можна розрахувати значення цих же величин у будь-якій іншій системі відліку.

Поряд з відносними кінематичними характеристиками є величини, однакові в різних системах відліку. Такі величини називаються *інваріантними*. *Прикладами інваріантних кінематичних величин є час Δt і довжина відрізка l . Дуже важливо підкреслити, що прискорення, яке є, взагалі кажучи, відносною величиною у системах відліку, що рухаються одна відносно одної із постійною швидкістю $\vec{v}_0$, є величиною інваріантною.*

Треба звернути увагу, що поділ фізичних величин на відносні й інваріантні відбувається на основі узагальнення результатів досліду і, відповідно, усі наші висновки справедливі лише для умов, у яких ці досліди проводилися.

Наведені вище дані справедливі лише для класичної механіки, яка розглядає рух тіл із швидкостями, набагато меншими від швидкості світла.

Інтервал часу та довжина тіла, які є в класичній механіці інваріантними величинами, при русі із швидкостями, близькими до швидкості світла перестають бути інваріантними.

А швидкість світла, на відміну від усіх інших швидкостей матеріальних об'єктів, є інваріантною величиною.

У 1955 р. радянський фізик А.М.Бонч-Бруєвич виконав досліди, які показали, що швидкість світла не залежить від руху джерела світла, а це суперечить класичному закону додавання швидкостей:

$$\vec{v}' = \vec{v}_0' + \vec{v}. \quad (7.1)$$

Для відшукування закону додавання швидкостей, який дав би змогу здійснювати перерахунок швидкостей руху реальних тіл використовують принцип відповідності, сформульований Н.Бором у 1913 р. Цей принцип стверджує: будь-яка нова теорія, яка претендує на глибший опис фізичної реальності і на ширшу область застосування, ніж стара, повинна включати останню як граничний випадок.

Релятивістський закон додавання швидкостей має вигляд:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v'v_0}{c^2}}. \quad (7.2)$$

Якщо навіть $v' = v_0 = 11,2 \text{ км/с}$, то відхилення результатів, одержаних за допомогою релятивістського закону додавання швидкостей від класичного закону, дорівнює $\varepsilon = \frac{\Delta v}{v} = 10^{-9}$. Це відхилення набагато менше від відносної похибки вимірювання швидкості космічних кораблів. Тому при розрахунках траєкторії космічних міжпланетних польотів релятивістські поправки не враховуються.

7.2. Постулати Ейнштейна. Перетворення Лоренца

Твердження, вперше висловлене Галілеєм, про те, що в усіх інерціальних системах координат механічні явища протікають однаково, називається *принципом відносності Галілея*.

Тепер цей принцип з великою точністю експериментально доказаний для механічних і електромагнітних явищ.

Але все одно принцип відносності є постулатом, тобто основним припущенням, яке виходить за межі експериментальної перевірки. Це зумовлено двома причинами.

По-перше, в межах кола фізичних явищ, що вивчаються, експеримент дає змогу перевірити твердження лише з певною точністю, яка доступна вимірюванням на даному етапі розвитку науки. Твердження, що є основою принципу відносності, має абсолютний характер, бо воно припускає, що при як завгодно великій точності результати експерименту мають узгоджуватися із ним.

По-друге, невідомі фізичні явища, які в теперішній час ще не відкриті, в майбутньому теж будуть підлягати під цей принцип.

Тому принцип відносності є постулатом і завжди буде залишатися ним.

Усі наукові поняття, закони, теорії вироблені для певного кола фізичних явищ і є справедливі в певних межах. Вихід за межі їх застосування не робить ці поняття, закони, теорії тощо неправильними. Вони лише вказують границі, умови і точність їх застосування. Прогрес науки якраз і полягає у виході за межі застосування існуючих теорій.

Галілей, сформулювавши принцип відносності, записав співвідношення, які забезпечують інваріантність фізичних законів у різних інерціальних системах координат:

$$x = x' + v_0 t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (7.3)$$

Як уже сказано вище, співвідношення (7.3) називаються перетвореннями Галілея.

Основний принцип інваріантності фізичних законів справедливий завжди, але відповідні до нього точні рівняння перетворення координат і часу – це перетворення Лоренца, а не перетворення Галілея.

Оскільки перетворення Галілея для достатньо великих швидкостей дають результати, що не узгоджуються з експериментом, то вони не встановлюють правильного зв'язку, який існує для координат і часу

інерціальних систем відліку, які рухаються з великими швидкостями одна відносно одної.

Необхідно було знайти інші перетворення, які правильно описують експериментальні факти і, зокрема, ведуть до постійності швидкості світла.

Ці нові перетворення дістали назву перетворень Лоренца. Їх можна одержати, виходячи із двох постулатів (принципів):

- принципу відносності;
- принципу постійності швидкості світла.

Перетворення Лоренца мають такий вигляд:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\frac{v}{c^2})x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.4)$$

або

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\frac{v}{c^2})x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.5)$$

Якщо $v/c \ll 1$, то перетворення Лоренца переходять у перетворення Галілея. При малих швидкостях різниця між перетворення Лоренца і перетвореннями Галілея незначна і тому неточність перетворень Галілея тривалий час не була виявлена.

7.3. Наслідки з перетворень Лоренца. Відносність одночасності

Дві події, які відбулися у різних точках x_1 і x_2 системи координат, називаються одночасними, якщо вони відбуваються в один і той самий момент часу за годинником цієї системи координат.

У кожній із точок момент події фіксується за годинником, який перебуває у відповідній точці.

Будемо вважати, що події відбулися одночасно в нерухомій системі координат у момент часу t_0 .

У рухомій системі координат ці події відбулися у точках x'_1 і x'_2 , у момент часу t'_1 і t'_2 , при цьому t'_1 і t'_2 є показами годинників рухомої системи координат, розміщеними відповідно в точках x'_1 і x'_2 цієї системи в ті моменти часу, коли в кожній із точок відбулася згадана подія.

Зв'язок між штрихованими і нештрихованими величинами задається перетвореннями Лоренца:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & x'_2 &= \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t'_1 &= \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t'_2 &= \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Оскільки події відбуваються у точках на осі x , то координати y, z в обох системах дорівнюють нулю. Із (7.6) видно, що в рухомій системі координат, ці події відбуваються не одночасно ($t'_2 \neq t'_1$), вони розділені інтервалом часу:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.7)$$

Отже, події, одночасні в одній системі координат, виявилися неодноразовими в іншій.

Відносність одночасності та причинність

Із формули (7.7) видно, що при $x_1 > x_2$ у системі координат, яка рухається у напрямку додатних значень по осі x ($v > 0$), має місце нерівність $t'_2 > t'_1$, а у системі координат, що рухається у протилежному напрямку ($v < 0$), $t'_2 < t'_1$. Отже, послідовність одних і тих самих подій у різних системах координат різна. *Постас*

запитання: чи не може статися так, що в одній системі координат причина випереджує наслідок, а в іншій, навпаки, наслідок випереджує причину?

Зрозуміло, що така ситуація не може бути допущена в теорії, яка визнає об'єктивну роль причинно-наслідкового зв'язку у світі: від зміни точки зору на події наслідок і причина не можуть мінятися місцями.

Щоб причинно-наслідковий зв'язок мав об'єктивний характер і не залежав від системи координат, у якій він розглядається, необхідно, щоби ніякі матеріальні події, які відбуваються у різних точках, не могли б передаватися із швидкістю, яка є більшою від швидкості світла.

Для доказу цього розглянемо дві події у нерухомій системі координат. Нехай подія у т. x_1 , що відбулася у момент часу t_1 , буде причиною події в точці $x_2 > x_1$, що відбулася у момент часу $t_2 > t_1$. Швидкість передачі “впливу” від точки x_1 до точки x_2 позначимо $v_{\text{впл}}$. Очевидно, за визначенням швидкості, маємо:

$$\frac{x_2 - x_1}{v_{\text{впл}}} = t_2 - t_1 \quad (7.8)$$

В рухомій системі координат ці події відбулися у деяких точках x'_1 і x'_2 в моменти t'_1 і t'_2 . Але

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \left(\frac{v}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v \cdot v_{\text{впл}}}{c^2}\right). \quad (7.9)$$

Якщо

$$1 - \frac{v \cdot v_{\text{впл}}}{c^2} < 0,$$

то в рухомій системі координат наслідок настає швидше, ніж причина. Але це неможливо. Тому завжди повинна виконуватися умова:

$$1 - \frac{v \cdot v_{\text{впл}}}{c^2} > 0, \quad \text{або} \quad v_{\text{впл}} < \frac{c}{v} \cdot c. \quad (7.10)$$

Так як перетворення Лоренца допускають для швидкості v значення, як завгодно близькі до швидкості світла, але не більші від її, то вимога (7.10) має бути записана так:

$$v_{\text{пл}} \leq c. \quad (7.11)$$

Отже, передача фізичного впливу із однієї точки в іншу не може відбуватися із швидкістю більшою, ніж швидкість світла. При цій умові причинний зв'язок подій має абсолютний характер: не існує системи координат, у якій причина і наслідок міняються місцями.

Інваріантність інтервалу

Інваріантами перетворень Галілея є довжина тіл і проміжок часу між подіями. Тому поняття довжини й проміжку часу відіграють таку велику роль у класичній фізиці.

Але ні довжина тіл, ні проміжок часу між подіями не є інваріантами перетворень Лоренца. Це означає, що вони залежать від системи координат. Покажемо, як знайти просторово-часовий інтервал, який є інваріантом до перетворень Лоренца.

Нехай події відбулися в точці x_1, y_1, z_1 у момент t_1 і в точці x_2, y_2, z_2 у момент t_2 . Інтервалом між цими подіями, або, як прийнято говорити скорочено, інтервалом між точками x_1, y_1, z_1, t_1 і x_2, y_2, z_2, t_2 називається величина S , квадрат якої визначається формулою:

$$S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (7.12)$$

Ця величина має в усіх системах координат одне і те ж значення, тобто є інваріантом перетворень Лоренца.

Відносність довжини

Довжиною рухомого стержня називають віддаль між точками нерухомої системи координат, з якими співпадають початок і кінець рухомого стержня у даний момент часу за годинником нерухомої системи координат.

Отже, кінці рухомого стержня фіксуються одночасно в нерухомій системі координат. Годинники рухомої системи координат, які співпадають з кінцями стержня у моменти їх фіксації, будуть показувати різний час, тобто фіксація кінців відбувається не одночасно в рухомій системі координат. Це приводить до того, що довжина

стержня не є інваріантом перетворень Лоренца і має різні значення у різних системах координат.

Нехай стержень довжиною l нерухомий у штрихованій системі координат, розміщений вздовж осі x' .

Зауважимо, що коли говорять про тіло певної довжини, то мається на увазі довжина нерухомого тіла. Координати кінців стержня, що розглядається позначимо через x'_1 і x'_2 , при цьому, за означенням,

$$x'_2 - x'_1 = l.$$

Величина l написана тут без штриха, тому що вона означає довжину стержня в цій системі координати, у якій він нерухомий, тобто довжину нерухомого стержня.

Зафіксуємо положення кінців стержня, який рухається із швидкістю v в нештрихованій системі координат, у момент t_0 .

Виходячи із перетворень Лоренца, можна записати:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.13)$$

$$l = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.14)$$

де $l' = x_2 - x_1$ – довжина рухомого стержня.

$$\text{Або} \quad l' = l\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.15)$$

Отже, довжина рухомого стержня, розміщеного в напрямку руху, менша від довжини нерухомого. Розміри тіл в напрямку, перпендикулярному до відносної швидкості руху, не змінюються.

Сповільнення ходу рухомих годинників

Нехай в т. x'_0 рухомої системи координат відбуваються послідовно дві події у моменти t'_1 і t'_2 .

У нерухомій нештрихованій системі координат ці події відбуваються у різних точках у моменти t_1 і t_2 . Інтервал часу між цими подіями в рухомій системі координат дорівнює $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, а в нерухомій – $\Delta t = t_2 - t_1$.

На основі перетворень Лоренца маємо:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (7.16)$$

Тоді:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (7.17)$$

Отже, інтервал часу між подіями, виміряний рухомими годинниками,

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (7.18)$$

менший, ніж інтервал часу Δt , між тими ж подіями, виміряний нерухомими годинниками.

Це означає, що темп ходу рухомих годинників є сповільнений відносно темпу нерухомих годинників.

Додавання швидкостей і перетворення прискорень

А) Додавання швидкостей

Нехай у рухомій системі координат рух матеріальної точки задано функціями:

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (7.19)$$

а в нерухомій системі – функціями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (7.20)$$

які знаходяться із перетворень Лоренца.

Зв'язок між координатами швидкості точки в рухомій і нерухомій системах координат:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (7.21)$$

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}. \quad (7.22)$$

Із перетворень Лоренца маємо:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad dy = dy' = dz = dz'$$

$$dt = \frac{dt' + (v/c^2)dx'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = dt' \frac{1 + v u'_x / c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (7.23)$$

Підставляючи значення диференціалів із (7.23) у вирази (7.22) і врахувавши (7.21), знаходимо:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_y = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}, \quad u_z = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}. \quad (7.24)$$

Вирази (7.24) і є шуканими формулами додавання швидкостей у теорії відносності.

Б) Перетворення прискорень

Нехай у штрихованій системі координат матеріальна точка має прискорення, компоненти якого a'_x , a'_y , a'_z , але швидкість її в цей момент дорівнює нулю. Отже в штрихованій системі координат рух точки характеризується наступними формулами:

$$\frac{du'_x}{dt'} = a'_x, \quad \frac{du'_y}{dt'} = a'_y, \quad \frac{du'_z}{dt'} = a'_z, \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0. \quad (7.25)$$

Знайдемо рух точки в нештрихованій системі координат. Швидкість знайдемо за формулами (7.24):

$$u_x = v, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0. \quad (7.26)$$

Прискорення у нештрихованій системі координат дорівнює:

$$a_x = \frac{du_x}{dt}, \quad a_y = \frac{du_y}{dt}, \quad a_z = \frac{du_z}{dt} \quad (7.27)$$

Величини dt , du_x , du_y , du_z визначаються за формулами (7.24) і (7.23), при цьому швидкості u'_x , u'_y , u'_z можна вважати рівними нулю лише після обчислення диференціалу.

Наприклад, для du_x маємо:

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{du'_x}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} - \frac{(u'_x + v)(v/c^2)du'_y}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} = \frac{du'_x}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{vu'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) = \\ &= \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + \frac{vu'_x}{c^2})^2} du'_x. \end{aligned}$$

Звідси з урахуванням (7.23) знаходимо:

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{du'_x}{dt'} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a'_x. \quad (7.28)$$

Аналогічно обчислюють диференціали du_y і du_z .

Тоді одержуємо наступні формули перетворення прискорення:

$$a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a'_x, a_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} a'_y, a_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} a'_z. \quad (7.29)$$

7.4. Релятивістська динаміка

А) Маса

З принципу відносності випливає, що математичний запис будь-якого закону фізики має бути однаковий у всіх інерціальних системах відліку. Це означає, що рівняння, які описують яке-небудь явище в системі відліку K' , виводять з рівнянь, які описують те саме явище в системі відліку K простою заміною в останніх усіх нештрихованих величин, тобто виміряних в системі K , на штриховані, тобто виміряні у системі K' . Цю умову називають умовою інваріантності рівнянь фізичних законів до перетворень Лоренца.

Ейнштейн показав, що маса того самого тіла неоднакова у двох інерціальних системах відліку, які рухаються одна відносно одної. Це пов'язано з тим, що маса тіла залежить від значення швидкості v руху тіла відносно інерціальної системи відліку:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.30)$$

де m_0 – маса цього тіла при $v = 0$, тобто виміряна в інерціальній системі відліку, відносно якої це тіло нерухоме.

Масу m_0 називають масою спокою тіла, а масу m – масою рухомого тіла, або релятивістською масою.

Залежність (7.30) можна пояснити, виходячи з припущення про те, що в релятивістській механіці виконується закон збереження імпульсу: при будь-яких процесах, що відбуваються у замкнутій системі, її повний (сумарний) імпульс не змінюється.

Із закону збереження імпульсу випливає закон збереження маси: при будь-яких процесах, які відбуваються в замкнутій системі, її повна релятивістська маса не змінюється.

Б) Релятивістський вираз для імпульсу

Як ми вже не один раз згадували, рівняння Ньютона інваріантні до перетворень Галілея. Але вони є неінваріантні до перетворень Лоренца.

Один із основних законів механіки – закон збереження імпульсу – у ньютонівському формулюванні є неінваріантним до перетворень Лоренца.

Запишемо вираз для імпульсу, щоб закон збереження імпульсу був інваріантним до перетворень Лоренца при будь-яких за величиною швидкостях. При цьому будемо виходити з того, що при малих швидкостях ($v_0 \ll c$) має місце ньютонівський вираз для імпульсу:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.31)$$

Врахувавши (7.30), (7.31) запишеться так:

$$\vec{p} = \frac{m d\vec{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2} dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{або} \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (7.32)$$

Маса, яка входить у формулу (7.32), є інваріантною і незалежною від швидкості тіла величиною.

З рівняння (7.32) випливає, що залежність імпульсу від швидкості є складнішою, ніж це випливає з ньютонівської механіки. При $v_0 \ll c$ вираз (7.32) переходить в ньютонівський вираз:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Вираз (7.32) допускає наступне формулювання: імпульс тіла, як і в ньютонівській механіці, дорівнює добутку маси тіла на його швидкість:

$$\vec{p} = m_r \vec{v}. \quad (7.33)$$

Але маса тіла не є інваріантною величиною, а залежить від швидкості за законом:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.34)$$

При такому трактуванні інваріантну масу m називають масою спокою і її часто позначають через m_0 , а залежна від швидкості неінваріантна маса m_r називається релятивістською масою або масою руху.

В) Релятивістський вираз для енергії

Другий закон Ньютона говорить, що похідна імпульсу частинки по часу дорівнює діючій на частинку силі. Рівняння другого закону динаміки є інваріантним до перетворень Лоренца, якщо під імпульсом розуміють вираз (7.32):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Відповідно, релятивістський вираз другого закону Ньютона має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F}. \quad (7.35)$$

Щоби знайти релятивістський вираз для енергії, помножимо рівняння (7.35) на переміщення частинки $d\vec{S} = \vec{F}dt$. Одержуємо:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \vec{v}dt = \vec{F}d\vec{S}. \quad (7.36)$$

Права частина співвідношення (7.36) дає роботу dA , виконану над частинкою за час dt . Із закону збереження енергії випливає, що робота, виконана над частинкою, повинна дорівнювати приросту енергії частинки dE . Тому можна записати:

$$dE = \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \vec{v} dt = \vec{v} d \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right). \quad (7.37)$$

Проінтегрувавши рівняння (7.37), одержуємо:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const. \quad (7.38)$$

Якщо покласти в рівнянні (7.38) константу (*const*), рівну нулю, то з виразів для енергії і імпульсу можна утворити інваріант, тобто величину, незмінну до перетворень Лоренца.

Тому у відповідність з дослідом покладемо *const*=0. Тоді вираз для енергії має вигляд:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (7.39)$$

У випадку, коли швидкість частинки *v* дорівнює нулю, то енергія приймає значення:

$$E_0 = mc^2. \quad (7.40)$$

Величина (7.40) називається енергією спокою частинки. Ця енергія, очевидно, є внутрішньою енергією частинки, не пов'язаною з рухом частинки як цілого. Формули (7.39) і (7.40) справедливі не тільки для елементарної частинки, але і для системи, яка складається з багатьох частинок. В енергію спокою, як і в повну енергію (7.39), не входить потенціальна енергія тіла у зовнішньому силовому полі.

Кінетичну енергію частинки *T* визначасмо як різницю між *E* і *E*₀:

$$T = E - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (7.41)$$

У випадку малих швидкостей (*v*₀ << *c*) формулу (7.41) можна перетворити так:

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} mv^2, \quad (7.42)$$

тобто одержати класичний вираз для кінетичної енергії частинок.

Використавши формули енергії і імпульсу ($E_0 = mc^2$ і $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$), можна знайти релятивістську залежність між повною

енергією тіла і його імпульсом:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (7.43)$$

Маса спокою m_0 і швидкість світла у вакуумі c мають в усіх інерціальних системах відліку незмінні значення. Ці величини інваріантні до перетворень Лоренца. Щодо енергії E і імпульсу $\vec{p}$, то ці величини змінюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до другої. Але різниця $E^2 - p^2 c^2$ зберігається в усіх системах відліку. Отже, величина

$$E^2 - p^2 c^2 \quad (7.44)$$

є інваріантом до перетворень Лоренца.

Із формули (7.43) випливає, що релятивістську енергію мають і такі тіла, які не мають маси спокою ($m_0 = 0$). Зараз відомо дві такі частинки: фотон і нейтрино. Енергія цих частинок дорівнює:

$$E = p \cdot c, \quad (7.45)$$

а імпульс:

$$p = \frac{E}{c}. \quad (7.46)$$

А це означає, що потік фотонів (світло), а також потік нейтрино повинні чинити тиск. Тиск світла був виміряний Лебедевим.

Із рівнянь:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{і} \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

одержуємо:

$$\vec{p}c^2 = \frac{m_0 c^2 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (7.47)$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте постулати теорії відносності.
2. Запишіть формули перетворень Галілея.
3. Запишіть формули перетворень Лоренца. Чим вони відрізняються від перетворень Галілея?
4. У чому суть відносності одночасності? Поясніть це за допомогою формул.
5. У чому суть ефекту сповільнення часу?
6. Чому довжина відрізка не є інваріантом до перетворень Лоренца? Поясніть це.
7. Запишіть формулу додавання швидкостей у класичній механіці.
8. Запишіть формулу додавання швидкостей у релятивістській механіці.
9. Доведіть, що інтервал є інваріантом до перетворень Лоренца.
10. Запишіть формули перетворень прискорень у релятивістській механіці.
11. Яка існує залежність маси від швидкості?
12. Який час називають власним?
13. Запишіть формулу релятивістського імпульсу.
14. Виведіть формулу релятивістської енергії.
15. Який існує взаємозв'язок енергії і маси?
16. Які межі застосування законів у класичній механіці?

8. КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

8.1. Гармонічний коливальний рух. Енергія коливального руху

Коливальні рухи лежать в основі цілого ряду явищ: звуку, світла, виникнення і поширення радіохвиль, сейсмічних хвиль, вібрацій різного походження.

Серед коливальних рухів особливе місце займають гармонічні коливання, вивчення яких важливе тому, що до них можна звести великий клас коливальних рухів.

Гармонічні коливання – це періодичний процес, у якому зміна величини, що його характеризує, відбувається за законом синуса (або косинуса). Наприклад, зміщення матеріальної точки від положення рівноваги під дією сили тяжіння відбувається за законом:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (8.1)$$

де A – максимальне значення зміщення x (амплітуда коливань),

ω – кругова (або циклічна) частина гармонічних коливань ($\omega = \frac{2\pi}{T}$),

T – період коливань, φ_0 – початкова фаза коливань.

Нехай система здійснює власні гармонічні коливання. При відсутності сил тертя гармонічні коливання продовжуються необмежено довго, так як повна енергія замкнутої системи постійна. Повна енергія механічної системи складається з кінетичної і потенціальної енергії. У процесі коливання величина кожної із них періодично змінюється. У положенні найбільшого відхилення величина кінетичної енергії дорівнює нулю, а потенціальна енергія має максимальне значення. А у положенні рівноваги потенціальна енергія має мінімальне значення, а величина кінетичної енергії досягає свого максимуму.

Нехай система коливається за законом:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.2)$$

Кінетична енергія системи дорівнює:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0), \quad (8.3)$$

$$\text{де } v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

А потенціальна енергія системи, яка перебуває під дією сили виду $F = kx$, дорівнює:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (8.4)$$

де $k = m\omega^2$.

Мінімуму кінетичної енергії відповідає максимум потенціальної енергії.

Додавши вирази (8.3) і (8.4), одержуємо значення повної енергії системи:

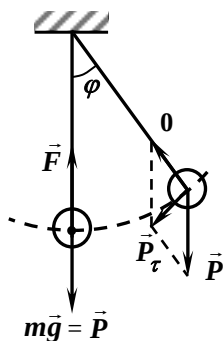
$$\begin{aligned} E = T + U &= \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \frac{mA^2\omega^2}{2} = \text{const.} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Повна енергія гармонічного коливального руху прямо пропорційна квадрату амплітуди й квадрату частоти коливання.

8.2. Маятники

А) Математичний маятник

Найпростіший приклад гармонічного коливання – рух так званого математичного маятника. Ідеальним математичним маятником називається система, яка складається із практично нерозтяжної, дуже легкої нитки і підвішеного до неї вантажу, розміри якого малі порівняно з довжиною нитки, а маса велика (мал. 8.1).



мал. 8.1

Центр тяжіння такої системи співпадає з центром тяжіння вантажу.

Коли система перебуває у стані спокою, сила тяжіння $\vec{P}$, яка діє на кульку, зрівноважується силою натягу нитки $\vec{F}$.

Якщо ми виведемо вантаж із стану рівноваги, то виникає результуюча сил тяжіння і натягу нитки (тертям нехтуємо), яка повертає тіло до попереднього положення. Маятник коливатиметься біля положення рівноваги.

Коливальний рух маятника характеризується амплітудою A і періодом T . Амплітуда коливань маятника – величина найбільшого відхилення його від положення рівноваги. Період – час, за який відбувається одне повне коливання. Величина, обернена до періоду, називається частотою коливань. Частота дорівнює числу повних коливань, здійснених тілом за одиницю часу: $\nu = \frac{1}{T}$.

Запишемо рівняння руху для математичного маятника, який перебуває у полі сили тяжіння і відхилений від стану рівноваги на кут φ (мал. 8.1).

На маятник у відхиленому стані діє повертаюча сила:

$$P_{\tau} = mg \sin \varphi, \quad (8.6)$$

де m – маса кульки, φ – кут відхилення.

Ця сила направлена по дотичній до траєкторії кульки в напрямку до положення рівноваги. Легко зрозуміти, що повертаюча сила завжди направлена в сторону, протилежну до напрямку зростання зміщення x . Тому її знак протилежний до знаку зміщення:

$$-m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \varphi. \quad (8.7)$$

Рівняння (8.7) називається рівнянням руху математичного маятника.

У загальному випадку розв'язок (8.7) є складний. При малих відхиленнях маятника від положення рівноваги можна вважати синус кута пропорційним величині кута ($\varphi \approx 3 \div 5^\circ$).

Тоді:

$$\sin \varphi = \frac{x}{l} \quad (8.8)$$

і рівняння (8.7) запишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x = -\omega_0^2 x, \quad (8.9)$$

де $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

Зауважимо, що малі вільні коливання маятника відбуваються під дією сили, що повертає його в положення рівноваги, яка пропорційна величині зміщення x .

Розв'язком рівняння (8.9) є функція:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.10)$$

де A – амплітуда коливань, ω_0 – циклічна частота, φ_0 – початкова фаза коливань, t – час коливань.

Період коливань, що відбувається за законом (8.10), визначається з умови періодичності функції синуса чи косинуса. Для гармонічних коливань за час, що дорівнює періоду, фаза коливань змінюється на 2π :

$$\omega_0 T = 2\pi \quad \text{або} \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (8.11)$$

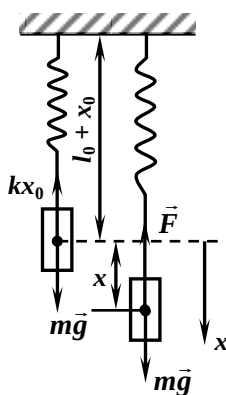
Використавши вираз (8.10), рівняння (8.11) запишеться

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (8.12)$$

де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння.

З формули (8.12) бачимо, що період коливання математичного маятника не залежить ні від кута відхилення (при малих кутах $\varphi \leq 5^\circ$), ні від маси маятника.

Б) Пружинний маятник



мал. 8.2

Розглянемо ще випадок виникнення гармонічних коливань. Вантаж масою m підвішено на пружині, маса якої мала порівняно з масою вантажу. Виведений із положення рівноваги вантаж рухається під дією двох сил: сили пружності $\vec{F}$ і сили тяжіння $m\vec{g}$ (мал. 8.2).

Запишемо проекцію на вісь x результуючої сили f під дією якої вантаж здійснює вертикальні коливання:

$$f = mg - k(x_0 + x) = -kx, \quad (8.13)$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини.

Рівняння руху вантажу набирає вигляду:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x = -\omega_0^2 x, \quad (8.14)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Одержане рівняння аналогічне до рівняння (8.9). Його розв'язком також є функція (8.10). А це означає, що коливання вантажу, підвішеного на пружині, також є гармонічними. Період цих коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (8.15)$$

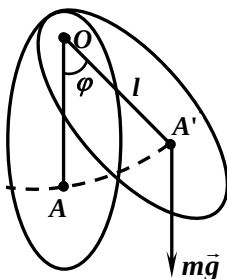
де m – маса вантажу.

Отже, період коливань пружинного маятника не залежить від ваги тіла, а залежить тільки від його маси й жорсткості пружини. Цей маятник буде здійснювати коливання з однаковим періодом у будь-якій точці земної поверхні на нашій планеті чи в міжпланетарному кораблі.

Цю властивість пружинного маятника використовують для порівняння мас різних тіл.

В) Фізичний маятник

Важке тіло, яке вільно коливається навколо осі, що не проходить через центр тяжіння, називається фізичним маятником (мал. 8.3).



мал. 8.3

Розглянемо коливання абсолютно твердого тіла у вертикальній площині відносно горизонтальної нерухомої осі O . Якщо центр тяжіння лежить у точці A на віддалі l від осі обертання, то момент сили тяжіння відносно осі буде:

$$M = mgl \sin \varphi. \quad (8.16)$$

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху, вважаючи, що тертя на осі відсутнє:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$$

(напрямок моменту сили протилежний до напрямку кута відхилення).

Або

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{-mgl}{I} \sin \varphi. \quad (8.17)$$

Рівняння (8.17) за виглядом також співпадає з (8.9).

Отже, коливання фізичного маятника є також гармонічними і його період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (8.18)$$

Порівнюючи вирази для періоду коливань фізичного маятника (8.18) з виразом (8.12) для періоду коливань математичного маятника, бачимо, що фізичний маятник коливається з таким самим періодом, що

і математичний, який має довжину $l_n = \frac{I}{ml}$. Довжина математичного маятника l_n , який має той самий період коливань, що і даний фізичний, називається зведеною довжиною даного фізичного маятника.

Випадки виникнення коливань, розглянуті вище, дають змогу зробити висновок, що малі коливання систем біля положення стійкої рівноваги під дією повертаючої сили, яка прямопропорційна до зміщення, є гармонічними.

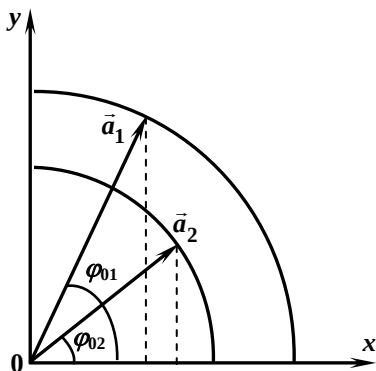
8.3. Додавання гармонічних коливань

А) Додавання коливань одного напрямку

Це, що рух проекції точки, яка рівномірно обертається по колу, є гармонічним коливанням, дає можливість будь-яке гармонічне коливання умовно представляти як результат деякого обертового руху та будувати так звані векторні діаграми коливального руху (мал. 8.4).

Відкладаючи вектор довжиною $|\vec{a}_1|$ в напрямку, який визначається фазою $\omega_1 t + \varphi_{01}$, одержуємо зміщення x_1 у будь-який момент часу t :

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}). \quad (8.19)$$



мал. 8.4

Обертаючи вектор з кутовою швидкістю ω_1 і проєктуючи його кінець на горизонтальну вісь, одержуємо коливання проєкції з амплітудою a_1 , частотою ω_1 і початковою фазою φ_{01} .

На цьому ж малюнку можна аналогічно зображати будь-яке інше гармонічне коливання з амплітудою a_2 , частотою ω_2 і початковою фазою φ_{02} . Для нього закон коливання буде:

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}).$$

Різниця фаз $(\omega_1 t + \varphi_{01}) - (\omega_2 t + \varphi_{02})$ двох коливань називається зсувом фаз. Якщо ж частоти коливань однакові ($\omega_1 = \omega_2$), то зсув фаз дорівнює різниці початкових фаз коливань $\varphi_{01} - \varphi_{02}$ і залишається незмінним за весь час коливань (так як обидва вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю).

Тіло може брати участь у декількох коливальних рухах одночасно. Результоване зміщення тіла в цьому випадку одержується як геометрична сума незалежних зміщень, які тіло одержує, беручи участь у кожному із складових коливань окремо.

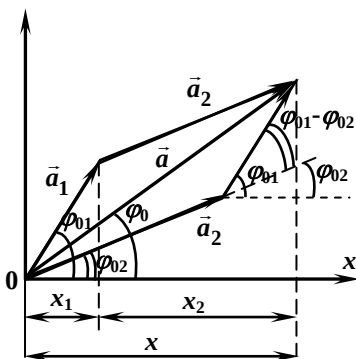
Нехай тіло бере участь одночасно в двох гармонічних коливальних рухах, які відбуваються в одному напрямку з однаковою частотою, але з різними початковими фазами й амплітудами:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}) \end{aligned} \right\}. \quad (8.20)$$

Побудуємо векторні діаграми цих коливань (мал. 8.5).

Результоване зміщення x тіла, яке бере участь одночасно в двох коливаннях, дорівнює сумі проєкцій x_1 і x_2 на вісь x векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, або проєкції вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Тоді рівняння результованого коливання буде:



мал. 8.5

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8.21)$$

$$\text{де} \quad a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}), \quad (8.22)$$

а початкова фаза φ_0 визначається із відношення:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_1 \sin \varphi_{01} + a_2 \sin \varphi_{02}}{a_1 \cos \varphi_{01} + a_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (8.23)$$

Отже, тіло, беручи участь у двох однакових гармонічних коливаннях, що відбуваються в одному напрямку з однаковою частотою, здійснює гармонічне коливання у тому ж напрямку і з такою ж частотою, що і складові коливання.

Величина амплітуди результуючого коливання залежить від зсуву фаз $\varphi_{01} - \varphi_{02}$. Якщо $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 2\pi n$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, то:

$$a = a_1 + a_2, \quad (8.24)$$

тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд складових коливань.

Якщо $\varphi_{01} - \varphi_{02} = (2n+1)\pi$, де $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, то:

$$a = |a_1 - a_2|, \quad (8.25)$$

тобто амплітуда результуючого коливання дорівнює модулю різниці амплітуд складових коливань.

Б) Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Розглянемо рух точки, яка бере участь одночасно в двох коливаннях, напрямки яких взаємно перпендикулярні, а циклічна частота яких однакова ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Нехай одне коливання відбувається вздовж осі x , а друге – вздовж осі y :

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_1) \\ y &= B \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (8.26)$$

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху точки. Для цього із (8.26) треба виключити час t . Перепишемо (8.26) у такому вигляді:

$$\frac{x}{A} = \cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1 \quad (8.27)$$

$$\frac{y}{B} = \cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2. \quad (8.28)$$

Виконавши необхідні математичні операції одержуємо рівняння траєкторії:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (8.29)$$

Отже, траєкторією результуючого руху є еліпс.

Орієнтація цього еліпса щодо до осей x, y залежить від різниці фаз складових коливань (коливань, що додаються).

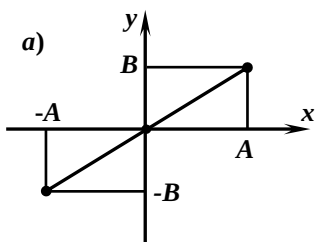
Розглянемо деякі окремі випадки:

1) нехай різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Тоді рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} = 0 \text{ або } \left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0. \quad (8.30)$$

Звідси:

$$y = \frac{B}{A} x. \quad (8.31)$$



Це означає, що при різниці фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ точка рухається по прямій, яка проходить через початок координат і утворює з віссю x кут, тангенс якого дорівнює відношенню амплітуд $\frac{B}{A}$ (мал. 8.6, а).

При русі по цій прямій точка здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою ω біля початку координат.

Дійсно, положення точки на прямій задається координатою:

$$S = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Враховуючи, що $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$, одержуємо:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + B^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (8.32)$$

мал. 8.6

Отже, точка здійснює гармонічне коливання з циклічною частотою ω і амплітудою $\sqrt{A^2 + B^2}$.

2) нехай тепер різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$. У цьому випадку рівняння траєкторії має вигляд:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xy}{AB} = 0 \quad \text{або} \quad \left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B} \right)^2 = 0. \quad (8.33)$$

Звідки:

$$y = -\frac{B}{A} x. \quad (8.34)$$

Результуючий рух, як і в попередньому випадку, є гармонічним коливальним рухом з частотою ω , який відбувається біля точки O вздовж відрізка прямої, нахиленої до осі x під кутом, більшим ніж $\pi/2$ (мал. 8.6, б).

3) розглянемо додавання коливань, фази яких φ_2 і φ_1 відрізняються на $\pi/2$ або $\frac{3}{2}\pi$ ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$). У цьому випадку рівняння траєкторії має вигляд:

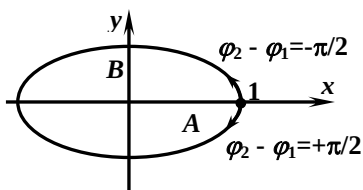
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (8.35)$$

Рівняння (8.35) є канонічною формою рівняння еліпса (осі координат співпадають з осями еліпса). Коли $A=B=R$, то еліпс перетворюється у коло.

Випадки $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$ і $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ відрізняються напрямками руху по еліпсу або колу.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$, то рівняння (8.26) можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= -B \sin \omega t \end{aligned} \right\} \varphi_1=0, \varphi_2=\pi/2. \quad (8.36)$$



мал. 8.7

Як видно з (8.36) у момент часу $t=0$ тіло перебуває в точці 1 (мал. 8.7). В інші моменти часу координата x зменшується, а координата y стає від'ємною. Отже, рух точки відбувається за годинниковою стрілкою.

При $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$ рівняння коливань набувають вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos \omega t \\ y &= B \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = B \sin \omega t \end{aligned} \right\}. \quad (8.37)$$

Звідси можна зробити висновок, що рух відбувається проти годинникової стрілки (мал. 8.7).

Із сказаного випливає, що рівномірний рух по колу з радіусом R з кутовою швидкістю ω можна подати як суму двох взаємно перпендикулярних коливань:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad (8.38)$$

де “+” – відповідає рухові проти стрілки годинника;

“-” – відповідає рухові за годинниковою стрілкою.

4) якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові, то траєкторія результуючого руху має вигляд досить складних кривих, які називаються фігурами Ліссажу.

8.4. Вільні коливання

У цьому випадку на рухоме тіло масою m діє лише квазіпружна сила $F = -kx$. Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху (по осі x) має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{або} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (8.39)$$

Уведемо позначення:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad (8.40)$$

тоді одержуємо рівняння руху у вигляді лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8.41)$$

в якому ω_0 залежить від параметрів коливальної системи.

У курсі математики доведено, що розв’язком (8.41) є така функція:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.42)$$

де A і φ_0 – довільні сталі, для визначення яких треба знати початкові умови (зміщення x_0 і швидкість v_0 у початковий момент часу $t = 0$).

Отже, якщо на рухомий елемент системи масою m діє тільки пружна або квазіпружна сила $F = -kx$, то він здійснює гармонічні коливання з постійною амплітудою A , частота яких $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ і період

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ залежать від параметрів } m \text{ і } k.$$

8.5. Загасаючі коливання

Нехай тепер на коливальну систему діють квазіпружна сила і сила тертя. Розглянемо випадок, коли сила тертя пропорційна швидкості руху:

$$F_{mp} = -rv = -r \frac{dx}{dt}. \quad (8.43)$$

Відомо, що такі сили виникають при русі тіл у в'язкому середовищі з малими швидкостями.

Рівняння руху в цьому випадку матиме вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx \quad \text{або} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (8.44)$$

Уведемо позначення:

$$\frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2. \quad (8.45)$$

Тоді рівняння (8.44) запишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (8.46)$$

Рівняння (8.46) є також лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами, які залежать від параметрів системи та коефіцієнта тертя r .

Рівняння (8.46) можна звести до рівняння гармонічних коливань (8.41), Використавши для цього підстановку $x = ze^{\beta t}$.

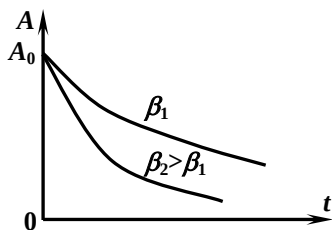
Розв'язком рівняння (8.46) є функція:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (8.47)$$

Із рівняння (8.47) видно, що амплітуда коливального руху в цьому випадку

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (8.48)$$

зменшується з часом за експоненціальним законом, тобто в системі виникають загасаючі коливання (мал. 8.8).



мал. 8.8

Частота ω загасаючих коливань залежить не тільки від параметрів системи (m , k), але і від коефіцієнта r , що визначає силу в'язкого тертя.

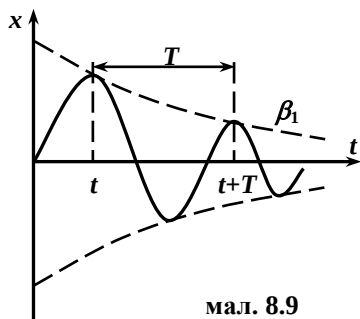
Зрозуміло, що $\omega < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, тобто

частота загасаючих коливань менша від частоти, яку би мала система при відсутності опору середовища.

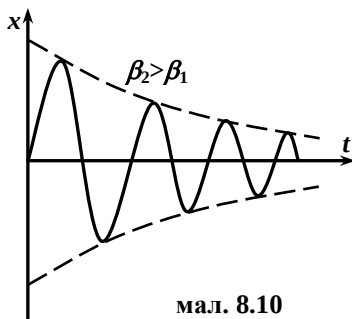
Період T загасаючих коливань є більший від періоду T_0 вільних коливань системи (мал. 8.9):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0.$$

На мал. 8.8 показані графіки зміни амплітуди з часом для двох значень числа β . Більшому значенню β (більшому r) відповідає швидкий спад амплітуди. Із малюнків видно, що величина β характеризує швидкість загасання коливань. Тому β називають коефіцієнтом загасання.



мал. 8.9



мал. 8.10

Часто швидкість загасання характеризують логарифмічним декрементом загасання. *Логарифмічним декрементом загасання* називається фізична величина, яка дорівнює натуральному логарифму двох послідовних амплітуд, які відрізняються проміжком часу, що дорівнює періоду.

Позначимо логарифмічний декремент загасання через λ , тоді:

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \beta T. \quad (8.49)$$

Отже, логарифмічний декремент загасання у T разів більший, ніж коефіцієнт загасання. Оскільки β і T постійні величини, то і $\lambda = \text{const}$. А це означає, що відношення двох амплітуд, які відрізняють в часі на один період, є стала і не залежить від вибору моменту часу t .

Енергетично коливальна система характеризується добротністю. Під добротністю розуміють збільшене в 2π разів відношення повної енергії системи E до енергії W , розсіяної за період:

$$Q = 2\pi \frac{E}{W}, \quad (8.50)$$

де Q – добротність коливальної системи.

Очевидно, що чим менше енергії розсіюється, тим більша добротність системи. В ідеальному випадку (при відсутності втрат) добротність системи нескінченно велика.

8.6. Вимушені коливання

Вимушеними називають такі коливання, які виникають у коливальній системі при дії на неї зовнішньої періодично змінної сили, яку називають *змушуючою* (вимушеною).

Розглянемо випадок виникнення вимушених коливань під дією сили, яка змінюється за законом синуса:

$$F_{zm} = F_0 \sin \omega_1 t, \quad (8.51)$$

де F_0 – амплітуда вимушеної сили, ω_1 – циклічна частота коливань цієї сили.

Нехай система описується параметрами k , m , r (в'язке тертя). На неї діють:

- квазіпружна (повертаюча) сила: $F = -kx$;
- сила тертя: $F_{mp} = -r \frac{dx}{dt}$;
- вимушена (змушуюча) сила: $F_{zm} = F_0 \sin \omega_1 t$.

Запишемо рівняння руху точки, що здійснює коливання:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega_1 t \quad (8.52)$$

Зробимо заміни:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{r}{m} = 2\beta; \quad \frac{F_0}{m} = f_0. \quad (8.53)$$

Тоді рівняння (8.52) перепишеться так:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega_1 t. \quad (8.54)$$

Маємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Воно відрізняється від рівняння (8.44) наявністю члена, що не залежить від x .

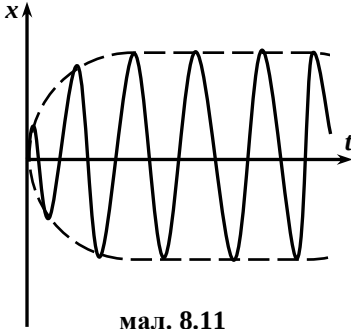
Загальний розв'язок $x(t)$ такого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$x = x_1(t) + x_2(t), \quad (8.55)$$

де $x_1(t)$ – загальний розв'язок рівняння (8.44); $x_2(t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (8.54).

Загальний розв'язок рівняння (8.54) без правої частини ми уже одержали; це вираз (8.47). Він відповідає власним загасаючим коливанням системи. Складова $x_1(t)$ відіграє помітну роль тільки в початковій стадії процесу, при так званому встановленні коливань. Із зростанням часу через експоненціальний множник $e^{-\beta t}$ роль цієї складової все більше зменшується, і при великих проміжках часу нею можна знехтувати, залишаючи у рівнянні (8.55) лише складову $x_2(t)$ (мал. 8.11).

Отже, функція $x = x_2(t)$, будучи частинним розв'язком рівняння (8.54), описує вимушені коливання системи. Будемо її шукати в такому вигляді:



мал. 8.11

$$x_2(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (8.56)$$

де A і φ – величини, які треба знайти.

Виконавши відповідні математичні дії, одержуємо, що

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2 \omega_1^2}}. \quad (8.57)$$

Отже, при дії на систему вимушеної сили $F = F_0 \sin \omega_1 t$ виникають вимушені коливання

$$x = A \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (8.58)$$

які є гармонічними з амплітудою A і мають цю ж частоту, що має вимушена сила. Але зміщення x зсунуте по фазі на φ відносно вимушеної сили. Це означає, що в той момент, коли вимушена сила досягає максимуму, зміщення x не обов'язково найбільше: воно може дорівнювати нулю ($\varphi = \pi/2$).

8.7. Резонанс

Із рівняння (8.57) видно, що амплітуда коливань залежить від співвідношення частоти вільних коливань ω_0 до частоти вимушеної сили ω_1 . Крім цього, амплітуда коливань залежить також від F_0 і коефіцієнта згасання β .

З мал. 8.12 бачимо, що при $\omega_1 = 0$ вираз (8.57) дає постійне зміщення

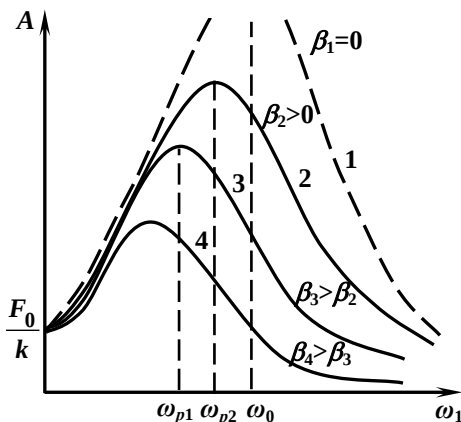
$$A = \frac{F_0}{m \omega_0^2} = \frac{F_0}{k}. \quad (8.59)$$

Вираз (8.59) має місце тоді, коли власні коливання уже практично згасли.

При $\omega_1 \rightarrow \infty$ амплітуда A асимптотично прямує до нуля.

При деякому проміжному значенні ω_1 амплітуда A приймає максимальне (для даного β) значення (криві 2, 3, 4).

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при певному значенні частоти вимушеної сили називається *механічним резонансом*.



мал. 8.12

Частота вимушеної сили, при якій має місце резонанс, називається резонансною частотою, а значення максимальної амплітуди називається резонансною амплітудою.

Резонансна частота:

$$\omega_1 = \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (8.60)$$

а резонансна амплітуда:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (8.61)$$

При $\beta=0$ резонансна частота ω_p дорівнює частоті вільних коливань системи ($\omega_p = \omega_0$). Якщо система має мале загасання ($\beta=0$), то наближено можна вважати, що резонанс наступить при частоті, яка дорівнює частоті вільних коливань ($\omega_p \approx \omega_0$).

Вимушені коливання і резонанс широко використовуються у техніці, особливо в акустиці, електротехніці, радіотехніці та в інших областях. Явище резонансу використовують у тих випадках, коли із великого набору коливань різної частоти хочуть виділити коливання конкретної частоти. Резонанс використовують і при вимірюванні дуже слабких періодично змінних величин.

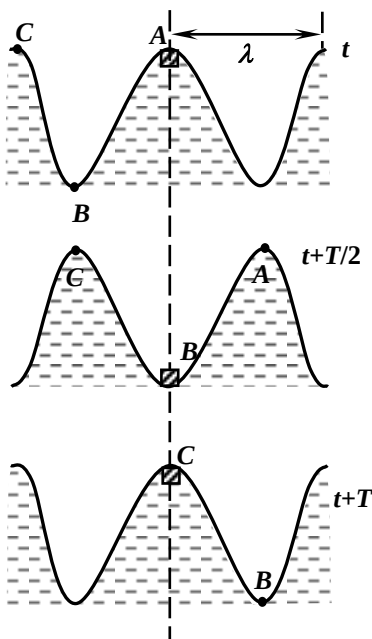
Але в ряді випадків резонанс – небажане явище, оскільки він призводить до великих деформацій і руйнувань приладів та конструкцій. Резонанс треба враховувати при конструюванні машин і різних споруд (мостів, будинків, веж тощо).

8.8. Механічні хвилі

Хвилі на поверхні води мають вигляд гребенів і впадин, що чергуються і рухаються по поверхні з певною швидкістю v , яку називають швидкістю хвилі.

Віддаль між двома сусідніми гребенями (або впадинами) у процесі поширення хвилі залишається незмінною і є характерною величиною, яку називають *довжиною хвилі* λ (мал. 8.13).

Дослід показує, що хоч гребені та впадини рухаються по поверхні води, поширення хвиль не зв'язане з переносом частинок рідини (поплавок при проходженні хвилі коливається лише вгору і вниз і хвилю не захоплюється) (мал. 8.13).



мал. 8.13

Дослід також показує, що частота поплавка (і частинок рідини під ним) цілком визначається частотою коливань механічної системи, яка утворила хвилю.

Якщо поверхня води (або довільного середовища) не обмежена, то утворені хвилі називають *біжучими*: вони біжать від джерела, яке їх утворило.

Якщо зовнішня сила, прикладена до необмеженого середовища, змінюється за гармонічним законом, то утворена нею хвиля називається *гармонічною* або *синусоїдальною*.

Хвилі називаються *несинусоїдальними*, якщо сила, яка їх утворює змінюється за довільним (негармонічним законом).

Синусоїдальні хвилі характеризуються ще частотою хвилі ν , під якою розуміють частоту коливань частинок середовища (частота коливань поплавка на поверхні води), амплітудою A , яка визначається амплітудою коливань частинок (амплітуда коливань поплавка), і, нарешті, швидкістю хвилі v .

Три характеристики: ν , λ , v – пов'язані між собою так званим дисперсійним рівнянням:

$$v = \lambda \nu, \quad (8.62)$$

за час, протягом якого поплавок здійснить одне повне коливання, тобто опуститься з гребеня у впадину і знову підніметься на гребінь, хвиля під ним переміститься на віддаль λ . Тому:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad \text{або} \quad \lambda = v \cdot T, \quad (8.63)$$

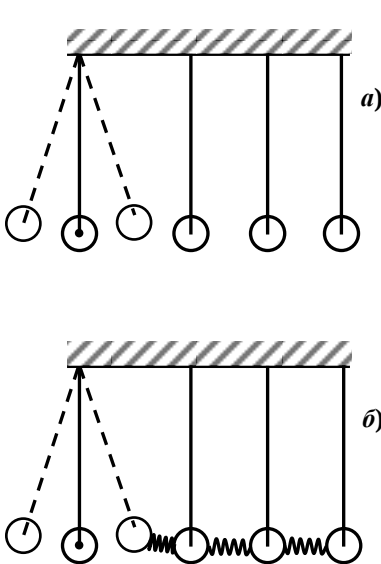
де T – період коливань ($T = \frac{1}{\nu}$).

Отже, довжина хвилі визначається тією віддалю, на яку переміщується хвильовий процес за час одного повного коливання частинок середовища.

8.9. Поширення коливань в однорідному пружному середовищі

Розглянемо систему однакових, ніяк не пов'язаних між собою маятників (мал. 8.14, а).

Через відсутність зв'язку між ними коливання одного маятника (власні чи вимушені) не можуть передаватися іншим маятникам. У такій системі процес поширення коливань неможливий.



мал. 8.14

Щоб коливання могли передаватися, маятники повинні бути так чи інакше пов'язані між собою (мал. 8.14, б).

Нехай між маятниками є пружний зв'язок, що здійснюється за допомогою легкої пружини. Якщо в такій системі почне коливатися який-небудь маятник, то він, стискаючи і розтягуючи пружини, створить змінну пружну силу, яка змусить коливатися (з тією ж частотою) сусідній маятник, а цей, своєю чергою, – наступний і т.д.

Вздовж пружно пов'язаних маятників розпочнеться процес поширення коливань від маятника до маятника, при цьому чим далі перебуває маятник від початкового, тим пізніше він почне коливатися.

Кожен маятник буде коливатися біля свого середнього положення рівноваги, але частота коливань усіх маятників є однакою: вона визначається частотою зовнішньої сили.

Система таких пружно пов'язаних однакових маятників є моделлю однорідного пружного (одномірного) середовища.

Подібні процеси відбуваються у реальному пружному середовищі. Якщо в такому середовищі викликати якимось способом коливання однієї частинки (точки), то в результаті пружних взаємодій почнуть коливатися сусідні з нею частинки, які своєю чергою, викличуть коливання наступних частинок і т.д.

Процес поширення коливань частинок в пружному середовищі називається хвильовим процесом або просто хвилею.

Границя, яка відокремлює частинки, що коливаються, від частинок середовища, які ще не почали коливатися, називають *фронтом хвилі*.

В однорідному й ізотропному середовищі напрямок поширення хвилі перпендикулярний до її фронту.

Сукупність точок, які коливаються в однакових фазах, називають *хвильовою поверхнею*. Фронт для синусоїдальних хвиль є однією із його хвильових поверхонь. Напрямок, у якому поширюється хвиля, називаються *променем*.

У необмеженому однорідному середовищі хвилі можуть бути плоскими (фронт хвилі – площа) і сферичними (фронт хвилі – сферична поверхня).

Частинки середовища, охоплені хвильовим процесом, коливаються як маятники в моделі, розглянутій вище, з однаковою частотою. Кожна із них здійснює коливання біля свого середнього положення рівноваги, тобто хвиля не переносить частинок середовища в напрямку свого поширення.

Залежно від напрямку коливань частинок відносно напрямку поширення хвилі розрізняють два види хвиль: *повздовжні* та *поперечні*. У повздовжній хвилі частинки середовища коливаються вздовж напрямку поширення хвиль. У поперечній – частинки

коливаються у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвиль.

Із моделі (мал. 8.14) видно, що швидкість поширення коливань маятників залежить від жорсткості пружини k і маси m маятників. Якщо жорсткість пружини нескінченно велика, то при відхиленні із положення рівноваги одного маятника одночасно відхиляються і всі інші маятники. Це означає, що швидкість поширення коливань нескінченно велика. І, навпаки, при жорсткості пружини, рівній нулю, коливання не передаються від маятника до маятника, тобто швидкість хвилі дорівнює нулю.

Якщо при одних і тих самих пружинах масу маятника збільшити, то швидкість хвильового процесу зменшиться. Адже для одного й того ж зміщення (відхилення) (за даний проміжок часу) у випадку більшої маси потрібна і більша сила, тобто більша деформація пружини.

У реальному середовищі швидкість залежить від типу хвилі. У поведовжній хвилі зміщення частинок середовища викликає деформацію стиску й розтягу. Тому швидкість поширення поведовжніх хвиль визначається пружністю середовища до цього виду деформації і, відповідно, залежить від модуля Юнга E .

Установлена залежність швидкості хвилі від маси коливних частинок означає, що у випадку суцільного середовища швидкість хвильового процесу залежить від густини середовища ρ . Із збільшенням густини середовища швидкість хвилі зменшується. Кількісний розрахунок дає можливість установити таку залежність:

$$v_{\text{поз}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (8.64)$$

У поперечних хвилях зміщення частинок середовища викликає деформацію зсуву. Тому швидкість поширення поперечних хвиль залежить від пружних властивостей середовища до деформації зсуву, тобто від модуля зсуву N . Точні розрахунки показують, що:

$$v_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}. \quad (8.65)$$

Оскільки модуль зсуву рідин і газів дорівнює нулю ($N=0$), то поперечні хвилі в цих середовищах не поширюються.

У твердих тілах поширюються як повздовжні, так і поперечні хвилі. Оскільки для всіх твердих тіл $E > N$, то швидкість повздовжніх хвиль завжди є більшою, ніж поперечних хвиль.

Швидкість поширення поперечних хвиль у натягнутому шнурі або струні залежить від сили натягу $F_{нат.}$ шнура (чи струни) і лінійної маси шнура μ (маси, що припадає на одиницю довжини):

$$v = \sqrt{\frac{F_{нат.}}{\mu}}. \quad (8.66)$$

Із формул (8.64–8.66) видно, що швидкість пружних хвиль не залежить від частоти коливань, а визначається виключно пружними властивостями середовища і його густиною.

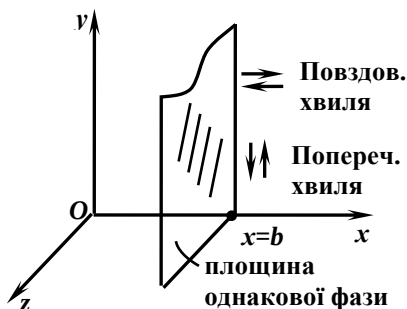
Якщо швидкість хвиль однакова для всіх частот, то кажуть, що такі хвилі не мають дисперсії.

8.10. Рівняння плоскої біжучої хвилі

Записати рівняння хвилі – означає записати для кожної точки середовища закон зміни зміщення ξ як функцію часу. У загальному вигляді закон $\xi = f(t, x, y, z)$ є функцією часу і трьох просторових координат. Часова залежність зміщення ξ визначається характером коливань джерела хвилі.

Розглянемо частинний випадок синусоїдальної хвилі, у якій зміщення ξ частинок залежить лише від однієї координати x . Це

означає, що хвиля поширюється вздовж осі x , а всі точки середовища, які розміщені в одній площині $x = b$, мають у даний момент часу однакові зміщення від положення рівноваги (мал. 8.15).

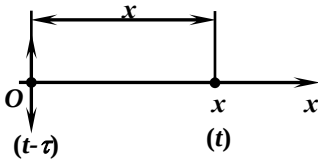


мал. 8.15

У випадку повздовжньої хвилі площина (y, z) цілком зміщується по осі x в ту чи іншу сторону на віддаль ξ . У випадку

поперечної хвилі відбувається зміщення площини (y, z) в напрямку, перпендикулярному до осі x . Хвилі такого типу називаються плоскими; для них зміщення $\xi=f(t, x)$ в загальному вигляді є функцією двох змінних: t і x .

Потрібно зауважити, що в одновимірному середовищі (шнур, струна) хвильовий процес також описується функцією двох змінних t і x , якщо вісь x скерована вздовж шнура (струни).



мал. 8.16

Змусимо шнур зовнішньою дією коливатися (мал. 8.16). Тоді, точка O буде коливатися вздовж осі, яка або перпендикулярна до осі x , або паралельна до неї, за законом:

$$\xi = A \sin \omega t. \quad (8.67)$$

У результаті цього по шнурі побіжить хвиля. Через деякий час $\tau = \frac{x}{v}$, хвильовий процес досягне до точки з координатою x і примусить її коливатися. Якщо знехтувати загасанням, то амплітуда коливань точки x буде такою ж, як і точки O . У даний момент часу t точка x буде мати таке ж саме зміщення ξ і такий самий напрям руху, які мала точка O в більш ранній момент часу $t' = t - \frac{x}{v}$. Тому для точки x закон зміни зміщення ξ запишеться так:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.68)$$

Співвідношення (8.68) і є рівнянням синусоїдальної одновимірної (або плоскої) хвилі, яка біжить в бік додатних значень координати x .

Рівняння хвилі, що біжить в бік від'ємних значень x , має такий вигляд:

$$\xi = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) \quad (8.69)$$

Рівняння біжучої хвилі (8.68) можна записати ще і так:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} x \right) =$$

$$= A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{T} \frac{1}{v} x \right) = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (8.70)$$

Візьмемо до уваги, що $\lambda = T \cdot v$ і зробимо заміну: $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$, тоді (8.70) перепишемо у вигляді:

$$\xi = A \sin(\omega t - kx), \quad (8.71)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, яке показує скільки довжин хвиль укладається на відрізок довжиною 2π метрів.

Запишемо формули для коливань зміщень двох фіксованих точок хвилі з координатами x_1 і x_2 :

$$\xi_1 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) \text{ і } \xi_2 = A \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 \right). \quad (8.72)$$

Різниця фаз коливань цих точок дорівнює:

$$\Delta = \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_1 \right) - \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_2 \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1). \quad (8.73)$$

Різниця фаз коливань в цьому випадку залежить від взаємного розміщення точок. Якщо $x_2 - x_1 = \lambda$, то $\Delta = 2\pi$. А це означає, що точки коливаються в однаковій фазі.

Довжина хвилі – це найменша віддаль між двома точками, які коливаються в однаковій фазі.

8.11. Енергія пружної хвилі. Потік енергії.

Вектор Умова-Пойтінга

У середовищі, у якому поширюється плоска повздовжня хвиля $\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, уявно виділимо елементарний об'єм ΔV настільки малий, щоби швидкість руху і деформації в усіх точках цього об'єму можна було вважати незмінними і рівними відповідно $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ і $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. Виділений об'єм буде мати кінетичну енергію:

$$\Delta T = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (8.74)$$

де $m = \rho \Delta V$ – маса речовини в об'ємі ΔV ; ρ – густина середовища.

Підставимо в (8.74) значення $\frac{\partial \xi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = A \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \text{ тоді:}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (8.75)$$

Порівнюючи графіки миттєвого розподілу ΔT і ξ , бачимо, що максимуми кінетичної енергії припадають на ті точки середовища, які в даний момент проходять положення рівноваги ($\xi = 0$) (мал. 8.17).

Але якраз ці точки мають і найбільшу швидкість коливального руху.

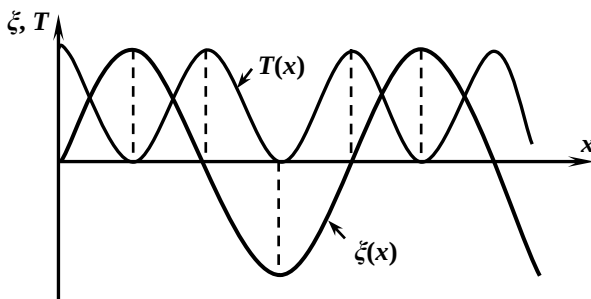
Вибраний об'єм ΔV має і потенціальну енергію ΔU пружної деформації, яка дорівнює:

$$\Delta U = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V, \quad (8.76)$$

де $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ – відносне видовження (або стиск), E – модуль Юнга.

Використавши зв'язок, що $v^2 = E / \rho$ і вираз для похідної

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -A \frac{\omega}{v} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \text{ одержуємо що}$$



мал. 8.17

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (8.77)$$

Порівнюючи рівняння (8.75) і (8.77) бачимо, що зміна потенціальної енергії в часі і в просторі аналогічна зміні кінетичної енергії. Максимум потенціальної енергії припадає якраз на ті області середовища, в яких максимальна кінетична енергія. Це є характерною особливістю біжучих хвиль.

Повна енергія вибраного об'єму ΔV в даний момент часу t буде:

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \Delta V. \quad (8.78)$$

Якщо рівність (8.78) розділити на ΔV , то одержуємо вираз для миттєвої густини енергії, тобто для енергії, яка припадає в даний момент часу на одиницю об'єму середовища:

$$W = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.79)$$

Взявши до уваги, що середнє значення квадрата косинуса дорівнює $1/2$, то середнє значення (в часі) густини енергії у кожній точці хвилі визначається формулою:

$$W_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (8.80)$$

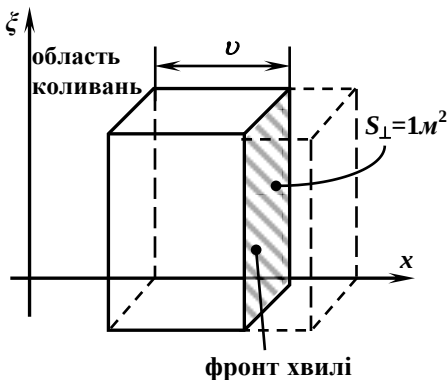
Отже, середня густина енергії пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди та квадрату частоти.

При поширенні хвилі середовище одержує додатковий запас енергії. Хвиля переносить енергію від джерела коливання до віддалених ділянок середовища.

Кількість енергії, яка переноситься хвилею за 1 секунду через деяку поверхню S , називається потоком енергії Φ через цю поверхню. Потік енергії – скалярна величина, розмірність якої співпадає з розмірністю потужності.

Кількість енергії, яка переноситься хвилею за 1 секунду через площадку в один квадратний метр, розміщену перпендикулярно до напрямку поширення хвилі, називають *густиною потоку енергії*.

Обчислимо цю величину.



мал. 8.18

Хвиля у результаті свого проходження через площадку $S=1\text{ м}^2$ переносить за 1 с таку кількість енергії, яка міститься у паралелепіпеді, показаному на мал. 8.18.

На цей паралелепіпед припадає енергія:

$$J = w_c \cdot v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v. \quad (8.81)$$

Розглядаючи фазову швидкість хвилі як вектор $\vec{v}$, напрям поширення якого співпадає з напрямом поширення хвилі, запишемо густину потоку через векторні величини:

$$\vec{J} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (8.82)$$

Вектор, що визначається рівнянням (8.82), називають вектором Умова-Пойтінга.

Знаючи вектор $\vec{J}$ у будь-якій точці довільної поверхні S , можна обчислити потік енергії через цю поверхню. Для цього поверхню розбивають на елементарні площадки dS і вводять поняття вектора

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}, \quad (8.83)$$

де $\vec{n}$ — одиничний вектор, нормальний до площадки dS .

Тоді потік енергії $d\Phi$ через елементарну площадку dS дорівнює:

$$d\Phi = \vec{J} d\vec{S} = J dS \cos \alpha = J_n dS, \quad (8.84)$$

де $J_n = J \cos \alpha$ є проекцією вектора $\vec{J}$ на напрямок нормалі до площадки.

Повний потік енергії через площадку S знаходимо інтегруванням по поверхні:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S J_n dS. \quad (8.85)$$

8.12. Інтерференція хвиль

Коли в середовищі поширюються одночасно декілька хвиль, то тоді частинки середовища здійснюють коливання, які є результатом додавання коливань, створених у даній точці кожною хвилею окремо.

Результуюче зміщення частинки середовища у будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які одержує частинка, беручи участь в кожному із складових хвильових процесів.

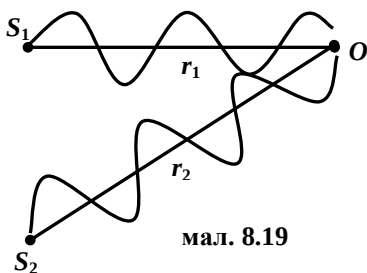
Принцип суперпозиції (накладання) хвиль, встановлений із досліду, полягає в тому, що хвилі від різних джерел, накладаючись одна на одну, не змінюють одна одну і поширюються так, ніби інші хвилі були відсутні.

Явище, яке виникає при додаванні хвиль, називають *інтерференцією*. Інтерференція полягає у такому накладанні двох (і більше) хвиль, яке приводить до стаціонарного (не залежного від часу) підсилення коливань частинок в одних місцях середовища і послаблення (або повного гасіння) в інших місцях простору.

Розглянемо випадок, коли в середовищі поширюються дві хвилі, які мають в кожній точці середовища однакову частоту і постійну різницю фаз (мал. 8.19).

Для цього треба мати два джерела, які коливаються з однаковою частотою і постійною різницею фаз. Такі джерела називають когерентними, а створені ними хвилі – когерентними хвилями.

Нехай хвилі поширюються від двох когерентних джерел S_1 і S_2 і накладаються у т.О. Для простоти будемо вважати, що їх коливання відбуваються в однакових фазах.



Щоб визначити результуючий рух точки О, знайдемо її зміщення у кожній хвилі окремо:

$$\xi_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad \text{і}$$
$$\xi_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right), \quad (8.86)$$

де r_1 і r_2 – віддалі точки О від джерел хвиль S_1 і S_2 відповідно.

Оскільки в т.О хвилі викликають коливання одного напрямку, то результуюче зміщення дорівнюватиме алгебраїчній сумі зміщень ξ_1 і ξ_2 . Відомо, що при додаванні двох гармонічних коливань одного напрямку результуюче коливання буде також гармонічним з тим самим періодом. Його амплітуду A і зсув фаз знаходять із формул:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (8.87)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (8.88)$$

Із рівняння (8.86) визначаємо φ_1 і φ_2 :

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi r_1}{\lambda} \quad \text{і} \quad \varphi_2 = -\frac{2\pi r_2}{\lambda} \quad (8.89)$$

$$\text{Тоді } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda}, \quad (8.90)$$

де $r_2 - r_1$ — різниця ходу хвиль від джерел S_1 і S_2 до точки O , де ці хвилі накладаються.

Знайдемо значення результуючої амплітуди коливання в окремих випадках:

$$1) \text{ нехай } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad (8.91)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ Тоді

$$|r_2 - r_1| = k\lambda, \text{ і } A = A_1 + A_2. \quad (8.92)$$

Отже, максимальна амплітуда коливань буде в таких точках, для яких різниця ходу хвиль дорівнює нулю або цілому числу довжин хвиль.

$$2) \text{ нехай } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi(r_2 - r_1)}{\lambda} = (2k + 1)\pi, \quad (8.93)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ Тоді

$$r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ і } A = A_1 - A_2. \quad (8.94)$$

Отже, мінімальна амплітуда коливань буде в таких точках, для яких різниця ходу хвиль дорівнює непарному числу півхвиль.

3) точки, для яких різниця ходу хвиль має проміжні значення між $k\lambda$ і $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, коливаються з деякими середніми значеннями амплітуд.

8.13. Стоячі хвилі

Запишемо рівняння двох плоских хвиль, які мають однакові частоти й амплітуди і поширюються у протилежних напрямках:

$$\xi_1 = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \text{і} \quad \xi_2 = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (8.95)$$

Сумарне зміщення частинки середовища з координатою x дорівнює сумі зміщень ξ_1 і ξ_2 :

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right], \quad (8.96)$$

або після геометричних перетворень (взявши до уваги, що $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\beta\sin\alpha$) одержуємо:

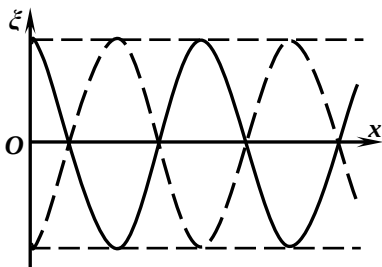
$$\xi = 2A \sin \omega t \cos \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (8.97)$$

Рівняння (8.97) називають рівнянням стоячої хвилі. Воно показує, що в результаті накладання біжучої і відбитої хвиль точки середовища коливаються так, що всі вони одночасно проходять положення рівноваги ($\sin \omega t = 0$) і всі вони одночасно досягають своїх найбільших відхилень ($\sin \omega t = \pm 1$) (мал. 8.20).

Із рівняння (8.97) видно, що амплітуда коливань частинок у стоячій хвилі залежить від їх координати x , але не залежить від часу:

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|. \quad (8.98)$$

В стоячій хвилі є такі точки, які залишаються весь час нерухомими. Їх називають *вузлами зміщення*. Положення вузлів визначають з умови:



мал. 8.20

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0 \quad \text{або} \quad \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 0. \quad (8.99)$$

Рівняння (8.99) задовольняються при значеннях аргументу:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \pi(k + 1/2), \quad (8.100)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Звідки } x = \pm \frac{\lambda}{2} (k + 1/2). \quad (8.101)$$

Отже, точки з координатами $x = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3}{4}\lambda, \pm \frac{5}{4}\lambda$ є вузлами. Віддаль між двома сусідніми вузлами дорівнює половині довжини хвилі $\lambda/2$.

Точки хвилі, які коливаються з найбільшими амплітудами, називаються пучностями зміщення. Координати цих точок визначаються з умови:

$$A_0 = 2A \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 2A \quad \text{або} \quad \left| \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right| = 1. \quad (8.102)$$

Рівняння (8.102) задовольняється при значеннях аргументу:

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, \quad (8.103)$$

де $k=0, 1, 2, \dots$

Звідси одержуємо:

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}. \quad (8.104)$$

Найбільшу амплітуду мають точки з координатами:

$$x = 0, \pm \lambda/2, \pm \frac{2\lambda}{2}, \dots$$

Віддаль між двома сусідніми пучностями також дорівнює половині довжини хвилі $\lambda/2$.

8.14. Власні коливання суцільного обмеженого середовища

Обмежене середовище (відрізок стержня з закріпленими або вільними кінцями, струна тощо) є коливальними системами з розподіленими параметрами.

Власні коливання таких систем пов'язані з утворенням у них стоячих хвиль, форма яких залежить від умов відбивання на границі середовища.

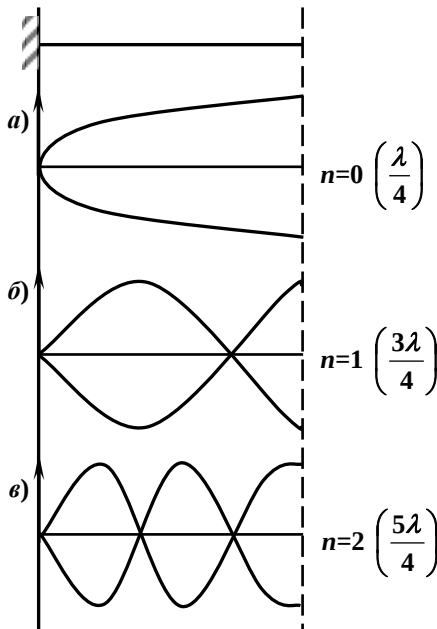
Збудити таку систему можна короткочасною дією на яку-небудь її частину (наприклад, ударом). У результаті короткочасної дії утворений

хвильовий імпульс “побіжить” від місця свого утворення в усі доступні напрямки.

Оскільки середовище обмежене, то утворена хвиля дійшовши до границі середовища, відіб’ється і перебуватиме ніби “закритою” всередині обмеженої системи. Прямі та відбиті хвилі, накладаючись, утворюють стоячу хвилю, у якій положення вузлів і пучностей суттєво залежить від умов відбивання на границі середовища.

Оскільки стоячі хвилі в цей проміжок часу існують самі собою (тобто у відсутності дії зовнішньої сили), то зв’язані з ними коливання обмеженої системи (стержня, струни) називають власними. Власні коливання системи через наявність втрат є загасаючими.

Оскільки суцільне обмежене середовище має безмежно багато ступенів вільності (кількість точок, що коливаються, безмежно), то можна припустити, що системи повинні мати безконечну кількість власних частот.



мал. 8.21

Розглянемо власні коливання стержня, у якого закріплено один кінець (мал. 8.21). Якщо ударом молоточка збудити в ньому поперечні або поздовжні хвилі, то в ньому встановлюються стоячі хвилі, при цьому на закріпленому кінці обов’язково буде вузол зміщення, а на вільному – пучність. Ця умова задовольняється безконечним числом способів.

Насамперед ця умова буде задоволена, коли на довжині стержня l вкладеться четверта частина довжини хвилі (мал. 8.21, а). Вона також буде

виконуватися, якщо на довжині l укладеться $3/4\lambda$, $5/4\lambda$ і т.д. або в загальному випадку $(2n + 1) \lambda/4$ (де $n = 0, 1, 2, \dots$). Кожному з цих випадків буде відповідати своя частота коливань.

Ми бачимо, що такий стержень має безконечну кількість власних частот. Для нього справедливе співвідношення:

$$(2n + 1) \frac{\lambda_n}{4} = l \quad (8.105)$$

або $\lambda_n = \frac{4l}{2n + 1}$. Тоді частоту власних коливань знайдемо за формулою (при відсутності дисперсії):

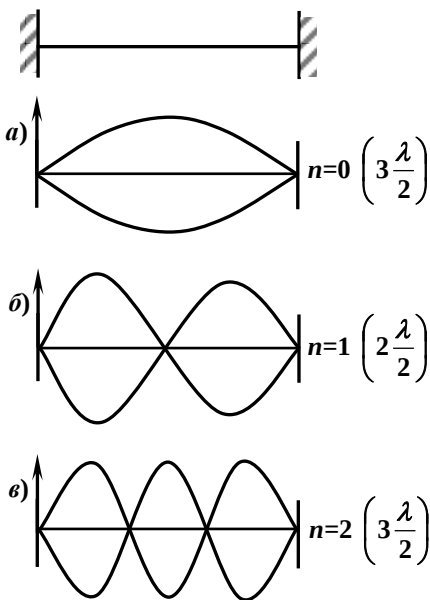
$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v(2n + 1)}{4l}, \quad (8.106)$$

де v – швидкість поширення пружних хвиль у стержні.

Якщо $n=0$, то частота:

$$\nu_0 = \frac{v}{4l}. \quad (8.107)$$

Цю частоту називають основною (в акустиці – основний тон), а всі інші частоти (вищі) називають гармоніками (або обертонами).



мал. 8.22

Частоти гармонік, як видно із (8.106), кратні ν_0 :

$$\nu_n = \nu_0(2n + 1)$$

Якщо стержень закріпити з двох кінців (як струну) (мал. 8.22), то довжина хвилі і частоти власних коливань визначаються із наступного співвідношення:

$$k \frac{\lambda_k}{2} = l, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\text{або: } \nu_k = \frac{v}{\lambda_k} = \frac{v}{2l} k. \quad (8.108)$$

При збудженні стержня виникають коливання усіх частот, амплітуди яких, як правило, зменшуються із

збільшенням номера гармоніки.

Якщо збудження здійснюється періодичною силою, яка змінюється з частотою ν , що дорівнює частоті n -ої гармоніки, то система “відрезує” якраз цю частоту: коливання цієї частоти будуть мати найбільшу амплітуду, а амплітуди інших гармонік і основного тону будуть дуже малі.

Коливання струни аналогічні до коливань стержня, закріпленого на обидвох кінцях. Тільки для струни треба мати на увазі, що швидкість поширення хвилі визначається за формулою:

$$\nu = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad (8.109)$$

де μ – маса, що припадає на одиницю довжини.

Коливання стовпа повітря у трубі аналогічні до коливань стержня, закріпленого на одному кінці.

Стержень, струна, стовп повітря у трубі – це приклади одномірних коливальних систем. Вузли та пучності стоячих хвиль у таких системах є точками (струна) або площинами, які перпендикулярні до повздовжніх осей системи (стержень, стовп повітря).

Власні коливання пластин пов’язані з утворенням двомірних стоячих хвиль, які є суперпозицією стоячих хвиль, що встановлюються у напрямках осей x і y . Насипаний на пластинку пісок “злітає” з тих ділянок, які коливаються, і залишається на частинах, які відповідають вузловим лініям, через що ці лінії стають видимими (фігури Хладні).

Будь-яке пружне тіло довільної форми також є коливальною системою (тривимірною), яка має основну частоту та безконечну кількість гармонік.

Отже, будь-яке пружне тіло є коливальною системою, яка має безконечний набір власних частот. Такі тіла здатні резонувати на частоти, що співпадають з основною частотою або з частотою будь-якої гармоніки.

Запитання для самоконтролю

1. Який рух називають коливальним? Які коливання називають гармонічними?
2. Що таке фаза коливань і що вона визначає?
3. Що визначає початкова фаза?
4. Якою буде швидкість і прискорення матеріальної точки, що здійснює гармонічні коливання за законом: $X = A \cos(\omega t + \varphi)$?
5. При яких умовах два гармонічні коливання “погасять” одне одного?
6. Що мають на увазі, коли говорять про зв’язок гармонічного коливання з обертовим рухом радіус-вектора?
7. За якою формулою визначають амплітуду результуючого коливання, яке утворилося від додавання двох гармонічних коливань одного напрямку?
8. Запишіть рівняння руху, яке утворюється при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань.
9. При яких умовах рух по колу буде відбуватися за годинниковою стрілкою при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань?
10. При яких умовах результуюче коливання буде відбуватися вздовж прямої при додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань? По еліпсу?
11. Яка сила називається квазіпружною? Наведіть приклади квазіпружних сил.
12. Запишіть формули періодів коливання математичного, пружинного та фізичного маятників.
13. На підставі якого рівняння можна зробити висновок про гармонійність коливального руху?
14. Які коливання називають вільними? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює вільні коливання.
15. Які коливання називають загасаючими? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює загасаючі коливання?
16. Що таке логарифмічний декремент затухання, коефіцієнт затухання та добротність коливальної системи?
17. Які коливання називають вимушеними? Запишіть рівняння руху матеріальної точки, яка здійснює вимушені коливання.

18. Що таке резонанс? Запишіть формули резонансної частоти й амплітуди.
19. Що називають механічною хвилею? Що таке біжуча хвиля? Що таке синусоїдальна хвиля?
20. Чому в рідинах і газах не можуть виникнути поперечні хвилі?
21. Запишіть формули для швидкості повздовжньої і поперечної хвиль.
22. Що називають довжиною хвилі? Запишіть дисперсійне співвідношення.
23. Що називають фронтом хвилі? Що називають хвильовою поверхнею, променем?
24. Запишіть рівняння плоскої біжучої хвилі.
25. Запишіть вирази кінетичної, потенціальної і повної енергії невеликого об'єму середовища, у якому поширюється біжуча синусоїдальна хвиля.
26. Що називають потоком енергії? Густиною потоку енергії?
27. У чому суть принципу суперпозиції хвиль?
28. Що називається інтерференцією? При яких умовах виникає інтерференція двох хвиль?
29. При якій умові виникають максимуми інтерференції?
30. При якій умові виникають мінімуми інтерференції?
31. Коли утворюється стояча хвиля? Запишіть рівняння стоячої хвилі?
32. При яких умовах виникають вузли й пучності у стоячій хвилі?
33. Чому стояча хвиля не переносить енергії?
34. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні повітряного стовпа (стержня, закріпленого одним кінцем).
35. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні стержня, закріпленого з обидвох кінців.
36. Запишіть формулу частот, які виникають при коливанні струни.
37. Коли виникають фігури Хладні?
38. Яка частота називається основною? А яка гармоніками?
39. Перечисліть властивості, якими стояча хвиля відрізняється від біжучої.
40. У якому випадку у стержня довжиною l основна частота нижча: коли він закріплений на двох кінцях чи на одному?

ЧАСТИНА 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА І ТЕРМОДИНАМІКА

1. МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ

Вступ. Експериментальне обґрунтування молекулярно-кінетичної теорії речовини. Взаємодія між молекулами

В основі молекулярно-кінетичної теорії речовини лежать такі три основні положення:

I. *Усі тіла складаються з атомів або з'єднань атомів, що називаються молекулами.*

Для підтвердження можна використати факти розчинення твердого тіла в рідині або змішування рідин. Ці факти свідчать, що тіла складаються з частинок, між якими є проміжки.

Зміна об'єму тіл внаслідок пружних деформацій стиску також свідчить про наявність проміжків між складовими частинками тіла.

II. *Атоми і молекули в тілах перебувають у безперервному хаотичному русі.*

Це означає, що не існує якогось напрямку для руху частинок, який був би важливішим (переважаючим) порівняно з іншими. Цей хаотичний рух молекул (частинок) називають *тепловим*.

Здатність газу поширюватись на весь об'єм посудини, в якій він перебуває, свідчить про те, що молекули газу перебувають у постійному русі.

Рухи частинок речовини зумовлюють явища дифузії, броунівський рух, теплота та ін.

Дифузія – це явище самовільного проникнення однієї речовини в іншу (пахучі гази в кімнаті, мідний купорос і вода, поверхневий шар двох твердих тіл, що перебували в контакті). Дифузія газів відбувається досить швидко, рідин – повільніше, тверді тіла дифундують дуже повільно.

Явище дифузії відбувається швидше з підвищенням температури тіл. Очевидно, з підвищенням температури тіла швидкість його молекул збільшується.

Рух молекул також яскраво відображається у броунівському русі. *Броунівський рух* – це результат хаотичних ударів молекул у мікроскопічну частинку (частинки туші, що зависли у рідині, перебувають у безперервному хаотичному русі).

III. *Між атомами і молекулами діють сили взаємодії, зокрема сили зчеплення.*

Численні факти показують, що між частинками в речовині діють сили відштовхування і притягання, які залежать від відстані між частинками (наприклад, зміна об'єму тіл).

Існування *трьох агрегатних станів речовини* – твердого, рідкого та газоподібного – підтверджують існування міжмолекулярних сил. У твердому і рідкому станах молекули притягуються одна до одної настільки, що тіла зберігають свій об'єм, а тверді тіла – ще й форму. У газоподібному стані сили взаємодії значно менші, тому газ заповнює весь доступний йому об'єм, яким би великим він не був.

Окрім сил притягання, між молекулами також існують сили відштовхування. Вони легко проявляються при деформаціях стиску твердих тіл, рідин і газів (при великих тисках).

Сили міжмолекулярної взаємодії виявляються на відстанях порядку 10^{-9} м.

Природа міжмолекулярної взаємодії складна, за сучасними поглядами вона зводиться до взаємодії електричних і магнітних полів молекул.

Отже, речовина складається з найдрібніших частинок – молекул, які взаємодіють і перебувають у безперервному безладному (тепловому) русі.

Що ж це таке, ті частинки, з яких складаються всі речовини?

Молекула – це найменша частинка речовини, яка зберігає усі її хімічні властивості. Атом – хімічно неподільна частинка, яка є найменшою кількістю хімічного елемента. Молекули складаються з атомів (H_2O , CO_2). Молекули можна розщепити на атоми, з яких вони складаються. Такий процес розщеплення молекул називається дисоціацією.

Розміри молекул і атомів надзвичайно малі. Якщо уявити собі ці частинки у вигляді маленьких кульок, то їх радіус має числове значення порядку 10^{-10} м. Але частинок є надзвичайно багато. Наприклад, в одному грамі води є $3,3 \cdot 10^{22}$ молекул.

1.1. Ідеальний газ. Параметри стану ідеального газу

1.1.1. Параметри стану ідеального газу

З курсу фізики середньої школи відомо, що газ, який точно підлягав би газовим законам, називається ідеальним.

З трьох згаданих вище станів, у яких може перебувати будь-яка речовина, найпростішим є газоподібний, оскільки сили, які діють між молекулами газу, є дуже малі і ними при певних умовах можна знехтувати. Тому виклад молекулярної фізики починається з розгляду властивостей газів. При цьому спочатку вважатимемо, що міжмолекулярні сили в газах не тільки малі, а й зовсім відсутні. Для простоти знехтуємо також розмірами молекул, тобто вважатимемо їх матеріальними точками. При таких припущеннях молекули газу вважаються зовсім вільними. Це означає, що рухаються вони прямолінійно і рівномірно (як рухаються тіла, які не зазнають дії жодних сил).

Отже, кожна молекула поводить себе так, неначе інших молекул у посудині немає. При зіткненні молекули такого газу поведуться як абсолютно пружні кульки дуже малих розмірів.

Газ, що має такі властивості, як і сукупність невзаємодіючих матеріальних точок, називається *ідеальним газом*.

Системою тіл або просто *системою* називається сукупність тіл, що розглядається. Будь-яка система може перебувати в різних станах, які відрізняються тиском, температурою, об'ємом тощо.

Величини, які визначають стан системи, називають *параметрами стану*.

Рівноважним станом системи називається такий стан, при якому всі параметри системи мають певні значення, які залишаються постійними як завгодно довго при незмінних зовнішніх умовах.

Перехід системи з одного стану в інший називається *термодинамічним процесом*.

Розглянемо основні параметри стану ідеального газу.

Об'єм газу (V) завжди збігається з об'ємом посудини, у якій перебуває газ. Об'єм вимірюється у м^3 .

Тиск (p) – фізична величина, яка чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю площі поверхні вздовж нормалі до неї ($p = \frac{F_n}{S}$). Тиск у системі СІ вимірюється у $\text{Н/м}^2 = \text{Па}$. Часто використовують і

позасистемні одиниці тиску: 1 атм (нормальна атмосфера) = $1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ Па}$. Величина нормального атмосферного тиску – 760 мм рт. ст.

Температура (T) характеризує ступінь нагрітості тіла (детальніше тлумачення температури розглядається пізніше). Зв'язок між абсолютною температурою (T) і температурою t , яка виражається у градусах Цельсія ($^{\circ}\text{C}$) має вигляд: $T = 273,15 + t$; $T = 0 \text{ К}$ (нуль Кельвінів) = $-273,15^{\circ}\text{C}$.

Кількість речовини (ν). Кількість атомів або молекул у макроскопічних тілах дуже велика. Тому кількість атомів у даному тілі прийнято порівнювати з числом атомів у $0,012 \text{ кг}$ вуглецю. Для цього вводять особливу фізичну величину – кількість речовини. Кількість речовини – фізична величина, яка визначається числом специфічних структурних елементів, з яких складається ця речовина. Кількість речовини в системі СІ вимірюється в *молях*. Моль – кількість речовини, що містить стільки ж молекул, скільки атомів є у $0,012 \text{ кг}$ вуглецю.

Маси окремих структурних елементів (молекул, атомів, іонів тощо) відрізняються одна від одної, тобто однакові кількості речовини мають різну масу.

Молярна маса (μ). Молярна маса – це маса речовини, взятої в кількості одного моля. Відповідно до цього визначення, молярна маса дорівнює добутку маси молекули на число Авогадро (N_A):

$$\mu = m_0 N_A \text{ (кг/моль)}$$

Число Авогадро (N_A). Згідно з означенням моля, число молекул або атомів у молі будь-якої речовини одне й те ж саме. Це число називають числом Авогадро (на честь італійського вченого XIX ст.). $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

1.1.2. Основні уявлення молекулярно-кінетичної теорії газів

Відомо, що строгий науковий розвиток молекулярної теорії почався приблизно з другої половини XIX ст. завдяки працям Клаузіуса, Максвелла і Больцмана, у яких були закладені основи кінетичної теорії газів. Основоположники кінетичної теорії газів використовували спрощені, ідеалізовані моделі молекул.

Молекули і атоми вони розглядали як ідеальні тверді кульки або як матеріальні точки, що взаємодіють центральними силами. Успіхи

теорії були пов'язані не з цими ідеалізованими моделями, що мають обмежену область застосування, а з тим, що теорія базувалась на основі загальних принципів механіки Ньютона: на законах збереження імпульсу і енергії, які виправдали себе не тільки для макроскопічних тіл, але і для мікроскопічних об'єктів, що підлягають квантовій механіці.

До ХХ ст. на атоми дивились як на найдрібніші неподільні частинки речовини. Це уявлення виявилось хибним. Атом є складною системою, яка складається з ядра і електронної оболонки, що оточує ядро.

Атомізм проявляється не в неподільності атомів, а в тому, що всі атоми цього виду абсолютно тотожні (однакові) і характеризуються цілком конкретними ознаками – масою, зарядом ядра, спектром випромінювання тощо. Подібної тотожності в області макросвіту не існує: у макросвіті немає двох абсолютно однакових тіл.

Атомізм проявляється також у тому, що внутрішні стани атомів не неперервні, а дискретні. Енергія атома може приймати лише дискретний ряд значень. Ці значення енергії атома називають його енергетичними рівнями.

Дискретність можливих станів атомних систем і є тією фізичною, хоча й раніше неусвідомленою, причиною, яка дала можливість фізикам у кінетичній теорії газів розглядати молекули і атоми як незмінні матеріальні точки або як ідеально тверді кульки.

При збільшенні енергії зовнішніх впливів, наприклад, при підвищенні температури газу, такі уявлення стають недійсними. Так, при температурах порядку 1000 – 3000 K молекули починають дисоціювати, тобто розпадаються на атоми. При температурах порядку 10000 K і вище починається іонізація, тобто розпад атомів на іони та електрони. А при температурах порядку десятків і сотень мільйонів Кельвінів починаються термоядерні реакції – процеси злиття і розпаду атомних ядер.

1.2. Дослідні газові закони. Рівняння стану ідеального газу

1.2.1. Дослідні газові закони

Нехай m – маса газу, який перебуває в об'ємі V , t – його температура, p – тиск.

1. Закон Бойля (1662) і Маріотта (1676), встановлений ними експериментально:

добуток тиску газу на його об'єм при сталій температурі є величина стала:

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad t = \text{const} \quad \text{і} \quad m = \text{const}. \quad (1.1)$$

2. Закон Гей-Люссака (1802):

об'єм газу при сталих m і p змінюється з температурою лінійно:

$$V_t = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad p = \text{const} \quad \text{і} \quad m = \text{const}, \quad (1.2)$$

де $\alpha = 1/273,15 \text{ град}^{-1}$.

3. Закон Шарля:

тиск газу при сталих m і V змінюється з температурою лінійно:

$$p_t = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{при} \quad V = \text{const} \quad \text{і} \quad m = \text{const}. \quad (1.3)$$

4. Ці емпіричні закони достатньо точні при не надто низьких температурах і для достатньо розріджених газів. Їх можна об'єднати в один закон:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \text{при} \quad m = \text{const}. \quad (1.4)$$

Однак відомо, що при $T = \text{const}$ і $p = \text{const}$ об'єм газу пропорційний до його маси. Виходячи з цього, Клапейрон (1840) записав рівняння(1.4) у такому вигляді:

$$\frac{pV}{T} = B \cdot m, \quad (1.5)$$

де B – стала величина (але різна для різних газів).

Зміст цієї обставини пояснив Д.І. Менделєєв (1875): *маси молекул різних газів неоднакові.*

Згідно із законом Авогадро, при однакових T і p молі різних газів займають рівні об'єми. А це означає, що права частина рівняння (1.5) буде однією й тією ж для різних газів, якщо брати для кожного з них масу одного моля:

$$\frac{pV_0}{T} = B \cdot \mu = \text{const} = R, \quad (1.6)$$

де μ – молярна маса і R – універсальна газова стала. Із закону Авогадро: при $t = 0^\circ\text{C}$ (273 K) і $p = 1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$ 1 моль будь-якого газу займає об'єм $V_0 = 0,0224 \text{ м}^3$. Тоді

$$R = \frac{pV_0}{T} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Отже, для одного моля газу рівняння Клапейрона-Менделєєва записується так:

$$pV_0 = RT. \quad (1.7)$$

Але коли газ має масу m , то його об'єм $V = \frac{m}{\mu} V_0$ і рівняння (1.7)

перепишеться так:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (1.8)$$

Рівняння (1.8) має назву рівняння стану для довільної маси газу, яке ще називається **рівнянням Клапейрона-Менделєєва**.

5. Закон Дальтона:

тиск суміші газів, які не взаємодіють між собою, дорівнює сумі їх парціальних тисків.

Парціальним тиском будь-якого газу (однієї з компонент газової суміші) називають тиск цього газу в посудині, коли б він один займав весь її об'єм. Отже,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + \quad (1.9)$$

Нехай у посудині об'ємом V міститься суміш різних газів, що перебувають у стані теплової рівноваги і не реагують хімічно один з одним. Для такої суміші можна записати:

$$pV = (N_1 + N_2 + \dots)kT, \quad (1.10)$$

де $N_1, N_2, N_3, \dots$ – числа молекул відповідних компонентів суміші, k – стала Больцмана.

Тоді з (1.10) тиск газу (суміші) буде дорівнювати:

$$p = \frac{N_1}{V} kT + \frac{N_2}{V} kT + \frac{N_3}{V} kT + \dots = p_1 + p_2 + p_3 + \dots \quad (1.11)$$

Рівняння (1.11) показує, що кожна група молекул чинить тиск, який не залежить від тиску інших молекул. Це зумовлено тим, що в ідеальному газі між молекулами немає взаємодії, молекули “не знають” про існування інших молекул.

6. Закон Авогадро.

З рівняння стану ідеального газу безпосередньо випливає і закон Авогадро: *при однакових тисках і температурах у рівних об'ємах будь-якого газу міститься однакова кількість молекул.*

Нехай маємо два однакових об'єми двох різних газів при однакових тисках і температурах. Для кожного з них можна записати рівняння стану:

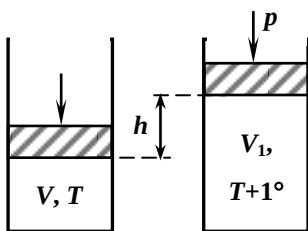
$$pV = N_1 kT \text{ і } pV = N_2 kT, \quad (1.12)$$

де N_1 , N_2 – число молекул у кожному об'ємі. З рівнянь (1.12) безпосередньо випливає, що

$$N_1 = N_2, \quad (1.13)$$

це і є закон Авогадро.

З'ясуємо фізичний зміст сталої R у рівнянні Менделєєва-Клапейрона. Розглянемо 1 моль газу, який перебуває під поршнем у циліндрі при тиску p і температурі T . Площа поршня S .



мал. 1.1

Підвищимо температуру газу від T до $(T + 1)$. З підвищенням температури газ розширюється і виконує роботу, піднімаючи поршень на висоту h (мал. 1.1). Величина цієї роботи буде:

$$A = pSh, \quad (1.14)$$

де $Sh = \Delta V$ – приріст об'єму газу при розширенні.

Тому $A = p\Delta V$.

Записавши для початкового і кінцевого станів газу рівняння Клапейрона-Менделєєва, одержуємо:

$$pV = RT \text{ і } pV_1 = R(T + 1).$$

Віднявши від другого рівняння перше, знаходимо:

$$p(V_1 - V) = R \text{ або } p\Delta V = R = A. \quad (1.15)$$

Отже, універсальна газова стала R чисельно дорівнює роботі, яку виконує один моль газу при ізобаричному його розширенні при нагріванні на 1 Кельвін ($R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$).

1.3. Основне рівняння кінетичної теорії газів

1.3.1. Зіткнення молекул

Картина руху молекул у газі буде неповна, якщо не розглянути питання про зіткнення молекул з поверхнею будь-якого тіла, що перебуває в газі, зокрема, зі стінками посудини, в якій міститься газ, та молекул між собою.

Між молекулами газу або між молекулами газу і молекулами речовини стінки виникають сили взаємодії, які дуже швидко зменшуються із збільшенням відстані між ними. Під впливом цих сил молекули газу змінюють напрям свого руху. Процес зміни напрямку руху називають зіткненням молекул.

Взаємодією молекул газу і стінок визначається сила дії газу на стінки посудини та протилежно направлена і рівна їй за величиною сила, з якою діють стінки посудини на газ. Але дію газу на стінки посудини зручніше характеризувати не силою, а тиском p , тобто силою, що діє на одиницю площі.

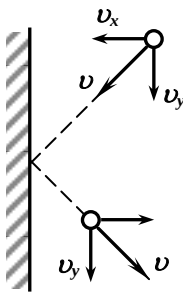
Властивість газу чинити тиск на стінки посудини, у якій він перебуває – одна з основних властивостей газу. Тому тиск є одним з головних параметрів стану газу.

1.3.2. Основне рівняння кінетичної теорії газів

Нам невідома величина сил взаємодії між молекулою та стінкою і тому ми не можемо обчислити силу, дії якої зазнає стінка від співудару з нею однієї молекули.

Але неважко підрахувати середню силу, що виникає від співударів зі стінкою багатьох молекул, якщо відомі їх швидкості і якщо вважати, що ці співудари будуть пружними.

Якщо удар пружний, то сила, що діє на стінку, дорівнює і протилежна за знаком зміні імпульсу молекул, що співударяються зі стінкою за одиницю часу.



мал. 1.2

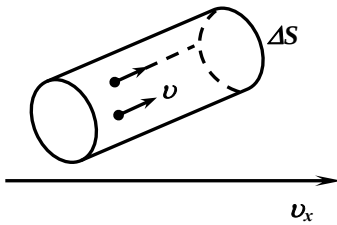
Нехай молекула рухається в посудині зі швидкістю v . Хоч би як була направлена ця швидкість, її завжди можна розкласти на три складові, з яких одна перпендикулярна до стінки посудини, а дві інші – паралельні до неї (мал. 1.2). Лише перша складова швидкості при ударі об стінку може змінюватися. Зміна імпульсу молекули при співударі зі стінкою дорівнює: $-2mv_x$.

Нехай тепер на площадку ΔS стінки за одиницю часу потрапляє N молекул, складові швидкості яких перпендикулярні до ΔS , і дорівнюють v_x .

Тоді загальна зміна імпульсу всіх цих молекул за одиницю часу дорівнює $-2m\mathbf{v}_x \cdot N$ і дорівнює взятій з протилежним знаком величині сили, що діє на площадку:

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{v}_x N. \quad (1.16)$$

Кількість молекул N , що потрапляють на цю площадку, обчислимо виходячи з таких міркувань. За одиницю часу до площадки ΔS дійдуть тільки ті молекули, які перебувають від неї на відстані, не більшій за $v \cdot 1 \text{ с}$, тобто ті, що перебувають в об'ємі циліндра з основою ΔS і твірною v (мал. 1.3).



мал. 1.3

Об'єм такого циліндра дорівнює $v_x \Delta S$. Якщо в одиниці об'єму газу є n молекул, то їх кількість в об'ємі $v_x \Delta S$ дорівнює $n v_x \Delta S$. З них лише половина потрапляє на площадку ΔS (через безладний рух друга половина молекул рухається від площадки).

Отже, за одиницю часу об площадку ΔS ударяється N молекул:

$$N = \frac{1}{2} n \Delta S v_x. \quad (1.17)$$

Сила, що її зазнає площадка ΔS від ударів усіх молекул, дорівнює:

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{v}_x N = 2m\mathbf{v}_x \cdot \frac{1}{2} n \Delta S v_x = m v_x^2 n \Delta S,$$

а тиск газу на стінку:

$$p = \frac{\mathbf{F}}{\Delta S} = m v_x^2 n. \quad (1.18)$$

Такий був би тиск газу, якщо б усі молекули мали однакові складові швидкості в напрямі, перпендикулярному до стінки. Однак молекули можуть мати швидкості різної величини і напрямку. Обчислимо тиск газу на стінки посудини, враховуючи ці умови.

Нехай в об'ємі V міститься N молекул однакової маси m , тоді їх кількість в одиниці об'єму:

$$n = \frac{N}{V}.$$

Нехай з числа n молекул n_1 молекул мають швидкість v_1 , у n_2 молекул швидкість дорівнює v_2 і т.д., так що

$$\sum n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots = n$$

Позначимо складові цих швидкостей на осях координат X, Y, Z через $v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1}, v_{x_2}, v_{y_2}, v_{z_2}, \dots, v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}, \dots$.

Тоді:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= n_1 m v_{x_1}^2 + n_2 m v_{x_2}^2 + \dots + n_i m v_{x_i}^2 + \dots = m \sum n_i v_{x_i}^2 \\ p_y &= n_1 m v_{y_1}^2 + n_2 m v_{y_2}^2 + \dots + n_i m v_{y_i}^2 + \dots = m \sum n_i v_{y_i}^2 \\ p_z &= n_1 m v_{z_1}^2 + n_2 m v_{z_2}^2 + \dots + n_i m v_{z_i}^2 + \dots = m \sum n_i v_{z_i}^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.19)$$

Зважаючи на хаотичність рухів молекул, тиск газу в довільному напрямі повинен бути однаковий:

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Додавши почленно (1.19), одержуємо:

$$p_x + p_y + p_z = 3p = m \sum n_i (v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2).$$

Але $v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2 = v_i^2$, тоді

$$3p = m \sum n_i v_i^2. \quad (1.20)$$

Величина $\sum n_i v_i^2$ – це сума квадратів швидкостей усіх молекул в одиниці об'єму газу.

Уведемо поняття середнього значення квадрата швидкості молекул

$\bar{v}^2$, використавши рівність

$$\bar{v}^2 = \frac{\sum n_i v_i^2}{n}. \quad (1.21)$$

Для знаходження середнього значення квадрата швидкості молекул треба додати квадрати швидкостей усіх молекул і розділити одержаний результат на кількість молекул n . Тоді

$$\sum n_i v_i^2 = \bar{v}^2 n. \quad (1.22)$$

Підставивши (1.22) в (1.20), одержуємо:

$$3p = mn \bar{v}^2, \quad \text{або}$$

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m \bar{v}^2}{2}. \quad (1.23)$$

Рівняння (1.23) отримало назву **основного рівняння кінетичної теорії газів**.

Отже, тиск ідеального газу дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії молекул одиниці об'єму газу.

Формула (1.23) встановлює зв'язок між молекулярними (мікроскопічними) величинами (маса і швидкість молекул) та величиною тиску (макроскопічною величиною), яка характеризує газ як ціле і безпосередньо вимірюється під час дослідів.

Тиск газу – це величина, органічно пов'язана з тим, що газ складається з великої кількості молекул. Тому немає змісту говорити, наприклад, про тиск, що створюється однією або кількома молекулами. Про такі поняття, які мають зміст тільки для систем, що містять у собі дуже багато частинок, кажуть, що вони мають статистичний характер.

Величина середнього значення квадрата швидкості $\overline{v^2}$, яка входить у формулу (1.23), відрізняється від квадрата середнього значення швидкості $\overline{v}^2$. Якщо $\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{v}$, то $\sqrt{\overline{v^2}} \neq \overline{v}$.

1.3.3. Наслідки з основного рівняння кінетичної теорії газів

А. Температура

З рівняння (1.23) видно, що тиск ідеального газу залежить від його концентрації і від середньої енергії поступального руху молекул (молекула – матеріальна точка – здійснює в цьому випадку тільки поступальний рух).

Дуже важливо, що обидві ці величини не залежать одна від одної. Справді, якщо з посудини вилучити частину молекул, зменшивши їх кількість n в одиниці об'єму, то це ніяк не вплине на величину середньої кінетичної енергії.

Якщо привести в контакт два гази з різними значеннями середньої кінетичної енергії молекул, то через деякий час значення середніх кінетичних енергій молекул обох газів стануть однаковими. Відбувається це тому, що молекули, взаємодіючи, обмінюються енергією. При цьому енергія передається від газу з більшим значенням середньої енергії до газу з меншим значенням цієї величини. Після чого настає стан так званої теплової рівноваги, коли перехід енергії від

одного газу до іншого припиняється, хоча зіткнення частинок продовжуються.

З повсякденного досвіду відомо, що аналогічно поведуться два тіла, неоднаково нагріті (які мають неоднакову температуру). При контакті таких тіл енергія також передається від одного тіла до іншого доти, доки їх температури не зрівняються.

Отже, середня енергія поступального руху молекул має таку ж властивість, як і температура. Обидві ці величини при контакті тіл вирівнюються, що відповідає встановленню теплової рівноваги.

Середня кінетична енергія поступального руху молекули газу має головну властивість температури: у стані теплової рівноваги вона однакова для всіх молекул газів, які перебувають у тепловому контакті, а також для різних молекул газової суміші. Вона не залежить від маси і внутрішньої структури молекули.

Тому величину середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ідеального газу приймають за міру температури газу. Зручно за міру температури взяти величину:

$$\theta = \frac{2}{3} \frac{m \bar{v}^2}{2}. \quad (1.24)$$

Тоді рівняння (1.23) набуває простого вигляду:

$$p = n\theta. \quad (1.25)$$

Б. Стала Больцмана

При такому визначенні температури вона має вимірюватися в одиницях енергії (у системі СІ в джоулях). Але на практиці використовувати таку одиницю температури незручно, бо безпосередньо вимірювати кінетичну енергію частинок важко. Та й енергетична одиниця температури (Джоуль) для вимірювання повсякденних температур дуже велика. Наприклад, температура танення льоду дорівнювала б $5,65 \cdot 10^{-21}$ Дж.

З цієї причини, а також тому, що величиною температури широко користувалися ще до того, як були розвинуті молекулярно-кінетичні уявлення і для температури вже давно була вибрана одиниця вимірювання – градус, прийнято використовувати саме цю одиницю, незважаючи на її умовність.

У фізиці використовують градус, який визначається, як одна сота частина різниці показів термометра, поміщеного в пару киплячої води і в танучий лід (градус Цельсія). Користуються також градусом

Реомюра і градусом Фаренгейта. Перший градус дорівнює $1/80$, а другий – $1/180$ того ж самого температурного інтервалу.

Якщо вимірювати температуру в градусах, то потрібно ввести відповідний коефіцієнт, що перераховує джоулі в градуси.

Запишемо (1.23) у вигляді:

$$pV = \frac{2}{3} N_A \frac{m \overline{v^2}}{2} = N_A \theta,$$

що нагадує рівняння Клапейрона-Менделєєва $pV = RT$. Отже, $N_A \theta = RT$ або

$$\theta = \frac{R}{N_A} T = kT, \quad (1.26)$$

де $k = \frac{\theta}{T} = \frac{R}{N_A}$.

Величина k називається *сталою Больцмана*; вона залежить тільки від вибору одиниць для θ і T . У системі СІ:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \quad (k = \frac{R}{N_A} = \frac{8,31}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}).$$

Вище вже було сказано, що при температурах порядку $1000 - 3000 \text{ K}$ молекули газу дисоціюють, а при 10000 K – відбувається іонізація. Енергію іонізації прийнято вимірювати в електронвольтах. *Електронвольт* – це енергія, яку одержує електрон при проходженні різниці потенціалів в 1 вольт .

Для атома водню енергія іонізації дорівнює $13,56 \text{ eV}$. Тому електронвольт є зручною одиницею для вимірювання надвисоких температур.

Оскільки заряд електрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, то $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Використавши значення сталої Больцмана, одержуємо:

$$T(1\text{eV}) = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 1,16 \cdot 10^4 \text{ K} \quad (T = \frac{\theta}{k}).$$

Температура, яка досягається у момент вибуху атомних і водневих бомб, є порядку 10^8 K (10 кеВ).

В. *Середня кінетична енергія поступального руху молекул*

Ще раз використаємо основне рівняння кінетичної теорії газів для одного моля:

$$pV = \frac{2}{3} N_A \frac{m \bar{v}^2}{2}.$$

Порівнявши цей вираз з рівнянням Клапейрона-Менделєєва

$$pV = RT,$$

одержуємо вираз для середньої кінетичної енергії молекул:

$$\frac{2}{3} N_A \frac{m \bar{v}^2}{2} = RT \quad \text{або} \quad \frac{m \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT. \quad (1.27)$$

Формула (1.27) стосується молекули, яку ми вважаємо подібною до матеріальної точки. Її кінетична енергія – це кінетична енергія поступального руху, швидкість якого може бути розкладена на три складові. Оскільки молекула рухається хаотично, то її енергія розподіляється рівномірно по всіх складових руху і на кожную з них припадає енергія $\frac{1}{2}kT$.

Використавши рівність (1.26), рівняння (1.25) перепишеться так:

$$p = n\theta = nkT. \quad (1.28)$$

З формули (1.27) випливає, що від’ємних температур бути не може, оскільки кінетична енергія – додатна величина. З цієї ж формули видно, що температура, як і тиск, визначається середньою кінетичною енергією молекул ідеального газу. Тому температура, як і тиск, належить до статистичних величин. Не можна говорити про “температуру однієї або кількох молекул”. Не можна говорити, наприклад, про температуру газу в космічному просторі, де кількість молекул така мала, що вони не утворюють газу в звичайному розумінні цього слова, і не можна говорити про середню енергію молекули.

1.4. Вимірювання швидкостей молекул. Дослід Штерна.

Розподіл швидкостей молекул за Максвеллом

1.4.1. Дослід Штерна

З формули (1.27) знаходимо вираз для визначення середньої квадратичної швидкості молекул:

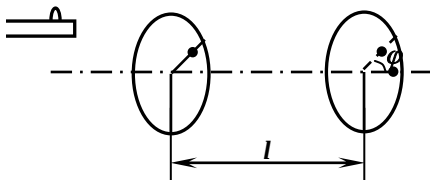
$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (1.29)$$

Подамо значення $\bar{v}_{\text{кв}}$ для деяких газів:

Газ \ $T, ^\circ\text{C}$	0	100	200
кисень	461 м/с	539 м/с	604 м/с
водень	1843 м/с	2153 м/с	2424 м/с

З цієї таблиці видно, що молекули повітря рухаються зі швидкостями, які мають значення, близькі до швидкості польоту куль.

Перше експериментальне визначення швидкостей молекул було здійснене Штерном у 1920 році. В основу цього методу покладено фізичні міркування, які застосовують при визначенні швидкості польоту куль.

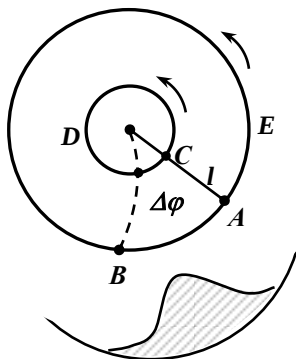


мал. 1.4

Схему одного з найпростіших методів визначення швидкості куль показано на мал. 1.4. Два паралельні диски насаджені на віддалі l один від одного на загальну вісь, яка рівномірно обертається разом з дисками з відомою кутовою швидкістю ω .

У цьому випадку можемо використати такі формули:

$$\varphi = \omega t; \quad v = l/t; \quad \varphi = \omega \cdot l/v; \quad v = \omega l/\varphi; \quad \omega = 2\pi.$$



мал. 1.5

Для визначення швидкості молекул Штерн використав установку, схема якої показана на мал. 1.5. Два коаксіальних циліндри (E і D) обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω . Уздовж їх спільної осі натягнуто платинову дротину, покриту шаром срібла, яка нагрівається електричним струмом (температуру дротини знаходять пірометром). Срібло одноатомне. При 1200°C атоми срібла випаровуються з поверхні дротини і розлітаються в усі боки. З установки видачується повітря, щоб атоми срібла на своєму шляху не зазнавали зіткнень з молекулами повітря.

На поверхні циліндра E утворюється наліт срібла у вигляді вузької смужки A . Коли вся система почала швидко обертатися, так що дротина була віссю обертання, а циліндри E і D мали однакову швидкість ω , смужка A на циліндрі E одержувалася зміщеною відносно смужки, яка утворювалася при нерухомих циліндрах E і D (положення B). Це відбулося внаслідок того, що поки молекули пари срібла пролітали шлях CA , точка циліндра E встигла повернутися на кут $\Delta\varphi$. Тоді $v = \frac{\omega L}{\Delta\varphi}$.

Унаслідок хаотичності теплового руху швидкості окремих атомів срібла відрізняються між собою, і срібна смужка на циліндрі E є розмитою.

Різна товщина срібла, яке відклалося при різних значеннях кута $\Delta\varphi$, вказує на те, що деякі значення швидкостей молекул v трапляються частіше, а інші – рідше.

1.4.2. Розподіл швидкостей молекул за Максвеллом

До основного рівняння кінетичної теорії ідеальних газів входить середня кінетична енергія молекул, яка, своєю чергою, визначається їх середньою квадратичною швидкістю.

Зміст середньої квадратичної швидкості полягає у тому, що це та швидкість, яку повинні були б мати усі молекули, щоб тиск газу був таким, яким він є виходячи з основного рівняння МКТ.

Однак швидкості молекул неоднакові. Про це свідчать і дослідні факти (дослід Штерна – смужка срібла була не різкою, а розмитою).

Завдяки безладному руху молекул та їх взаємним зіткненням молекули газу певним чином розподіляються за швидкостями так, що між ними є як дуже швидкі, так і дуже повільні. Незважаючи на цілковиту хаотичність молекулярних рухів, їх розподіл за швидкостями, як показує дослід і теорія, не є випадковим, а цілком закономірним.

Визначити розподіл молекул за швидкостями означає, начебто, визначити кількість молекул, що мають ту чи іншу задану швидкість. Але в такій постановці питання немає змісту, бо можлива кількість

молекул, що мають саме задану швидкість, дорівнює нулю. Адже кількість молекул скінченна, а кількість різних значень швидкості нескінченно велика. Тому кількість молекул, що припадає на кожне довільно задане значення швидкості, дорівнює нулю.

Тому питання формулюється так: скільки молекул або яка частина молекул мають швидкості, що лежать у деякому інтервалі.

Зрозуміло, що кількість dn частинок в одиниці об'єму, швидкості яких лежать у певному інтервалі від v до $v + dv$, тим більша, чим більший цей інтервал, тобто $dn \sim dv$, або

$$dn = a dv, \quad (1.30)$$

де a – коефіцієнт пропорційності.

Зрозуміло, що dn залежить і від самої швидкості, бо в однакових за величиною інтервалах dv , але при різних абсолютних значеннях швидкості, кількість частинок буде різна. Це означає, що у формулі (1.30) коефіцієнт пропорційності повинен бути функцією швидкості:

$$a = f(v). \quad (1.31)$$

Нарешті, число dn повинно бути пропорційним до кількості частинок n в одиниці об'єму. Тому формула для величини dn набуває вигляду:

$$dn = n f(v) dv$$

$$\text{або} \quad \frac{dn}{n} = f(v) dv. \quad (1.32)$$

Величина $\frac{dn}{n}$ у цій формулі – це та частина молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$. Функція $f(v)$ називається функцією розподілу. Знайти вигляд цієї функції і є нашим завданням. Зміст функції розподілу знаходимо з формули (1.32). Справді,

$$f(v) = \frac{dn}{n}, \text{ якщо } dv = 1.$$

Це означає, що $f(v)$ кількісно дорівнює тій долі частинок, швидкості яких лежать в одиничному інтервалі швидкостей поблизу швидкості v .

Знаючи вигляд функції $f(v)$, можна знайти кількість молекул dn з числа даних молекул n , швидкості яких лежать всередині інтервалу dv , тобто їх значення лежить в інтервалі $(v, v + dv)$:

$$dn = nf(v)dv. \quad (1.33)$$

Відношення $\frac{dn}{n} = f(v)dv$ також дає ймовірність того, що швидкість молекули буде мати значення в межах даного інтервалу швидкостей $(v, v + dv)$.

Сума $\sum dn = \sum nf(v_i)dv_i$, яка береться за всіма інтервалами dv_i , на які можна розбити вісь v , повинна очевидно дорівнювати повному числу молекул n . Звідси випливає наступна властивість функції розподілу:

$$\sum f(v_i)dv_i = 1 \quad \text{або} \quad \int_0^{\infty} f(v)dv = 1. \quad (1.34)$$

Функція розподілу $f(v)$ була знайдена теоретично Максвеллом і має його ім'я. Вона має такий вигляд:

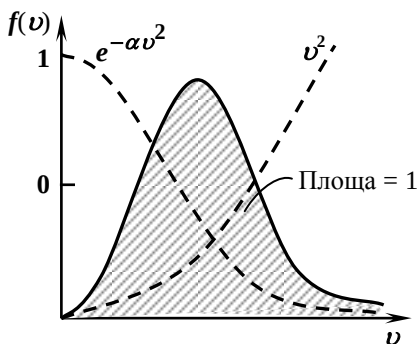
$$f(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2, \quad (1.35)$$

де A – множник, який не залежить від v , m – маса молекули, k – стала

Больцмана. Обчислення показують, що $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \quad (1.36)$$

Характерним для функції розподілу Максвелла є те, що в показнику степеня стоїть відношення кінетичної енергії молекул $\frac{mv^2}{2}$ до kT , тобто до величини, яка характеризує середню енергію молекули. Оскільки множник $e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$ при збільшенні v зменшується швидше, ніж зростає множник v^2 , то функція $f(v)$, починаючись у нулі (через v^2), досягає максимуму і потім асимптотично прямує до нуля (мал. 1.6).



мал. 1.6

Площа, обмежена кривою $f(v)$, відповідно до (1.34) дорівнює одиниці. Як слід було очікувати, конкретний вигляд функції розподілу $f(v)$ залежить від виду газу (маси молекули) і параметра стану (температури). Слід звернути увагу, що тиск і об'єм газу на розподіл молекул за швидкостями не впливають.

1.4.3. Швидкості молекул газу

Швидкість, яка відповідає максимальному значенню функції розподілу, буде, очевидно, найімовірнішою. Дійсно, якщо порівняти числа молекул Δn , швидкості яких лежать в межах різних чином вибраних, але рівних за величиною інтервалах Δv , то найбільшим буде Δn , що відповідає інтервалу, розміщеному в області максимуму функції розподілу.

Отже, розв'язавши задачу на знаходження максимуму $f(v)$, знайдемо найімовірнішу швидкість v_i . Продиференціюємо (1.35) по v і прирівняємо одержаний вираз до нуля:

$$\frac{df(v)}{dv} = A e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left(2 - \frac{mv^2}{kT} \right) = 0.$$

Значення швидкості $v = 0$ та $v = \infty$ відповідають мінімумам функції $f(v)$. Значення v , яке перетворює в нуль вираз, що стоїть в дужках, і є шукане v_i :

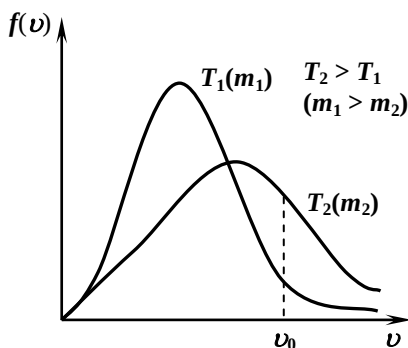
$$v_i = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (1.37)$$

Підставивши (1.37) у рівняння (1.36), одержимо максимальне значення $f(v)$:

$$f(v_i) = \frac{4}{e} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}. \quad (1.38)$$

Розглянемо як змінюється крива розподілу залежно від температури газу і маси молекули. З (1.37) випливає, що при збільшенні температури (або зменшенні маси молекули) максимум кривої зсувається вправо і стає нижчим (1.38), але площа, охоплена кривою, залишається незмінною (мал. 1.7).

Відносна кількість молекул, швидкості яких перевищують деяке значення v_0 , визначається виразом $\int_{v_0}^{\infty} f(v) dv$.



мал. 1.7

На графіку (мал. 1.7) цьому інтегралу відповідає частина площі, яка обмежена кривою $f(v)$ і лежить справа від v_0 . Як видно з малюнка, відносно число молекул, що мають швидкості, які перевищують v_0 , суттєво збільшується із зростанням температури.

Знаючи розподіл молекул за швидкостями, можна знайти середнє значення швидкості.

Розіб'ємо вісь швидкостей на малі інтервали Δv_i . Кожному такому інтервалу відповідає кількість молекул $\Delta n_i = n f(v_i) \Delta v_i$.

Суму значень швидкостей усіх n молекул можна подати у вигляді: $\sum v_i \Delta n_i$. Розділивши цю суму на число молекул n , одержуємо вираз для середньої швидкості $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{\sum v_i \Delta n_i}{n} = \frac{\sum n f(v_i) \Delta v_i v_i}{n} = \sum v_i f(v_i) \Delta v_i.$$

Перейшовши до інтегрування, знаходимо:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{\infty} v 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv = \\ &= 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\alpha^2} = 2\pi \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\alpha^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}, \quad (1.39) \end{aligned}$$

де $\alpha = \frac{m}{2kT}$, $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = \frac{1}{2\alpha^2}$ – інтеграл Пуассона (табличний).

Отже, існують три швидкості, які характеризують рух молекул газу:

$$\begin{aligned} \text{найімовірніша: } v_i &= \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = 1,41 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}; \\ \text{середня арифметична: } \bar{v} &= \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1,60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}; \\ \text{середня квадратична: } \bar{v}_{\text{кв}} &= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,73 \sqrt{\frac{RT}{\mu}}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Як бачимо, v_i , $\bar{v}$ і $\bar{v}_{\text{кв}}$ однаково залежать від температури і маси молекул, відрізняючись лише числовим множником.

Слід зазначити, що встановлений Максвеллом закон розподілу молекул за швидкостями справедливий:

- тільки для газу, який перебуває в рівноважному стані;
- для будь-якого числа n , якщо тільки це число достатньо велике;
- якщо є суміш газів, що перебувають в рівновазі, то в межах молекул кожного сорту має місце розподіл (1.36) зі своїм значенням m . Важчі молекули будуть рухатися в середньому з меншою швидкістю, ніж легші.

1.5. Барометрична формула. Розподіл Максвелла-Больцмана

1.5.1. Барометрична формула

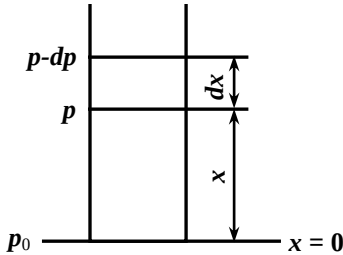
Хаотичні молекулярні рухи призводять до того, що частинки газу рівномірно розподілені в об'ємі посудини, так що у кожній одиниці об'єму міститься в середньому однакова кількість частинок. У стані рівноваги тиск і температура газу також однакові в усьому об'ємі. Але так буває тільки тоді, коли на молекулу не діють зовнішні сили. Наявність таких сил викликає своєрідну поведінку газів.

Розглянемо газ (повітря), що перебуває під дією сили тяжіння. Коли б не було теплового руху молекул, то всі вони під дією сили тяжіння “впали” б на Землю, і все повітря зібралось б тонким шаром біля поверхні Землі.

А коли б не було сили тяжіння, а існували тільки молекулярні рухи, то молекули розлетілись б по всьому світовому просторі. Атмосфера,

повітряна оболонка Землі, завдячує своїм існуванням в її теперішньому вигляді наявністю одночасно і теплового руху молекул, і сили притягання до Землі. При цьому в атмосфері встановлюється певний розподіл молекул залежно від висоти.

Відповідно до цього розподілу молекул встановлюється і певний закон залежності тиску газу від висоти.



мал. 1.8

Тиск повітря на певній висоті (мал. 1.8) дорівнює вазі вертикального стовпа повітря, що є над площею 1 м^2 .

Тоді зміна тиску повітря:

$$dp = -\rho g dx. \quad (1.41)$$

Знак “мінус” вказує на те, що тиск газу зменшується при збільшенні висоти. З кінетичної теорії відомо, що

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{pm}{kT}, \quad (1.42)$$

де m – маса молекули газу.

Взявши до уваги (1.42), рівняння (1.41) перепишеться так:

$$dp = -\frac{mp}{kT} g dx = -\frac{mg}{kT} p dx.$$

Після розділення змінних одержуємо:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dx. \quad (1.43)$$

Якщо прийняти, що $T = \text{const}$, то інтегруючи рівняння (1.43), одержуємо:

$$\ln p = -\frac{mg}{kT} x + \ln C, \quad (1.44)$$

де C – стала інтегрування.

Після потенціювання отримаємо:

$$p = Ce^{-\frac{mg}{kT} x}. \quad (1.45)$$

Стала C визначається з початкових умов: при $x = 0$ тиск $p = p_0$, тоді $C = p_0$.

Отже, залежність тиску повітря від висоти над поверхнею Землі має такий вигляд:

$$p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT}x} . \quad (1.46)$$

Або взявши до уваги, що $m = \frac{\mu}{N_A}$, рівняння (1.46) запишеться так:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT}x} . \quad (1.47)$$

Рівняння (1.46) або (1.47) називають *барометричною формулою*. Бачимо, що тиск газу зменшується з висотою за експоненціальним законом. Слід пам'ятати також, що рівняння (1.46) одержане при умові $T = \text{const}$, але температура, як відомо, зменшується із збільшенням висоти.

При виведенні барометричної формули ми також припустили, що прискорення сили земного тяжіння стале, тобто не залежить від висоти x . Таке припущення прийнятне для порівняно невеликих значень x (порядку десятків кілометрів). При значних висотах потрібно брати значення прискорення g :

$$g(R) = \gamma \frac{M}{(R_0 + x)^2} , \quad (1.48)$$

де R_0 – радіус Землі. Тоді

$$p = p_0 e^{-\frac{mgR_0}{kT} \left(1 - \frac{R_0}{R_0 + x}\right)} . \quad (1.49)$$

З цієї формули випливає парадоксальний на перший погляд результат, що навіть на нескінченній віддалі від Землі тиск не дорівнює нулю:

$$p = p_0 e^{-\frac{mgR_0}{kT}} .$$

Це означає, що атмосфера Землі (і інших планет) повинна була б простягатися безмежно і в жодній точці густина газу не дорівнювала б нулю. Але через те, що це фізично неможливо (кількість молекул скінченна, а об'єм Всесвіту нескінченний), слід припустити, що атмосфера не перебуває в рівноважному стані. Нерівноважність стану полягає в тому, що атмосферний газ невинно розсіюється у світовому просторі (але зовсім мала кількість частинок повітря покидає атмосферну оболонку, тому Земля не втрачає свої атмосфери).

Оскільки тиск газу $p = nkT$, то формула (1.46) також виражає закон зменшення густини молекул з висотою:

$$n = n_0 e^{-\frac{mg}{kT}x}, \quad (1.50)$$

де n та n_0 – кількість молекул в одиниці об'єму в точках, різниця висот яких дорівнює x .

1.5.2. Закон Больцмана

Виведена раніше барометрична формула (1.47) стосується випадку, коли на газ діє сила тяжіння. Величина mgx у формулі (1.50) є потенціальною енергією молекули на висоті x . Можна говорити, що формула (1.50) визначає число частинок n , енергія яких $U = mgx$, якщо число частинок з нульовою енергією дорівнює n_0 .

Немає жодних підстав вважати, що поведінка газу істотно зміниться, якщо замість сили тяжіння на нього діятиме інша сила, а вираз для енергії матиме інший вигляд.

Якщо газ перебуває у деякому силовому полі і його частинки мають певну потенціальну енергію, то кількість частинок, що мають задану енергію U , визначається формулою:

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (1.51)$$

Формула (1.51) називається *формулою Больцмана*. Вона дає можливість визначити ту кількість частинок, які в умовах теплової рівноваги мають енергію U :

$$\frac{n}{n_0} = e^{-\frac{U}{kT}}. \quad (1.52)$$

З формули (1.51) бачимо, що кількість частинок з даною енергією U залежить як від величини цієї енергії, так і від температури.

При даній температурі частина молекул, що мають певну енергію U , залежить від значення цієї енергії і швидко зменшується із збільшенням U . Це означає, що частина молекул з дуже великою енергією завжди мала.

Чим нижча температура, тим швидше $\frac{n}{n_0}$ зменшується із збільшенням U :

$$\left. \begin{aligned} 1) \frac{n}{n_0} &= \frac{1}{e^{\frac{U}{kT}}}; U \rightarrow \infty, e^{\frac{U}{kT}} \rightarrow \infty, \frac{n}{n_0} \rightarrow 0. \\ 2) T \rightarrow 0; e^{\frac{U}{kT}} &\rightarrow \infty, \frac{n}{n_0} \rightarrow 0. \end{aligned} \right\}$$

1.5.3. Розподіл Максвелла-Больцмана

Розподіли Максвелла і Больцмана можна об'єднати в один закон Максвелла-Больцмана. Згідно з цим законом кількість молекул в одиниці об'єму, швидкості яких лежать між v та $v + dv$, дорівнює:

$$dn = n_0 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{U + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv \approx e^{-\frac{E}{kT}} v^2 dv, \quad (1.54)$$

де $E = U + \frac{mv^2}{2}$ – повна енергія молекули, n_0 – кількість молекул в одиниці об'єму в точці, у якій $U = 0$.

1.6. Середній час і середня довжина вільного пробігу молекул

1.6.1. Зіткнення молекул

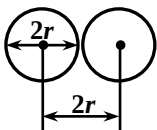
При великій кількості молекул, яка характерна для газу при звичайних тисках, не можна уявити, щоб вони могли весь свій шлях у газі проходити без взаємодії, яка змінює напрям їх руху, тобто без зіткнень між собою.

Зіткнення молекул і є результатом їх взаємодії. Взаємодія молекул призводить до найрізноманітніших результатів (молекули можуть відхилятися від свого прямолінійного руху, розпадатись на прості частинки тощо). Нас цікавитиме лише процес розсіювання молекул.

Зміна напрямку руху молекул, спричинена силами їх взаємодії, стає помітною лише на малих відстанях між ними. Зміну напрямку руху молекули на помітний кут під дією іншої молекули називають зіткненням молекул.

Розглядаючи зіткнення між молекулами, будемо вважати їх твердими пружними кульками.

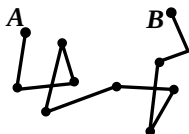
У дійсності ці “кульки” є складними системами заряджених частинок, ядер і електронів, між якими діють сили притягання і відштовхування, що мають складну залежність від відстані між молекулами – “кульками”. Хоча у цьому випадку й не можна говорити про дотикання “поверхонь молекул”, але розміри молекул визначають як відстань між їх центрами при зіткненні (мал. 1.9).



мал. 1.9

Як і раніше, вважатимемо газ ідеальним, тобто будемо вважати, що за винятком моменту зіткнення молекули не взаємодіють, не зазнають дії жодних сил і рухаються прямолінійно. У моменти зіткнення напрям швидкості молекули змінюється, після чого вона знову рухається прямолінійно.

Нехай траєкторією руху молекули в газі є ламана лінія, подібна до зображеної на мал. 1.10. Кожен злам траєкторії вказує на місце зіткнення.



мал. 1.10

Відстань, яку молекула проходить між двома послідовними зіткненнями, називається *довжиною вільного пробігу*.

Довжини прямолінійних частин на зигзагоподібному шляху молекули можуть бути

різними. Тому нас цікавитиме середня довжина вільного пробігу. Також може бути і різною кількість зіткнень, що їх зазнає молекула за одиницю часу. Тому говорять тільки про середнє значення цієї величини.

Ці дві пов'язані між собою величини – *середня довжина вільного пробігу* та *середня кількість зіткнень за одиницю часу* – головні характеристики процесу зіткнень молекул газу.

Мінімальна віддаль між центрами двох молекул при зіткненні називається *ефективним діаметром молекули* d . Ефективний діаметр дещо зменшується із збільшенням швидкості молекул, тобто з підвищенням температури. Величина $\sigma = \pi d^2$ називається *ефективним перерізом молекули*.

1.6.2. Середня довжина вільного пробігу молекул

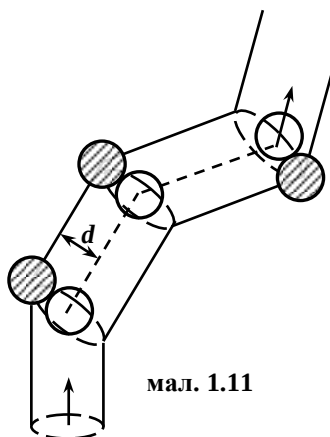
За одну секунду молекула проходить в середньому шлях, який дорівнює середній швидкості $\bar{v}$. Якщо в середньому за 1 с вона зазнає z зіткнень, то середня довжина вільного пробігу буде дорівнювати:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{z}. \quad (1.55)$$

Щоб підрахувати середню кількість зіткнень z , припустимо спочатку, що всі молекули, за винятком однієї, застигли нерухомо на своїх місцях. Прослідкуємо за рухом вибраної нами молекули.

Зіткнувшись з однією з нерухомих молекул, вона полетить прямолінійно доки не зіткнеться з іншою нерухомою молекулою.

Цей співудар відбувається в тому випадку, якщо центр нерухомої молекули перебуватиме біля прямої, вздовж якої летить молекула, на віддалі, меншій за ефективний діаметр молекули d (мал. 1.11).



мал. 1.11

У результаті зіткнення молекула змінить напрям свого руху та буде деякий час рухатися прямолінійно, доки на її шляху знову не трапиться молекула, центр якої перебуватиме в межах циліндра з радіусом основи d .

За одиницю часу (за одну секунду) молекула пройде шлях, що дорівнює $\bar{v}$. Кількість її зіткнень за цей час з нерухомими молекулами дорівнює кількості молекул, центри яких потрапляють всередину циліндра довжиною $\bar{v}$ з радіусом основи d , об'єм якого дорівнює:

$$V = \pi d^2 \bar{v}. \quad (1.56)$$

Отже, середня кількість зіткнень рухомої молекули з нерухомими за секунду:

$$z' = \pi d^2 \bar{v} n. \quad (1.57)$$

У дійсності, усі молекули рухаються, внаслідок чого кількість співударів визначається середньою швидкістю руху молекул одна відносно іншої.

Як показують результати розрахунків, середня швидкість відносного руху молекул у $\sqrt{2}$ разів більша від швидкості $\bar{v}$ молекул відносно стінок посудини.

Тоді середня кількість зіткнень за 1 с буде дорівнювати

$$z = \sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n. \quad (1.58)$$

Звідки:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{z} = \frac{\bar{v}}{\sqrt{2} \pi d^2 \bar{v} n} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}. \quad (1.59)$$

Розрахунки показують, що молекули взаємодіють протягом того часу, доки вони розміщені одна від одної на відстані порядку їх діаметра, тобто 10^{-10} м. Решту часу між зіткненнями молекули рухаються вільно. Оскільки при нормальних умовах ($p = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $T = 273$ К) $\bar{\lambda} \sim 10^{-5}$ см, що майже в 1000 разів перевищує розміри молекул, то час перебування молекул під взаємним впливом у стільки ж разів ($\bar{\lambda} / d$) менший від часу їх вільного руху.

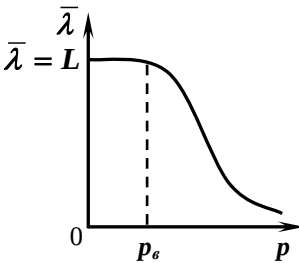
Час зіткнення молекул приблизно в 1000 разів менший за час їх руху між зіткненнями.

Отже, переважну частину часу молекули рухаються вільно, а зіткнення навіть при атмосферному тиску можна вважати випадковою подією у їх житті.

1.6.3. Залежність довжини вільного пробігу молекул від тиску

Як видно з (1.59), $\bar{\lambda}$ обернено пропорційне до кількості молекул в одиниці об'єму:

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{n} \sim \frac{kT}{p} \quad (p = nkT). \quad (1.60)$$



мал. 1.12

Якщо тиск зменшується, то середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$ збільшується (мал. 1.12). При певному значенні тиску p_ϵ середня довжина вільного пробігу дорівнює розмірам посудини L , у якій є газ, а при подальшому зменшенні тиску довжина вільного пробігу не змінюється ($\bar{\lambda} = \text{const} = L$).

При подальшому зменшенні тиску обчислення $\bar{\lambda}$ за формулою (1.59) буде неправильним. Коли довжина вільного пробігу дорівнює або перевищує розміри посудини L , зіткнення молекул у газі практично вже не відбуваються, і весь шлях від стінки до стінки молекули проходять, рухаючись прямолінійно.

Область тисків $p < p_v$ називають вакуумом. Поняття вакууму відносне. Чим більший розмір посудини, тим при менших тисках настає стан вакууму. І навпаки, для газу, який перебуває у пористих тілах з діаметром пор, меншим за 0,1 мкм, вже атмосферний тиск можна вважати вакуумом, оскільки молекули газу будуть проходити крізь пори, вдаряючись об стінки і практично без зіткнень з іншими молекулами.

З формули (1.59) бачимо, що довжина вільного пробігу молекули не повинна залежати від температури, оскільки при зростанні температури T збільшується і тиск p ($p = nkT$), а $n = \text{const}$. Проте дослід показує, що така залежність існує: з підвищенням температури довжина вільного пробігу збільшується.

Згідно з формулою (1.59), $\bar{\lambda}$ обернено пропорційне до поперечного перерізу молекули. Чим більша швидкість молекули, тим більшою повинна бути сила, яка зумовлює її відхилення і, отже, тим меншою буде відстань між молекулами при їх зіткненні. А це означає, що при збільшенні швидкості молекул, тобто при підвищенні температури, поперечний переріз молекул зменшується. *Довжина вільного пробігу молекул з підвищенням температури збільшується.*

Запитання для самоконтролю

1. Який газ називають ідеальним? Що називають параметрами стану газу? Опишіть основні параметри стану ідеального газу.
2. У яких одиницях вимірюється кількість речовини? Дайте визначення одного моля.
3. Який фізичний зміст має число Авогадро? Запишіть його.
4. Що називають молярною масою речовини? Як вона пов'язана з числом Авогадро?

5. Що таке броунівський рух і яка його причина?
6. Що розуміють під зіткненням молекул?
7. На основі яких міркувань розраховують тиск газу на стінки посудини?
8. Запишіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії та поясніть його.
9. Який фізичний зміст середньої квадратичної швидкості?
10. Що беруть за міру температури в молекулярно-кінетичній теорії газів?
11. Який фізичний зміст сталої Больцмана? Запишіть її.
12. Запишіть вираз для середньої кінетичної енергії поступального руху молекул. Поясніть його.
13. Запишіть і сформулюйте дослідні газові закони.
14. Запишіть рівняння Менделєєва-Клапейрона та поясніть його.
15. Сформулюйте закон Дальтона. Який тиск називають парціальним?
16. Сформулюйте закон Авогадро. На основі яких міркувань його встановлено?
17. Який фізичний зміст газової сталої? Запишіть її.
18. Що довів дослід Штерна щодо руху молекул?
19. Запишіть функцію розподілу Максвелла. Поясніть її фізичний зміст.
20. Як впливає температура на форму кривої функції розподілу Максвелла?
21. Що таке найімовірніша швидкість молекул? Запишіть формулу.
22. Який зміст має середня (арифметична) швидкість молекул? Запишіть її формулу.
23. При яких умовах встановлений Максвеллом закон розподілу молекул за швидкостями є справедливим?

24. Запишіть барометричну формулу та поясніть її. З яких міркувань (припущень) виходили при її виведенні?
25. Запишіть закон Больцмана та поясніть його.
26. Запишіть закон розподілу Максвелла-Больцмана та поясніть його.
27. Що називають середньою довжиною вільного пробігу молекул?
28. Як знайти середню кількість зіткнень молекул за одиницю часу?
29. Запишіть формулу середньої довжини вільного пробігу молекул.
30. Як залежить середня довжина вільного пробігу від температури? Як пояснюється така залежність?
31. Як залежить довжина вільного пробігу від тиску? Що називають вакуумом?
32. Якими приладами одержують вакуум? Від чого залежить максимальний вакуум, якого можна досягти за допомогою дифузійного насоса?
33. Які існують методи вимірювання вакууму?

2. ЯВИЩА ПЕРЕНОСУ

2.1. Явища переносу в газах. В'язкість газів

Рухаючись хаотично, молекули переходять з одних точок простору в інші, переносячи властиву їм масу, енергію та імпульс. Це призводить до виникнення процесів, які мають загальну назву явища переносу.

До явищ переносу належать:

- **внутрішнє тертя** (зумовлене перенесенням імпульсу);
- **теплопровідність** (зумовлена перенесенням енергії);
- **дифузія** (зумовлена перенесенням маси).

В'язкість газів (а також і рідин) – це властивість, завдяки якій вирівнюються швидкості руху різних шарів газу. В'язкість призводить до того, що будь-який шар газу, який рухається відносно сусіднього, зазнає дії певної сили. Цією силою є сила тертя між шарами газу, які рухаються з різними швидкостями. Звідси і походить назва – *внутрішнє тертя*.

Якщо газ нерівномірно нагрітий, тобто температура однієї його частини вища або нижча, ніж іншої, то має місце вирівнювання температури: гарячіша частина охолоджується, тоді як холодніша – нагрівається. Це пов'язано з потоком тепла від гарячої області газу до холодної. Явище виникнення потоку тепла в газі (або в будь-якій іншій речовині) називається *теплопровідністю*.

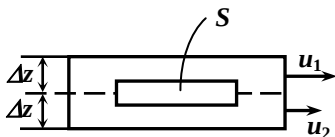
Дифузією називається явище, коли дві або кілька речовин, стикаючись (змішуючись), проникають одна в одну. Процес дифузії полягає в тому, що кожна з компонент суміші переходить з тих частин об'єму газу, де її концентрація більша, у напрямі зменшення концентрації.

Якщо швидкість ***u*** в потоці газу змінюється від шару до шару, то на границі між двома сусідніми шарами діє сила внутрішнього тертя, величина якої визначається емпіричною формулою, встановленою Ньютоном (закон Ньютона):

$$F = \eta \frac{du}{dz} S, \quad (2.1)$$

де η – коефіцієнт в'язкості, $\frac{du}{dz}$ – градієнт швидкості, S – площа шару.

Градієнтом швидкості називається величина, яка показує як швидко змінюється швидкість руху газу u в напрямі z , перпендикулярному до поверхні S , яка розділяє ці шари.



мал. 2.1

Щоб зрозуміти походження сили тертя, розглянемо два сусідніх шари газу деякої товщини Δz (мал. 2.1). Нехай ці шари газу мають різні швидкості u_1 та u_2 .

Кожна молекула газу бере участь (одночасно) у двох рухах:

хаотичному тепловому, середня швидкість якого дорівнює $\bar{v}$ (середня арифметична швидкість), і у впорядкованому русі з швидкістю u , яка переважно є значно меншою, ніж $\bar{v}$ (наприклад, $\bar{v} \approx 10^3$ м/с, а швидкість вітру при урагані $\sim 10^2$ м/с).

Нехай у деякий момент часу шари мають імпульси p_1 та p_2 . Ці імпульси не можуть залишитися незмінними, бо внаслідок теплового руху відбувається неперервний перехід молекул з одного шару в інший. За час Δt через поверхню S перейде в обидвох напрямках однакова кількість молекул, що дорівнює

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \bar{v} S \Delta t. \quad (2.2)$$

Потрапивши в інший шар, молекула зазнає співударів з молекулами цього шару, у результаті чого вона або віддає надлишок свого імпульсу іншим молекулам, або збільшує його за рахунок інших молекул. Тому імпульс шару, що рухається швидше, зменшується, а того, що рухається повільно – зростає.

Нехай з першого шару молекулами виноситься за час Δt імпульс:

$$\Delta p'_1 = \Delta N m u_1, \quad (2.3)$$

де ΔN визначається формулою (2.2).

Одночасно в цей шар вноситься імпульс:

$$\Delta p''_1 = \Delta N m u_2. \quad (2.4)$$

Отже, за час Δt імпульс першого шару одержує приріст:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2'' - \Delta p_1' = \Delta N m(u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n \bar{v} m(u_2 - u_1) S \Delta t. \quad (2.5)$$

Міркуючи аналогічно, знайдемо, що імпульс другого шару одержить при цьому приріст:

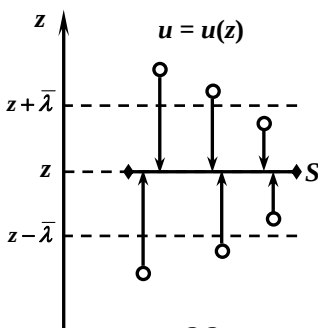
$$\Delta p_2 = -\Delta p_1. \quad (2.6)$$

Використовуючи другий закон Ньютона, можна стверджувати, що на поверхні S на перший шар діє сила:

$$F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} m(u_2 - u_1) S, \quad (2.7)$$

а на другий шар:

$$F_2 = -F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n \bar{v} m(u_1 - u_2) S. \quad (2.8)$$



мал. 2.2

Щоб одержати кінцеву формулу для сили тertia, слід врахувати, що швидкість u не може змінюватися стрибком на межі двох шарів. Вона змінюється неперервно в напрямі z , перпендикулярному до шарів ($u = u(z)$, мал. 2.2).

Кожна молекула, що пролітає через поверхню (площадку) S , переносить імпульс, який залежить від значення швидкості u в тому місці, де відбулося останнє зіткнення молекули. Тому через

поверхню S будуть пролітати молекули, які зазнали зіткнень на різних відстанях від площадки S .

У середньому останнє зіткнення відбувається на віддалі від S , що дорівнює середній довжині вільного пробігу $\bar{\lambda}$. Тому молекулам, що пролітають через поверхню S у напрямі “згори вниз” слід приписати значення швидкості з координатою $z + \bar{\lambda}$, а “знизу вгору” – з координатою $z - \bar{\lambda}$.

Оскільки, $\bar{\lambda}$ дуже мала величина, то ці швидкості можна записати так:

$$\left. \begin{aligned} u(z + \bar{\lambda}) &= u(z) + \frac{\Delta u}{\Delta z} \bar{\lambda} \\ u(z - \bar{\lambda}) &= u(z) - \frac{\Delta u}{\Delta z} \bar{\lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (2.9)$$

де $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ – швидкість газу в тому місці, де ми уявно розмістили поверхню розділу (площадку) S .

Підставивши (2.9) у рівняння (2.7), одержимо, що сила тертя дорівнює

$$F = \frac{1}{6} n \bar{v} m \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} 2\bar{\lambda} \right) S. \quad (2.10)$$

Але $mn = \rho$ (густина газу), тоді

$$F = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \frac{\Delta u}{\Delta z} S. \quad (2.11)$$

Порівнюючи рівняння (2.11) та (2.1), одержуємо, що

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v}. \quad (2.12)$$

Проаналізуємо рівняння (2.12). Взявши до уваги, що $\rho = mn$, $\bar{v} \approx \sqrt{\frac{T}{m}}$

і $\bar{\lambda} \approx \frac{1}{nd^2}$, одержуємо:

$$\eta \approx mn \sqrt{\frac{T}{m}} \cdot \frac{1}{nd^2} \approx \frac{\sqrt{mT}}{\sigma}. \quad (2.13)$$

Отже, можна зробити наступні *висновки*:

1. Коефіцієнт в'язкості η не залежить від концентрації молекул n , а, відповідно, і від тиску ($p = nkT$). Це пояснюється тим, що при зменшенні тиску зменшується кількість молекул n , які беруть участь у перенесенні імпульсу. Але одночасно збільшується середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}$, а, отже, і різниця імпульсів, які переносяться однією молекулою у протилежних напрямках (збільшується $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$). У результаті одержуємо, що сумарний імпульс, який переноситься молекулами при даному градієнті швидкості $\frac{\Delta u}{\Delta z}$, не залежить від тиску (концентрації молекул n).

Це справедливо лише до того часу, доки $\bar{\lambda}$ залишається малим порівняно з розмірами посудини, в якій тече газ. Якщо ця умова порушується, то в'язкість газу все більше починає залежати від тиску, зменшуючись з його пониженням. Коли $\bar{\lambda}$ стає співрозмірним з розмірами посудини, то вільний пробіг молекул визначатиметься

розмірами посудини і $\bar{\lambda}$ не буде залежати від тиску. Число ж молекул в одиниці об'єму n при зменшенні тиску продовжує зменшуватися, внаслідок чого зменшується і коефіцієнт внутрішнього тертя η .

2. Відповідно до (2.13), коефіцієнт внутрішнього тертя η повинен збільшуватися зі збільшенням температури пропорційно до $\sqrt{T}$. Якщо б η змінювалося пропорційно до $\sqrt{T}$, відношення $\frac{\eta}{\sqrt{T}} \sim \frac{\sqrt{m}}{\sigma}$ повинно б залишатися постійним. Насправді, це відношення дещо збільшується із збільшенням T , і відповідно η зростає дещо швидше, ніж $\sqrt{T}$. Причиною цього є залежність середньої довжини вільного пробігу від температури.

2.2. Теплопровідність

Дослідним шляхом встановлено, що у випадку, коли в довільному середовищі вздовж деякого напрямку z температура змінюється, то вздовж цього напрямку встановлюється потік тепла, величина якого визначається формулою (закон Фур'є):

$$Q = -k \frac{dT}{dz} S \Delta t, \quad (2.14)$$

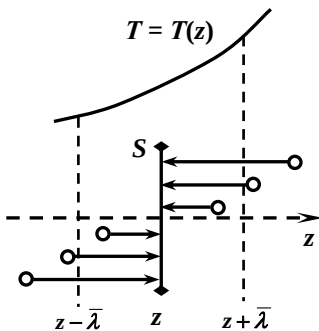
де Q – кількість теплоти, що протікає за час Δt через площадку S , яка розміщена перпендикулярно до осі z ; $\frac{dT}{dz}$ – градієнт температури; k – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від властивостей середовища.

Знак “–” у формулі (2.14) відображає ту обставину, що напрямок, у якому збільшується температура T , і напрямок, у якому тече тепло, протилежні: тепло тече в напрямку зменшення температури.

Обчислимо потік теплоти у газі, опираючись на молекулярно-кінетичні уявлення.

Якщо температура газу в різних точках простору різна, то і середня енергія його молекул у цих точках різна. Переходячи з одних місць в інші внаслідок теплового руху, молекули переносять одержану ними енергію. Це перенесення енергії і зумовлює процес теплопровідності в газах.

Розглянемо газ, в якому температура змінюється за певним законом вздовж напрямку z (мал. 2.3).



мал. 2.3

Нехай площадка S перпендикулярна до напрямку z . Через неї в обох напрямках за одиницю часу буде проходити кількість молекул:

$$N = \frac{1}{6} n \bar{v} S. \quad (2.15)$$

Кожна молекула несе з собою енергію, яка відповідає температурі в місці, де відбулося останнє зіткнення цієї молекули з іншою. Міркуючи аналогічно, як і при обчисленні коефіцієнта внутрішнього тертя η , молекулам, що летять зліва направо,

слід приписати середню енергію, яка відповідає температурі T_1 в площині $z - \bar{\lambda}$. А молекулам, що летять в протилежному напрямку – енергію, яка відповідає температурі T_2 у площині $z + \bar{\lambda}$. Позначивши середні значення енергії молекул, що відповідають цим температурам через $\bar{\epsilon}_1$ і $\bar{\epsilon}_2$, кількість енергії, яка переноситься молекулами за секунду через площадку S в додатньому напрямі осі z , можна записати так:

$$q = N(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}_2) = \frac{1}{6} n \bar{v} S \left(\frac{i}{2} k T_1 - \frac{i}{2} k T_2 \right) = \frac{1}{6} n \bar{v} S \frac{i}{2} k (T_1 - T_2), \quad (2.16)$$

де i – число ступенів вільності молекул.

Вважаючи, що $\bar{\lambda}$ дуже мале, можна записати:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= T - \frac{\Delta T}{\Delta z} \bar{\lambda} \\ T_2 &= T + \frac{\Delta T}{\Delta z} \bar{\lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (2.17)$$

де T – температура в тому місці, де розміщена площадка S .

Тоді кількість теплоти, що переноситься через площадку S за час t , буде дорівнювати:

$$Q = -\frac{1}{6} n \bar{v} S t \frac{i}{2} k \frac{\Delta T}{\Delta z} 2 \bar{\lambda}. \quad (2.18)$$

Взявши до уваги масу молекули m і число Авогадро, рівняння (2.18) переписеться так:

$$Q = -\frac{1}{6} m n \bar{v} S t \frac{i}{2} \frac{k N_A}{m N_A} \frac{\Delta T}{\Delta z} 2 \bar{\lambda}, \quad (2.19)$$

Але $mn = \rho$, $\frac{i}{2} \frac{kN_A}{mN_A} = \frac{1}{\mu} \frac{i}{2} R = \frac{1}{\mu} C_V = c_V$ – питома теплоємність газу при постійному об'ємі. Тоді

$$Q = -\frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V \frac{\Delta T}{\Delta z} St. \quad (2.20)$$

Порівнюючи рівняння (2.14) та (2.20), можна зробити висновок, що

$$k = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V, \quad (2.21)$$

$$\text{або } k = \eta c_V. \quad (2.22)$$

З'ясуємо залежність k від величин, які характеризують молекулу, і від параметрів газу. Оскільки $k \sim \eta c_V$, а $\eta \rightarrow \frac{\sqrt{mT}}{\sigma}$,

$$c_V = \frac{1}{\mu} C_V = \frac{1}{mN_A} \frac{i}{2} R \sim \frac{i}{m}, \text{ то одержуємо:}$$

$$k \approx \frac{i}{\sigma \sqrt{m}} \sqrt{T}. \quad (2.23)$$

Отже:

- коефіцієнт теплопровідності k обернено пропорційний до $\sqrt{m}$ ($\eta \sim \sqrt{m}$);
- коефіцієнт теплопровідності k залежить від числа ступенів вільності молекули i ;
- залежність від тиску і температури у k така ж сама, як і у коефіцієнта внутрішнього тертя.

2.3. Дифузія

Розглянемо газову суміш, яка складається з декількох компонент, тобто з молекул декількох сортів. Кількість молекул i -ої компоненти в одиниці об'єму позначимо через n_i . Тоді повна кількість молекул в одиниці об'єму буде дорівнювати:

$$n = \sum_i n_i. \quad (2.24)$$

Відносною концентрацією i -ої компоненти в суміші називається безрозмірна величина:

$$c'_i = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{\sum_i n_i}. \quad (2.25)$$

Очевидно, що сума всіх відносних концентрацій компонентів суміші дорівнює одиниці:

$$\sum_i c'_i = \sum_i \frac{n_i}{n} = 1. \quad (2.26)$$

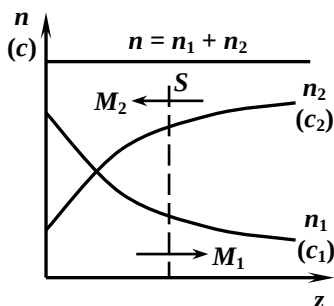
Абсолютною концентрацією довільної компоненти називається маса молекул даного сорту, що міститься в одиниці об'єму. Якщо маса молекул i -ої компоненти m_i , то абсолютна концентрація буде дорівнювати:

$$c_i = n_i m_i. \quad (2.27)$$

Тиск газової суміші дорівнює сумі парціальних тисків окремих компонентів і визначається повним числом молекул в одиниці об'єму (закон Дальтона):

$$p = \sum_i p_i = \sum_i n_i kT = nkT. \quad (2.28)$$

Якщо концентрація компонентів газу в різних точках простору є неоднакова, то внаслідок теплового руху молекул буде відбуватися процес вирівнювання концентрацій, який супроводжується перенесенням маси i -ої компоненти в напрямі зменшення її концентрації. Цей процес одержав назву *дифузії*.



мал. 2.4

Нехай маємо двокомпонентну газову суміш. Вважатимемо, що в деякому об'ємі підтримується сталим в часі градієнт концентрації обидвох компонент вздовж напрямку z . Тиск в усьому об'ємі однаковий. Відповідно, сума $n_1 + n_2$ в кожному перерізі буде однакою (мал. 2.4). Тоді через перпендикулярну до z площадку S встановлюється переважаючий потік молекул першого сорту зліва направо, який будемо

характеризувати величиною маси M_1 , що переноситься через площадку S за одну секунду. Дослідним шляхом встановлено, що ця величина визначається так (закон Фіка):

$$M_1 = -D \frac{dc_1}{dz} S, \quad (2.29)$$

де D – коефіцієнт дифузії; $\frac{dc_1}{dz}$ – градієнт абсолютної концентрації.

Маса, що переноситься через площадку S за час t :

$$M_1 t = -D \frac{dc_1}{dz} S t. \quad (2.30)$$

Одночасно буде існувати зустрічний потік молекул другого сорту, який визначається виразом:

$$M_2 t = -D \frac{dc_2}{dz} S t. \quad (2.31)$$

Знак “–” показує, що маса переноситься у напрямку зменшення концентрації даної компоненти.

Одержимо рівняння дифузії, опираючись на молекулярно-кінетичні уявлення. Нехай $m_1 = m_2 = m$ і $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. У цьому випадку молекулам обох компонент можна приписати однакову середню швидкість теплового руху $\bar{v}$, а середню довжину вільного пробігу обчислити за формулою:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma \cdot n}, \quad n = n_1 + n_2.$$

Нехай зміна концентрації першої компоненти вздовж осі z задається функцією $c_1 = c_1(z)$ (мал. 2.4). Кожна молекула, яка пролітає через площадку S , переносить властиву їй масу m . Позначимо кількість молекул першої компоненти, які пролітають за одну секунду через площадку S в напрямку z через N'_1 , а таку ж кількість для напрямку, протилежного до z – через N''_1 . Тоді маса першої компоненти, яка переноситься в напрямку z за одну секунду:

$$M_1 = (N'_1 - N''_1)m. \quad (2.32)$$

Як і у попередніх випадках, будемо вважати, що молекули, які пролітають через площадку S , прилітають до неї з перерізів, розміщених від неї на відстані $\bar{\lambda}$. Тоді кількість молекул, які пролітають через площадку S в напрямку z , буде залежати від кількості молекул в одиниці об'єму n'_1 , що відповідає перерізу з координатою $z - \bar{\lambda}$, а кількість молекул, які летять у протилежному напрямку – від

значення n_1'' , що відповідає перерізу з координатою $z + \bar{\lambda}$. Тобто, числа N_1' і N_1'' визначаються виразами:

$$N_1' = \frac{1}{6} \left(n_1 + \frac{\Delta n_1}{\Delta z} \bar{\lambda} \right) \bar{v} S \quad \text{і} \quad N_1'' = \frac{1}{6} \left(n_1 - \frac{\Delta n_1}{\Delta z} \bar{\lambda} \right) \bar{v} S. \quad (2.33)$$

Підставивши (2.33) у рівняння (2.32), одержуємо:

$$M_1 = -\frac{1}{6} \bar{v} S \frac{\Delta n_1}{\Delta z} 2\bar{\lambda} m. \quad (2.34)$$

Оскільки $m = \text{const}$, то $m \frac{\Delta n_1}{\Delta z} = \frac{\Delta}{\Delta z} (mn_1) = \frac{\Delta c_1}{\Delta z}$ і

$$M_1 = -\frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \frac{\Delta c_1}{\Delta z} S. \quad (2.35)$$

Порівнявши рівняння (2.29) та (2.35), можна зробити висновок, що

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \quad \text{або} \quad \eta = \rho D. \quad (2.36)$$

Підставимо у формулу (2.36) вирази для $\bar{v}$ і $\bar{\lambda}$, тоді

$$D = \frac{1}{n\sigma\sqrt{m}} \sqrt{T}. \quad (2.37)$$

Отже:

- на відміну від коефіцієнтів внутрішнього тертя η і теплопровідності k коефіцієнт дифузії D є обернено пропорційний до кількості молекул в одиниці об'єму, а відповідно, і до тиску p ($D \sim \frac{1}{p}$);
- залежність від температури коефіцієнта дифузії D така ж, як і у коефіцієнтів внутрішнього тертя η і теплопровідності k .

Для суміші молекул різної маси і перерізу відповідний розрахунок дає наступний вираз для коефіцієнта дифузії:

$$D = B \sqrt{\frac{T}{m'}} \frac{1}{d_{12}^2 \cdot n}, \quad (2.38)$$

де B – числовий коефіцієнт; $m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (зведена маса молекули);

$d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$ – півсума ефективних діаметрів.

Запитання для самоконтролю

1. Які явища переносу розглядаються у молекулярній фізиці?
2. Коли має місце внутрішнє тертя? Запишіть закон Ньютона та поясніть його.
3. Чому між рухомими шарами газу (з різними швидкостями) виникає сила внутрішнього тертя?
4. Наведіть послідовність математичних операцій і фізичних міркувань, які потрібно виконати та обґрунтувати, щоб отримати формулу коефіцієнта внутрішнього тертя ($\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$).
5. Чому коефіцієнт внутрішнього тертя не залежить від тиску газу?
6. Як залежить коефіцієнт внутрішнього тертя від температури? Чому?
7. Запишіть закон Фур'є та поясніть, яке явище він описує.
8. Обґрунтуйте послідовність математичних операцій, які потрібно виконати, щоб одержати вираз для коефіцієнта теплопровідності газів ($\frac{1}{3} \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} \rho \bar{v} \bar{\lambda}$).
9. Від яких параметрів залежить коефіцієнт теплопровідності газів?
10. Запишіть закон Фіка та поясніть, яке явище він описує.
11. Виведіть формулу коефіцієнта дифузії та поясніть її.
12. Від яких параметрів залежить коефіцієнт дифузії газів? Як залежить коефіцієнт дифузії від температури?

3. ПЕРШЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

3.1. Внутрішня енергія термодинамічної системи.

Кількість теплоти. Макроскопічна робота

3.1.1. Стан системи. Рівноважні і нерівноважні стани системи

Повна механічна енергія тіла складається з кінетичної енергії макроскопічного руху і потенціальної енергії макроскопічних тіл у зовнішніх силових полях. У механіці доводиться, що для ізольованої системи повна механічна енергія зберігається. Але це має місце тільки тоді, коли всі діючі на тіло сили є консервативними. При наявності дисипативних (неконсервативних) сил, сил тертя, механічна енергія замкнутої системи зменшується.

Досліди показують, що робота дисипативних сил завжди супроводжується виділенням тепла. Доведено, що принцип збереження енергії є справедливим і при наявності дисипативних сил, якщо тільки розширити поняття енергії, ввівши її нову форму, а саме внутрішню енергію. Це було зроблено Р. Майєром (1814–1878), Джоулем (1818–1889), Гельмгольцом (1821–1894) та іншими вченими, з іменами яких пов'язують відкриття принципу збереження енергії в його загально-фізичному розумінні.

Макроскопічна (класична) механіка враховує не всі рухи та силові взаємодії. З її поля зору випадає внутрішній рух атомів та молекул, а також сили взаємодії між ними.

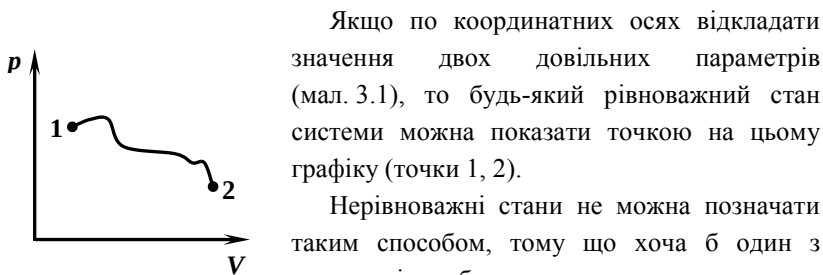
Будь-яке тіло з атомістичної точки зору є консервативною системою величезної кількості частинок, атомів і молекул (у світі атомів і молекул дисипативних сил не існує: усі сили консервативні). Для такої системи механічний закон збереження енергії буде справедливим тільки при обов'язковій умові, коли до енергії макроскопічного руху додати енергію безладного атомно-молекулярного руху. Цей останній рух і є теплотою.

Як показано вище, будь-яка система може перебувати у різних станах, які відрізняються температурою, тиском, об'ємом тощо.

Величини, які характеризують стан системи, називають *параметрами стану*.

Не завжди певний параметр має конкретне значення. Якщо, наприклад, температура у різних точках системи неоднакова, то такий системі (газу) не можна приписати певного значення параметра T . Такий стан системи називають *нерівноважним*.

Рівноважним станом системи називається такий стан, при якому всі параметри системи мають певні значення, які є постійними як завгодно довго при незмінних зовнішніх умовах.



мал. 3.1

Якщо по координатних осях відкласти значення двох довільних параметрів (мал. 3.1), то будь-який рівноважний стан системи можна показати точкою на цьому графіку (точки 1, 2).

Нерівноважні стани не можна позначати таким способом, тому що хоча б один з параметрів не буде мати певного визначеного значення у такому стані.

У теоретичних методах термодинаміки широко використовують так звані квазістатичні або квазірівноважні процеси, тобто ідеалізовані процеси, які складаються з неперервно йдучих одним за одним станів рівноваги. Будь-який процес, тобто перехід системи з одного стану в інший, пов'язаний з порушенням рівноваги системи. Отже, при протіканні в системі будь-якого процесу вона переходить через послідовність рівноважних станів. Рівноважним може бути тільки нескінченно повільний процес. Тому строго рівноважні процеси ніколи не реалізуються у природі (тобто вони є абстракцією).

Поняття рівноважного стану і рівноважного процесу відіграють велику роль у термодинаміці. Усі кількісні висновки термодинаміки строго стосуються тільки рівноважних процесів.

3.1.2. Внутрішня енергія термодинамічної системи

Відомо, що середня енергія поступального руху молекули ідеального газу визначається рівнянням:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}kT. \quad (3.1)$$

Цей вираз справедливий для молекул-точок. Таке уявлення про газ можна застосувати для одноатомних газів. Але коли молекула має складнішу будову (складається з двох і більше атомів), то вона може мати й інші види руху – обертовий та коливальний, з якими також пов'язана деяка енергія.

Розглянемо деякий одноатомний газ і знайдемо енергію усіх атомів, що містяться в одному молі газу:

$$U = N_A \frac{m\bar{v}^2}{2} = N_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}RT. \quad (3.2)$$

Цю енергію називають *внутрішньою енергією ідеального газу*. Як бачимо з рівняння (3.2), внутрішня енергія ідеального газу залежить тільки від температури T і не залежить ні від тиску, ні від об'єму газу.

З (3.2) бачимо, що для зміни температури газу потрібно змінити його внутрішню енергію. Але зміна енергії, як це відомо з механіки, пов'язана з виконанням роботи: енергія тіла змінюється, якщо тіло виконує роботу або над тілом виконується робота і ця зміна енергії дорівнює виконаній роботі.

З цього начебто випливає, що змінити температуру газу або будь-якого тіла можна тільки завдяки механічній роботі: для нагрівання тіла над ним слід виконати роботу, а для охолодження – потрібно, щоб тіло виконало роботу.

У термодинаміці зміну енергії системи розглядають як результат виконання роботи системою (або над системою) і підведення до системи теплоти (або відведення від неї теплоти).

Будемо розглядати властивості таких систем, які зазнають з боку навколишніх тіл лише механічних дій (тиску). Для них можлива лише робота розширення або стиску (усі інші види роботи вважаються дуже малими – робота перемагнічення, зміни діелектричної поляризації).

Якщо система перебуває у відносному спокої, то її енергію можна змінити, або надавши їй теплоти, або виконавши над нею роботу. При наданні тілу (системі) енергії змінюється його стан, що визначається параметрами T і V .

Відповідно можна стверджувати, що при термодинамічних (макроскопічних) змінах нерухомого тіла змінюється та частина його енергії, яка функціонально пов'язана з параметрами T і V :

$$W = \text{const} + U(T, V), \quad (3.3)$$

де $U(T, V)$ – так звана внутрішня енергія (вона є тією частиною повної енергії тіла, яка змінюється у теплових процесах). Отже, внутрішня енергія є функцією стану (функцією її параметрів T і V).

Для аналізу особливостей протікання процесу його розбивають на ряд елементарних процесів, у кожному з яких зміна енергії буде нескінченно малою величиною dU . Тоді повна зміна внутрішньої енергії у цьому процесі визначається інтегралом:

$$U = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \quad (3.4)$$

Внутрішня енергія є функцією стану $U = U(T, V)$, величина dU є повним диференціалом цієї функції. І тому згідно з (3.4), скінченні зміни внутрішньої енергії системи не залежать від шляху процесу і визначаються значеннями енергії на початку та в кінці даного процесу.

3.1.3. Кількість теплоти

Відомо, що газ, як і будь-яке інше тіло, можна нагрівати або охолоджувати і іншим способом, при якому робота, на перший погляд, не відіграє жодної ролі. Цей спосіб полягає в тому, що даному тілу забезпечують контакт з тілом, яке має іншу температуру. Такого ж самого результату можна досягти, коли два тіла різної температури нагріваються шляхом випромінювання.

Однак з формули (3.2) бачимо, що зміна температури газу завжди пов'язана зі зміною енергії. Якщо така зміна має місце в результаті затраченої роботи, то причина зміни зрозуміла, оскільки робота – це і є зміна енергії. Отже, і при “контактному” способі також підводиться (при нагріванні) або забирається (при охолодженні) енергія.

Механізм передачі енергії у “контактному” способі полягає у тому, що частинки тіл, які перебувають в контакті, при взаємних зіткненнях обмінюються енергією: частинки гарячішого тіла втрачають енергію, передаючи її частинкам холоднішого тіла.

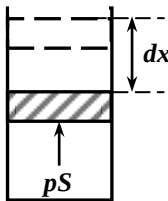
Процес обміну внутрішніми енергіями тіл, що перебувають у контакті, який не супроводжується виконанням макроскопічної роботи, називається *теплообміном*.

Енергія, передана тілу оточуючим середовищем у результаті теплообміну, називається *кількістю теплоти*.

Отже, *кількістю теплоти* є енергія, яка передається від одного тіла до іншого при їх контакті (безпосередньо чи через третє тіло) або шляхом випромінювання.

По суті, при передачі теплоти ми також маємо справу з роботою, але роботу тут виконують не макроскопічні тіла, а мікроскопічні. Вона є мікроскопічною роботою, тобто складається з робіт, виконаних молекулярними силами, з якими на молекули й атоми тіла діють молекули й атоми оточуючого середовища. Так, при контакті тіла з гарячим газом передача енергії від газу до тіла здійснюється через зіткнення молекул газу з молекулами тіла.

3.1.4. Макроскопічна робота



мал. 3.2

Розглянемо газ, що перебуває у циліндрі під поршнем (мал. 3.2). Обчислимо нескінченно малу або елементарну роботу δA , яку здійснює газ при нескінченно малому квазірівноважному розширенні, при якому його об'єм збільшується на dV .

Сила тиску газу на поршень дорівнює $F = pS$, де S – площа поршня. Якщо поршень переміститься на відстань dx , то газ виконає роботу:

$$\delta A = F dx = pS dx = p dV, \quad (3.5)$$

де $dV = S dx$.

Вираз (3.5) справедливий і в загальному випадку квазірівноважної зміни об'єму будь-якого тіла, яке перебуває під дією сталого зовнішнього тиску.

Щоб від елементарної роботи δA перейти до роботи для скінченного процесу, потрібно обчислити інтеграл:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (3.6)$$

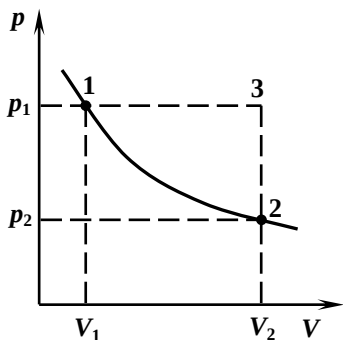
Таке обчислення можливе тільки тоді, коли тиск є певною функцією об'єму V . Згідно з рівнянням стану ідеального газу, p залежить не тільки від об'єму, але й від температури.

Змінюючи в ході процесу різним чином температуру системи, можна перевести її з початкового стану в кінцевий багатьма способами. Кожному з цих способів відповідає своя функція $p = p(V)$ і своє значення інтеграла (3.6).

Отже, робота A не визначається початковими і кінцевими параметрами станів системи. Її величина залежить також від способу або “шляху” переходу системи з початкового стану в кінцевий.

Про величини, які мають таку властивість, говорять, що вони не є функціями стану (величини, які мають цілком певне значення в кожному стані системи, називаються функціями стану).

Обчислимо, наприклад, роботу, яку виконує один моль ідеального газу при ізотермічному розширенні. Будемо нескінченно повільно і неперервно зменшувати навантаження на поршень і водночас підігрівати газ, щоб забезпечити сталість його температури під час розширення (мал. 3.3).



мал. 3.3

Графічно процес розширення на площині Vp описується гіперболою $pV = RT = \text{const}$.

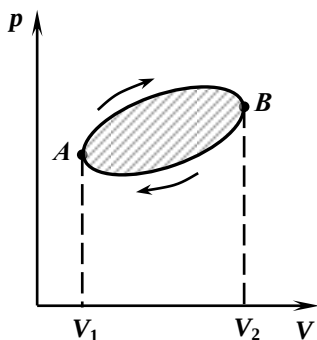
Робота, яку виконує газ, дорівнює:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (3.7)$$

Але можна перевести газ з початкового стану 1 в кінцевий стан 2 ще й іншим способом. Наприклад, можна, зберігаючи тиск газу сталим, нагріти газ, довівши його об'єм до значення $V = V_2$. Цей процес позначено

горизонтальною прямою 1–3; при цьому газ виконує роботу $A_1 = p_1(V_2 - V_1)$. Потім, закріпивши поршень і охолодивши газ, можна довести його тиск до значення p_2 . Цей процес відбувається без здійснення роботи; на мал. 3.3 він показаний прямою 3–2.

У результаті система перейде в той самий кінцевий стан 2, здійснивши роботу $A_1 = p_1(V_2 - V_1) > A$. Отже, робота залежить від способу переходу з одного стану в інший. Робота не є функцією стану.



мал. 3.4

Якщо в результаті змін система повернулася у вихідний стан, то говорять, що вона здійснила коловий процес або цикл (мал. 3.4).

Такий процес, якщо він квазірівноважний, на діаграмі pV зображається замкнутою кривою.

Робота, виконана системою в коловому процесі, чисельно дорівнює площі циклу, заштрихованого на малюнку.

При цьому, якщо точка, якою позначено стан системи, описує цикл за годинниковою стрілкою, то робота системи додатня, якщо проти годинникової стрілки – від’ємна.

3.2. Перше начало термодинаміки

На основі викладеного можна стверджувати, що робота є макроскопічним способом передачі енергії від одних тіл до інших. Термін “макроскопічний” у цьому випадку підкреслює той факт, що робота завжди пов’язана з макроскопічним переміщенням тіл або їх частин. Зі сказаного також випливає, що роботу можна трактувати як енергію у процесі її передачі.

Як було показано вище, при контакті двох тіл різної температури відбувається невидимий (мікроскопічний) процес передачі енергії від гарячого тіла до холодного. Цей спосіб передачі енергії називається теплопровідністю. А кількість переданої при цьому енергії називають кількістю теплоти.

Отже, теплота є мікрофізичним способом передачі енергії. І про роботу, і про теплоту можна говорити як про зміну енергії в процесі її передачі. Однак не говорять, що в тілі є теплота або робота.

Змінити стан системи можна, виконуючи роботу або коли роботу над нею виконали зовнішні сили. Ця робота виражається через параметри, що визначають стан системи.

Але як уже було зазначено, змінити стан системи (газу) можна також надавши їй, або, навпаки, забравши від неї деяку кількість теплоти, тобто забезпечивши її контакт з гарячішим або холоднішим тілом.

Відповідь на запитання, яка робота буде виконана при зміні стану системи у результаті теплообміну, дає закон збереження енергії. Якщо газові (системі) надано деяку кількість теплоти δQ , то при цьому виконується робота δA і змінюється його внутрішня енергія dU .

Закон збереження енергії говорить: робота, яку виконує система, дорівнює різниці між кількістю теплоти, яку надано системі, і зміною її внутрішньої енергії:

$$\left. \begin{aligned} \delta A &= \delta Q - dU \\ \delta Q &= dU + \delta A \end{aligned} \right\} \quad \text{або} \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) виражають дуже важливий закон природи – *закон збереження енергії у застосуванні до механічної і теплової енергії*. Цей закон отримав назву *першого начала термодинаміки*.

Потрібно пам'ятати, що величини δQ та δA є алгебраїчними. Прийнято вважати, що $\delta Q > 0$, якщо система одержує теплоту, і $\delta A > 0$, якщо система виконує роботу над зовнішніми тілами, передаючи їм енергію.

У системі, яка розміщена в адіабатній оболонці, процеси не супроводжуються теплообміном з навколишніми тілами; такі процеси називаються адіабатними (адіабатичними). Для адіабатних процесів $\delta Q = 0$ і згідно з (3.8) $dU = -\delta A$: робота в адіабатному процесі здійснюється завдяки зменшенню внутрішньої енергії. Якщо $\delta A < 0$ (зовнішні тіла виконують роботу над системою), то $dU > 0$ (внутрішня енергія системи збільшується).

Слід наголосити на ще одній особливості рівняння (3.8): dU є повним диференціалом внутрішньої енергії досліджуваного тіла, величини δQ та δA є елементарними (малими) значеннями теплоти і роботи.

Для знаходження кінцевої зміни стану системи, зумовленої її переходом зі стану 1 у стан 2, вираз (3.8) інтегрують по лінії переходу 1 $\rightarrow$ 2:

$$\int_1^2 \delta Q = \int_1^2 dU + \int_1^2 \delta A$$

або

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A. \quad (3.9)$$

Рівнянням (3.9) записують перше начало термодинаміки для кінцевих змін системи. Згідно з викладеним вище, δQ і δA – це

скінченні значення теплоти і роботи (але не приріст), а величина dU є приростом внутрішньої енергії.

Як було показано вище, dU (ΔU) не залежить, а δA (ΔA) залежить від виду процесу. Тому з рівняння (3.9) випливає, що δQ (ΔQ) також залежить від виду процесу.

Коли система здійснює лише механічну роботу $\delta A = pdV$, то вираз (3.9) запишеться у вигляді:

$$\delta Q = dU + pdV. \quad (3.10)$$

Якщо процес коловий, тобто у результаті система повертається у вихідний стан, то $U_1 = U_2$, і, відповідно, $Q = A$. У коловому процесі все тепло, одержане системою, йде на виконання зовнішньої роботи.

Якщо $U_1 = U_2$ і $Q = 0$, то $A = 0$. Це означає, що є неможливим процес, єдиним результатом якого є виконання роботи без жодних змін в інших тілах.

Механізм, в якому повинен здійснюватися такий процес, називається “перпетум мобіле” першого роду (*вічний двигун першого роду*).

Отже, *перше начало термодинаміки заперечує можливість створення (існування) вічного двигуна першого роду.*

Якщо відомо стан системи (параметри стану), але не вказано процес, яким цей стан досягнуто, то не можна нічого сказати про кількість теплоти, яку одержала система при переході в цей стан. Але завжди можна визначити запас внутрішньої енергії, бо він не залежить від способу переходу системи у даний стан. Про кількість тепла, наданого тілу, можна говорити лише тоді, коли вказано процес, яким система переходила у даний стан.

Запишемо перше начало термодинаміки для системи, коли $V = \text{const}$. Тоді $A = pdV = 0$ і рівняння (3.10) переходить в

$$\Delta Q = U_2 - U_1 = \Delta U. \quad (3.11)$$

Якщо ж $p = \text{const}$, то $A = p(V_2 - V_1) = \Delta pV$, і одержуємо:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta(pV). \quad (3.12)$$

Введемо нову величину:

$$I = U + pV. \quad (3.13)$$

Вона є функцією стану, оскільки величини U , p , V є функціями стану.

Тоді

$$\Delta Q = I_2 - I_1 = \Delta I \quad (p = \text{const}). \quad (3.14)$$

Функція I відіграє важливу роль у термодинаміці. Вона називається ентальпією. *Ентальпія* є функцією стану, приріст якої при ізобарному процесі дорівнює кількості теплоти, яку одержала система.

Отже, якщо об'єм системи залишається сталим, то кількість теплоти ΔQ дорівнює приросту внутрішньої енергії системи. Якщо ж сталий тиск, то кількість теплоти визначається приростом ентальпії. В обох цих випадках величина ΔQ не залежить від шляху переходу, а тільки від початкового і кінцевого стану системи.

У зв'язку з тим, що теплота і робота не є функціями стану для нескінченно малих кількостей теплоти і роботи вживають позначення δQ і δA , а не dQ і dA . Це підкреслює, що величини δQ і δA не завжди можуть бути подані як нескінченно малі прирости певних функцій стану. Таке представлення можливе лише в окремих випадках, наприклад, для δQ у випадку процесів при сталому об'ємі або сталому тиску.

Нескінченно малі зміни внутрішньої енергії, ентальпії, тиску, об'єму, температури тощо позначають символами dU , dI , dp , dV , dT , ... Це свідчить, що ці величини є повними диференціалами, тобто в усіх без винятку випадках можуть розглядатися як нескінченно малі прирости функцій U , I , p , V , T , ...

Різниця у записі малого приросту внутрішньої енергії dU від елементарної кількості теплоти δQ , а також елементарної роботи δA має глибокий фізичний зміст. Це є виразом закону збереження енергії, який стверджує, що система у кожному своєму стані має тільки одне значення внутрішньої енергії.

Якщо б у деякому стані система мала різні значення внутрішньої енергії, то ми могли б забрати цю різницю і стан системи не зазнав би змін. А це означало б, що сама система є джерелом енергії, не зазнавши при цьому жодних змін, що суперечить закону збереження енергії.

Тому при виконанні системою будь-якого процесу, внаслідок якого вона знову повертається до початкового стану, повна зміна її внутрішньої енергії дорівнює нулю. Математично це записують у вигляді тотожності:

$$\oint dU \equiv 0, \quad (3.15)$$

яка є необхідною і достатньою умовою для того, щоб вираз dU був так званим повним диференціалом.

3.3. Теплоємність ідеальних газів

3.3.1. Теплоємність газу. Фізичний зміст універсальної газової сталої

Теплоємністю тіла називають фізичну величину, яка дорівнює кількості теплоти, затраченої на нагрівання цього тіла на один градус:

$$c = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (3.16)$$

Розрізняють питому та молярну теплоємності. Кількість теплоти, яку потрібно затратити для нагрівання одиниці маси тіла на один градус, називають *питомою теплоємністю*. А теплоємність, віднесена до одного моля речовини, називається *молярною теплоємністю*. Між питомою теплоємністю c і молярною C існує співвідношення:

$$C = \mu c. \quad (3.17)$$

Теплоємність тіла істотно залежить від того, як змінюється стан тіла в процесі його нагрівання.

Для простоти розглянемо ідеальний одноатомний газ.

Нехай маємо 1 *моль* ідеального газу, що перебуває при сталому об'ємі ($V = \text{const}$), тоді $\Delta Q = \Delta U$ і

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V = \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V = \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (3.18)$$

Якщо цей газ нагрівати при сталому тиску ($p = \text{const}$), то $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$ і

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p = \frac{\Delta U}{\Delta T} + p \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V + p \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (3.19)$$

Враховуючи, що $p = \text{const}$, з рівняння Клапейрона-Менделєєва знаходимо, що $p\Delta V = R\Delta T$, і рівняння (3.19) переписеться так:

$$C_p = C_V + R. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) має назву *рівняння Майєра*. Воно дає просту інтерпретацію фізичного змісту універсальної газової сталої: *універсальна газова стала R чисельно дорівнює роботі, яку виконує один моль ідеального газу при його нагріванні на 1 Кельвін при постійному тиску.*

3.3.2. Теплоємність одноатомних і багатоатомних газів

Розглянемо ідеальний газ, що перебуває при сталому об'ємі ($V = \text{const}$). У цьому випадку перше начало термодинаміки запишеться так:

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ а } C_V = \frac{dU}{dT}. \quad (3.21)$$

В одному молі цього газу є N_A молекул, кожна з яких має середню кінетичну енергію поступального руху $W_0 = \frac{3}{2}kT$, тому:

$$U = N_A W_0 = \frac{3}{2}kT N_A = \frac{3}{2}RT. \quad (3.22)$$

Рівняння (3.22) виражає внутрішню енергію одного моля ідеального газу. Тоді

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2}R. \quad (3.23)$$

Оскільки в одному молі будь-якого ідеального газу міститься однакова кількість молекул (а середня кінетична енергія молекул не залежить від їх маси), то можна було б очікувати, що молярні теплоємності всіх достатньо розріджених газів будуть однаковими ($C_V = 12,5 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ і $C_V \neq f(T)$) і підлягатимуть однаковим закономірностям.

Цей висновок, що впливає з кінетичної теорії газів, добре узгоджується з експериментом для інертних газів He, Ar, Kr і т.п., а також для парів деяких металів, наприклад, срібла.

Однак вимірювання теплоємностей основних газів, що утворюють повітря N_2 , O_2 , та інших двохатомних газів при кімнатній температурі дають значення для $C_V = 20,8 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$. Ще більше значення $C_V = 25 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ одержується при кімнатній температурі для водяної пари (H_2O) та інших багатоатомних газів (NH_3 , CO_2 , CH_4).

Ці факти вказують на те, що припущення про можливість розглядати рухомі молекули ідеального газу як матеріальні точки, а, отже, нехтувати їхніми розмірами, є з достатнім ступенем точності справедливим тільки для одноатомних газів.

Для визначення положення матеріальної точки в просторі потрібно знати три координати, які ще називають ступенями вільності. Числом ступенів вільності тіла називають найменше число координат, які необхідно задати, щоб повністю визначити положення тіла в просторі.

Тобто, якщо частинка (атом) розглядається як вільна матеріальна точка, то вона має три ступені вільності. Відповідно, середня кінетична енергія поступального руху одноатомного газу може бути розділена на три частини:

$$\overline{W}_{\text{noc.}} = \frac{3}{2}kT = \frac{m\overline{v}^2}{2} = \frac{m\overline{v}_x^2}{2} + \frac{m\overline{v}_y^2}{2} + \frac{m\overline{v}_z^2}{2}, \quad (3.24)$$

які відповідають кінетичній енергії трьох ступенів вільності поступального руху.

Хаотичність молекулярних рухів дає нам право вважати, що середні значення кінетичних енергій у трьох напрямках однакові:

$$\frac{m\overline{v}_x^2}{2} = \frac{m\overline{v}_y^2}{2} = \frac{m\overline{v}_z^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{m\overline{v}^2}{2} = \frac{1}{3} \frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}kT. \quad (3.25)$$

Можна зробити висновок, взявши до уваги (3.25), що *середня енергія теплового руху одноатомного газу рівномірно розподіляється між трьома ступенями вільності їх поступального руху і на кожну ступінь вільності в середньому припадає енергія, яка дорівнює $\frac{1}{2}kT$.*

Цей висновок є одним з найважливіших законів статистичної фізики – *закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності, сформульованого Больцманом.*

Позначають ступені вільності буквою “*i*”. Частинки можуть мати 3, 5 і 6 ступенів вільності. У випадку двохатомної молекули $i = 5$:

$$\overline{W} = \overline{W}_{\text{noc.}} + \overline{W}_{\text{об.}} = 3\frac{1}{2}kT + 2\frac{1}{2}kT = \frac{5}{2}kT, \quad (3.26)$$

тоді:

$$U = N_A \overline{W} = \frac{5}{2}kTN_A = \frac{5}{2}RT \text{ і } C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{5}{2}R \approx 20,8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \quad (3.27)$$

У випадку триатомної молекули $i = 6$:

$$\overline{W} = \overline{W}_{\text{noc.}} + \overline{W}_{\text{об.}} = 3\frac{1}{2}kT + 3\frac{1}{2}kT = 3kT, \quad C_V \approx 25 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \quad (3.28)$$

Взявши до уваги рівняння (3.23), (3.27) і (3.28), можна зробити висновок, що в усіх трьох випадках молярні теплоємності газів повинні мати постійні значення, які не залежать від температури *T*.

Але проведені експериментальні дослідження показують, що у випадку одноатомних газів формула, яку дає кінетична теорія, добре узгоджується з даними експерименту в області від декількох кельвінів

до тисяч *кельвінів*. Для двохатомних газів величина C_V неперервно змінюється із зміною температури, переважно плавно, а при деяких температурах досить різко і на значну величину.

Отже, вирази для теплоємностей можна подати у вигляді:

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_P = \frac{i+2}{2} R. \quad (3.29)$$

Для одноатомного газу ($i = 3$):

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12,5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}; \quad C_P = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}.$$

Для двохатомного газу ($i = 5$):

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20,8 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}; \quad C_P = \frac{7}{2} R = 29,1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}.$$

Для багатоатомного газу ($i = 6$):

$$C_V = 3R = 24,9 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}; \quad C_P = 4R = 33,2 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}.$$

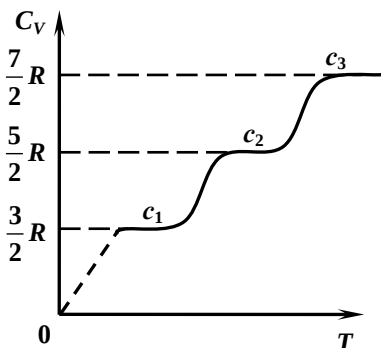
Атоми, утворюючи молекули, можуть здійснювати і коливальні рухи. У багатьох випадках коливальний рух атомів може не збуджуватися зовсім. Але якщо коливання атомів у молекулі відбуваються і амплітуди коливань досить малі (порівняно з відстанню між ними), то такі коливання можна вважати гармонічними (атоми у цьому випадку можна вважати гармонічними осциляторами).

Однак гармонічний осцилятор має не тільки кінетичну, але й потенціальну енергію, яка зумовлена силами, що повертають атом до стану рівноваги.

Для гармонічного осцилятора середні значення кінетичної і потенціальної енергії рівні між собою.

Отже, якщо у молекулі збуджені гармонічні коливання атомів, то за законом рівномірного розподілу на кожен коливальний ступінь вільності припадає $\frac{1}{2}kT$ як кінетичної, так і $\frac{1}{2}kT$ потенціальної енергії. Інакше кажучи, енергія, що припадає на кожен коливальний ступінь вільності, дорівнює $2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT$.

За класичною теорією теплоємність газів не повинна залежати від температури. Однак досліди показали, що теплоємності всіх речовин з підвищенням температури зростають, а при низьких температурах істотно зменшуються (мал. 3.5).



мал. 3.5

Графічно ця залежність виражається характерною ступінчастою кривою, на якій чітко виділяються ділянки (паралельні до осі температур) сталої теплоємності, незалежної від температури. На ділянці, що відповідає області низьких температур, теплоємність водню $C_V = \frac{3}{2}R$; в області середніх

температур $C_V = \frac{5}{2}R$, а в області високих температур $C_V = \frac{7}{2}R$.

Отже, у деякій області низьких температур молекули водню поводитись себе як системи, які мають ступені вільності поступального руху; при середніх температурах виникають ще обертальні рухи молекул, а при вищих температурах проявляються ще й коливальні рухи атомів у молекулах.

Графік залежності теплоємності газу від температури показує, що класична теорія теплоємностей справджується лише в окремих інтервалах середніх температур.

Відхилення від класичної теорії теплоємностей свідчать про існування складніших закономірностей у поведінці атомів і молекул, які виходять за межі класичних. Вони відображені у квантовій фізиці.

У класичній теорії вважали, що енергія W , яка припадає на будь-який ступінь вільності, може змінюватися неперервно. Насправді виявилось, що енергія обертального та коливального рухів молекул квантована, тобто вона може набувати лише окремих (дискретних) значень, а отже, може змінюватися стрибкоподібно: лише окремими порціями – квантами. Неперервно може змінюватися тільки енергія поступального руху молекул.

Збудження обертального та коливального рухів залежить від величини середньої енергії молекул $\bar{W}$, а отже, від температури. Якщо температура настільки низька, що середня енергія молекул значно менша від кванта збудження обертального руху ($\bar{W} \ll E_{об}$), то

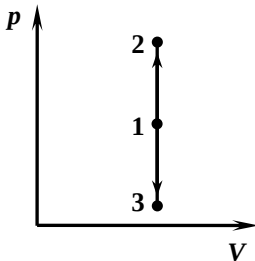
практично існують лише поступальні рухи молекули. Теплоємність газу відповідно буде $C_V = \frac{3}{2}R$ (ділянка c_1 , мал. 3.5).

З підвищенням температури у деякому інтервалі температур усі молекули перебувають в обертальних і поступальних рухах. Теплоємність двохатомного газу $C_V = \frac{5}{2}R$ (ділянка c_2 , мал. 3.5). При значно вищих температурах усе більше атомів молекул здійснюють коливальні рухи і теплоємність газу зростає (ділянка c_3).

3.4. Ізопроцеси. Робота, виконувана газом в ізопроцесах

3.4.1. Ізохоричний процес ($V = \text{const}$)

Цей процес здійснюється при нагріванні газу у замкненому об'ємі ($V = \text{const}$). У цьому процесі змінюються тільки тиск газу p і його температура T .



мал. 3.6

На pV -діаграмі ізохоричний процес зображається вертикальною прямою, паралельною до осі p (мал. 3.6). Процес $1 \rightarrow 2$ відповідає ізохоричному нагріванню, а $1 \rightarrow 3$ – ізохоричному охолодженню.

Запишемо перше начало для ізохоричного процесу:

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + p dV = dU. \quad (3.30)$$

З рівняння (3.30) випливає, що надана газу теплота в ізохоричному процесі йде на збільшення його внутрішньої енергії:

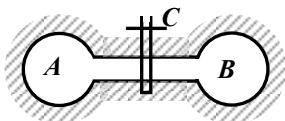
$$\delta Q = dU = C_V dT. \quad (3.31)$$

Для довільної маси газу m формула (3.31) набуває вигляду:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT. \quad (3.32)$$

Отже, у випадку ідеального газу формула (3.32) придатна для будь-якого процесу, оскільки внутрішня енергія цього газу залежить тільки від молярної теплоємності C_V і температури T та не залежить від його об'єму ($U = f(C_V, T)$ і $U \neq f(V)$).

У 1807 році Гей-Люссак, а пізніше Джоуль експериментально довели, що при розширенні газу в порожнину його температура не змінюється. Схему досліду показано на мал. 3.7.



мал. 3.7

У посудині A перебуває розріджений газ, близький за своїми властивостями до ідеального, при температурі T . У посудині B створено вакуум. Обидві посудини і трубка, що їх з'єднує, теплоізовані від зовнішнього середовища ($\delta Q = 0$). Якщо відкрити кран C , то газ, що був у посудині A , розшириться і займе об'єм усієї установки.

Експериментально показано, що температура газу при цьому не змінилася ($dT = 0$), а це означає, що $dU = 0$. Отже, внутрішня енергія ідеального газу не залежить від його об'єму.

Одержаний результат експерименту можна пояснити, використавши перше начало термодинаміки. При адіабатному розширенні газу в порожнину $\delta Q = 0$ і $\delta A = 0$ ($\delta A = 0$: при розширенні у порожнечу газ не виконує роботи, оскільки зі сторони “порожнечі” на газ не діє жодна сила тиску):

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ отже } dU = 0. \quad (3.33)$$

Нехай $U = U(V, T)$, тоді

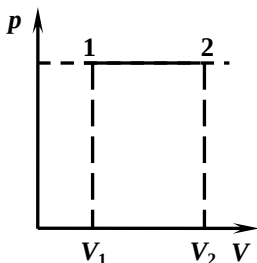
$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT. \quad (3.34)$$

Оскільки $dV \neq 0$ і $\frac{\partial U}{\partial T} \neq 0$, а $dU = 0$ (відповідно до (3.33)), то з

рівності (3.34) випливає, що $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0$ і $U \neq f(V)$ – внутрішня

енергія ідеального газу не залежить від об'єму.

3.4.2. Ізобаричний процес ($p = \text{const}$)



мал. 3.8

На pV -діаграмі цей процес зображається горизонтальною прямою, паралельною до осі V (мал. 3.8). Робота, виконана газом при ізобаричному розширенні, дорівнює площі прямокутника $V_1 - 1 - 2 - V_2 - V_1$:

$$\delta A = p dV, \quad A = p(V_2 - V_1). \quad (3.35)$$

Запишемо перше начало термодинаміки для ізобаричного процесу:

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (3.36)$$

Рівняння (3.36) вказує на те, що теплота надана системі йде як на збільшення її внутрішньої енергії, так і на виконання нею роботи над зовнішніми тілами.

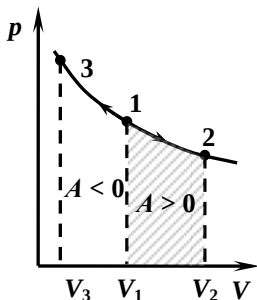
Для ідеального газу рівняння (3.35) можна записати ще й так:

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} R dT, \quad (3.37)$$

оскільки $V_2 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_2}{p}$ і $V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{p}$. Тоді:

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{m}{\mu} dT (C_V + R) = \frac{m}{\mu} C_p dT. \quad (3.38)$$

3.4.3. Ізотермічний процес ($T = \text{const}$)



мал. 3.9

На pV -діаграмі ізотермічний процес зображається гіперболою (мал. 3.9). Цю криву часто ще називають ізотермою. Вся теплота, яка надається системі в ізотермічному процесі, повністю йде на виконання нею роботи. Внутрішня ж енергія системи у цьому процесі не змінюється ($dT = 0$).

Перше начало термодинаміки у цьому випадку записується так:

$$\delta Q = \delta A.$$

Обчислимо роботу, яку виконує ідеальний газ в ізотермічному процесі:

$$\delta A = p dV, \quad pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad p = \frac{1}{V} \frac{m}{\mu} RT. \quad (3.39)$$

Тоді

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{p_1}{p_2}, \quad (3.40)$$

оскільки $p_1 V_1 = p_2 V_2$ (рівняння Бойля-Маріотта).

Робота розширення газу ($V_2 > V_1$) додатня (на мал. 3.9 показана заштрихованою площею $V_1 - 1 - 2 - V_2 - V_1$). При стисканні газу (процес 1 – 3) робота A , що виконується газом, від'ємна ($A < 0$). У цьому випадку зовнішні сили, сили стиску, виконують додатню роботу $A' = -A$. При цьому $Q < 0$, тобто теплота від газу (системи) забирається.

Звернемо увагу на те, що теплоємність речовини в ізотермічному процесі нескінченно велика ($C = \frac{dQ}{dT}$, $\delta Q \neq 0$, $dT = 0$). Відповідно для

практичного здійснення ізотермічного процесу потрібно забезпечити тепловий контакт між системою (газом) і масивним тілом, яке має постійну температуру ($T = \text{const}$).

3.4.4. Адіабатний процес ($\delta Q = 0$)

Адіабатним називається такий процес, при якому немає обміну енергією у формі теплоти (теплообміну) між системою і зовнішнім середовищем. Практично адіабатний процес здійснюється при достатньо швидкому розширенні або стиску газу.

Виходячи з умови $\delta Q = 0$ і $\delta Q = C dT$, одержуємо, що теплоємність речовини в адіабатному процесі дорівнює нулю.

Запишемо перше начало термодинаміки для адіабатного процесу:

$$dU + \delta A = 0 \quad \text{або} \quad C_V dT + p dV = 0. \quad (3.41)$$

З рівняння (3.41) випливає, що при адіабатному розширенні ($dV > 0$) (не в порожнечу) відбувається охолодження газу ($dT < 0$). Це означає, що робота розширення газу відбувається через зменшення внутрішньої енергії газу $\delta A = -dU$. Якщо ж газ адіабатно стискати

($dV < 0$), то він нагрівається. При цьому виконана над системою робота цілком йде на збільшення запасу її внутрішньої енергії.

Виведемо рівняння кривої, яка зображає адіабатний процес на pV -діаграмі. Для цього використаємо перше начало термодинаміки і рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля газу:

$$C_V dT + p dV = 0, \quad (3.42)$$

$$pV = RT. \quad (3.43)$$

Продиференціюємо (3.43) і знайдемо dT :

$$p dV + V dp = R dT, \text{ , } dT = \frac{p dV + V dp}{R} = \frac{p dV + V dp}{C_p - C_V}. \quad (3.44)$$

Підставивши (3.44) у рівняння (3.42), і прийнявши, що $\gamma = C_p / C_V$, одержуємо:

$$C_V \frac{p dV + V dp}{C_p - C_V} + p dV = 0, \quad C_p \frac{dV}{V} + C_V \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{або}$$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0. \quad (3.45)$$

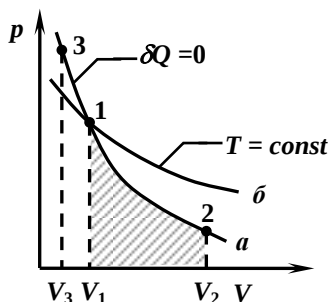
Проінтегрувавши (3.45), маємо:

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln C \quad \text{або} \quad \ln(pV^\gamma) = \ln C. \quad (3.46)$$

Або

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (3.47)$$

Рівняння (3.47) називається *рівнянням Пуассона* або *рівнянням адіабати*.



мал. 3.10

На мал. 3.10 кривою *a* показано адіабату ($pV^\gamma = \text{const}$). Ділянка 1 – 3 відповідає адіабатному стиску. З малюнка видно, що адіабата стрімкіша, ніж ізотерма. Це пояснюється тим, що при адіабатному стиску збільшення тиску газу відбулося не тільки у результаті зменшення його об'єму, як це має місце при ізотермічному стиску, а й в результаті підвищення його

температури. А при адіабатному розширенні газу його температура знижується, тому тиск газу зменшується більше, ніж при ізотермічному розширенні (коли $T = \text{const}$).

Обчислимо роботу, яку виконує один моль ідеального газу при адіабатному розширенні від стану 1 до стану 2:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{V_2^{1-\gamma}}{V_1^{1-\gamma}} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Для довільної маси газу m робота адіабатного розширення:

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma-1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (3.49)$$

Звернемо увагу на те, що при інтегруванні рівняння (3.45) ми вважали $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \text{const}$. Строго кажучи, теплоємність C_V , а отже і C_p ,

і γ можуть змінюватися при зміні об'єму, тиску і температури.

Використаємо рівняння Менделєєва-Клапейрона і запишемо рівняння адіабати в координатах (TV) і координатах (pT) :

$$\begin{aligned} pV^\gamma = \text{const}, \quad pV = RT, \quad p = \frac{RT}{V}, \quad \text{тоді} \\ \frac{RT}{V} V^\gamma = \text{const} \quad \text{або} \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad V = \frac{RT}{p}. \quad \text{Тоді}$$

$$p \left(\frac{RT}{p} \right)^\gamma = \text{const} \quad \text{або} \quad p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const}. \quad (3.51)$$

3.4.5. Політропний процес

Розглянуті вище ізотермічний і адіабатний процеси зміни стану тіла є окремими випадками більш загального *політропного процесу*. Таку назву має процес, при якому теплоємність C тіла залишається постійною ($\delta Q = C dT$).

Використавши перше начало термодинаміки та співвідношення

$$dT = \frac{pdV + Vdp}{C_p - C_V} \quad \text{і} \quad \frac{C - C_p}{C - C_V} = n, \quad (3.52)$$

після відповідних перетворень одержимо:

$$n \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{або} \quad pV^n = \text{const}. \quad (3.53)$$

Покажемо, як з рівняння (3.53) можна одержати відомі газові закони:

1) *адіабатний процес*:

$$\delta Q = 0; \quad C = 0; \quad n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C_p}{C_V} = \gamma; \quad pV^\gamma = \text{const}$$

2) *ізотермічний процес*:

$$dT = 0; \quad C = \infty; \quad n = \frac{\frac{C_p}{C} - 1}{\frac{C_V}{C} - 1} = 1; \quad pV = \text{const}$$

3) *ізобарний процес*:

$$p = \text{const}; \quad C = C_p; \quad n = 0; \quad p = \text{const}$$

4) *ізохоричний процес*:

$$V = \text{const}; \quad C = C_V; \quad n = \pm\infty; \quad V = \text{const}$$

($p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$, добуваємо корінь n -го степеня: $p_1^{1/n} V_1 = p_2^{1/n} V_2$,

оскільки $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, то $p_1^{1/n} \rightarrow 1$ і $p_2^{1/n} \rightarrow 1$, тоді $V_1 = V_2 = \text{const}$).

3.5. Оборотні та необоротні процеси

Особливе положення термодинаміки у фізиці пов'язане з тим, що будь-яка форма енергії при її перетвореннях врешті переходить в енергію теплових рухів. Будь-який вид енергії у процесі перетворень може перейти через багато форм енергії, але кінцевим результатом усіх таких перетворень обов'язково буде тепла енергія.

Найбільше практичне зацікавлення має перетворення механічної енергії у теплову та зворотний процес утворення механічної роботи за рахунок теплової енергії.

Якщо система з певних причин не перебуває у стані рівноваги або виведена з нього і після цього залишена сама на себе (тобто не зазнає зовнішнього впливу), то, як показує дослід, сам собою відбувається перехід до стану рівноваги.

Можна навіть говорити, що стан рівноваги – це такий стан, у який переходить будь-яка молекулярна система при відсутності зовнішнього впливу на неї. Процес переходу до рівноваги називається релаксацією, а потрібний для цього час називають часом релаксації.

Але коли рівновага вже встановилася, то система не може, як показує дослід, самостійно повернутися до початкового стану. Наприклад, якщо два тіла, що перебувають в контакті, мали спочатку різні температури і були залишені на самих себе, то їх температури вирівнюються. Але зворотний процес, збільшення різниці температур між ними, без зовнішнього впливу не відбувається. Або якщо розмістити в посудині два різних гази, то внаслідок взаємної дифузії вони самі собою перемішаються так, що склад суміші стане всюди однаковий. Це і буде рівноважним станом. Однак для того, щоб знову розділити ці гази, потрібно затратити значну роботу.

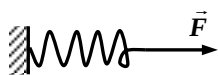
Наведені приклади свідчать про важливу особливість процесів, які відбуваються у молекулярних системах – про їх необоротність. Цим молекулярні процеси відрізняються від суто механічних, для яких властива строга оборотність.

Оборотним процесом називається така зміна стану системи, яка будучи проведена у зворотному напрямку, повертає її у початковий стан так, щоб система пройшла через ті самі проміжні стани, що і в

прямому процесі, але у зворотній послідовності, а стан тіл поза системою залишився незмінним.

Оборотними є всі рухи, які розглядаються у механіці, за винятком тих, у яких бере участь сила тертя (оскільки виділяється тепло і процес перестає бути суто механічним).

Процеси, які не задовольняють наведену вище умову оборотності, називають *необоротними*.



мал. 3.11

Розглянемо приклад необоротного процесу. Нехай пружина, один кінець якої закріплено, деформується (розтягується) силою $\vec{F}$, прикладеною до другого кінця (мал. 3.11). Роботою сили $\vec{F}$ пружина розтягується, збільшуючи свою потенціальну енергію.

Якщо

після того, як пружина розтягнулася на певну величину, припинити дію сили $\vec{F}$, то пружина повернеться до початкового стану, зменшивши свою потенціальну енергію.

Чи можна вважати описаний процес розтягування пружини оборотним? Коли сила $\vec{F}$ починає розтягувати пружину, то передусім деформується та частина пружини, до якої безпосередньо прикладено силу, тобто частина, яка прилягає до незакріпленого кінця. Поступово деформація передається іншим частинам пружини і останньою буде деформуватися та її частина, яка прилягає до закріпленого кінця.

Після припинення дії сили пружина починає стискатися. Але й тепер деформації першою зазнає та частина пружини, яка прилягає до точки прикладання сили, оскільки вона першою “відчуває”, що сила перестала діяти. Отже, хоча й процес стискання йде у зворотному напрямку, пружина при цьому *не проходить проміжних станів* у зворотному порядку: у прямому процесі спочатку деформувалася та частина пружини, яка прилягає до її незакріпленого кінця; у такому ж самому, а не зворотному порядку, пружина деформується й при стисканні. Тому в описаному досліді процес розтягування пружини не можна вважати оборотним.

Необоротність проявиться ще й у тому, що при швидкому припиненні дії сили пружина почне коливатися: сила тертя приведе до загасання коливань і їх енергія перейде у тепло.

З цієї ж причини швидкий стиск або розширення газу, ізотермічне чи адіабатне, не є оборотними процесами. Як і у випадку з пружиною, необоротність тут полягає у тому, що чергування проміжних станів при прямому і зворотному процесах однакове.

До необоротних процесів належить і розширення газу в порожнечу, незрівноважене зовнішніми силами. Необоротними є всі явища перенесення: теплопровідність, дифузія і внутрішнє тертя.

У деяких випадках процеси, які в одних умовах відбуваються необоротно, можуть стати оборотними в інших. Процес розтягування пружини можна здійснити і оборотно. Потрібно, щоб при розтягуванні у кожен момент пружина була в стані рівноваги. Для цього слід розтягувати пружину так повільно, щоб деформація встигла передаватися по всій довжині пружини і була завжди й в усіх точках однаковою. Тоді пружина буде у кожен момент часу у рівновазі. Принципово потрібно, щоб процес йшов нескінченно повільно. Час розтягування повинен бути більшим від часу релаксації.

Процеси, у ході яких система увесь час залишається у стані рівноваги, називаються квазістатичними. Такі процеси є оборотними, оскільки всі проміжні стани в них є рівноважними.

Нагадаємо, що квазістатичні процеси можна показувати відповідними кривими (pV , pT тощо). Необоротні процеси неможна зображати такими кривими. Адже якщо процес нерівноважний, то не можна говорити про певний тиск або певну температуру, які відповідають певному значенню об'єму.

Усі природні процеси, такі, як перехід тепла від більш нагрітого до менш нагрітого тіла, вирівнювання концентрації у газових сумішах тощо, завжди є необоротними і, звичайно, неквазістатичними процесами.

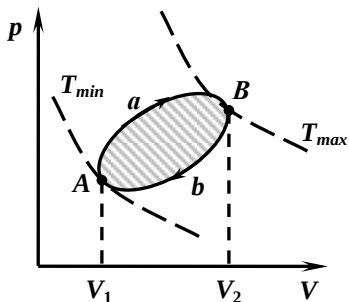
Запитання для самоконтролю

1. Який стан системи називають рівноважним? А який нерівноважним?
2. Що називають внутрішньою енергією ідеального газу? Запишіть її формулу.
3. Що означає твердження, що внутрішня енергія є функцією стану?
4. Що називають кількістю теплоти?
5. Як обчислити роботу, яку виконує ідеальний газ?
6. Чому робота є функцією процесу? І не є функцією стану?
7. Сформулюйте та запишіть перше начало термодинаміки.
8. Що називають ентальпією? Запишіть формулу.
9. Що називають теплоємністю? Питомою і молярною теплоємністю?
10. Що називають молярною теплоємністю при сталому об'ємі? При сталому тиску? Який існує зв'язок між ними?
11. Чому $C_p > C_v$? Який фізичний зміст універсальної газової сталої?
12. Як залежить теплоємність ідеального газу від ступенів вільності молекул?
13. Як залежить теплоємність ідеальних газів від температури?
14. Який процес називають ізохоричним? Як знайти роботу, внутрішню енергію і кількість теплоти в ізохоричному процесі?
15. Доведіть, що внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму.
16. Як обчислити роботу, внутрішню енергію і кількість теплоти в ізобаричному процесі?
17. Як обчислити роботу, яку виконує ідеальний газ в ізотермічному процесі?
18. Виведіть рівняння Пуассона (рівняння адіабати).
19. Чи виконує ідеальний газ роботу в адіабатному процесі? Як обчислити цю роботу?
20. Чому адіабата на pV -діаграмі стрімкіша, ніж ізотерма?
21. Запишіть рівняння політропи. Як з нього одержати рівняння ізотерми, ізохори та адіабати?
22. Які процеси називають оборотними? При яких умовах їх можна реалізувати на практиці? Наведіть приклади.
23. Які процеси називають необоротними? Наведіть приклади.

4. ДРУГЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМІКИ

4.1. Колові процеси (цикли). Цикл Карно

4.1.1. Колові процеси



мал. 4.1

Коловим процесом або циклом називається тепловий процес, у результаті якого термодинамічна система (тіло) повертається до вихідного стану.

На pV - і pT -діаграмах колові процеси зображаються у вигляді замкнених кривих, оскільки на будь-якій діаграмі два тотожних стани зазначаються однією і тією ж точкою на площині (мал. 4.1).

Колові процеси лежать в основі всіх теплових машин: двигунів внутрішнього згорання, парових і газових турбін, парових та холодильних машин тощо. Тому вивчення властивостей різних колових процесів є найважливішим завданням термодинаміки.

Розглянемо коловий процес $AaBbA$ (мал. 4.1), який відбувається з ідеальним газом. Його можна розбити на два процеси: розширення газу від стану A в стан B (процес AaB) та стиснення його зі стану B до стану A (процес BbA). При розширенні газ виконує додатню роботу A_1 , яка визначається площею фігури $V_1AaBV_2V_1$. А при стисканні газу зовнішні сили виконують роботу $A'_2 = -A_2$ (газ виконує від'ємну роботу A_2), яка визначається площею $V_1AbBV_2V_1$. З малюнка видно, що $A_1 > A'_2$. Тому за цикл загалом газ виконує додатню роботу:

$$A = A_1 - A_2, \quad (4.1)$$

яка визначається заштрихованою площею, обмеженою кривою $AaBbA$. Такий цикл називається *прямим*.

Якщо коловий процес відбувається у зворотному напрямі (проти стрілки годинника), то сумарна робота, виконана газом за такий цикл,

буде від'ємною. Чисельно вона також буде дорівнювати площі фігури $AaBbA$. Такий цикл називається *зворотним*.

Перше начало термодинаміки для колового процесу записується так:

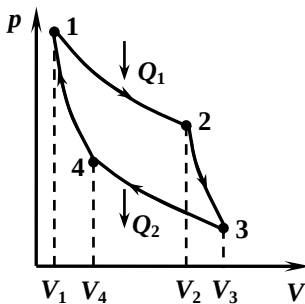
$$\delta Q = \delta A, \quad (4.2)$$

оскільки внутрішня енергія є функцією стану і $dU = 0$.

У прямому циклі $A > 0$ і $Q > 0$, тобто газ виконує роботу за рахунок наданої йому теплоти. Навпаки, у зворотному циклі над газом виконується робота ($A < 0$) і від нього забирається еквівалентна їй кількість теплоти.

Отже, у тепловому двигуні робоче тіло здійснює прямий цикл, а в холодильній машині – зворотний цикл. *Робочим тілом* у термодинаміці прийнято називати газ або будь-яке інше термодинамічне тіло, яке здійснює коловий процес і обмінюється енергією з іншими тілами.

4.1.2. Цикл Карно



мал. 4.2

Розглянемо тепер коловий процес, у результаті якого тепло, забране від певного тіла, можна перетворити у роботу і при цьому якнайкраще, тобто так, щоб ця робота була максимально можливою.

Принцип В.Томсона стверджує: *неможливо здійснити циклічний процес, єдиним результатом якого було б перетворення в роботу теплоти, взятої від певного тіла, без певних змін у навколишніх тілах.*

Щоб здійснити коловий процес, потрібно мати три тіла: джерело тепла, від якого тепло забирається (*нагрівник*); холодніше тіло, якому тепло передається (*холодильник*) та *робоче тіло*, яким передається тепло і виконується робота.

Будемо для простоти міркування вважати, що нагрівник і холодильник мають таку велику теплоємність, що їх температури не будуть змінюватися, якщо від першого забирається, а другому надається певна кількість тепла.

Почнемо коловий процес над робочим тілом з того, що воно, стиснуте до певного тиску, перебуває у контакті з нагрівником, тобто має його температуру T (мал. 4.2, точка 1). Процес теплопровідності не відбуватиметься, оскільки немає різниці температур. Не відбувається і передача тепла без виконання роботи.

Надамо робочому тілу можливість розширитись, тобто здійснити переміщення якогось тіла, не припиняючи його контакту з нагрівником. Розширення буде ізотермічне (крива 1 – 2). При цьому буде виконана робота (за рахунок теплоти Q_1 , взятої від нагрівника).

Частину одержаної робочим тілом теплоти Q_2 тепер потрібно передати холодильнику. Цю передачу не слід здійснювати прямим дотиканням робочого тіла до холодильника, оскільки температура ізотермічного розширення тіла є вищою за температуру холодильника T_2 і така передача тепла при контакті не буде супроводжуватися виконанням корисної роботи. Тому робоче тіло потрібно спочатку охолодити до температури холодильника і тільки після цього їх можна привести в контакт між собою.

Для охолодження робочого тіла його слід ізолювати від нагрівника, а потім дати йому можливість адіабатно розширюватись (крива 2 – 3), доки воно не досягне температури холодильника.

На цьому другому етапі тіло, розширюючись і перемішуючи, наприклад, поршень, додатково виконає механічну роботу. Після охолодження таким чином робочого тіла його приводять у контакт з холодильником. На цьому закінчується перша половина циклу, під час якої робоче тіло виконало корисну роботу за рахунок теплоти, одержаної від нагрівника.

Далі потрібно повернути робоче тіло у початковий стан, тобто відновити початковий тиск і температуру. А це означає, що робоче тіло слід стиснути і забезпечити йому знову контакт з нагрівником. Цей контакт не потрібно здійснювати доки температура робочого тіла

є нижчою за температуру нагрівника. Тому повернення робочого тіла до початкового стану також здійснюється двома етапами.

Спочатку робоче тіло стискають, не порушуючи його контакту з холодильником, тобто ізотермічно (крива 3 – 4). Потім, ізолювавши робоче тіло від холодильника, його додатково стискають адіабатно, так щоб воно нагрілось до температури T_1 нагрівника (крива 4 – 1). При адіабатному стисканні робоче тіло нагрівається у результаті виконання зовнішньої роботи, яка виконується над ним. Після цього температура робочого тіла дорівнюватиме температурі нагрівника і цикл на цьому завершується: робоче тіло є в початковому стані і процес може початися знову.

Розглянемо ідеальний цикл Карно. У цьому циклі робочим тілом є ідеальний газ. Робота, яку виконує газ за один цикл, дорівнює:

$$A = Q_1 - |Q_2|. \quad (4.3)$$

Коефіцієнтом корисної дії η теплового двигуна називається відношення роботи A , яку виконує машина за цикл, до кількості теплоти Q_1 , яку машина одержала за цей цикл:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (4.4)$$

Обчислимо коефіцієнт корисної дії ідеального циклу Карно:

- 1) при ізотермічному процесі 1 – 2 система одержує кількість

$$\text{теплоти } Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \text{ але } \Delta U = 0, \text{ тому}$$

$$\Delta Q = \Delta A);$$

- 2) при адіабатному процесі 2 – 3 система не одержує і не віддає теплоти, тому $Q = 0$;
- 3) при ізотермічному процесі 3 – 4 робоче тіло віддає теплоту

$$\text{холодильнику } |Q_2| = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \quad (\text{або } Q_2 = -\frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3});$$

- 4) при адіабатному процесі 4 – 1 система не одержує і не віддає теплоти, тому $Q = 0$.

Отже,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.5)$$

Покажемо, що $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Для цього запишемо рівняння адіабати для процесів 2 – 3 і 4 – 1:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}, \quad (4.6)$$

$$T_2 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_4^{\gamma-1}. \quad (4.7)$$

Поділивши рівняння (4.6) на рівняння (4.7), одержуємо, що

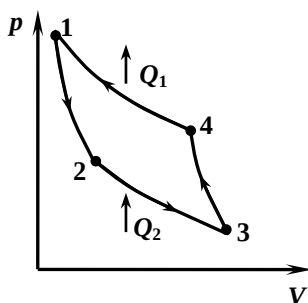
$$\frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}, \text{ або } \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (4.8)$$

Отже,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (4.9)$$

де η називається *термічним коефіцієнтом корисної дії ідеального циклу Карно*, він залежить лише від температури нагрівника T_1 і температури холодильника T_2 .

Розглянемо зворотний цикл Карно, який відбувається проти стрілки годинника (мал. 4.3).



мал. 4.3

Такий цикл Карно починається з того, що робоче тіло, яке перебуває в стані 1, адіабатно розширюється до стану 2. Далі відбувається ізотермічне розширення до стану 3. На цих двох перших стадіях циклу робоче тіло, розширюючись, виконує роботу.

У другій половині циклу: вздовж адіабати 3–4 та ізотерми 4–1 робоче тіло стискається, а робота стиснення виконується над робочим тілом зовнішнім джерелом енергії.

З мал. 4.3 бачимо, що робота стиску є більшою від роботи, яку виконує робоче тіло у першій половині циклу. Тому кінцевим результатом оберненого циклу Карно буде не виконана корисна робота (за рахунок одержаної теплоти $Q_1 - Q_2$), а перенесення тепла від холодильника до нагрівника, тобто від холоднішого до гарячішого тіла.

Якщо машина, яка працює за прямим циклом Карно, призначена для перетворення теплоти у механічну роботу, тобто є тепловим двигуном, то машина, яка працює за оберненим циклом Карно, використовується для передачі тепла від менш нагрітого до більш нагрітого тіла, тобто є холодильною машиною.

Тепловий двигун є досконалішим, якщо більша частина теплоти Q_1 перетворюється у ньому в корисну роботу A , а холодильна машина буде економною, коли менша робота A буде затрачатися із зовні на відведення від холодного тіла теплоти Q_2 .

С. Карно сформулював і довів теорему, яка складається з двох частин:

1. Усі оборотні машини, які виконують цикл Карно, мають, незалежно від природи робочого тіла, однаковий коефіцієнт корисної дії, якщо вони працюють зі спільним нагрівником і спільним холодильником.
2. Коли дві машини виконують цикл Карно, причому одна з них оборотна, а друга необоротна, то коефіцієнт корисної дії необоротної машини менший, ніж коефіцієнт оборотної, якщо ці дві машини мають спільний нагрівник та спільний холодильник.

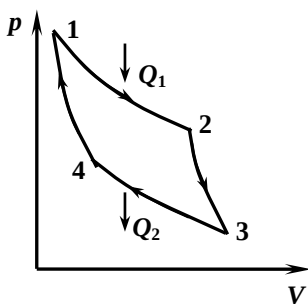
У термодинаміці доводиться, що з усіх оборотних машин, які мають спільний нагрівник і спільний холодильник та виконують довільні цикли, найбільший коефіцієнт корисної дії має машина, яка працює за циклом Карно. Термодинаміка також вказує шляхи, якими можна досягнути максимального коефіцієнта корисної дії – це максимальне усунення необоротних процесів (тертя, теплопровідності тощо). Малий коефіцієнт корисної дії реальних парових машин ($\eta < 20\%$) пояснюється тим, що парові машини, як і всі інші теплові машини, не працюють за циклом Карно, а також тим, що в усіх реальних машинах відбуваються необоротні процеси.

Викладене вище можна підсумувати коротко так:

- к.к.д. циклу Карно залежить тільки від абсолютних температур нагрівника T_1 і холодильника T_2 ;
- к.к.д. циклу Карно завжди менший від одиниці ($\eta < 1$). Рівність $\eta = 1$ можлива тільки при $T_2 = 0$ або $T_1 = \infty$, що практично реалізувати неможливо;
- к.к.д. циклу Карно дорівнює нулю при $T_1 = T_2$, а отже, неможливе перетворення теплоти у роботу, якщо всі тіла системи мають однакову температуру, тобто перебувають в тепловій рівновазі;
- к.к.д. циклу Карно не залежить від будови двигуна і фізичних властивостей робочого тіла, а лише від температур нагрівника T_1 і холодильника T_2 (T_2 – часто температура навколишнього середовища);
- к.к.д. циклу Карно має найбільше значення порівняно з к.к.д. довільного циклу, що здійснюється в одному і тому ж температурному інтервалі.

4.2. Ентропія

4.2.1. Ентропія – функція стану



мал. 4.4

Повернемося до колового процесу Карно і розглянемо детальніше зміни стану, яких зазнає робоче тіло в цьому процесі (мал. 4.4). Нагадаємо, що з вихідного стану 1 робоче тіло через послідовне проведення ізотермічного та адіабатного розширення перейшло в стан 3, коли воно набуло температури холодильника.

Ця зміна стану відбулася за рахунок одержання теплоти Q_1 робочим тілом від нагрівника. Кількість теплоти, яку віддало робоче тіло, повернувшись до вихідного стану 1, дорівнює Q_2 , при цьому $Q_2 < Q_1$.

Отже, оборотний перехід одного і того ж тіла від стану 1 до стану 3 і зворотний перехід $3 \rightarrow 1$ супроводжується неоднаковими кількостями одержаної і виділеної теплоти. Це пов'язано з тим, що обидва переходи

відбулися різними шляхами: від стану 1 до 3 – розширення відбулося при значно вищому тиску, ніж процес стискання (від стану 3 до 1).

Якщо здійснити перехід зі стану 3 до стану 1 так само, як і прямий перехід, тобто по кривій 3 – 2 – 1, а не вздовж кривої 3 – 4 – 1, то кількість теплоти, затраченої при прямому переході, буде дорівнювати кількості теплоти, відданої при зворотному переході.

Звідси випливає висновок: *кількість теплоти, яку потрібно надати тілу або забрати від нього при переході від одного стану до іншого, не визначається однозначно початковим і кінцевим станом, а істотно залежить від способу здійснення цього переходу*. Іншими словами, кількість теплоти Q не є функцією стану системи, як, наприклад, внутрішня енергія. На це вказує і перше начало термодинаміки:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4.10)$$

Але якщо кількість теплоти Q_1 , одержана тілом від нагрівника при температурі T_1 , і Q_2 , яку тіло передало холодильнику при температурі T_2 , не дорівнюють одна одній, то відношення цих кількостей теплоти до відповідних температур, при яких вони були одержані або віддані, чисельно дорівнюють одна одній:

$$\left| \frac{Q_1}{T_1} \right| = \left| \frac{Q_2}{T_2} \right| \text{ або } \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (4.11)$$

В оборотному циклі Карно сума зведених теплот дорівнює нулю (Клаузіус, 1854 р.), оскільки

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \text{ або } 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

$$\text{Тоді } \left| \frac{Q_1}{T_1} \right| = \left| \frac{Q_2}{T_2} \right|.$$

Нагадаємо, що за теоремою Карно тепловим машинам за умови, що в них є спільні нагрівник і холодильник, відповідає нерівність $\eta_{\text{необ}} < \eta_{\text{об}}$.

Тоді рівняння, яке виражає суму зведених теплот для довільного циклу Карно, можна записати так:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \text{ або } \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (4.11')$$

Одержаний вираз формулюють так: *сума зведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю, а в необоротному – менша від нуля.*

Зауважимо, що *зведеною теплою* називають відношення кількості теплоти, якою обмінюється робоче тіло з нагрівником і холодильником, до їх абсолютних температур.

Рівняння (4.11') називається *нерівністю Клаузіуса для циклу Карно*.

Для нескінченно великої кількості елементарних циклів Карно можна записати *нерівність Клаузіуса в інтегральній формі*:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (4.11'')$$

Отже, рівняння (4.11) свідчить про рівність зведених теплот, що їх отримало і віддало робоче тіло під час колового процесу.

Ця особливість теплоти дає можливість ввести особливу термодинамічну величину – *ентропію*, яка має фундаментальне значення у фізиці. Важливість цієї величини визначається тим, що вона є функцією стану, а також тим значенням, яке вона має в усіх процесах у природі, зокрема, в процесі перетворення теплоти у роботу.

Можна показати, що коли система у результаті певних змін стану оборотним шляхом переходить зі стану *A* у стан *B*, то сума зведених

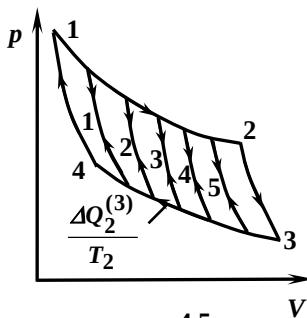
кількостей теплоти, тобто величина $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$, не залежить від шляху, по

якому відбувається перехід від *A* до *B*. Для цього достатньо показати, що при коловому процесі, коли початковий і кінцевий стани співпадають, цей інтеграл дорівнює нулю, тобто:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (4.12)$$

Розглянемо цикл Карно (мал. 4.5), розбитий адіабатами на елементарні цикли. Якщо їх пронумерувати від 1 до *z* (*z* – число елементарних циклів), то для циклу з номером *n* згідно з (4.11) можна записати:

$$\frac{\Delta Q_1^{(n)}}{T_1} + \frac{\Delta Q_2^{(n)}}{T_2} = 0, \quad (4.13)$$



мал. 4.5

де $\Delta Q_1^{(n)}$ і $\Delta Q_2^{(n)}$ – теплота, одержана і віддана в n -му елементарному циклі.

Виписавши такі суми для всіх частин загального циклу, додамо їх. Перейшовши до границі, знаходимо:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (4.14)$$

Звернемо увагу на те, що рівняння (4.11) справедливе лише для циклу Карно, а рівняння (4.14) справджується вже для будь-якого оборотного циклу. Це пояснюється тим, що довільний оборотний цикл можна розбити сім'єю ізотерм та адіабат на сукупність цілого ряду елементарних циклів Карно.

З математичного аналізу відомо, що коли є лінійний інтеграл типу (4.14), то підінтегральний вираз повинен бути повним диференціалом деякої функції.

Отже, одержавши інтеграл (4.14), можна говорити, що для оборотного циклу елементарна зведена теплота $\frac{\delta Q}{T}$ є повним диференціалом деякої функції, яку ввів Клаузіус (1866) і назвав ентропією:

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (4.15)$$

Це в свою чергу означає, що при будь-якому оборотному, неколовому процесі значення $\int \frac{\delta Q}{T}$ не залежить від шляху, яким відбувається процес. А це дає нам право стверджувати, що величина S є функцією стану системи і її зміна $S_B - S_A$ при оборотному переході системи від стану A до стану B дорівнює

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.16)$$

Зміст ентропії як функції стану стає зрозумілішим, якщо рівняння (4.15) переписати з врахуванням (4.16), тобто

$$\oint dS = 0. \quad (4.17)$$

Як і внутрішня енергія, ентропія є функцією параметрів системи p , T , V ; вона може бути подана трьома залежностями:

$$S = S(T, V), \quad S = S(T, p), \quad S = S(p, V). \quad (4.18)$$

Ентропія має розмірність теплоємності.

Рівняння (4.18) можна записати ще й так:

$$\left. \begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT \\ dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_p dV \\ dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \\ S &= \sum_{i=1}^n S_i \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Найточніше розуміння ентропії дає наступне формулювання: *ентропія є такою функцією стану системи, диференціал якої пов'язаний з елементарною теплотою у будь-якому процесі співвідношенням:*

$$\delta Q = T dS. \quad (4.20)$$

З погляду математичного аналізу це рівняння цікаве тим, що величина δQ , яка не є повним диференціалом, оскільки Q не є функцією стану, стає повним диференціалом після ділення її на T . Величина $1/T$ виступає інтегруючим множником для δQ .

На практиці завжди слід знати не саму величину S , а тільки її зміну при зміні стану системи. Тому нульове значення ентропії можна приписувати будь-якому стану системи. Приймають, що при $T = 0$ ентропія системи дорівнює нулю.

Щоб обчислити ентропію системи у даному стані, потрібно систему перевести з цього стану у нульовий стан (але оборотним шляхом) і обчислити інтеграл $\int \frac{\delta Q}{T}$ вздовж цього шляху.

Аналогічно знаходять зміну ентропії. Згідно з (4.16), щоб визначити різницю значень ентропії системи у двох її рівноважних

станах A і B , потрібно перевести систему яким-небудь оборотним процесом зі стану A у стан B і обчислити інтеграл $\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$ для цього процесу.

Використавши рівняння (4.15) і рівняння першого начала термодинаміки, одержимо:

$$TdS = dU + \delta A. \quad (4.21)$$

Рівняння (4.21) має назву *термодинамічної тотожності*. Його часто ще називають *другим началом термодинаміки для оборотних процесів*.

4.2.2. Зміна ентропії при оборотних і необоротних процесах

а) *оборотний процес*.

Розглянемо замкнуту систему, для якої $\delta Q = 0$. Тоді

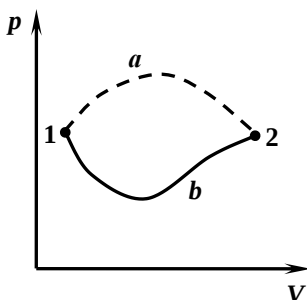
$$\frac{\delta Q}{T} = dS \quad \text{і} \quad dS = 0 \quad \text{або} \quad S_2 - S_1 = 0, \quad S_2 = S_1 = \text{const}, \quad (4.22)$$

оскільки $\delta Q = 0$.

Отже, *при всіх оборотних процесах, що відбуваються в ізольованій системі ($\delta Q = 0$) ентропія залишається сталою ($dS = 0$)*.

Якщо тіло одержує від джерела теплоту δQ , то ентропія джерела зменшується на $\frac{\delta Q}{T}$, але на таку ж величину збільшується ентропія даного тіла. Через це ентропія усієї системи при оборотній передачі тепла залишається сталою.

б) *необоротний процес*.



мал. 4.6

Розглянемо довільний цикл, що складається з двох процесів: необоротного $1-a-2$ і оборотного $2-b-1$. Такий цикл є необоротним. Для нього можна записати:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0,$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a2} \frac{\delta Q}{T} + \int_{2b1} \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

Але для оборотного процесу:

$$\int_{2b1} \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2, \text{ тоді } \int_{1a2} \frac{\delta Q}{T} + S_1 - S_2 < 0, \quad S_2 - S_1 > \int_{1a2} \frac{\delta Q}{T}$$

$$\text{або } dS > \frac{\delta Q}{T}, \text{ або } TdS > \delta Q.$$

Отже, можна записати, що коли $\int \frac{\delta Q}{T} \leq 0$, то

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad \text{і} \quad \delta Q \leq TdS. \quad (4.23)$$

Знак “>” відповідає необоротним процесам, а знак “=” відповідає оборотним процесам.

4.2.3. Термодинамічні тотожності

Аналітичний вираз другого закону термодинаміки для нескінченно малого процесу має вигляд (4.23). Тоді використавши, що $\delta Q = dU + pdV$ або $\delta Q = dI - Vdp$, де $I = U + pV$, нерівність (4.23) переписеться так:

$$\left. \begin{aligned} TdS &\geq dI - Vdp \\ TdS &\geq dU + pdV \end{aligned} \right\}. \quad (4.24)$$

Ці нерівності об'єднують перший та другий закони термодинаміки і називаються термодинамічними тотожностями. Вони справедливі як для ідеальних, так і реальних газів та пар, а також для оборотних і необоротних процесів.

4.2.4. Зміна ентропії ідеального газу

Знайдемо вираз для зміни ентропії системи, стан якої в оборотному процесі визначається двома незалежними параметрами. Для цього використаємо термодинамічні тотожності (4.24), попередньо пригадавши такі співвідношення: $dU = C_V dT$ і $dI = C_p dT$ (оскільки $I = U + pV$, але $I = U + RT$, тоді $I = C_V T + RT = C_p T$).

Знайдемо зміну ентропії dS :

$$\left. \begin{aligned} dS &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \\ dS &= C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Взявши до уваги, що $\frac{p}{T} = \frac{R}{V}$ і $\frac{V}{T} = \frac{R}{p}$, рівняння (4.25) запишуться

так:

$$\left. \begin{aligned} dS &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{R}{V} dV \quad \text{або} \quad S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \\ dS &= C_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{p} dp \quad \text{або} \quad S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Рівняння (4.26) дають можливість знайти зміну ентропії ідеального газу, якщо його стан задається параметрами T , V , p .

Знайдемо вираз для зміни ентропії ідеального газу, коли його стан задається лише параметрами V і p . Для цього продиференціюємо рівняння стану і запишемо його у вигляді:

$$pdV + Vdp = RdT. \quad (4.27)$$

Підставивши (4.27) у рівняння (4.25), одержимо:

$$\begin{aligned} dS &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{R}{V} dV = C_V \left(\frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} \right) + \frac{R}{V} dV = \\ &= (C_V + R) \frac{dV}{V} + C_V \frac{dp}{p}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Проінтегрувавши (4.28), знайдемо:

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (4.29)$$

Отже, якщо термодинамічний процес протікає ізобарично, то $\delta Q = c_p dT$ і

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 C_p \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (4.30)$$

якщо $C_p = \text{const.}$

Для ізохоричного процесу:

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (4.31)$$

якщо $C_V = \text{const}$.

Якщо процес відбувається ізотермічно, то

$$S_2 - S_1 = \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.32)$$

Відомо, що кипіння і кристалізація рідин відбуваються при постійних температурах, при цьому агрегатні перетворення рідина – пара або рідина – твердий стан відбуваються з поглинанням (виділенням) теплоти переходу $r(\lambda)$. Ці фазові перетворення супроводжуються зміною ентропії:

$$S_2 - S_1 = \frac{r}{T} \quad \text{і} \quad S_2 - S_1 = \frac{\lambda}{T}, \quad (4.33)$$

де r – теплота пароутворення, λ – теплота кристалізації.

4.2.5. Закон зростання ентропії

Для адіабатного процесу $\delta Q = 0$, тоді з нерівності $dS \geq \frac{\delta Q}{T}$

одержуємо, що

$$dS \geq 0. \quad (4.34)$$

Знак нерівності належить до необоротного процесу. *При будь-якому необоротному процесі в ізольованій системі ентропія завжди зростає.* Підкреслимо, що ентропія окремих тіл у системі може зменшуватися, збільшуватися і залишатися незмінною під впливом процесів, що відбуваються у системі, але ентропія ізольованої системи при необоротних процесах може тільки збільшуватися.

А. Теплопровідність

Якщо в ізольованій системі є два тіла A і B з температурами T_A і T_B , причому $T_A > T_B$, то від тіла A до тіла B буде відбуватися необоротна передача теплоти.

Розглянемо випадок, коли тіла A і B мають великі маси. Нехай від тіла A до тіла B перейшла деяка кількість теплоти δQ і за цей час температура тіл практично не змінилась внаслідок їх великих мас. Тоді

ентропія тіла A зменшується на величину $\frac{\delta Q}{T_A}$, а тіла B – збільшується на $\frac{\delta Q}{T_B}$.

Зміна ентропії усієї системи:

$$S_2 - S_1 = \Delta S = \frac{\delta Q}{T_B} - \frac{\delta Q}{T_A} = \delta Q \left(\frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) = \delta Q \left(\frac{T_A - T_B}{T_A \cdot T_B} \right) > 0. \quad (4.35)$$

Б. *Зміна ентропії при розширенні ідеального газу в порожнечу* ($\delta Q = 0$)

Відомо, що при розширенні газу в порожнечу його температура не змінюється ($dT = 0$) (мал. 4.7). Запишемо вирази ентропії для обидвох станів газу. Ентропія газу в об'ємі V_1 дорівнює

V_1, p_1	V'_1
------------	--------

V_2

мал. 4.7

$$S_1 = C_V \ln T + R \ln V_1 + \text{const}.$$

Ентропія газу в об'ємі V_2 :

$$S_2 = C_V \ln T + R \ln V_2 + \text{const}$$

Тоді зміна ентропії:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ але } V_2 > V_1, \text{ тоді } S_2 > S_1.$$

Оскільки, що $\delta Q = 0$, зміна ентропії газу відбувається у результаті зміни його густини, тобто внаслідок розсіювання речовини, а не теплообміну.

В. *Оборотний цикл Карно*

Знайдемо вираз для зміни ентропії ΔS усієї замкненої системи, яка працює за оборотним циклом Карно:

$$\Delta S_{\text{об.к.}} = \Delta S_{p.m.} + \Delta S_H + \Delta S_X + \Delta S_{c.p.}, \quad (4.36)$$

де $\Delta S_{p.m.} = 0$ (зміна ентропії робочого тіла дорівнює нулю, оскільки робоче тіло повертається у початковий стан, а ентропія є функцією

стану); $\Delta S_H = -\frac{|Q_1|}{T_1}$ (нагрівник *віддає* кількість теплоти Q_1 , тому

$Q_1 < 0$); $\Delta S_X = \frac{|Q_2|}{T_2}$ (холодильник *одержує* кількість теплоти Q_2 , тому

$Q_2 > 0$); $\Delta S_{c.p.} = 0$ (споживач роботи, наприклад, поршень, одержує енергію у вигляді роботи, а не кількість теплоти. Коли ж виходити з формули Больцмана, що $S = k \ln W$, де k – стала Больцмана, W – термодинамічна ймовірність, то для механічних рухів, які завжди є впорядковані ($W = 1$), $S = 0$).

Ентропія характеризує міру безладного теплового руху. W – термодинамічна ймовірність цього макростану, кількість мікростанів (способів), якими реалізується цей макростан. На відміну від математичної ймовірності, яка є завжди меншою від одиниці, термодинамічна ймовірність виражається великими числами.

$$\text{Отже, } \Delta S_{об.К.} = -\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} = 0, \quad (4.37)$$

тоді $S_{об.К.} = const$.

Ентропія замкненої системи, що виконує оборотний цикл Карно, не змінюється.

Г. Необоротний цикл Карно

Згідно з проведеними вище розрахунками ΔS усієї системи можна, як і раніше, записати:

$$\Delta S_{p.m.} = 0, \quad \Delta S_H = -\frac{|Q'_1|}{T_1}, \quad \Delta S_X = \frac{|Q'_2|}{T_2} \quad \text{і} \quad \Delta S_{c.p.} = 0.$$

Тоді

$$\Delta S_{необ.К.} = -\frac{|Q'_1|}{T_1} + \frac{|Q'_2|}{T_2}. \quad (4.38)$$

Але використавши теорему Карно, що $\left. \frac{|Q'_1| - |Q'_2|}{|Q'_1|} \right|_{необ.К.} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$,

одержуємо:

$$-\frac{|Q'_2|}{|Q'_1|} < -\frac{T_2}{T_1} \quad \text{або} \quad \frac{|Q'_2|}{|Q'_1|} > \frac{T_2}{T_1} \quad \text{і} \quad \frac{|Q'_2|}{T_1} - \frac{|Q'_1|}{T_1} > 0. \quad (4.39)$$

Підставивши (4.39) в (4.37), одержимо:

$$\Delta S_{необ.К.} > 0. \quad (4.40)$$

Отже, *ентропія замкнутої системи, яка виконує необоротний цикл Карно, зростає.*

Для необоротних процесів у замкнутих системах ентропія, як показує дослід і теорія, завжди зростає, і ця властивість притаманна ентропії так само, як енергії властиво зберігатися при будь-яких процесах у замкнутих системах.

Через те, що енергія має властивість зберігатися у замкнутій системі, вона не може бути тією функцією, що показує, у якому напрямку йдуть процеси у такій системі; знання енергії не дає можливості відрізнити один від одного початковий і кінцевий стани. А ентропія, яка у природних процесах завжди зростає, дає можливість зробити висновок, який напрямок процесу можливий, а який ні, який стан є початковим, а який кінцевим.

Зростання ентропії у будь-якому процесі триває не безмежно, а лише до певного максимального значення, яке можливе для даної системи. Це максимальне значення ентропії відповідає стану рівноваги і після того, як цього стану досягнуто; будь-які його зміни без зовнішнього впливу припиняються.

Ентропія як функція стану істотно відрізняється від енергії. У той час як енергію не можна ні створити, ні знищити, ентропія може створюватися і вона постійно створюється у будь-якому процесі переходу до стану рівноваги. Але один раз створена, вона вже не може бути знищена: зворотний процес із зменшенням ентропії відбуватися не може.

4.2.6. Зростання ентропії і деградація енергії

Покажемо, що *зростання ентропії при необоротних процесах призводить до зменшення роботоздатності системи, тобто до деградації енергії.*

Розглянемо необоротний коловий процес. Припустимо, що в ізольованій системі здійснюється прямий цикл Карно з температурами T_1 і T_2 . Робота циклу буде дорівнювати:

$$A = \eta Q_1 = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right). \quad (4.41)$$

Нехай одночасно здійснюється і необоротний цикл Карно (теплота Q_1 передається робочому тілу при температурі T'_1 , яка є нижчою від T_1 на $\Delta T = T_1 - T'_1$). Робота цього циклу буде дорівнювати:

$$A' = \eta' Q_1 = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T'_1} \right). \quad (4.42)$$

Оскільки $T'_1 < T_1$, то $\eta' < \eta$; через це $A' < A$, тобто у результаті переходу теплоти на нижчий температурний рівень одержується втрата роботи (деградація енергії). Ця втрата дорівнює

$$A - A' = Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - Q_1 \left(1 - \frac{T_2}{T'_1} \right) = Q_1 T_2 \left(\frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (4.43)$$

Ентропія системи у результаті переходу теплоти Q_1 від нагрівника з температурою T_1 до робочого тіла з температурою T'_1 змінюється на

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T'_1} - \frac{Q_1}{T_1} = Q_1 \left(\frac{1}{T'_1} - \frac{1}{T_1} \right). \quad (4.44)$$

Але $T_1 > T'_1$, тому $\Delta S > 0$, тобто у системі, що розглядається, ентропія зросла. Тоді використавши (4.44) і (4.43), одержимо:

$$\Delta A = A - A' = T_2 \Delta S. \quad (4.45)$$

Отже, *зменшення роботи пропорційне до збільшення ентропії ΔS* . Одержаний зв'язок між зростанням ентропії і зменшенням роботи системи є властивий для усіх необоротних процесів. Рівняння (4.45) називають *рівнянням Гюї-Стодоли*.

4.2.7. Ентропія і безладдя

Як уже зазначалося, теплова енергія тіла – це енергія хаотичного, безладного руху його молекул. Цією хаотичністю тепловий рух молекул відрізняється від макроскопічного механічного руху тіла, коли молекули, які входять до його складу, рухаються впорядковано.

При поступальному русі тіла, наприклад, усі його молекули рухаються з тією ж швидкістю, яка накладається на швидкості їх хаотичного теплового руху.

Отже, перетворення теплової енергії у механічну зводиться до перетворення хаотичного теплового руху в рух впорядкований. А

перетворити механічну енергію у теплову означає перетворити енергію порядку в енергію безладу. Перетворити впорядкований рух у хаотичний набагато легше, ніж здійснити зворотнє перетворення. Розглянемо такий приклад. Маємо ящик з чорними і білими кульками, укладеними так, що в кожній половині ящика лежать кульки одного кольору. Достатньо цей ящик кілька разів потрусити, щоб кульки у ньому перемішалися і розмістилися безладно. Просте струшування перетворило “порядок” у розміщенні кульок у “безлад”.

Однак потрусивши аналогічно ящик, неможна знову впорядкувати кульки так, щоб у кожній половині ящика розміщувалися кульки одного кольору. Звичайно є можливим, що після якогось чергового поштовху встановиться порядок. Проте, така випадкова подія є малоймовірною. Безлад практично утворюється кожним порушенням, а порядок – тільки одним з дуже багатьох.

Зіткнення між молекулами “трясуть” систему і викликають у ній безладдя навіть, якщо у певний момент у системі був порядок.

Якщо, наприклад, дві частини тіла будуть при різних температурах, то такий стан є впорядкованішим, ніж стан, при якому його температура всюди однакова.

Аналогічно, якщо у посудині, розділеній перегородкою, є два різних гази, то такий стан є впорядкованішим, ніж стан суміші цих газів тощо.

Будь-який природний процес завжди відбувається так, що система переходить у стан з більшою невпорядкованістю: температури самі вирівнюються, гази самі перемішуються і т.п.

Подібність між мірою невпорядкованості системи і її ентропією очевидна. Тому природно вважати ентропію мірою невпорядкованості системи. А отже, стан з більшою невпорядкованістю характеризується більшою термодинамічною ймовірністю, ніж більш впорядкований стан.

З цим пов’язана і необоротність теплових процесів: вони протікають так, що “непорядок” у системі збільшується. З цим пов’язаний і той факт, що будь-який вид енергії у кінцевому результаті переходить у тепло, оскільки тепла енергія – це енергія безладних

рухів, у той час як інші види енергії пов'язані з впорядкованими рухами.

Підсумовуючи все сказане про ентропію, перерахуємо ще раз її основні властивості:

- ентропія є функцією стану;
- ентропія замкнутої системи залишається сталою, якщо система зазнає оборотної зміни стану;
- ентропія замкнутої системи, яка необоротно змінює свій стан, зростає;
- для обчислення ентропії системи у даному стані відносно певного стану, взятого за нульовий, потрібно обчислити інтеграл $\int \frac{\delta Q}{T}$ при довільному оборотному процесі, який переводить цю систему з даного стану у нульовий;
- максимальне значення ентропії система має у стані рівноваги;
- ентропія безпосередньо пов'язана з ймовірністю стану. Зростання ентропії системи при необоротній зміні її стану означає, що система переходить до свого ймовірнішого стану;
- ентропія є мірою невпорядкованості системи;
- зростання ентропії при необоротному процесі означає, що енергія, яку має система, стає менш доступною для перетворення її у механічну роботу. Ентропія є мірою деградації енергії. У стані рівноваги, коли ентропія досягла максимального значення, енергія системи взагалі не може бути перетворена в роботу.

4.3. Друге начало термодинаміки

Коли механічна енергія переходить у теплоту, то цей процес відбувається дуже просто: вся механічна енергія повністю перетворюється у теплоту. Коефіцієнт корисної дії тоді завжди дорівнює одиниці.

Зворотний процес перетворення теплоти у механічну роботу значно складніший. Навіть у теплової машини, яка працює за циклом Карно, коефіцієнт корисної дії завжди менший від одиниці. Теплота, взята від джерела, не може бути цілком перетворена у роботу.

Розглянемо процес перетворення теплоти у механічну роботу детальніше. Нехай маємо посудину з ідеальним газом. Припустимо, що друге начало термодинаміки не діє. Виберемо момент, коли газ самовільно збереться в якійсь частині об'єму посудини, стане стиснутим і дамо йому змогу розширитись (примусивши його виконати роботу по переміщенню поршня). Після чого будемо чекати, доки газ знову збереться в іншій частині посудини і, знову розширившись, виконає роботу. Такі цикли можна повторювати багато разів.

Отже, на цьому принципі можна побудувати циклічно діючу машину, єдиним результатом дії якої є виконання роботи і охолодження теплового резервуару, яка по суті є “вічним двигуном”. Адже цей двигун не суперечить закону збереження енергії. Робота тут виконується не з “нічого”, а за рахунок теплоти, яку газ одержує від середовища, що його оточує.

Оскільки запаси енергії в атмосфері, у водах морів і океанів, у земній корі можна вважати невичерпними, то така машина практично не буде відрізнятися від вічного двигуна.

Описана гіпотетична теплова машина, дія якої полягає тільки в тому, що в ній тепло виконує механічну роботу, називається за Освальдом вічним двигуном другого роду, на відміну від вічного двигуна першого роду, у якому, порушуючи закон збереження енергії, створюється більше роботи, ніж було затрачено теплоти.

К.к.д. вічного двигуна другого роду дорівнював би одиниці, оскільки при ізотермічному процесі ($dT = 0$): $\delta Q = \delta A$.

Але насправді така машина працювати не може. Ми марно чекатимемо, щоб молекули самостійно зібралися в частині об'єму посудини: така самодовільна концентрація молекул має супроводжуватися зменшенням ентропії. А такі процеси – неможливі.

Зауважимо, що тут йдеться про неможливість циклічної машини, яка весь час повторює процес перетворення теплоти у роботу. Це дуже важливо, оскільки таке одноразове перетворення можливе – воно не суперечить ні першому, ні другому началу термодинаміки.

Іноді друге начало термодинаміки формулюють у вигляді твердження про неможливість вічного двигуна другого роду.

Друге начало термодинаміки дає відповідь і на питання про те, що потрібно для того, щоб циклічна теплова машина могла діяти.

Ми не можемо просто забирати за допомогою робочого тіла тепло від джерела (нагрівника) і перетворювати його у роботу, бо такий процес супроводжується зменшенням ентропії нагрівника (робоче тіло здійснює коловий процес і його ентропія залишається незмінною).

Отже, потрібно мати систему, яка буде складатися не з двох тіл – нагрівник і робоче тіло, а з трьох, при цьому роль третього тіла полягає у тому, щоб його ентропія збільшувалася принаймні на величину, на яку зменшується ентропія нагрівника в результаті забирання від нього тепла. Щоб ентропія третього тіла збільшувалася, йому потрібно надавати частину теплоти, взятої у нагрівника. Цим третім тілом є холодильник. У цих умовах ентропія системи нагрівник – робоче тіло – холодильник залишається сталою, а це вже задовольняє другий принцип термодинаміки, що забороняє лише процеси, які протікають із зменшенням ентропії.

У реальній тепловій машині не можна забезпечити повністю оборотні процеси на всіх стадіях циклу. Тому ентропія не залишається сталою, а зростає. Це, в свою чергу, означає, що в реальній тепловій машині холодильнику доводиться передавати більше теплоти, ніж та,

яка визначається рівністю: $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

Збільшення ентропії взагалі означає, що теплота стає менш доступною для перетворення її в механічну роботу. Зростання ентропії неналежне знецінює теплову енергію, зменшує можливість перетворювати її в механічну роботу.

Принципово неможливо циклічно діючою машиною перетворити в роботу всю теплоту, яку робоче тіло одержало від нагрівника. Частину її обов'язково потрібно передати холодильнику. Це і буде ціною, яку слід заплатити за те, що друга частина теплоти буде перетворена в роботу.

Подано деякі **означення другого закону термодинаміки**:

- Саді Карно вперше вказав на можливість перетворення теплоти у корисну роботу у двигунах лише при наявності двох джерел теплоти: одного з вищою температурою (нагрівник з температурою T_1) і другого з нижчою температурою (холодильник з температурою T_2);

- Клаузіус: неможливий процес, при якому теплота переходила б самодовільно від холодних тіл до нагрітих;
- Томсон (Кельвін): не вся теплота, одержана від нагрівника, може перейти у роботу, а тільки її частина. Частину теплоти потрібно передати холодильнику;
- Оствальд: неможливо здійснити перпетум мобіле другого роду. Це означає, що неможливо побудувати вічний двигун другого роду, який виконував би роботу за рахунок теплоти, взятої від тіл природи;
- Планк: неможливо побудувати періодично діючий двигун, який здійснював би тільки підняття вантажу і охолодження джерела теплоти. Згідно з цим визначенням, холодному джерелу необхідно віддавати додатково теплоту;
- Больцман: природа прямує від стану менш ймовірного до стану більш ймовірного. Усі природні процеси є переходом від малоймовірних станів до станів більше ймовірних;
- усі самодовільні процеси необоротні;
- ентропія ізольованої системи прямує до максимуму;
- теплота найхолоднішого тіла у певній системі не може бути джерелом роботи;
- у коловому процесі теплота джерела не може бути цілком перетворена у роботу, частина теплоти обов'язково має бути передана холодильнику;
- енергія ізольованої системи постійно “деградує” (зменшується).

4.4. Статистичний характер другого закону термодинаміки

Друге начало термодинаміки стверджує, що необоротні процеси відбуваються у напрямку збільшення ентропії тіл, які беруть в них участь. Максимального значення ентропія набуває тоді, коли система перебуває у стані рівноваги. Сама необоротність теплових процесів пов'язана з тим, що перехід до рівноважного стану є найможливішим порівняно з іншими переходами. Тому й реалізуються тільки ті зміни стану, в яких система переходить з менш ймовірного у більш ймовірний стан.

На подібність поведінки ентропії та ймовірності, їх зростання при переході до рівноваги звернув увагу Л.Больцман. Він припустив, що між ентропією і логарифмом термодинамічної ймовірності має бути

пряма залежність: $S \sim \ln W$. М.Планк встановив, що коефіцієнтом пропорційності є стала Больцмана:

$$S = k \ln W. \tag{4.46}$$

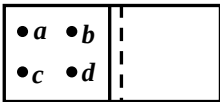
Формула (4.46) має назву *формули Больцмана*.

Зв'язок між ентропією та ймовірністю дає можливість зрозуміти **статистичний характер другого принципу термодинаміки**: *будь-який процес у природі протікає у напрямку збільшення ймовірності стану системи*.

Визначимо точніше поняття про ймовірність стану системи. Для цього розглянемо процес вирівнювання тиску газу або його густини.

Для наочності нехай газ складається з чотирьох молекул, позначених a, b, c, d , які спочатку перебувають у лівій частині посудини (мал. 4.8).

Внаслідок свого хаотичного руху молекули по різному можуть розміщуватися у посудині і створювати стани, які зазначені у таблиці.



мал. 4.8

Стани		Способи утворення станів		Кількість однотипних станів – ймовірність W
Кількість молекул зліва	Кількість молекул справа	Молекули, що перебувають зліва	Молекули, що перебувають справа	
4	0	$a\ b\ c\ d$	-	1
3	1	$a\ b\ c$ $a\ b\ d$ $a\ c\ d$ $b\ c\ d$	d c b a	4
2	2	$a\ b$ $a\ c$ $a\ d$ $b\ c$ $b\ d$ $c\ d$	$c\ d$ $b\ d$ $b\ c$ $a\ d$ $a\ c$ $a\ b$	6
1	3	a b c d	$b\ c\ d$ $a\ c\ d$ $a\ b\ d$ $a\ b\ c$	4
0	4	-	$a\ b\ c\ d$	1
Усього станів				16

Уже з цієї моделі газу бачимо, що найімовірнішими станами є стани з однаковою кількістю молекул в обох частинах посудини, тобто стани з однаковою густиною по всьому об'єму.

Чим більше молекул буде у газі, тим яскравіше проявлятимуться статистичні закономірності в їх поведінці: ймовірність стану з молекулами, зібраними в одній частині посудини, дуже зменшується, а ймовірність стану з рівномірним розподілом молекул по всьому об'єму збільшується. За такими закономірностями відбуваються процеси вирівнювання тиску, температури тощо.

Другий принцип термодинаміки виражає статистичні закономірності величезної сукупності молекул речовини. І ентропія, якою кількісно виражається цей принцип, перебуває у безпосередньому зв'язку з ймовірністю стану системи.

На відміну від першого начала термодинаміки, закону збереження енергії, який виконується для всіх випадків без винятку, другий принцип термодинаміки є суто статистичною закономірністю, яка справджується для системи, що складається з великої, але скінченної, кількості молекул. Якщо кількість молекул незначна, то можуть мати місце відхилення від найімовірнішого стану і явища, які суперечать другому принципу термодинаміки.

Використавши зв'язок між ентропією і ймовірністю, друге начало термодинаміки можна тлумачити ще й так: будь-який процес у природі відбувається так, що система переходить до стану, ймовірність якого більша.

Твердження, що будь-який процес, який відбувається самодовільно, веде до ймовірнішого стану, не означає, що інший напрямок процесу є неможливим. Він тільки стверджує, що перехід системи у стан рівноваги є більш можливим, ніж довільний відхід від рівноважного стану.

Тому друге начало термодинаміки слід розуміти так, що коли система перебуває у певному стані з даною ентропією, то з великою ймовірністю очікуємо, що вона перейде до стану, ентропія якого більша, тобто що найімовірнішою зміною ентропії є її зростання. Отже, закон зростання ентропії не є абсолютним законом природи.

Після того як було сформульоване друге начало термодинаміки деякі фізики (Томсон, Клаузіус) зробили з нього висновок про "теплову смерть" Всесвіту.

Хід їх міркувань був такий: при всіх процесах у природі виділяється теплота (при терті, при проходженні електричного струму, при хімічних реакціях тощо). Кожен вид енергії може повністю переходити в інші види енергії, і тільки теплова енергія, згідно з другим началом термодинаміки, може переходити в інші види енергії лише частково – частина її завжди залишається у вигляді теплової. Отже, у результаті залишиться тільки один вид енергії – теплова, яка рівномірно розподілиться по Всесвіту. Сонце та зорі погаснуть і життя на планетах стане неможливим.

Усі подібні твердження є безпідставні і хибні. Дійсно, згідно з другим законом термодинаміки в ізольованій системі відбуваються лише такі процеси, внаслідок яких вона спонтанно переходить у стан термодинамічної рівноваги, а її ентропія досягає максимального значення. Висновок про неминучість “теплової смерті” Всесвіту ґрунтується на поширенні цих тверджень на Всесвіт. Проте уважний аналіз незаперечно доводить, що таке поширення є безпідставним і хибним.

На відміну від першого начала термодинаміки, яке є загальним законом природи, друге начало термодинаміки має певні межі застосування. Воно стосується лише макроскопічних систем, які складаються з величезної кількості молекул. У міру того як зменшується кількість молекул, що утворюють систему, стають помітнішими флуктуації, тобто самодовільні відхилення від стану рівноваги. Отже, до систем з недостатньо великою кількістю молекул друге начало термодинаміки застосувати не можна. Такий висновок вперше зробили у чіткій формі Больцман та Смолуховський, які розвинули статистичне тлумачення другого начала термодинаміки.

Немає також жодних підстав беззастережно поширювати друге начало термодинаміки і на космічний простір. При переході до космічних масштабів поняття, які використовуються при встановленні другого начала термодинаміки (температура, ентропія, ізольована система, термодинамічний стан) втрачають або докорінно змінюють свій зміст.

4.5. Третє начало термодинаміки (теорема Нернста)

Численні дослідження показують, що з пониженням температури у будь-якій системі спостерігається тенденція до більшого ступеня

впорядкованості. Це засвідчують дослідження будови тіл, їх магнітні властивості та багато інших фактів.

Можна вважати, що впорядкований стан відповідає меншій енергії частинок, з яких утворене тіло, а встановленню порядку при високих температурах перешкоджає тепловий рух.

Якби можна було охолодити тіло до абсолютного нуля температури, коли теплові рухи не можуть завадити встановленню порядку, то у системі встановився б максимально можливий порядок і цьому стані відповідала б мінімальна ентропія.

Але виникає запитання: як буде поводитися тіло при абсолютному нулі, якщо над ним буде виконуватися зовнішня робота? Чи може змінюватися ентропія тіла, яке перебуває при абсолютному нулі?

З багатьох дослідів, які проводилися при низьких температурах, було зроблено важливий висновок: *при абсолютному нулі температури будь-які зміни стану відбуваються без зміни ентропії*. Це твердження називається **теоремою Нернста**. Іноді його називають **третім началом термодинаміки**.

Як ми бачили раніше, ймовірніше трактування поняття ентропії дає змогу зробити висновок про те, що ентропія при абсолютному нулі температури дорівнює нулю, що також не суперечить формулюванню Нернста.

Той факт, що при $T = 0$ і $S = 0$, свідчить, що абсолютний нуль ($F = U - TS$) принципово недосяжний, оскільки легко показати, що якби існувало тіло з температурою, яка дорівнює нулю, то можна було б побудувати вічний двигун, що суперечить другому началу термодинаміки.

Третє начало термодинаміки ще формулюють як принцип недосяжності абсолютного нуля.

З третього начала термодинаміки випливають важливі висновки про поведінку речовини при дуже низьких температурах (теплоємність тіл повинна прямувати до нуля разом з температурою, а при абсолютному нулі вона повинна дорівнювати нулю; коефіцієнт теплового розширення тіл і коефіцієнт стисливості також повинні прямувати до нуля, а при $T = 0$ дорівнювати нулю).

Усе це стосується систем, які перебувають у рівноважному стані. У тіл, які не перебувають у рівноважному стані, ентропія при абсолютному нулі може і відрізнятися від нуля.

Запитання для самоконтролю

1. Який процес називається коловим?
2. Що називається тепловою машиною? За яким циклом вона працює?
3. Що називається холодильною машиною? За яким циклом вона працює?
4. Що таке цикл Карно? Зобразіть його.
5. Що називають ККД циклу Карно? Чому він дорівнює?
6. Чому ККД циклу Карно не дорівнює одиниці?
7. Сформулюйте теорему Карно.
8. Які є шляхи підвищення ККД циклу Карно?
9. Дайте означення ентропії. Що таке зведена теплота?
10. Запишіть та поясніть нерівність Клаузіуса.
11. Як змінюється ентропія при оборотних та необоротних процесах?
12. Запишіть термодинамічні тотожності та поясніть їх зміст.
13. Як обчислити зміну ентропії ідеального газу?
14. Покажіть на прикладах закон зростання ентропії.
15. Поясніть, чому зростання ентропії призводить до деградації енергії.
16. Поясніть, чому ентропія є мірою безладдя.
17. Поясніть, в чому полягає фізична суть другого начала термодинаміки.
18. Наведіть приклади означення другого начала термодинаміки.
19. Який існує зв'язок між ентропією і термодинамічною ймовірністю? Запишіть формулу. Поясніть цей зв'язок.
20. Сформулюйте третє начало термодинаміки. Чому не можна досягти абсолютного нуля температури?
21. Яку машину називають вічним двигуном другого роду? Чому таку машину не можна побудувати?

5. РЕАЛЬНІ ГАЗИ

5.1. Відхилення властивостей реальних газів від законів для ідеальних газів. Сили міжмолекулярної взаємодії

5.1.1. *Відхилення властивостей реальних газів від законів для ідеальних газів*

У попередніх розділах показано, що рівняння Менделєєва-Клапейрона досить добре описує властивості газів. У цьому параграфі буде дана відповідь на запитання: а чи справедливе це рівняння в усіх умовах, чи воно є тільки певним наближенням до реальних закономірностей газів?

Відомо, що предметом фізики є встановлення кількісних співвідношень між величинами, що описують те чи інше явище природи на підставі дослідних даних. Часто такі співвідношення мають наближений характер. Вони справджуються лише при певних умовах, коли значення величин, які входять у ці співвідношення, лежать у конкретних межах. Поза цими межами дані співвідношення є неправильними і слід шукати інші, загальніші співвідношення, придатні для опису тих явищ, що нас цікавлять. Визначення меж використання того чи іншого фізичного закону є дуже важливим завданням, оскільки застосування закону поза межами його придатності часто веде до істотних помилок та неправильних висновків.

У фізиці є деякі закони, що мають універсальний характер, тобто вони виконуються завжди. Серед них є, наприклад, закони збереження енергії та імпульсу (для замкнутих систем). Але, наприклад, закон, що визначає силу внутрішнього тертя є законом наближеним: сила внутрішнього тертя пропорційна до швидкості руху лише при малих швидкостях.

Рівняння Менделєєва-Клапейрона також є наближеним. Воно виконується тільки при достатньо малих тисках і тим точніше, чим менший тиск. При підвищенні тиску має місце відхилення від таких законів, як закон Бойля-Маріотта і закон Гей-Люссака, які є прямими наслідками рівняння Клапейрона-Менделєєва.

Експериментальні дослідження показують, що уже при тиску 100 *атм.* значення об'єму V газу відрізняється від теоретичного більше, ніж на 7%. З подальшим збільшенням тиску газу його об'єм все більше відрізняється від значень, обчислених теоретично за рівнянням Клапейрона-Менделєєва. А при тиску 10000 *атм.* об'єм газу вже більше, ніж удвічі перевищує те значення, яке він мав би мати, якщо було б справедливе рівняння Менделєєва-Клапейрона.

Те ж саме спостерігаємо і для добутку pV , який згідно з рівнянням Клапейрона-Менделєєва має залишатися однаковим при всіх тисках газу. Насправді він при великих тисках зростає, відхиляючись від значення, що одержується з рівняння Клапейрона-Менделєєва.

При тисках порядку 1 *атм* та нижчих і при температурах порядку кімнатних та вищих, взаємодією між молекулами повітря (і інших газів) можна практично знехтувати. При цих умовах повітря (і інші гази) можна розглядати як ідеальний газ, що описується рівнянням

Клапейрона-Менделєєва ($pV = \frac{m}{\mu} RT$).

Однак досліди показують, що реальні гази значно відрізняються своїми властивостями від ідеальних.

Справді, ідеальний газ ми визначили як газ, що складається з молекул, які не взаємодіють між собою, а самі молекули при цьому розглядалися як матеріальні точки, тобто ми нехтували їх розмірами і об'ємом.

Відсутність взаємодії між молекулами означає, що на молекули в проміжках між зіткненнями не діють ніякі сили, тобто вони рухаються вільно. Але при зіткненні молекул між собою вони змінюють свою швидкість, що неможливо зробити без дії сили. Отже, міжмолекулярні сили існують, але вони проявляються тільки при зіткненнях, коли відстані між молекулами дуже малі.

Відсутність власного об'єму молекул означає, що весь об'єм посудини, у якій рухаються молекули, повністю доступний для руху кожної з них, оскільки всі інші частинки (молекули), будучи матеріальними точками, не займають об'єму. Однак досліди показують, що молекули мають розміри порядку 10^{-10} м.

Отже, обидва припущення, покладені в основу теорії ідеального газу, є наближеними. Досліди показують, що при атмосферному тиску

середня відстань між молекулами в десять разів перевищує їх власні розміри, а їх загальний об'єм у 2000 разів менший від об'єму, який займає газ. Але при високих тисках (порядку 100 атм) власним об'ємом молекул не можна нехтувати, а сили взаємодії між молекулами вже проявляються не тільки у моменти зіткнень.

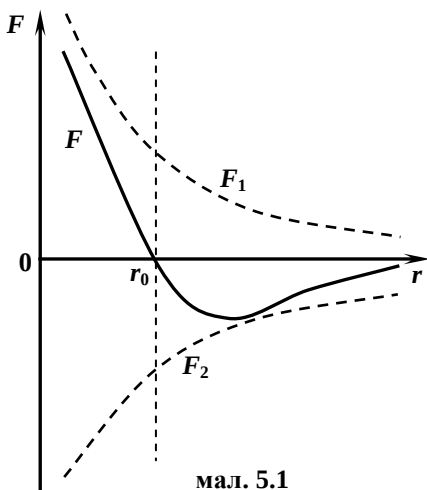
5.1.2. Сили міжмолекулярної взаємодії

Молекули газу є складними системами рухомих електричних зарядів. Основна маса і весь додатній заряд молекули знаходиться в її атомних ядрах, лінійні розміри яких $\sim 10^{-15} \div 10^{-14}$ м. Навколо цих ядер відповідними орбітами рухаються електрони. Діаметри електронних орбіт дорівнюють $\sim 10^{-10}$ м, тобто в 10^4 разів більші від діаметрів ядер. Атоми та молекули є досить стійкими системами, які важко деформувати. Ця стійкість зумовлена тим, що стани атомів та молекул не можуть змінюватися неперервно: вони можуть приймати тільки дискретний ряд значень.

Молекула загалом електрично нейтральна, оскільки сума додатніх і сума від'ємних зарядів у молекулі дорівнюють одна одній. Через таку компенсацію зарядів різного знаку в атомах та молекулах електричне поле за межами молекули швидко зменшується із збільшенням відстані. Практично воно дорівнює нулю на відстані 2–3 діаметрів молекули.

Тому при зближенні двох молекул, коли відстань r між їх центрами є велика порівняно з їх діаметром d , то сила взаємодії між ними прямує до нуля. При подальшому наближенні молекул їх деформація і величина сили притягання зростають. Але коли молекули підійдуть щільно одна до одної, то їх подальше зближення стає уже неможливим. Між електронними оболонками виникають величезні сили відштовхування, які різко збільшуються. Абсолютна величина сил взаємодії буде істотно залежати від конкретної будови молекул. А для несферичних молекул сили взаємодії залежать не тільки від відстані r між центрами молекул, але і від їх взаємної орієнтації. Загальний характер залежності сили взаємодії F від відстані r для будь-яких молекул буде якісно однаковим: притягання на великих відстанях і відштовхування на малих.

На мал. 5.1 показано наближений характер залежності сили



мал. 5.1

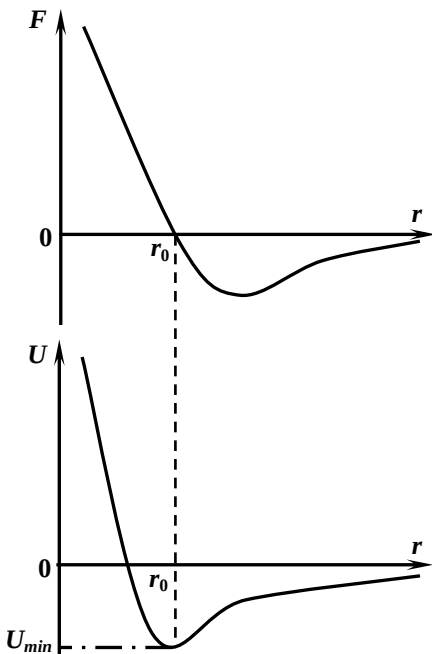
відштовхування F_1 і сили взаємного притягання F_2 від відстані r . Додатньою є сила відштовхування. На цьому ж малюнку показано результуючу силу F взаємодії двох молекул. При $r = r_0$ сили F_1 і F_2 взаємно зрівноважуються і результуюча сила F дорівнює нулю. При $r > r_0$ переважають сили взаємного притягання, а при $r < r_0$ – сили відштовхування. Отже, r_0 – це та рівноважна відстань між молекулами, на якій вони перебувають при відсутності теплового руху.

Для характеристики взаємодії між двома частинками зручно замість сили F використовувати їх потенціальну енергію U (мал. 5.2), яка пов'язана із силою F рівнянням:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r}. \quad (5.1)$$

Як видно з мал. 5.2, крива потенціальної енергії $U = U(r)$ має властивий для неї вигляд так званої “потенціальної ями”. Найбільшу глибину ця потенціальна яма має у положенні рівноваги при $r = r_0$ ($F = 0$, $U = U_{min} < 0$).

Глибина ями $|U_{min}|$ визначає величину роботи, яку потрібно виконати проти сил притягання для того, щоб молекули, які перебувають у рівновазі (при $r = r_0$), можна



мал. 5.2

було б відірвати одну від одної та віддалити їх на нескінченно велику відстань.

5.1.2.1. Взаємодія полярних молекул

Розглянемо природу порівняно слабких (малих) сил притягання, які діють між молекулами реального газу на відстанях порядку $\sim 10^{-7}$ м. Ці сили одержали назву *вандерваальсівських* за ім'ям вченого Ван дер Ваальса, який вперше одержав наближене рівняння стану реального газу.

Розрізняють три типи вандерваальсівських сил притягання: орієнтаційні сили, індукційні сили та дисперсійні сили.

Орієнтаційні сили пов'язані з наявністю у молекул, що мають несиметричну будову (полярні молекули), так званих дипольних електричних моментів P_l . У результаті взаємодії дипольних моментів двох молекул виникає сила притягання F , яка чисельно дорівнює

$$F = -\frac{4P_l^4}{kT} \frac{1}{r^7}, \quad (5.2)$$

де r – відстань між молекулами, P_l – електричний момент диполя.

Орієнтаційні сили відіграють головну роль у притяганні полярних молекул.

Для відстаней більших, ніж розміри молекул, дія електронів еквівалентна дії їх сумарного заряду, який розміщений у деякій точці всередині молекули. Цю точку називають центром ваги від'ємних зарядів. Аналогічно дія ядер еквівалентна до дії їх сумарного заряду, розміщеного у центрі ваги додатних зарядів.

У відсутності зовнішнього електричного поля центри ваги додатних і від'ємних зарядів можуть або співпадати, або бути зсунутими один відносно одного. У другому випадку молекула еквівалентна до електричного диполя і називається полярною. Молекула, у якій центри ваги зарядів різних знаків при відсутності зовнішнього поля співпадають (молекули не мають власного електричного моменту) називається неполярною.

5.1.2.2. Взаємодія полярних молекул з неполярними

Механізм виникнення *індукційних* сил такий. Нейтральна неполярна молекула реального газу перебуває в електричному полі, яке створене іншою полярною молекулою. Дія цього поля викликає зміщення центрів ваги додатних та від'ємних зарядів першої молекули, через що змінюються дипольні електричні моменти молекул і між ними виникають сили притягання, які одержали назву індукційних сил:

$$F_{in} = -12P_l^2 \frac{1}{r^7}, \quad (5.3)$$

де $\vec{P}_l = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ – наведений дипольний момент атома; α – *поляризованість молекули* – величина, яка описує здатність електронної оболонки атома (іона або молекули) зміщуватися під впливом електричного поля (*поляризованість має розмірність об'єму*); $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – електрична стала.

5.1.2.3. Взаємодія неполярних молекул

Дисперсійні сили. Колювання електронів у даній молекулі (атомі) можуть викликати колювання електронів в іншій молекулі (атомі). Якщо колювання електронів сусідніх молекул відбуваються в однаковій фазі, то це призводить до притягання між ними. Такого виду резонансні сили притягання називаються дисперсійними. Вони відіграють головну роль при взаємодії неполярних молекул. Сила дисперсійного притягання чисельно дорівнює

$$F_{dis} = -\frac{9}{2} \alpha^2 J \frac{1}{r^7}, \quad (5.4)$$

J – перший потенціал іонізації атома (або молекули), α – її поляризованість.

З наведеного вище бачимо, що вандерваальсівські сили притягання зменшуються пропорційно $\sim \frac{1}{r^7}$. При відстанях $r \leq 10^{-10} \text{ м}$ між молекулами виникає особлива квантова взаємодія, яка призводить або до виникнення значних сил відштовхування між молекулами, або до

сильного притягання сусідніх атомів чи групи атомів і встановлення між ними нових хімічних (іонних, ковалентних) зв'язків, тобто до виникнення хімічної реакції та утворення нових молекул. Сили відштовхування F_1 зменшуються значно швидше із збільшенням відстані r , ніж вандерваальсівські сили притягання ($F_1 \sim \frac{1}{r^4}$, де $n \geq 9$).

5.1.2.4. Агрегатний стан речовини

Речовина може перебувати у твердому, рідкому та газоподібному станах. Ці фізичні стани називають агрегатними. Різниця між ними зовнішньо проявляється так.

Газ займає будь-який доступний для нього об'єм. Рідина зберігає свій об'єм, але вона дуже рухлива і завжди набуває форми посудини, в якій розміщена. Тверде тіло здатне зберігати не тільки об'єм, але й форму. Щоб змінити її, потрібні значні зусилля.

Речовина у твердому стані трапляється переважно у вигляді кристалів, для яких характерна правильна геометрична форма. Але найхарактернішою ознакою кристалів є їх анізотропія, тобто залежність властивостей від напрямків, визначених у кристалах. Рідини і гази, навпаки, ізотропні: їх властивості однакові в усіх напрямках.

При зміні температури поряд із звичайною плавною зміною характеристик речовини (густини, питомого об'єму тощо) спостерігається їх різка стрибкоподібна зміна при переході з одного агрегатного стану в інший.

Агрегатні перетворення відбуваються при певних значеннях температури і тиску, які визначають точку перетворення речовини (точку фазового переходу).

Оскільки середня кінетична енергія хаотичного руху (теплого руху) молекул має порядок kT , то структура будь-якої сукупності молекул та агрегатний стан речовини істотно залежать від співвідношення величини kT і глибини потенціальної ями (потенціальної енергії взаємодії двох частинок) $|U_{\min}|$:

а) у граничному випадку низьких температур, коли $kT \ll |U_{\min}|$, молекули притягуються одна до одної і розміщуються щільно у певному порядку – речовина буде перебувати у твердому агрегатному стані. Тепловий рух молекул у твердому стані буде проявлятися у вигляді малих коливань молекул біля певних положень рівноваги у просторі;

б) у протилежному граничному випадку високих температур, коли $kT \gg |U_{\min}|$, інтенсивний тепловий рух молекул буде перешкоджати об'єднанню молекул в агрегати з декількох частинок. Тому речовина при таких умовах перебуватиме в газоподібному стані;

в) при проміжних температурах, коли $kT \approx |U_{\min}|$, завдяки тепловому руху молекули будуть неперервно переміщуватися в просторі, обмінюючись місцями, але не збільшуючи взаємних відстаней на величину, помітно більшу за r_0 . Речовина при цьому перебуватиме у рідкому агрегатному стані.

Отже, довільна речовина залежно від температури може перебувати у твердому, рідкому або газоподібному стані. Температура переходу з одного агрегатного стану в інший залежить від конкретного значення величини $|U_{\min}|$ для даної речовини.

В інертних газах (гелій, неон, криптон) $|U_{\min}|$ мале. Тому ці гази переходять у рідкий стан тільки при дуже низьких температурах, близьких до абсолютного нуля. А у металах, навпаки, $|U_{\min}|$ велике, тому вони перебувають у твердому стані при порівняно високих температурах.

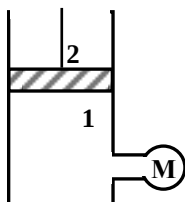
Агрегатний стан речовини залежить не тільки від її температури, але й від об'єму V , який займає система молекул. При достатньо великому значенні V молекули мають можливість віддалятися одна від одної на відстані, на яких середня енергія сил притягання виявляється достатньо малою порівняно з kT . Тому над твердим тілом і рідиною завжди наявна певна кількість тієї ж речовини у газоподібному стані.

Отже, для зрідження газу його потрібно і охолоджувати, і стискати.

5.2. Рівняння Ван дер Ваальса і його аналіз.

Зведене рівняння Ван дер Ваальса

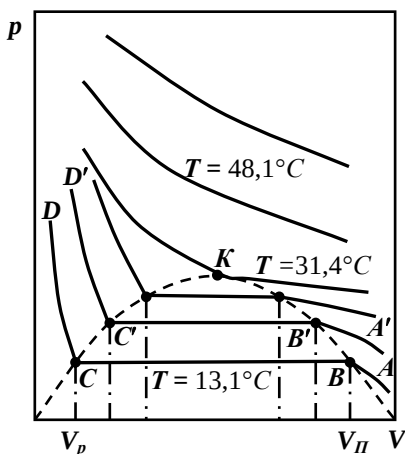
5.2.1. Експериментальні ізотерми реального газу



мал. 5.3

Простий ізотермічний процес можна здійснити наступним чином. Газ, що перебуває в посудині 1 (мал. 5.3) з рухомим поршнем 2, повільно стискають при постійній температурі, роблячи одночасно відлік тиску p і об'єму V . Результати такого експерименту показані на мал. 5.4 (стискали вуглекислий газ).

При досягненні тиску 49 атм. (який при даній температурі є пружністю насиченої пари) починається конденсація вуглекислоти CO_2 (вітка BC). При подальшому зменшенні об'єму тиск залишається незмінним (горизонтальна ділянка BC ізотерми) і все більша частина газу переходить у рідкий стан. У точці C уже весь газ перейшов у рідкий стан і вітка ізотерми CD йде дуже круто, що пов'язано з тим, що вже відбувається стиск рідини, стисливість якої дуже мала.

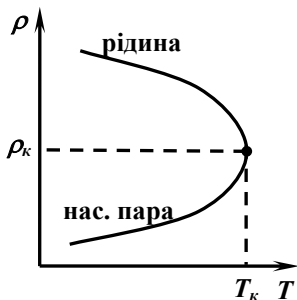


мал. 5.4

Ізотерми, які відповідають вищим температурам, мають такий самий вигляд. Але те, що

відношення $\frac{V_{\text{газу}}}{V_{\text{рід.}}}$ 3

підвищенням температури стає меншим, то на графіку це проявляється у тому, що горизонтальна частина ізотерми BC стає дедалі коротшою. Це добре пояснюється температурною залежністю густини речовини (мал. 5.5).



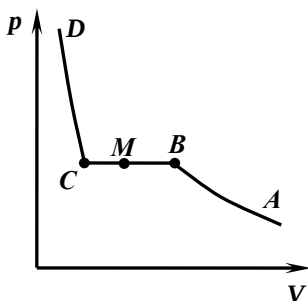
мал. 5.5

Як видно з цього графіка, з підвищенням температури питомі об'єми рідини і пари наближаються одне одного, оскільки перший з підвищенням температури зростає, а другий – зменшується ($\rho_{II} = \frac{m}{V_{II}}$, $\rho_p = \frac{m}{V_p}$).

І при температурі $T = 31,4^\circ\text{C}$ горизонтальна частина ізотерми вуглекислого газу зникає, перетворюючись у точку перегину K

(питомі об'єми рідини та пари стають однаковими). А ізотерма, яка відповідає цій температурі, називається критичною ізотермою. Стан речовини, при якому зникає різниця між рідиною і паром, називається *критичним станом*. Він характеризується певними параметрами, які називаються критичними: T_K , ρ_K і V_K .

При температурах, що перевищують критичну, речовину з газоподібного стану не можна перевести у рідкий стан. Збільшення тиску викликає тільки зменшення об'єму (збільшення густини). При температурі, вищій за критичну, наприклад, $48,1^\circ\text{C}$, ізотерма вуглекислоти має такий ж самий вигляд, як і ізотерма ідеального газу.



мал. 5.6

На ділянці BC ізотерми вуглекислоти одночасно перебуває у двох агрегатних станах – рідкому та газоподібному. Точка B відповідає початку конденсації CO_2 при ізотермічному стиску, а точка C – закінченню конденсації (мал. 5.6). Навпаки, при ізотермічному розширенні рідкої вуглекислоти точка C відповідає початку кипіння, а точка B – його закінченню.

Інакше кажучи, точка C відповідає стану рідини, що кипить, а точка B – стану так званої сухої насиченої пари. У довільному стані M на ділянці BC вуглекислота виступає у вигляді суміші рідини, що кипить, і сухої насиченої пари. Таку суміш називають вологою паром.

У 1860 році Д.І.Менделєєв установив, що у міру підвищення температури різниця у властивостях між рідиною та її парою зменшується. При цьому поверхневий натяг рідини зменшується. При деякій температурі, як показано вище, яку Менделєєв назвав температурою абсолютного кипіння (критична температура), різниця між рідиною та її парою зникає, а коефіцієнт поверхневого натягу дорівнює нулю. Критична температура для більшості газів досить низька (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Речовина	T_k, K	$p_k, атм$
Вуглекислий газ	304,1	73
Кисень	155,3	49,7
Азот	126,1	33,5
Водень	33,1	12,8
Гелій	5,2	2,26
Повітря	132,4	
Водяна пара	647	217,7

5.2.2. Рівняння Ван дер Ваальса

Вище показано, що в інтервалі середніх температур і низьких тисків газів виконуються закони Бойля-Маріотта, Гей-Люссака та рівняння Менделєєва-Клапейрона. Гази, що перебувають у таких умовах, називаються ідеальними.

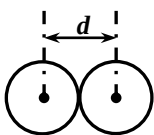
Відхилення реальних газів від закону Бойля-Маріотта проаналізував Ван дер Ваальс у трактаті “Про неперервність газоподібного і рідкого станів” (1873 р.). Він запропонував поправки до рівняння стану ідеальних газів і одержав узагальнене рівняння стану газів (ідеальних та реальних), яке було назване його ім’ям.

а) *Поправка на недоступний об’єм.* Ця поправка наближено враховує реальну картину сил відштовхування. Молекула ідеального газу, що перебуває у посудині, може знаходитися у будь-якій точці посудини. Молекула реального газу не може знаходитися у тих місцях посудини, де розміщені $N - 1$ молекули, для них є доступною тільки та частина всього об’єму, яка дорівнює $V_0 - b$ (V_0 – об’єм одного моля

речовини). Ван дер Ваальс врахував власний об'єм молекул газу, замінивши у рівнянні Менделєєва-Клапейрона ($pV_0 = RT$) повний об'єм, який займає один моль газу, на так званий “вільний” об'єм $V'_0 = V_0 - b$, де b – поправка Ван дер Ваальса для одного моля газу.

Зробимо оцінку недоступного об'єму b . Для цього будемо вважати, що газ не є дуже великої густини і ймовірністю потрійних співударів між молекулами можна знехтувати.

Для кожної пари взаємодіючих молекул недоступною є та частина об'єму, в якій відстань між центрами молекул дорівнює d (мал. 5.7). Отже, для центрів обидвох молекул недоступним виявляється сферичний об'єм, радіус якого дорівнює d , тобто об'єм, що дорівнює 8 об'ємам молекули. У розрахунку на одну молекулу недоступним буде об'єм, що дорівнює початковому об'єму молекули:



мал. 5.7

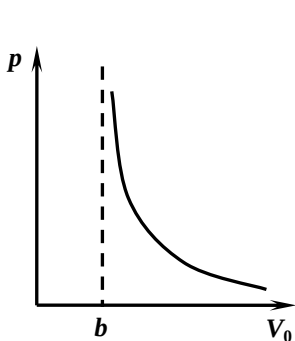
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi d^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi (2r)^3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4V^*,$$

де V^* – власний об'єм молекули.

Тоді повний недоступний об'єм для всіх N молекул:

$$b = 4V^* N. \quad (5.5)$$

З урахуванням поправки b рівняння стану для одного моля реального газу запишеться так:



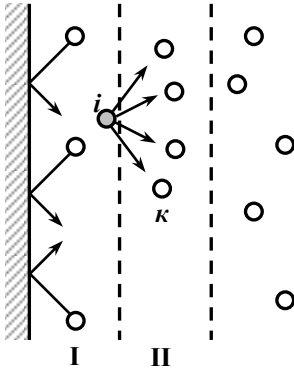
мал. 5.8

$$p_1 = \frac{RT}{V_0 - b}. \quad (5.6)$$

На мал. 5.8 подано ізоТЕРМИ газу, що описуються рівнянням (5.6). З малюнка бачимо, що ізоТЕРМИ цього рівняння мають вигляд гіпербол, у яких тиск безмежно зростає при $V_0 \rightarrow b$. Отже, p_1 – це тиск, який буде чинити газ на стінки посудини, якщо врахувати тільки поправку на власний об'єм молекул.

б) *Поправка на міжмолекулярну взаємодію.* Як показано вище, сила тиску газу на стінки посудини є результатом численних зіткнень

молекул з твердою поверхнею. Тому тиск ідеального газу прямо пропорційний концентрації молекул $n = \frac{N}{V}$ у шарі I, який



мал. 5.9

безпосередньо прилягає до стінки (мал. 5.9). Внаслідок притягання молекул, які співударяються зі стінкою, всіма іншими молекулами газу цей тиск зменшується на деяку величину p_i . Оскільки сили взаємодії молекул істотно зменшуються із збільшенням відстані між ними, то практично потрібно врахувати притягання першого шару молекул тільки одним сусіднім шаром II. Сила цього притягання (розрахована на одиницю площі) пропорційна до концентрації молекул в обох шарах, тобто

$$p_i \sim \frac{N}{V_0} \cdot \frac{N}{V_0}.$$

Увівши коефіцієнт пропорційності, одержуємо:

$$p_i = \alpha \frac{N^2}{V_0^2} = \frac{a}{V_0^2}, \quad (5.7)$$

де $a = \alpha N^2$ залежить від конкретної будови молекул, які взаємодіють, тобто від природи газу. Об'єднавши другу поправку з першою, одержимо рівняння, яке описує стан реального газу:

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - p_i \quad \text{або} \quad \left(p + \frac{a}{V_0^2} \right) (V_0 - b) = RT. \quad (5.8)$$

Рівняння (5.8) одержало назву рівняння Ван дер Ваальса для одного моля реального газу. Для довільної маси газу, взявши до уваги, що

$V = \frac{m}{\mu} V_0$, рівняння Ван дер Ваальса має вигляд:

$$\left(p + \frac{m}{\mu} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT. \quad (5.9)$$

5.2.3. Аналіз рівняння Ван дер Ваальса

Помноживши всі члени рівняння Ван дер Ваальса на спільний множник, надамо йому такого вигляду:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT \quad | \times V_0^2,$$

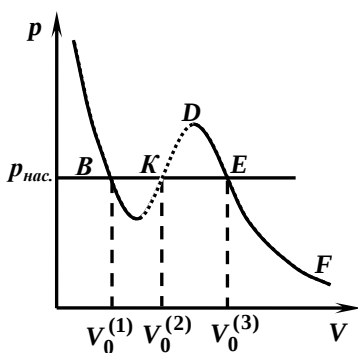
$$(pV_0^2 + a)(V_0 - b) = RTV_0^2 \quad \text{або}$$

$$pV_0^3 - (pb + RT)V_0^2 + aV_0 - ab = 0. \quad (5.10)$$

Рівняння (5.10) має три дійсні корені або один дійсний і два комплексно-спряжені корені, що не мають фізичного змісту.

При високих температурах T вираз $\frac{a}{V_0^2} \rightarrow 0$ і з рівняння (5.8) випливає, що ізотерми реального газу мають тільки одне дійсне значення об'єму V . При низьких температурах T уже не можна знехтувати поправкою на сили притягання $\frac{a}{V_0^2}$ і рівняння (5.10) має три дійсних корені, як показано на мал. 5.10. Найменший з цих коренів $V_0^{(1)}$ відповідає стану з великою густиною і малою стисливістю – стану рідини.

Ізотерма ABC круто зростає і для невеликої зміни об'єму потрібно сильно підвищити тиск.



мал. 5.10

Найбільший з трьох коренів $V_0^{(3)}$ відповідає стану з низькою густиною і легкою стисливістю – стану газу. Ізотерма DEF йде порівняно полого, об'єм і тиск газу обернено пропорційні. Проміжний корінь $V_0^{(2)}$ лежить на зростаючій вітці CD ізотерми, яку на малюнку показано пунктиром, і яка відповідає абсолютно нестійким станам.

Слід зазначити, що якісна картина зміни станів речовини передається рівнянням Ван дер Ваальса цілком правильно. Поряд зі стійкими станами це рівняння передбачає та правильно описує також нестійкі стани перегрітої рідини і перенасиченої пари.

5.2.4. Зведене рівняння Ван дер Ваальса

Недоліком рівняння Ван дер Ваальса є те, що воно змінюється від речовини до речовини, оскільки до нього входять параметри **a** і **b**, які залежать від природи речовини. Але поправки **a** і **b**, а також **R** можна виключити з цього рівняння, використавши для цього критичні параметри речовини:

$$R = \frac{8}{3} \frac{p_k V_k}{T_k}, \quad b = \frac{1}{3} V_k, \quad a = 3 p_k V_k^2. \quad (5.11)$$

Взявши до уваги (5.11), рівняння (5.8) запишемо так:

$$p = \frac{RT}{V_0 - b} - \frac{a}{V_0^2} = \frac{8}{3} \frac{p_k V_k}{T_k} \frac{T}{\left(V_0 - \frac{1}{3} V_k\right)} - \frac{3 p_k V_k^2}{V_0^2}$$

$$\text{або} \quad \frac{p}{p_k} = 8 \frac{T}{T_k} \frac{V_k}{3V_0 - V_k} - \frac{3V_k^2}{V_0^2}.$$

$$\text{Тоді} \quad \frac{p}{p_k} + 3 \left(\frac{V_k}{V_0} \right)^2 = 8 \frac{T}{T_k} \frac{V_k}{V_k \left(3 \frac{V_0}{V_k} - 1 \right)}$$

$$\text{або} \quad \left[\frac{p}{p_k} + 3 \left(\frac{V_k}{V_0} \right)^2 \right] \cdot \left[3 \frac{V_0}{V_k} - 1 \right] = 8 \frac{T}{T_k}. \quad (5.12)$$

Введемо такі заміни:

$$\frac{T}{T_k} = \theta, \quad \frac{p}{p_k} = \pi, \quad \frac{V_0}{V_k} = \omega, \quad (5.13)$$

де **θ**, **π**, **ω** – зведена температура, тиск і об'єм, відповідно. Тоді рівняння (5.12) набуде вигляду:

$$\left[\pi + \frac{3}{\omega^2} \right] [3\omega - 1] = 8\theta. \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) називається *зведеним рівнянням Ван дер Ваальса*. З (5.14) випливає, що коли взяти дві речовини, які відрізняються хімічною природою, при відповідних температурах і відповідних тисках, тобто за однакових θ і π , то й відповідні об'єми цих речовин будуть однакові.

5.2.5. Критичні параметри речовини

Аналізуючи теоретичні ізоТЕРМИ реального газу, одержані на основі рівняння Ван дер Ваальса, робимо висновок, що починаючи з певної, своєї для кожної речовини, температури T_k при будь-якому тиску дійсним залишається тільки один розв'язок рівняння Ван дер Ваальса (мал. 5.10). Ця температура, як було вже сказано, називається критичною. Коли підвищується температура, то точки, які відповідають розв'язкам рівняння $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$, $V_0^{(3)}$, все більше зближаються, зливаючись при критичній температурі в одну, позначену точкою K . Ця точка називається критичною. Для відповідної ізоТЕРМИ точка K є точкою перегину. У цій точці всі три дійсні розв'язки рівняння Ван дер Ваальса співпадають. Похідна $\frac{dp}{dV}$ у точці

K дорівнює нулю. У точці перегину і друга похідна $\frac{d^2 p}{dV^2}$ повинна дорівнювати нулю. Тоді продиференціювавши рівняння (5.8), одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dV} &= -\frac{RT}{(V_0 - b)^2} + \frac{2a}{V_0^3} \\ \frac{d^2 p}{dV^2} &= \frac{2RT}{(V_0 - b)^3} - \frac{6a}{V_0^4} \end{aligned} \right\}. \quad (5.15)$$

У критичній точці, тобто при умові $T = T_k$, $V_0 = V_{0k}$, ці вирази повинні дорівнювати нулю:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{RT_k}{(V_{0k}-b)^2} + \frac{2a}{V_{0k}^3} &= 0 \\ \frac{2RT_k}{(V_{0k}-b)^3} - \frac{6a}{V_{0k}^4} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.16)$$

І разом з рівнянням Ван дер Ваальса, записаним для точки K :

$$p_k = \frac{RT_k}{V_{0k}-b} - \frac{a}{V_{0k}^2}, \quad (5.17)$$

вони утворюють три рівняння з невідомими p_k , V_{0k} , і T_k .

Розв'язок системи рівнянь (5.16) і (5.17) дає наступне:

$$V_{0k} = 3b, \quad p_k = \frac{a}{27b^2}, \quad T_k = \frac{8a}{27bR}. \quad (5.18)$$

Отже, коли відомі константи Ван дер Ваальса a і b , можна знайти критичні параметри p_k , V_{0k} , T_k і, навпаки, за відомими критичними параметрами можуть бути знайдені значення констант p_k , V_{0k} , T_k Ван дер Ваальса.

З виразів для критичних параметрів випливає, що

$$p_k V_{0k} = \frac{3}{8} RT_k, \quad (5.19)$$

у той час як рівняння стану ідеального газу дає таку рівність:

$$p_k V_{0k} = RT_k. \quad (5.20)$$

5.3. Внутрішньої енергія реального газу.

Ефект Джоуля-Томсона

5.3.1. Внутрішня енергія реального газу

У випадку ідеального газу внутрішня енергія одного моля визначається за формулою:

$$U_i = \frac{i}{2} RT = C_V T, \quad (5.21)$$

де C_V – молярна теплоємність газу, T – його температура.

Як було показано вище, при аналізі властивостей реального газу вже не можна нехтувати силами міжмолекулярної взаємодії. З урахуванням цих сил внутрішня енергія реального газу записується так:

$$U_p = U_i + \varphi, \quad (5.22)$$

де U_i – внутрішня енергія ідеального газу, φ – енергія, яка враховує взаємодію між молекулами. Енергію взаємодії φ знайдемо, використавши вираз для додаткового тиску p_i , що входить у рівняння

Ван дер Ваальса ($p_i = \frac{a}{V_0^2}$). Тоді

$$\varphi = \int p_i dV = \int \frac{a}{V_0^2} dV = -\frac{a}{V_0} + \varphi_0. \quad (5.23)$$

При $V \rightarrow \infty$ (у випадку ідеального газу): $\varphi \rightarrow 0$ і $\varphi_0 = 0$. Тому внутрішню енергію одного моля реального газу обчислюємо за формулою:

$$U_p = C_V T - \frac{a}{V_0}, \quad (5.24)$$

а внутрішню енергію довільної маси реального газу:

$$U_p = \frac{m}{\mu} \left(C_V T - \frac{m}{\mu} \frac{a}{V} \right). \quad (5.25)$$

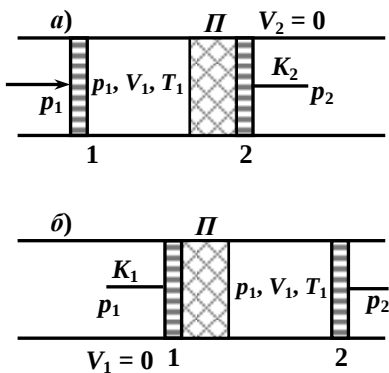
5.3.2. Ефект Джоуля-Томсона

Учені Д.Джоуль і В.Томсон у 1853–1862 рр. досліджували процес дроселювання газів. Суть цього процесу полягає у тому, що газ адіабатно розширюється від одного постійного тиску до іншого постійного тиску без виконання ним зовнішньої роботи. Для цього у добре теплоізолюваній трубці розміщують корок з вати. З одного боку від цього корка газ перебуває під тиском p_1 , а з іншого – під тиском p_2 , причому $p_1 > p_2$. Внаслідок різниці тисків газ “протискується” через корок, розширюючись адіабатно.

Оскільки при дроселюванні не виконується робота над зовнішніми тілами, то таке розширення газу відбувається необоротно.

Покажемо, що дроселювання газу є ізоентальпним процесом ($H = U + pV = \text{const}$).

При дроселюванні газ не виконує зовнішньої роботи, тому робота розширення газу витрачається на роботу проти внутрішніх сил (сил міжмолекулярного притягання).



мал. 5.11

Процес дроселювання газу показано на мал. 5.11. У трубі з теплоізованими стінками, яка розділена на дві частини пористою перегородкою, можуть рухатися два поршні. На початку експерименту один моль деякого реального газу займає об'єм V_1 між лівим поршнем і перегородкою Π при температурі T_1 і тиску p_1 . Правий поршень щільно прилягає до перегородки Π і перебуває під тиском p_2 (мал. 5.11, а).

У процесі експерименту лівий поршень під тиском p_1 повільно протискає газ через перегородку. При цьому правий поршень переміщується під тиском p_2 (мал. 5.11, б). У результаті цього весь газ буде справа від перегородки, займаючи об'єм V_2 при температурі T_2 і тиску p_2 . Знайдемо співвідношення між температурами T_1 і T_2 .

Згідно з першим началом термодинаміки у процесі дроселювання газу:

$$\delta Q = dU + \delta A, \text{ але } \delta Q = 0, \text{ тоді}$$

$$0 = U_2 - U_1 + (p_2 V_2 - p_1 V_1) \text{ або } p_1 V_1 + U_1 = p_2 V_2 + U_2 = H = \text{const} \quad (5.26)$$

З рівняння (5.26) випливає, що у випадку ідеальних газів ефект Джоуля-Томсона дорівнює нулю, бо для них виконується закон Бойля-Маріотта: $p_1 V_1 = p_2 V_2$, тому, виходячи з (5.26), одержуємо:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0.$$

Отже, при дроселюванні ідеального газу його температура не змінюється (має місце нульовий ефект Джоуля-Томсона).

Для простоти міркувань будемо вважати, що у лівому циліндрі (до розширення) газ реальний, а у правому циліндрі (після розширення) газ ідеальний (об'єм V_2 істотно збільшився). Тоді використавши рівняння (5.26) та рівняння стану ідеального і реального газів, запишемо:

$$\begin{array}{l}
 p_1 V_1 + U_1 = p_2 V_2 + U_2, \\
 \left(p_1 + \frac{a}{V_1^2} \right) (V_1 - b) = RT_1 \quad \left| \quad \begin{array}{l} p_2 V_2 = RT_2 \\ U_2 = C_V T_2 \end{array} \right. \\
 U_1 = C_V T_1 - \frac{a}{V_1}
 \end{array} \quad (5.27)$$

$$\begin{array}{l}
 V_1 p_1 + \frac{a}{V_1} - p_1 b - b \frac{a}{V_1^2} = RT_1 \quad \text{або} \\
 V_1 p_1 + \frac{a}{V_1} - b \left(p_1 + \frac{a}{V_1^2} \right) = RT_1.
 \end{array} \quad (5.28)$$

Звідки

$$V_1 p_1 = RT_1 + \frac{RT_1}{V_1 - b} b - \frac{a}{V_1}, \text{ бо } p_1 + \frac{a}{V_1^2} = \frac{RT_1}{V_1 - b}. \quad (5.29)$$

Урахувавши (5.27)–(5.29), рівняння (5.33) перепишемо так:

$$\begin{array}{l}
 C_V T_1 - \frac{a}{V_1} + RT_1 + RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 + RT_2 \quad \text{або} \\
 C_p T_1 - \frac{2a}{V_1} + RT_1 \frac{b}{V_1 - b} = C_p T_2.
 \end{array} \quad (5.30)$$

$$\text{Тоді } C_p (T_2 - T_1) = RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \quad \text{або}$$

$$\Delta T = \frac{1}{C_p} \left(RT_1 \frac{b}{V_1 - b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (5.31)$$

З рівняння (5.31) випливає, що знак ефекту Джоуля-Томсона визначається виразом у дужках, а саме:

якщо $RT \frac{b}{V - b} > \frac{2a}{V}$, то $\Delta T > 0$ (від'ємний ефект Джоуля-Томсона);

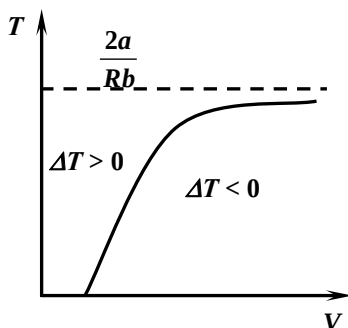
$RT \frac{b}{V - b} < \frac{2a}{V}$, то $\Delta T < 0$ (додатний ефект Джоуля-Томсона);

$RT \frac{b}{V - b} = \frac{2a}{V}$, то $\Delta T = 0$ (нульовий ефект Джоуля-Томсона).

Зміна знаку ΔT відбувається при температурі, яка називається *температурою інверсії* T_i :

$$T_i = \frac{2a}{Rb} \frac{V-b}{V} \approx \frac{2a}{Rb}. \quad (5.32)$$

Температура інверсії для всіх газів значно вища від критичної ($T_i \approx 6,7T_{кр}$).



мал. 5.12

У координатах TV температура інверсії утворює криву, яка розділяє додатне і від'ємне явище Джоуля-Томсона (мал. 5.12). Температура інверсії T_i прямує до значення $\frac{2a}{Rb}$, якщо V прямує до безмежності.

Явище Джоуля-Томсона має широке практичне застосування. Додатне явище використовується у техніці зрідження газів і одержання низьких температур.

Оскільки критичні температури для більшості речовин перевищують 50 K , то для таких речовин температура інверсії перевищує кімнатну температуру (біля 300 K), і їх зрідження відбувається без попереднього охолодження. Але для водню і гелію критичні температури дуже низькі. Дослід Джоуля-Томсона, виконаний з цим газом при 300 K , показав, що вони нагріваються. Але при достатньому попередньому їх охолодженні (для водню можна використати рідкий азот, для гелію – рідкий водень) і ці гази можна перевести у рідкий стан (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Газ (речовина)	$p_{кр}, атм$	$T_{кр}, K$	T_b, K	$t_b, ^\circ C$	Температура кипіння		Температура тверднення, K
					K	$^\circ C$	
Гелій	2,26	5	34	-233	4,2	-	не твердне
Водень	12,8	32	216	-57	20,28	-	14,4
Азот	33,5	128	865	592	77,3	-	63,14
Кисень	49,7	154	1040	767	90,0	-183	54,36
Вуглекислий газ (CO_2)	73	304	2050	1777	194,7	-78,5	
Водяна пара	217,7	647	4370	4097	373,15	100	

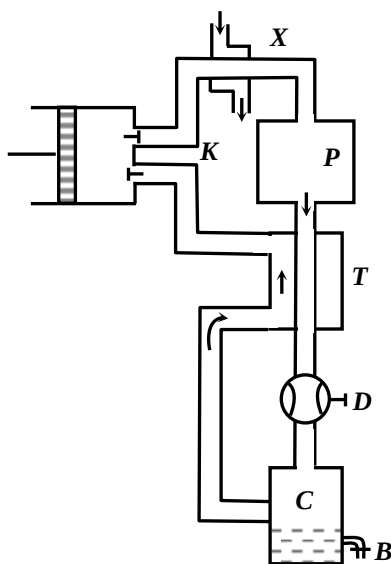
T_b, t_b – взяті при нормальному атмосферному тиску.

5.3.3. Зрідження газів і одержання низьких температур

Як видно з мал. 5.4, для зрідження газів їх потрібно охолоджувати до температури нижчої, ніж критична. Тому речовини з високими значеннями T_k (яка вища від кімнатної) легко перетворити у рідину. Для речовин з низькими значеннями T_k , наприклад, для водню ($T_k = -250^\circ\text{C}$), у нас немає природних джерел низької температури. Достатньо низьких температур можна досягнути лише штучним шляхом. Для зрідження таких газів їх можна попередньо охолодити не шляхом передачі тепла холоднішому тілу, а змушуючи гази виконувати роботу проти внутрішніх або зовнішніх сил.

В історично першій машині для зрідження газів у технічних масштабах (машина Лінде) для охолодження газів до температури, нижчої від критичної T_k , використовувався метод дроселювання (мал. 5.13).

Компресор K засмоктує повітря і стискає його до тиску ~ 200 атм. Оскільки при майже адіабатичному стиску повітря нагрівається, то його пропускають через холодильник X , який охолоджується проточною водою. Під тиском 200 атм. повітря є реальним газом і в ньому при кімнатних температурах переважають сили притягання,

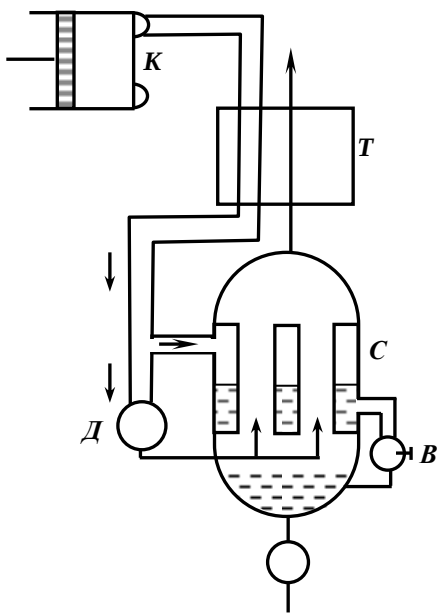


мал. 5.13

тобто молекули перебувають на відстанях $\gtrsim r_0$. Стиснуте повітря, пройшовши холодильник, потрапляє у резервуар з великим об'ємом (так званий ресівер P) для ліквідації або зменшення поштовхів тиску, які створює компресор K . З ресівера повітря під високим тиском йде внутрішньою трубою теплообмінника T і проходить через кран з вузьким отвором (дросель) D у резервуар низького тиску. При різкому зменшенні тиску після дроселя від 200 атм. до 1 атм. повітря розширюється, відстань між молекулами і

потенціальна енергія їх взаємодії збільшується. Збільшення потенціальної енергії відбувається за рахунок зменшення кінетичної енергії хаотичного руху молекул, тобто за рахунок охолодження газу.

Унаслідок порівняно малої величини роботи, виконаної проти внутрішніх сил притягання, одноразового розширення замало для пониження температури до критичної. Тому охолоджене повітря повертається назад до компресора і нагріваючись до кімнатної температури, охолоджує наступну порцію стиснутого повітря, що йде внутрішньою трубою теплообмінника. Так, ця наступна порція повітря попередньо охолоджується і при подальшому дроселюванні її температура стає нижчою, ніж у першій порції. Через 6–8 годин після запуску установки температура дросельованого повітря знижується настільки, що його частина ($\sim 5\text{--}6\%$) перетворюється у рідину, а решта потоку продовжує повертатися у теплообмінник. Рідке повітря, з конденсатора *С*, через кран *В* виливається у дьюарівські посудини для зберігання чи транспортування.



мал. 5.14

Велика робота, затрачена на попередній стиск газу, робить машину Лінде малоекономною. Через це в сучасних холодильних машинах для зрідження газів самі гази виконують зовнішню роботу і віддають свою енергію у спеціальних машинах, які називають детандерами.

На мал. 5.14 показано схему П.Л. Капіци з так званим турбодетандером. Компресор *К* стискає повітря лише до 5–6 атм. Стиснуте повітря йде через теплообмінник *Т*, де попередньо охолоджується зустрічним потоком незрідженого повітря. Далі цей потік ділиться на дві частини.

Невелика його частина йде безпосередньо в конденсатор C , а основний потік поступає в турбодетандер D . У турбодетандері стиснуте повітря, вдаряючись об лопатки турбіни, змушує її виконувати роботу. При цьому його тиск понижується до атмосферного й температура понижується додатково на деяку величину ΔT . Розширене й охолоджене повітря потрапляє у конденсатор C , піднімається трубами вгору і виходить через теплообмінник T назовні.

Стиснуте повітря, яке не проходило через детандер, потрапляє у міжтрубний простір конденсатора, де охолоджується зустрічним потоком повітря і перетворюється у рідину. Рідке повітря пропускається через дросель B у конденсатор. При зменшенні його тиску частина рідкого повітря випаровується і піднімається вгору, а внаслідок затрати на це прихованої теплоти випаровування, рідина, що залишилася, охолоджується до температури, при якій пружність насиченої пари не перевищує 1 атм .

Рідке повітря має при атмосферному тиску температуру -180°C . При його випаровуванні насамперед випаровується азот і залишається рідкий кисень. Таким шляхом можна відокремити один від одного основні складові атмосферного повітря і використовувати їх в подальшому для різних цілей.

5.4. Рівновага рідини та пари. Вологість

5.4.1. Рівновага рідини та пари. Властивості насиченої пари

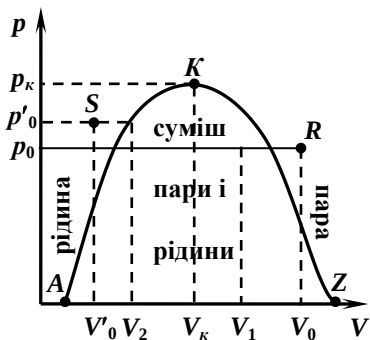
На прикладі вищерозглянутого явища конденсації газів (вуглекислоти) було показано, що можуть існувати два різні стани однієї і тієї ж речовини при одних і тих самих температурі та тиску. Ці стани відрізняються своїми властивостями, насамперед густиною.

Якщо система поділяється на однорідні частинки, які межують одна з одною і перебувають у різних фізичних станах, то ці частинки називають *фазами системи*.

Коли дві або більше різних фаз речовини при деяких температурі і тиску існують одночасно, стикаючись одна з одною, і якщо при цьому маса однієї з фаз не збільшується за рахунок іншої, то говорять про *фазову рівновагу*. А перехід речовини з однієї фази в іншу називають

фазовим переходом або фазовим перетворенням. Кількість фаз, які можуть перебувати у рівновазі, залежить від складу речовини.

Розглянемо фазовий перехід рідина – пара (або пара – рідина). Якщо в ізотермах реального газу з'єднати точки переходу пари у рідину та рідини у пару, тобто точки B, B' та $C, C', \dots$, то утвориться плавна крива з максимумом, зображеним на мал. 5.15.



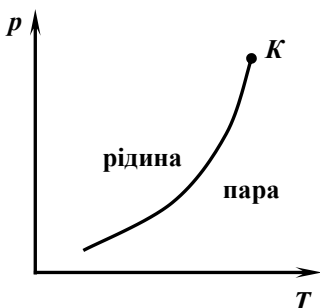
мал. 5.15

Будь-яка точка R з координатами p_0 і V_0 , розміщена справа від вітки KZ , відповідає газоподібному стану через те, що питомий об'єм V_0 є більшим за той об'єм V_1 , при якому починається перехід у рідкий стан при цьому ж тиску p_0 .

Аналогічно точка S з координатами p'_0 і V'_0 , як і будь-яка інша точка, розміщена зліва від вітки AK , відповідає рідкому стану: питомий об'єм V'_0 є меншим за питомий об'єм V_2 , при якому закінчується процес конденсації. А всі точки, що лежать всередині (під кривою) AKZ , відповідають двофазним станам, тобто станам, при яких одночасно існують рідина і насичена пара над нею. Точка K відповідає критичному стану речовини.

Для перетворення речовини з газоподібного у рідкий стан при даній температурі її потрібно стиснути, якщо ця температура є нижчою від критичної. Якщо ж температура вища від критичної, то речовину потрібно попередньо охолодити. При такому перетворенні речовина повинна пройти через проміжну область двофазного стану, коли пара та рідина існують і межують одна з одною.

Як уже зазначалося, рівновага рідкої і газоподібної фаз, тобто рівновага між рідиною і її насиченою парою, настає при певних тисках і температурі, нижчій за критичну. Зміна однієї з цих величин, наприклад, температури, викликає і зміну того тиску, при якому можлива фазова рівновага, тобто зміну тиску насиченої пари. Як бачимо з малюнка, при підвищенні температури пружність насиченої пари зростає.



мал. 5.16

На мал. 5.16 показано залежність пружності насиченої пари від температури. Будь-яка точка зліва від зазначеної кривої відповідає рідкому стану, а точки, що перебувають правіше від неї, відповідають газоподібній фазі. Це означає, що пара, стан якої характеризується довільною точкою справа від неї, сконденсується, якщо понизити її температуру, зберігаючи незмінним тиск.

Аналогічно і рідина, стан якої задано координатами будь-якої точки, що перебуває зліва від кривої, перетворюється у пару, якщо підвищити її температуру, зберігаючи сталим тиск. І тільки точки на самій кривій відповідають фазовій рівновазі, тобто одночасному існуванню рідини і насиченої пари над нею.

Крива, точки якої відповідають рівновазі фаз, називається *фазовою діаграмою* або кривою рівноваги фаз. Вона розділяє області, точки яких відповідають однофазним станам речовини, і є однією з важливих її характеристик. Такі діаграми іноді називають також *діаграмами стану*. Характерною особливістю кривої рівноваги фаз є те, що вона має кінець, оскільки її не можна продовжити вище від критичної температури. Адже вище від цієї температури немає двох фаз, а тому не може бути і їх рівноваги. Як буде показано нижче, крива рівноваги рідина – пара має і початок.

Тиск насиченої пари при даній температурі залежить також від роду речовини. Аналітично залежність тиску насиченої пари від температури для багатьох речовин описується формулою:

$$p = (l + nt)^4, \quad (5.33)$$

де l і n – сталі, які залежать від роду речовини; t – температура.

5.4.2. Кипіння рідини

Кипінням називається процес інтенсивного випаровування рідини не тільки з її вільної поверхні, а й по всьому об'єму рідини всередину бульбашок, які при цьому утворюються.

Ріст бульбашок пари, тобто кипіння рідини, можливий лише у тому випадку, коли температура рідини є такою, що тиск p насиченої пари всередині бульбашки не менший, ніж тиск, який обчислюється за формулою:

$$p \geq p_0 + \rho gh + \frac{2\alpha}{r}, \quad (5.34)$$

де r – радіус бульбашки, α – коефіцієнт поверхневого натягу, h – висота стовпа рідини над бульбашкою, p_0 – атмосферний тиск.

А тиск всередині бульбашки дорівнює

$$p = p_{н.п.} + p_{нов.}, \quad (5.35)$$

де $p_{н.п.}$ – тиск насиченої пари рідини у бульбашці, $p_{нов.}$ – тиск повітря, яке розчинене у рідині (і є у бульбашці). Доволі часто $p_{н.п.} \gg p_{нов.}$.

Температуру рідини, при якій тиск її насиченої пари дорівнює зовнішньому тиску, називають *температурою кипіння*.

5.4.3. Вологість повітря

Водяна пара у повітрі ненасичена. В одних місцях планети у цей момент швидкість випаровування води переважає над швидкістю конденсації, а в інших – навпаки, переважає конденсація.

Вміст водяної пари у повітрі – його вологість, характеризується рядом величин.

Атмосферне повітря є сумішшю різних газів і водяної пари. Кожен з газів вносить свою частку у сумарний тиск повітря на тіла, що в ньому знаходяться.

Тиск, який чинила б водяна пара, якщо б у повітрі не було інших газів, називається *пружністю водяної пари*. Пружність водяної пари використовують як один з показників вологості повітря. Її вимірюють

в одиницях тиску (*Па* або *мм рт. ст.*) ($p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$).

А. Відносна вологість

Знання пружності водяної пари ще нічого не говорить про те, наскільки вона у даних умовах далека від насичення. А саме від цього залежить інтенсивність випаровування води (або її конденсація), а отже, втрата вологи живими організмами.

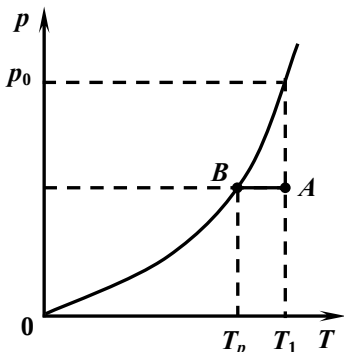
Тому вводять величину, що показує, наскільки водяна пара при даній температурі далека від насичення – відносну вологість.

Відотною вологістю повітря f називається виражене у процентах відношення пружності p водяної пари, яка є у повітрі при даній температурі, до тиску p_0 насиченої водяної пари при тій же температурі:

$$f = \frac{p}{p_0} \cdot 100\% . \quad (5.36)$$

Б. Точка роси

Охолодження ненасиченої пари при сталому тиску перетворить її у насичену пару. У цьому можна переконатись, поглянувши на графік залежності тиску насиченої водяної пари від температури (мал. 5.17).



мал. 5.17

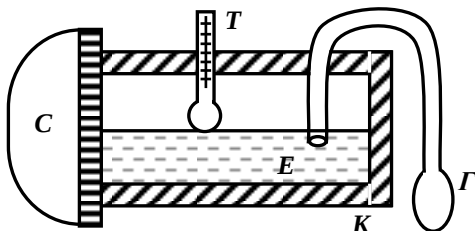
Нехай при T_1 пружність водяної пари дорівнює p_1 . При цьому стан пари на малюнку позначимо точкою A . Якщо пару охолодити до температури T_p при $p = \text{const}$, то вона стане насиченою (точка B). Температуру T_p , при якій водяна пара стає насиченою, називають *точкою роси*. Коли повітря охолоне до точки роси, починається конденсація водяної пари: виникає туман, випадає роса.

Точка роси характеризує вологість повітря, оскільки вона дає можливість визначити пружність водяної пари і відносну вологість. Якщо точка роси відома, то також відома пружність водяної пари p_1 . Її знаходять за допомогою таблиці, у якій подано значення тиску насиченої водяної пари p_0 при різних температурах. Тиск насиченої пари p_0 , що відповідає температурі T_1 , також визначається за допомогою цієї таблиці. А знайшовши тиски p_1 і p_0 , легко обчислити відносну вологість:

$$f = \frac{p_1}{p_0} \cdot 100\% \quad \text{або} \quad \frac{m}{m_0} = f , \quad (5.37)$$

де m – маса водяної пари, що є в 1 м^3 повітря при даній температурі, m_0 – маса водяної пари, що насичує повітря при даній температурі.

В. Гігрометри



мал. 5.18

Вологість повітря вимірюється за допомогою спеціальних приладів – гігрометрів та психрометрів. Конденсаційний гігрометр (мал. 5.18) дає змогу безпосередньо визначити точку роси. Найпростіший прилад цього типу має таку будову: металева коробка K ,

яка має одну добре відполіровану поверхню, термометр T , груша G для продування повітрям ефіру E , який заливається у металеву коробку K .

При продуванні повітря через ефір, який є у коробці K , він випаровується і в результаті посудина K охолоджується. Поява роси на відповідній поверхні C вказує на те, що водяна пара, яка є у повітрі, при температурі, що визначається термометром (точка роси), стала насиченою. Знаючи кімнатну температуру повітря і точку роси, можна за таблицею знайти пружність водяної пари і відносну вологість повітря.

Робота іншого гігрометра, волосяного, ґрунтується на властивості знежиреної людської волосини видовжуватися із збільшенням відносної вологості. Людська волосина має на поверхні численні пори, частина яких заповнена пігментом, а інша частина – повітрям. Водяна пара конденсується у порах; вони заповнюються водою, поверхня якої буде плоска. При недостатньому насиченні маємо вгнутий меніск. Сили поверхневого натягу, які зростають із збільшенням кривизни меніска, стягують стінки пор і довжина волосини зменшується. Відповідно, при зростанні відносної вологості повітря довжина волосини збільшується.

Г. Психрометр

Психрометр складається з двох термометрів: сухого та вологого. Сухий термометр показує температуру повітря. Чим більша відносна вологість, тим менше випаровується вода з вологого термометра і тим

вища його температура. При 100% відносній вологості вода взагалі не випаровується і температури сухого та вологого термометрів однакові.

За різницею температур обидвох термометрів за допомогою спеціальних таблиць можна визначити відносну вологість повітря.

Від величини вологості повітря залежить інтенсивність випаровування вологи з поверхні шкіри людини. А випаровування вологи має велике значення для підтримування температури тіла людини. Нормальною відотною вологістю є вологість порядку 50 - 60%.

Присутність сторонніх газів зовсім не впливає на властивості насиченої водяної пари. Але присутність газів має значний вплив на швидкість випаровування. Це пояснюється тим, що частинки пари повинні прокладати собі шлях між частинками газу, зазнаючи на своєму шляху тим більше співударів, чим більший тиск газу. Отже, швидкість випаровування залежить від того, який тиск має пара рідини, що міститься над її поверхнею. Маса пари m , яка виникає протягом *однієї секунди* над одиницею площі поверхні рідини, пропорційна до різниці *тиску насиченої пари* P цієї рідини при даній температурі і *тиску пари* p над даною рідиною у даний момент:

$$m = k(P - p), \quad (5.38)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від природи рідини.

Запитання для самоконтролю

1. Які гази називають ідеальними? Які реальними?
2. При яких умовах виконується рівняння Менделєєва-Клапейрона та інші закони для ідеальних газів?
3. Які існують сили міжмолекулярної взаємодії? Як вони залежать від відстані між молекулами?
4. Від чого залежить агрегатний стан речовини?
5. Зобразіть експериментальну ізотерму реального газу та поясніть її.
6. Який стан газу називають критичним? Як змінюються ізотерми реального газу при зміні його температури?

7. Запишіть рівняння Ван дер Ваальса. Поясніть фізичний зміст поправок a і b , що є у ньому?
8. Який фізичний зміст зведеного рівняння Ван дер Ваальса?
9. Які параметри називаються критичними? Який їх зв'язок з поправками a і b ?
10. Як обчислити внутрішню енергію реального газу?
11. Що називають дроселюванням газу?
12. У чому полягає фізичний зміст ефекту Джоуля-Томсона?
13. Що називають температурою інверсії? Від чого вона залежить?
14. Які є методи одержання низьких температур?
15. Поясніть принцип дії машини Лінде.
16. Поясніть принцип дії машини Капіці.
17. Що називають фазовою рівновагою?
18. Намалюйте та поясніть діаграму фазового переходу рідина – пара (або пара – рідина).
19. Як залежить пружність насиченої пари від температури?
20. Чому крива рівноваги рідина – пара має кінець?
21. При якій умові кипить рідина?
22. Що називається відносною вологістю повітря?
23. Які є методи визначення відносної вологості повітря?
24. Що називають точкою роси? Як її визначити?

6. РІДИНИ

6.1. Випаровування і кипіння

Молекули у рідині перебувають на відстані r_0 одна від одної та інтенсивно взаємодіють між собою. Сили їх взаємодії особливі: вони суттєво залежать від природи взаємодіючих молекул і тому сильно відрізняються за величиною для різних рідин. Через це створення теорії рідин викликає значно більші труднощі, ніж створення теорії газів.

При збільшенні зовнішнього тиску на рідину на величину Δp її об'єм зменшується на величину ΔV . При цьому між молекулами, що зближаються, виникають великі сили відштовхування. Тому ізотермічна стисливість рідини:

$$\chi = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} \quad (6.1)$$

є дуже малою і дорівнює $10^{-9} - 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$.

Порівняно мало змінюють свій об'єм рідини і при нагріванні. Термічний коефіцієнт розширення рідини:

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta T} \quad (6.2)$$

має порядок 10^{-4} 1/K , що у десятки разів менший, ніж для газів. Тому робота ізобаричного розширення рідин при нагріванні їх на 1 K відносно мала:

$$p \Delta V \ll R \Delta T. \quad (6.3)$$

Відповідно, теплоємності рідин при постійному об'ємі та при постійному тиску є близькі одна до одної:

$$C_p - C_V = \frac{p \Delta V}{\Delta T} \ll C_p \text{ і } C_p \approx C_V. \quad (6.4)$$

Характер теплового руху молекул у рідині суттєво відрізняється від теплового руху молекул газу. Оскільки середні відстані $\bar{r}$ між молекулами рідини є близькими до r_0 , що відповідає мінімальному

значенню потенціальної енергії взаємодії, тобто їх рівноважному стану, то молекули рідини довготривало коливаються навколо своїх положень рівноваги.

Внаслідок хаотичного теплового руху швидкості та амплітуди коливань сусідніх молекул різні і час від часу сусідні молекули віддаляються одна від одної настільки, що окремі молекули перестрибують на відстань порядку діаметра молекули d , “застрягаючи” у нових положеннях рівноваги і починаючи коливатись навколо них. При підвищенні температури збільшується середня енергія теплового руху, амплітуда коливань і частота переходу молекул з одного положення рівноваги в інше. При цьому об’єм рідини збільшується.

Оскільки у рідині $\bar{r}$ приблизно дорівнює r_0 , то потенціальна енергія взаємодії сусідніх молекул приблизно дорівнює U_{min} . При щільній упаковці молекул кожна з них оточена 12 найближчими сусідами (6 молекул розміщуються по периметру молекули, по три молекули – згори і знизу). Потенціальна енергія молекули рідини приблизно дорівнює

$$U_p = 12U_{min}. \quad (6.5)$$

Оскільки сили взаємодії між молекулами дуже сильно зменшуються при збільшенні відстані між ними, то при визначенні потенціальної енергії U_p можна знехтувати взаємодією даної молекули з усіма іншими, які розміщені від неї на відстанях, більших від $\bar{r}$, за винятком найближчих дванадцяти.

Як було показано вище, над поверхнею рідини є насичена пара. При не дуже високих тисках цієї пари відстані між молекулами пари є великими (порівняно з їх діаметром), тому потенціальна енергія молекул пари практично дорівнює нулю:

$$U_p \approx 0. \quad (6.6)$$

Але $U_{min} < 0$, тому й $U_p < 0$ і, відповідно,

$$U_p < U_v, \quad (6.7)$$

тобто потенціальна енергія молекули всередині рідини є меншою, ніж потенціальна енергія цієї ж молекули у парі.

Молекула всередині рідини перебуває у рівновазі з сусідами. Але при переході цієї молекули у пару потрібно затратити роботу для подолання сил зчеплення цієї молекули з оточуючими її сусідами:

$$A' = -\sum_{\vec{r}} F \Delta \vec{z} = \Delta U = U_n - U_p = 0 - U_p = |U_p| \approx 12 |U_{\min}|. \quad (6.8)$$

Відповідно на випаровування 1 моля, тобто N_A молекул рідини, потрібно затратити роботу:

$$q' = N_A A' = N_A (U_n - U_p) \approx 12 N_A |U_{\min}| \quad (6.9)$$

для подолання внутрішніх сил зчеплення між молекулами, тобто на розрив зв'язків між ними.

Оскільки молярний об'єм рідини V_p є меншим, ніж молярний об'єм пари V_n , то при випаровуванні відбуватиметься розширення речовини, що пов'язано з додатковою роботою розширення проти сил зовнішнього тиску:

$$q_a = p \Delta V = p_{\text{нас}} (V_n - V_p). \quad (6.10)$$

Отже, повна робота, затрачена на випаровування 1 моля рідини, дорівнює

$$q = q' + q_a = N_A (U_n - U_p) + p_{\text{нас}} (V_n - V_p). \quad (6.11)$$

При випаровуванні рідини необхідну для цього енергію підводять у вигляді тепла. Оскільки температура речовини при цьому не змінюється, то величину q називають прихованою теплотою випаровування рідини. Залежно від того, на яку кількість речовини вона розраховується, розрізняють q молярне (Дж/моль) і q питоме (Дж/кг). Між ними існує зв'язок:

$$q_{\text{мол.}} = \mu q_{\text{пит.}}, \quad (6.12)$$

де μ – молярна маса речовини (кг/моль).

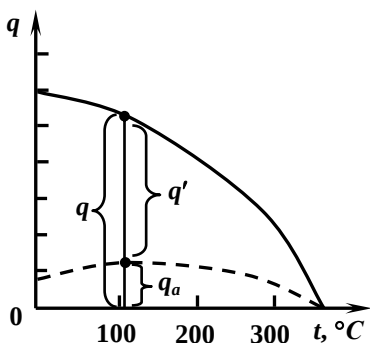
Величини q' , q_a , і q є функціями температури випаровування. Як було показано вище, при підвищенні температури V_p збільшується, а V_n – зменшується, і властивості рідини та її насиченої пари стають близькими. При збільшенні густини насиченої пари відстані між її молекулами зменшуються, потенціальна енергія U_n стає відмінною від нуля і прямує до U_p . У критичній точці, тобто при критичній температурі T_k :

$$V_n = V_p \text{ та } U_n = U_p, \quad (6.13)$$

і відповідно у цій точці:

$$q' = 0, q_a = 0 \text{ і } q = 0. \quad (6.14)$$

Оскільки при критичній температурі T_k зникає різниця між рідиною та її парою, то й прихована теплота q повинна перетворюватися у нуль. А при $T < T_k$ із зменшенням температури зростає різниця між властивостями та будовою пари і рідини, через що збільшується прихована теплота випаровування q (мал. 6.1).



мал. 6.1

При наявності вільної поверхні рідини окремі молекули, які будуть випадково мати надлишок кінетичної енергії, вириватимуться з рідини назовні. Рідина буде поступово випаровуватися. Середня енергія молекул, які залишаються у рідині, буде зменшуватися і відповідно рідина буде охолоджуватися, якщо її не нагрівати. На цьому ґрунтується захисна реакція нашого організму під час спеки. Піт, що при цьому

виділяється, випаровується і охолоджує наше тіло.

При збільшенні пружності пари, яка є над рідиною, все більша кількість окремих молекул пари буде потрапляти на поверхню рідини. При

$$p_n = p_{нас}(T) \quad (6.15)$$

швидкість випаровування рідини та швидкість конденсації пари стають однаковими і між рідиною та її парою встановлюється динамічна рівновага. Подальше випаровування рідини буде можливим, якщо пару, яка утворилася над рідиною, здувати, відкачувати насосом або конденсувати її на іншій, холоднішій поверхні.

При вищих температурах випаровування відбувається інтенсивніше і вищою є пружність насиченої пари $p_{нас}(T)$, при якій настає динамічна рівновага.

Поряд з поверхневим випаровуванням рідини можливе і її об'ємне випаровування, тобто інтенсивне утворення бульбашок пари в усьому об'ємі рідини. Таке випаровування називається кипінням рідини. Якщо пружність насиченої пари рідини при даній температурі $p_{нас}(T)$ менша, ніж зовнішній тиск $p_{зов}$, то кипіння неможливе. Бульбашки насиченої пари, що утворюються, будуть стискатися зовнішнім тиском, і оскільки тиск у них не може перевищувати $p_{зов}$, то вся пара в бульбашках сконденсується назад у рідину.

Умова, при якій настає кипіння:

$$p_{нас}(T) = p_{зов}. \quad (6.16)$$

При виконанні цієї умови, бульбашки, що утворюються у рідині, є стійкими. Цього можна досягнути двома шляхами:

- 1) нагріванням рідини до такої температури $T_{кип}$, при якій пружність насиченої пари дорівнює зовнішньому тиску. Умова

$$p_{нас}(T_{кип}) = p_{зов}. \quad (6.17)$$

визначатиме температуру кипіння $T_{кип}$ залежно від зовнішнього тиску;

- 2) зменшенням зовнішнього тиску до величини пружності насиченої пари при даній температурі. Якщо вода перебуває у закритій посудині, то, зменшивши тиск повітря над водою до 17,5 мм рт. ст., можна змусити воду закипіти при температурі 20°C замість 100°C при атмосферному тиску.

Практично утворення бульбашок у рідині дещо утруднене через наявність поверхневого натягу і вимагає невеликого перегріву рідини до вищої температури, ніж та, що відповідає рівнянню (6.17). Такий перегрів завжди виникає поблизу гарячіших стінок посудини, у якій відбувається кипіння рідини. Тому бульбашки пари передовсім утворюються на стінках і на дні посудини, у якій нагрівається рідина.

6.2. Поверхневий натяг рідини

Рідини й тверді тіла мають значну об'ємну пружність, тобто чинять опір зміні їх об'єму, але не мають пружності форми (як і гази). Рідина, налита у посудину, заповнює її і набирає форми посудини. Дія сили тяжіння притискає рідину до дна посудини, а вільна поверхня рідини встановлюється горизонтально. Над поверхнею рідини перебуває насичена пара і газоподібне повітря. Отже, об'єм рідини є обмежений стінками посудини і газом. При цьому умови, в яких молекули рідини перебувають на границях розділу, будуть відрізнятися від умов всередині об'єму рідини.

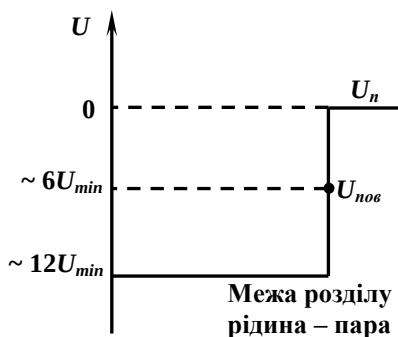
Розглянемо молекулу, яка перебуває у поверхневому шарі вільної поверхні рідини, тобто на межі рідина – газ. Така молекула має в середньому тільки 6, а не 12 близьких сусідів. Через це її потенціальна енергія приблизно дорівнює

$$U_{нов} \approx 6U_{min}$$

і є більшою від потенціальної енергії цієї ж молекули, коли вона перебуває всередині рідини ($U_p \approx 12U_{min}$). Тому для підняття молекули із середини рідини на її вільну поверхню потрібно виконати зовнішню роботу:

$$A = U_{нов} - U_p \approx 6U_{min} - 12U_{min} = -6U_{min} = 6|U_{min}|. \quad (6.18)$$

При зворотному переході молекули з поверхневого шару рідини всередину об'єму її потенціальна енергія буде зменшуватися на таку ж величину $\approx 6|U_{min}|$. Оскільки тіло в полі тяжіння намагається зайняти положення з найменшою потенціальною енергією (якщо йому в цьому



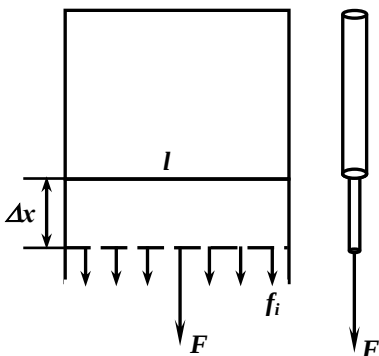
мал. 6.2

не перешкоджають інші сили), то й молекули, що перебувають на вільній поверхні рідини, намагаються перейти всередину її об'єму (мал. 6.2).

Оскільки кількість молекул на поверхні рідини пропорційна до величини вільної поверхні, то прагнення молекул поверхні повернутися

всередину об'єму рідини означає, інакше кажучи, бажання зменшити вільну поверхню рідини.

Таким чином, ми прийшли до висновку, підтвердженому на досліді, що рідина під дією внутрішніх сил намагається зменшити свою вільну поверхню, якщо їй у цьому не перешкоджають які-небудь сили. І дійсно, в кабіні космічного корабля (у невагомості) вільний об'єм рідини набирає форму кулі, оскільки куля має найменшу площу поверхні при заданому об'ємі.



мал. 6.3

Вплив “поверхневої” енергії суттєвий також для тонких плівок.

Розглянемо дротяний каркас з рухомим ребром (мал. 6.3) і зануримо його в розчин мила у воді (у мильну воду). Витягнувши цей каркас з розчину, побачимо, що в ньому залишиться натягнутою тоненька мильна плівка. Пересунемо нижнє рухоме ребро на деяку віддаль Δx . При цьому шар рідини на каркасі розтягнеться

і стане дещо тоншим, а його повна поверхня (з обох сторін каркаса) збільшиться на

$$\Delta S = 2l\Delta x. \quad (6.19)$$

Якщо позначити через n_0 кількість молекул, що припадають на одиницю площі поверхні плівки, то при такому розтягу плівки $n_0\Delta S$ молекул перейдуть з об'єму рідкого шару на його поверхню. Але вихід однієї молекули на вільну поверхню пов'язаний із збільшенням її потенціальної енергії на $\sim 6|U_{min}|$. Тому для збільшення площі мильної плівки на ΔS слід затратити зовнішню роботу:

$$\Delta A = 6|U_{min}|n_0\Delta S = \alpha\Delta S. \quad (6.20)$$

Величину $\alpha = 6|U_{min}|n_0$ називають *коефіцієнтом поверхневого натягу*, або просто поверхневим натягом даної рідини. З рівняння (6.20) випливає, що

$$\alpha = \frac{\Delta A}{\Delta S} \quad (6.21)$$

і $\alpha = \Delta A$ при $\Delta S = 1$. Відповідно, коефіцієнт поверхневого натягу α чисельно дорівнює роботі, яку потрібно виконати для збільшення поверхні рідини на одиницю площі. У системі СІ величина α вимірюється в Дж/м².

Відпустимо рухоме ребро каркаса і дамо йому можливість повернутися у вихідний стан. Тоді молекули, що вийшли на поверхню, повернуться назад всередину рідини і внутрішні сили взаємодії виконають таку ж саму роботу $\Delta A = \alpha \Delta S$. Макроскопічно це проявиться у тому, що на вільне ребро каркаса діятиме по всій лінії його дотику з поверхнею рідини (довжиною $2l$) результуюча сила $F = \sum f_i$, яка називається *силою поверхневого натягу рідини*. Ця сила є дотичною до поверхні рідини і перпендикулярною до контуру, який обмежує поверхню рідини (мал. 6.3), тобто у випадку каркаса до лінії дотику поверхні рідини з будь-яким його ребром, у тому числі і з рухомим.

При переміщенні рухомого ребра каркаса на величину Δx ця сила поверхневого натягу виконає роботу

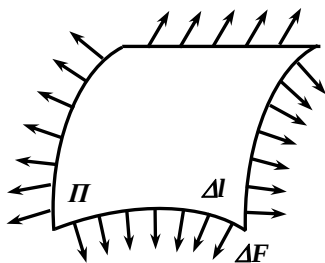
$$\Delta A = F \Delta x. \quad (6.22)$$

Порівнявши два вирази (6.20) і (6.22), знаходимо:

$$\alpha 2l \Delta x = F \Delta x \quad \text{або} \quad \alpha = \frac{F}{2l}, \quad (6.23)$$

де $\alpha = F$ при $2l = 1$.

Формула (6.23) дає інше визначення коефіцієнта поверхневого натягу: *коефіцієнт поверхневого натягу* чисельно дорівнює силі поверхневого натягу, яка діє на одиницю довжини контуру, що обмежує поверхню. У системі СІ він вимірюється в Н/м.



мал. 6.4

Виділимо уявно на поверхні рідини площадку, обмежену контуром Π (мал. 6.4). Молекули намагаються увійти всередину рідини з поверхні цієї площадки, а площадка намагається скоротитися. Оскільки плівка перебуває у рівновазі, то на неї зі сторони решти поверхні діють макроскопічні розтягуючі її сили так,

що до кожного елемента контуру Δl прикладена сила поверхневого натягу:

$$\Delta F = \alpha \Delta l. \quad (6.24)$$

Як було показано вище, сила $\Delta \vec{F}$ перпендикулярна до елемента контуру Δl і лежить у площині, дотичній до поверхні. З (6.20) випливає, що α є надлишковою потенціальною енергією одиниці площі поверхні рідини. При переході молекул з поверхні рідини всередину і навпаки змінюється і кінетична енергія їх хаотичного теплового руху. Відповідно, плівка, що швидко стискається, буде нагріватися, а плівка, що швидко розтягується, буде охолоджуватися. Тому співвідношення (6.21) і (6.23), строго кажучи, є справедливими лише при досить повільних ізотермічних процесів. Величина α , що входить у ці вирази, носить ще назву вільної енергії одиниці площі поверхні.

Якщо тиск газу або пари над вільною поверхнею рідини перевищує атмосферний мало, то такий газ можна вважати ідеальним газом і можна знехтувати його взаємодією з молекулами поверхневого шару рідини. Тому при низьких тисках поверхневий натяг рідини практично не залежить від тиску газу над рідиною.

Із збільшенням температури взаємодія між молекулами рідини дещо послаблюється, оскільки при збільшенні кінетичної енергії молекул рідина стає “рихлою” і середня віддаль між молекулами збільшується. Через це при збільшенні температури величина α повинна зменшуватися. У цьому ж напрямку повинно діяти і збільшення густини насиченої пари при збільшенні температури. При наближенні T до T_k властивості пари наближаються до властивостей рідини і умови взаємодії, у яких перебувають молекули поверхневого шару, практично перестають відрізнятися від умов всередині рідини.

Тому при $T = T_k$ у критичній точці, поверхневий натяг рідин α повинен дорівнювати нулю. Для більшості рідин поверхневий натяг зменшується із збільшенням температури практично за лінійним законом:

$$\alpha_t = \alpha_0(1 - a_t). \quad (6.25)$$

З (6.25) випливає, що $\alpha = 0$ при $t = 1/a$, відповідно, $1/a = t_k$ є критичною температурою даної рідини, і (6.25) можна записати так:

$$\alpha_t = \alpha_0(1 - t/t_k). \quad (6.26)$$

До цього часу ми виходили, у першому наближенні, з припущення, що будь-яка молекула взаємодіє лише зі своїми найближчими 12 сусідами. Строго кажучи, це, звичайно, не так. Молекули взаємодіють і на більших віддалях, але сили взаємодії швидко зменшуються. Як показує детальний аналіз цієї задачі, енергія взаємодії між двома молекулами зі збільшенням відстані r зменшується як $1/r^6$. А це означає, що з цією молекулою всередині рідини взаємодіє тільки відносно невелика кількість молекул. Тому повну енергію будь-якої молекули всередині рідини можна вважати практично незалежною від об'єму рідини.

Але якщо шар рідини досить тонкий, то енергія молекули уже буде залежати від його товщини. Ця обставина є особливо суттєвою при наявності у рідині розчинених іонів (дисоційованих іонних молекул типу NaCl тощо), взаємодія між якими зменшується значно повільніше, ніж за законом $1/r^6$.

На величину поверхневого натягу рідин суттєво впливають розчинені в ній, навіть у малих кількостях, домішки. Якщо енергія взаємодії молекули розчиненої речовини з молекулою розчинника $|U_{\min}^*|$ є меншою від енергії взаємодії молекул розчинника між собою $|U_{\min}|$, то при виході молекули на поверхню і витісненні нею однієї молекули розчинника з поверхні в об'єм рідини буде виділятися енергія:

$$\Delta W^* \approx 6|U_{\min}| - 6|U_{\min}^*| > 0. \quad (6.27)$$

Оскільки $\Delta W^* > 0$, то молекули розчиненої речовини будуть витіснятися на поверхню рідини і одночасно понижуватимуть поверхневий натяг розчину.

Такі речовини називаються поверхнево-активними речовинами відносно даної рідини. Найпростішими поверхнево-активними речовинами відносно води є спирти, жирні кислоти і їх солі (мило). У розплавлених металах подібними поверхнево-активними речовинами, які концентруються на поверхні розплаву, часто є легкоплавкі домішки.

6.2.1. Змочування

Якщо рідина перебуває у посудині, то, окрім вільної поверхні, існує ще границя розділу між рідиною і твердим тілом – стінками посудини. Молекули рідини, які дотикаються до стінок посудини, взаємодіють зі своїми близькими сусідами – молекулами як рідини, так і твердого тіла. Енергія такої взаємодії приблизно дорівнює

$$W^T \approx 6|U_{\min}^P| = 6|U_{\min}^T| > 0, \quad (6.28)$$

де $|U_{\min}^T|$ – енергія взаємодії молекули рідини з молекулою твердого тіла.

При переході такої молекули з пограничного шару в об'єм рідини буде виділятися енергія:

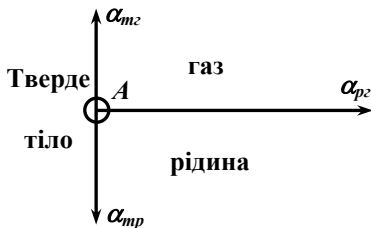
$$\Delta W = W^T - 12|U_{\min}^P| = 6(|U_{\min}^T| - |U_{\min}^P|). \quad (6.29)$$

Якщо молекула рідини сильніше взаємодіє з молекулами твердого тіла, ніж з молекулами цієї ж рідини, то

$$|U_{\min}^T| > |U_{\min}^P| \quad \text{і} \quad \Delta W > 0.$$

У цьому випадку рідина буде намагатися збільшити поверхню дотику з твердим тілом і розтечеться по ньому. Прийнято говорити, що у цьому випадку рідина змочує тверде тіло. Так, вода змочує обезжирене скло.

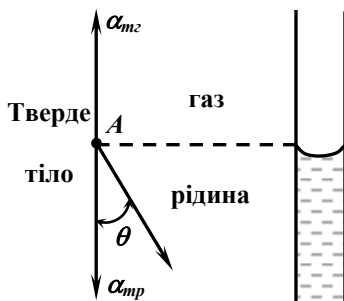
Розглянемо явище змочування детальніше. Завдяки поверхневому натягу горизонтальна поверхня рідини біля стінки посудини викривляється, утворюючи меніск. Для з'ясування причини утворення меніска розглянемо форму поверхні рідини на межі поділу трьох фаз: рідина – газ – тверда стінка. Частина рідини A (мал. 6.5) перебуває під дією трьох сил поверхневого натягу, які лежать у трьох напрямках



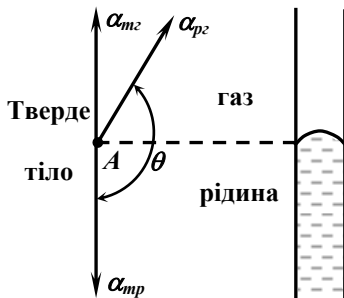
мал. 6.5

поділу: α_{mp} – між рідиною і стінкою, α_{mg} – між газом і стінкою, α_{pg} – між рідиною і газом.

Початковий напрямок цих сил показано на малюнку. Через те, що α_{mg} не дорівнює α_{mp} , то рідина біля A піднімається або опускається залежно від того, яка із зазначених двох сил більша. Якщо $\alpha_{mg} > \alpha_{mp}$, то поверхня поділу набере форми,



мал. 6.6



мал. 6.7

зображеної на мал. 6.6, і сила α_{pg} буде направлена по дотичній до поверхні рідини.

Вертикальна складова цієї сили дорівнює $\alpha_{pg} \cos \theta$. Умова рівноваги виразиться такою рівністю:

$$\alpha_{mg} = \alpha_{mp} + \alpha_{pg} \cos \theta. \quad (6.30)$$

У цьому випадку утворюється вгнутий меніск.

Якщо ж $\alpha_{mg} < \alpha_{mp}$ (мал. 6.6), то рідина біля стінки опускається, причому умова рівноваги виразиться рівністю:

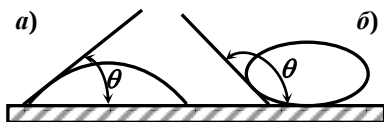
$$\alpha_{mg} + \alpha_{pg} \cos(180 - \theta) = \alpha_{mp} \quad \text{або} \\ \alpha_{mg} = \alpha_{mp} + \alpha_{pg} \cos \theta. \quad (6.31)$$

Як бачимо, умова рівноваги залишається тією ж самою, що й у першому випадку. У другому випадку утворюється опуклий меніск. В обидвох випадках:

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{mg} - \alpha_{mp}}{\alpha_{pg}}. \quad (6.32)$$

Кут θ називається крайовим кутом. При $\cos \theta > 0$ маємо вгнутий меніск, а при $\cos \theta < 0$ – опуклий. У першому випадку рідина змочує стінку, у другому – не змочує.

Як уже було сказано вище, якщо молекули рідини сильніше взаємодіють з молекулами твердого тіла, ніж між собою, то рідина розтікається поверхнею твердого тіла, і останнє змочується. А коли сила притягання між молекулами рідини і твердого тіла менша від сили взаємного притягання молекул рідини, то тверде тіло не змочується рідиною.



мал. 6.8

Якщо розглянути краплину води на чистій скляній пластині, то побачимо, що вона набуває форми, показаної на мал. 6.8 а (випадок змочування). Краплина ртуті на тій самій пластині набуде форми,



мал. 6.9



мал. 6.10

показаної на мал. 6.8 б (випадок незмочування). Буквою θ позначено крайовий кут.

Викладене залишається дійсним і у випадку, коли стикаються дві рідини, які не змішуються одна з одною. На поверхні води краплина олії розтікається, вкриваючи воду тонкою плівкою, що пояснюється малою величиною крайового кута (мал. 6.9).

Краплина води на поверхні олії, навпаки, залишається майже сферичною у зв'язку з тим, що крайовий кут дуже великий (мал. 6.10).

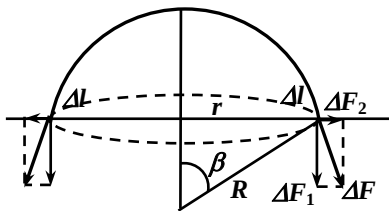
6.2.2. Формула Лапласа

Форма, якої набуває вільна поверхня рідини, залежить від сил поверхневого натягу, від взаємодії з оточуючими твердими стінками, а також від сили земного тяжіння, яка діє на рідину. Особливими виявляються умови рівноваги на лінії розділу рідина – газ – тверда стінка в тонких плівках і у вузьких посудинах – капілярах.

Явища, що спостерігаються у цих випадках, одержали загальну назву капілярних. Детальна теорія капілярних явищ була розроблена в XIX столітті головню у працях англійського фізика Т. Юнга, французького фізика П. Лапласа, німецького математика К. Гауса та російських учених А.Ю. Давидова і І.С. Громеки.

Капілярні явища, широко відомі в техніці і побуті, в основному зумовлені тим, що завдяки дії сил поверхневого натягу тиск всередині рідини може відрізнятися на деяку величину Δp від зовнішнього тиску p газу або пари над поверхнею рідини. Розглянемо це детальніше.

Нехай вільною поверхнею рідини є сфера радіусом R (мал. 6.11). Відітнемо уявною довільною площиною від цієї сфери кульовий сегмент, як показано на мал. 6.11. Зовнішня поверхня цього сегмента обмежена від всієї поверхні рідини колом, радіус якого $r = R \sin \beta$. На



мал. 6.11

кожен нескінченно малий елемент довжини цього контуру Δl діє сила поверхневого натягу:

$$\Delta F = \alpha \Delta l, \quad (6.33)$$

направлена по дотичній до поверхні сфери, тобто під тим самим кутом β до площини перерізу.

Розкладемо цю силу на дві складові:

$$\Delta F_1 = \Delta F \sin \beta \quad \text{і} \quad \Delta F_2 = \Delta F \cos \beta, \quad (6.34)$$

які розміщені, відповідно, перпендикулярно і в площині перерізу. Геометрична сума сил ΔF_2 дорівнює нулю, оскільки ці сили на протилежних сторонах контура направлені у протилежні сторони і взаємно зрівноважуються. Тому рівнодійна всіх сил поверхневого натягу F , що діють на вибраний сегмент, буде направлена перпендикулярно до площини перерізу всередину рідини і дорівнює алгебраїчній сумі складових ΔF_1 :

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \beta = \sum \alpha \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\alpha r}{R} \sum \Delta l = \frac{\alpha 2\pi r^2}{R}, \quad (6.35)$$

де $\sum \Delta l = 2\pi r$.

Ця сила F буде притискувати сегмент до частини рідини, що лежить під ним, по всій поверхні, що їх розділяє $S = \pi r^2$. Тоді додатковий тиск, створений силами поверхневого натягу всередині рідини, дорівнює

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{\alpha 2\pi r^2}{\pi r^2 R} = \frac{2\alpha}{R}. \quad (6.36)$$

Плоску поверхню рідини можна розглядати як граничний випадок сфери безмежно великого радіуса $R = \infty$. У цьому випадку, відповідно до (6.36) $\Delta p = \frac{2\alpha}{\infty} = 0$. Для плоскої поверхні сили поверхневого натягу напрямлені вздовж поверхні і не створюють додаткового тиску: тиск всередині рідини дорівнює зовнішньому тиску.

У випадку вгнутої поверхні рідини, наприклад, якщо всередині рідини перебуває бульбашка газу, радіусом R , то тиск всередині рідини під вгнутою поверхнею менший, ніж в газі (всередині бульбашки) на величину

$$\Delta p = -\frac{2\alpha}{R}. \quad (6.37)$$

Якщо радіус кривизни R направлений всередину рідини (випукла поверхня), то вважають $R > 0$; якщо ж радіус кривизни направлений назовні (поверхня вгнута), то вважають $R < 0$. Тоді можна записати єдину формулу для додаткового тиску під сферичною поверхнею рідини:

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}. \quad (6.38)$$

Рівняння (6.38) називається *формулою Лапласа*.

У загальному випадку довільної поверхні двоякої кривизни, кривизна у двох взаємно перпендикулярних перерізах поверхні може бути різною (з радіусами кривизни R_1 і R_2). Для цього випадку формулу Лапласа можна узагальнити:

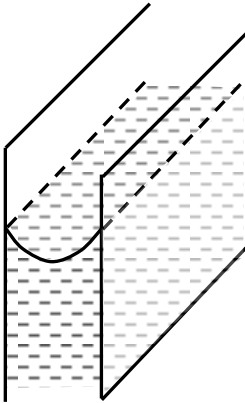
$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (6.39)$$

Якщо $R_1 = R_2 = R$, то формула (6.39) переходить у формулу (6.38).

Якщо шар рідини перебуває між двома близькими паралельними пластинками, то поверхня рідини набуває форми кругового циліндра з деяким радіусом R (мал. 6.12). У цьому випадку $R_1 = R$, а $R_2 = \infty$, оскільки в перпендикулярному перерізі кривизна дорівнює нулю. Таким чином, формула Лапласа запишеться так:

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\alpha}{R}, \quad (6.40)$$

і тиск під кривою поверхнею буде вдвічі меншим, ніж під сферичною поверхнею такого ж радіуса.



мал. 6.12

6.2.3. Капілярні явища

При опусканні у посудину з рідиною вузької трубки, стінки якої змочуються рідиною, рідина у цій трубці підніметься на певну висоту. Вище було сказано, що у випадку вгнутого меніска рідини тиск над рідиною буде меншим, ніж над плоскою поверхнею, на величину, що визначається формулою Лапласа:

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Відомо, що поверхня рідини у трубці набирає форми півкулі, а тому $R_1 = R_2 = R$ і $\Delta p = \frac{2\alpha}{R}$. Таким чином, рідина підніматиметься трубкою доти, доки цей тиск не зрівноважиться гідростатичним тиском стовпчика рідини заввишки h (мал. 6.13):

$$\frac{2\alpha}{R} = \rho g h, \quad (6.41)$$

де ρ – густина рідини, g – прискорення вільного падіння.

З рівняння (6.41) висота підняття рідини:

$$h = \frac{2\alpha}{Rg\rho}. \quad (6.42)$$

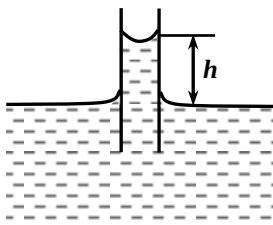
Для знаходження залежності між радіусом кривизни меніска R і радіусом трубки r використаємо мал. 6.14, з якого видно, що

$$r = R \cos \theta \quad \text{або} \quad R = \frac{r}{\cos \theta}. \quad (6.43)$$

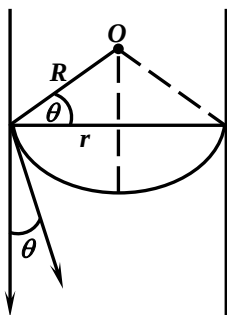
Підставивши (6.43) у (6.42), одержимо:

$$h = \frac{2\alpha \cos \theta}{\rho g r}. \quad (6.44)$$

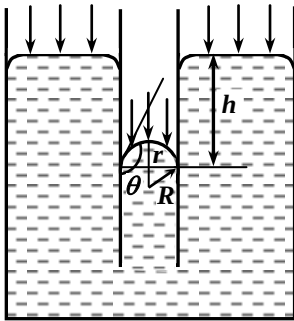
Розглянемо також приклад, коли круглий капіляр радіусом r занурюють у велику посудину з рідиною, яка не змочує стінки капіляра. При цьому всередині



мал. 6.13



мал. 6.14



мал. 6.15

капіляра утвориться опуклий меніск і під дією додаткового тиску Δp рідина у капілярі опуститься на деяку висоту нижче від рівня рідини у широкій посудині (мал. 6.15).

У широкій посудині завдяки силі тяжіння поверхня рідини є плоскою. У вузькій трубці, навпаки, можна знехтувати дією сили тяжіння порівняно із силами поверхневого натягу і поверхню рідини вважати сферичною (опуклий меніск) деякого радіуса R . З мал. 6.15 видно, що

$$R = \frac{r}{|\cos \theta|}. \quad (6.45)$$

де $\cos(180 - \theta) = -\cos \theta$.

На рівні поверхні рідини тиск у капілярі дорівнює $p + \Delta p = p + \frac{2\alpha}{R}$, де p – зовнішній тиск у газі. За законом сполучених посудин він повинен дорівнювати повному тиску на цьому ж рівні у широкій посудині $p + \rho gh$, де ρgh – гідростатичний тиск стовпа рідини густиною ρ на глибині h . Прирівнюючи тиски, одержуємо:

$$p + \frac{2\alpha}{R} = p + \rho gh, \quad (6.46)$$

звідки

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g R} = \frac{2|\cos \theta|}{\rho g r}. \quad (6.47)$$

У випадку повного змочування $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, радіус меніска R дорівнює радіусу капіляра r і висота підняття рідини дорівнює

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}. \quad (6.48)$$

З (6.48) випливає, що висота підняття або опускання рівня рідини у капілярі обернено пропорційна до його радіуса. Для води при звичайних умовах ($\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\alpha = 0,071 \text{ Н/м}$) у капілярі діаметром $d = 2r = 1 \text{ мм} = 10^{-6} \text{ м}$ рівень піднімається на висоту:

$$h = \frac{2 \cdot 0,071}{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = 30 \text{ м.}$$

Капілярні явища відіграють велику роль у природі, техніці, сільському господарстві, у побуті та наукових дослідженнях. Якщо між фундаментом і стінами будинку не прокласти шар гідроізоляції, то волога з ґрунту буде підніматися капілярними каналами цегли і викличе сирість усього будинку. Якщо діаметри обох колін ртутного манометра є неоднакові і при цьому одне з них капіляр, то ртуть в них перебуватиме на неоднаковому рівні, що призведе до помилок при вимірюванні тиску.

6.3. Найпростіші методи визначення коефіцієнта поверхневого натягу

Розглянемо деякі найпростіші методи вимірювання коефіцієнта поверхневого натягу.

1. Метод спостереження капілярного піднімання.

З формули $h = \frac{2\alpha}{\rho g R}$ знаходимо, що $\alpha = \frac{h \rho g R}{2}$. Припускаючи, що

змочування повне, тобто $\cos\theta = 1$ і $R = r$, де r – радіус капіляра, і вимірявши останній (оптичним методом, за допомогою мікроскопа), а також висоту капілярного піднімання рідини, знайдемо коефіцієнт поверхневого натягу α .

2. Метод зважування краплини.



мал. 6.16

Рідина, набрана у піпетку з вузьким кінцем (мал. 6.16), витікає поступово, неначе наповнюючи собою мішечок з рідкої плівки, який утворюється на кінці піпетки. Незабаром тут утворюється перехват – “шийка”, що звужуючись, перетворюється у тонку нитку; нарешті краплина відривається і падає. Перед моментом падіння краплина втримується силою поверхневого натягу плівки, яка протидіє силі тяжіння доти, доки вага краплини не стане більшою. Звідси маємо співвідношення:

$$2\pi\alpha = mg,$$

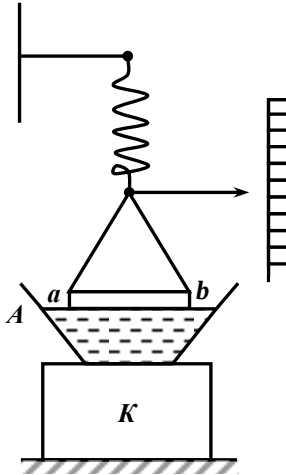
де r – радіус шийки в момент відриву краплини, m – маса краплини. Звідси знаходимо:

$$\alpha = \frac{mg}{2\pi r}.$$

Щоб визначити масу краплини, відраховуємо певну кількість краплин (якомога більше для точнішого визначення маси однієї краплини), що впали у склянку. Зібрану таким способом рідину зважують і поділивши масу всіх краплин на їх кількість, знаходять масу однієї краплини m . Наближено можна вважати, що радіус шийки краплі дорівнює внутрішньому радіусу кінця піпетки.

3. Метод відриву кільця.

До пружинних терезів підвішують кільце ab (мал. 6.17), розташоване у горизонтальній площині. Під кільцем на підйимальному столику K встановлюють посудину A з досліджуваною рідиною, яку піднімають доти, доки кільце не зіткнеться з поверхнею рідини.



мал. 6.17

Потім столик (або рідину) повільно опускають; кільце при цьому стикається з рідиною, внаслідок чого пружина розтягується. Настає момент, коли пружна сила зрівноважує силу поверхневого натягу. Подальше опускання столика спричиняє відрив кільця. Слід запам'ятати у цей момент показ пружинних терезів. А сила поверхневого натягу дорівнюватиме $2 \cdot 2\pi r \alpha$, де r – радіус кільця. Множник 2 перед $2\pi r \alpha$ беремо через те, що розриваються дві плівки, внутрішня і зовнішня. Отже, маємо $F = 4\pi r \alpha$, звідки

$$\alpha = \frac{F}{4\pi r}.$$

6.4. Явища переносу. В'язкість рідин

При хаотичному тепловому русі, як показано вище, молекули рідини перестрибують з одних тимчасових положень рівноваги в сусідні.

На відміну від газу, довжина вільного пробігу при подібних перескоках має порядок діаметра молекул і практично не залежить від зовнішнього тиску та температури. Переходячи з одного місця в інше, молекули дифундують всередині рідини. Це явище одержало назву самодифузії.

Потік з молекул, які дифундують через одиницю площі за одиницю часу, як і при дифузії у газі, визначається рівнянням:

$$\mathbf{j} = -D \frac{dn}{dx}, \quad (6.49)$$

де n – концентрація дифундуючих молекул, $\frac{dn}{dx}$ – градієнт цієї концентрації, D – коефіцієнт дифузії.

Цим самим рівнянням (6.49) описується і дифузія домішкових молекул та іонів, розчинених у рідині. Чим вища температура, тим менша кількість коливань здійснює молекула у положенні рівноваги до свого перескоку й тим інтенсивніший процес дифузії та більша величина коефіцієнта D . Але коефіцієнти дифузії у рідинах мають порядок $10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$, тобто на кілька порядків менші, ніж у газах.

Перенесення імпульсу між шарами рідини, які рухаються з різними швидкостями, також описуються формально такими ж рівняннями, як і в газах. Сила тертя, що виникає між сусідніми шарами, дорівнює

$$\frac{F}{S} = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (6.50)$$

де S – площа шарів, що стикаються, $\frac{dv}{dx}$ – градієнт швидкості руху рідин, η – коефіцієнт внутрішнього тертя або в'язкість рідини.

У газах перенесення імпульсу здійснюється при переході молекул з одного шару до іншого. Завдяки однаковому механізму дифузії і внутрішнього тертя коефіцієнти D і η у газі прямопропорційні один до одного:

$$D_e \sim \eta_e. \quad (6.51)$$

У рідині механізм внутрішнього тертя відрізняється від механізму дифузії. Оскільки молекули рідини тривалий час перебувають біля положень рівноваги, то рухома маса рідини захоплює сусідні шари в основному за рахунок сил зчеплення. Із збільшенням температури текучість рідини збільшується, а в'язкість зменшується. Тому, як встановив Я.І. Френкель, в'язкість рідини обернено пропорційна до коефіцієнта дифузії:

$$\eta_p \sim \frac{1}{D_p}. \quad (6.52)$$

При нагріванні рідина “розрихлюється” і збільшується її вільний об'єм $V - b$ (де b – стала у рівнянні Ван дер Ваальса, що визначає недоступну для молекул частину повного об'єму V системи). Враховуючи це, А.І. Бачинський запропонував дуже просту формулу, яка описує залежність в'язкості рідини від температури:

$$\eta_p = \frac{B}{V - b}, \quad (6.53)$$

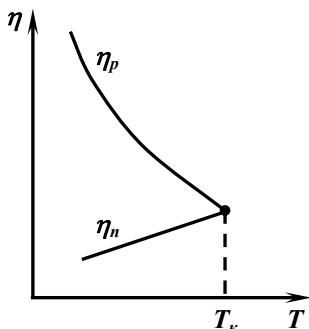
де B – константа, різна для різних рідин.

Формула Бачинського добре узгоджується з дослідженнями, але не показує явної залежності η_p від температури. Я.І. Френкель вивів формулу, яка безпосередньо пов'язує η_p з температурою T :

$$\eta_p = \text{const} \cdot e^{\frac{W}{kT}}. \quad (6.54)$$

Тут W – енергія, яку потрібно надати молекулі рідини, щоб вона могла перестрибнути з одного положення рівноваги в інше. Величина W за звичай має порядок $(2 \div 3) \cdot 10^{-20}$ Дж. Тому згідно з (6.54), при нагріванні рідини, наприклад, на 10°C її в'язкість зменшується на 20-30%.

Із збільшенням температури в'язкість рідини швидко зменшується, а в'язкість пари повільно збільшується, і при критичній температурі T_k вони стають однаковими (мал. 6.18).



мал. 6.18

При пониженні температури в'язкість більшості рідин швидко збільшується. Але з цього правила є виняток. П.А. Капіца встановив, що при наближенні температури до абсолютного нуля гелій не тільки не збільшує своєї в'язкості, але й переходить у надтекучий стан, що характеризується повною відсутністю в'язкості.

6.5. Рідкі кристали

Багато речовин можуть перебувати у своєрідному фазовому стані, який одержав назву рідкокристалічного стану. За своїми механічними властивостями властивості речовин у цьому стані близькі до звичайних рідин: вони течуть і мають більшу чи меншу рухливість.

Водночас у рідких кристалах спостерігається анізотропія, яка легко виявляється в їх оптичних властивостях.

Розрізняють два основних типи рідких кристалів: нематичні і смектичні. У рідких кристалах нематичного типу при спостереженні під мікроскопом видно тонкі рухомі нитки. Звідси походить назва цих кристалів: грецьке слово “нема” означає нитка.

Смектичні рідкі кристали були виявлені вперше у милоподібних речовин і звідси одержали свою назву: грецьке слово “смегма” означає мило.

Часто речовина, що утворює рідкий кристал, має полікристалічну структуру. Вона складається з великої кількості маленьких “кристаликів”, точніше краплин, різним чином орієнтованих одна відносно одної.

Рідкі кристали утворюють фазу речовини, проміжну між ізотропною рідкою фазою і звичайною кристалічною фазою. Область існування рідкокристалічного стану з боку низьких температур обмежена фазовим переходом кристал – рідкий кристал, з боку високих температур – переходом рідкий кристал – рідина. Іноді

речовина може існувати у двох або більше рідкокристалічних модифікаціях.

Переходи з однієї рідкокристалічної фази в іншу, а також з кристалічної або ізотропної рідкої фази у рідкий кристал відбуваються при певних температурах і тиску та супроводжуються виділенням або поглинанням тепла.

Здатність речовин переходити у рідкокристалічний стан спричинена особливостями будови їх молекул, часто це досить великі молекули, які мають видовжену форму, тобто подібні до паличок. Перехід у рідкокристалічний стан з рідкого полягає у тому, що молекули в межах об'єму невеликого “кристалика” одержують певну взаємну орієнтацію.

У нематичних рідких кристалах порядок в орієнтації молекул характеризується тим, що поздовжні осі всіх молекул встановлюються паралельно. Упорядкована орієнтація молекул зумовлює анізотропію речовини у рідкокристалічному стані.

У смектичних рідких кристалах молекули розміщені шарами, причому самі шари досить рухливі. Поздовжні осі молекул орієнтуються перпендикулярно до поверхні шарів.

Рідкі кристали дуже чутливі до зміни зовнішніх умов: деякі їх властивості різко змінюються при порівняно незначних змінах температури, електричного поля, а також під дією світла. На цьому і ґрунтується практичне використання рідких кристалів.

Як виявилось в останні роки, рідкі кристали відіграють важливу роль у процесах обміну у живому організмі.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке кипіння? Чим воно відрізняється від випаровування?
2. Чому потенціальна енергія молекули пари дорівнює нулю? Чому дорівнює потенціальна енергія молекули всередині рідини?
3. Як обчислити роботу, яку потрібно виконати для випаровування одного моля рідини?
4. Що називають прихованою теплотою випаровування рідини? Як вона залежить від температури?

5. Запишіть умову, при якій рідина кипить.
6. Виведіть рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Що визначає це рівняння?
7. Яку енергію має молекула, що перебуває у поверхневому шарі рідини?
8. Як обчислити роботу, яку потрібно виконати, щоб молекула перейшла з об'єму рідини на поверхню?
9. Що називають коефіцієнтом поверхневого натягу? Який його фізичний зміст?
10. Який напрямок мають сили поверхневого натягу?
11. Як залежить коефіцієнт поверхневого натягу від температури? Чому існує така залежність?
12. Як залежить коефіцієнт поверхневого натягу від домішок? Чому домішки змінюють коефіцієнт поверхневого натягу чистої рідини?
13. Яка причина змочування рідиною твердого тіла?
14. Що таке крайовий кут? Виведіть формулу залежності крайового кута від коефіцієнтів поверхневого натягу на границі тверде тіло – рідина – газ.
15. Виведіть формулу Лапласа. Поясніть її.
16. Що таке капілярність? Коли рідина піднімається у капілярі, а коли опускається?
17. Від чого залежить висота піднімання (опускання) рідини у капілярі?
18. У чому полягає фізична суть методу визначення коефіцієнта поверхневого натягу шляхом зважування краплин?
19. Як знайти коефіцієнт поверхневого натягу методом відриву кільця?
20. Як знайти коефіцієнт поверхневого натягу методом капілярного піднімання?
21. Чим зумовлені явища переносу у рідинах?
22. Чи однакова поведінка коефіцієнта в'язкості газів і рідин? Як пояснюється така поведінка?

7. ТВЕРДІ ТІЛА

7.1. Кристалічний стан речовини

7.1.1. Кристалічний стан речовини

За єдиним винятком (гелій) усі речовини при доволі низьких температурах переходять у твердий стан. Це означає, що коли швидкості теплових рухів частинок стають малими, сили взаємодії між ними так обмежують переміщення атомів, що тіло набуває здатності зберігати свою форму і відновлювати її після припинення дії на нього зовнішньої сили.

Здатність твердих тіл зберігати форму є їх головною зовнішньою відмінністю від рідких і газоподібних речовин.

Тверді тіла мають багато інших властивостей, які відрізняють їх від рідких тіл, що у багатьох відношеннях є глибшими, ніж ті, що відрізняють рідини від газів.

Існують речовини, які за ознакою збереження форми слід віднести до твердих тіл, але які за всіма іншими ознаками не відрізняються від рідин. Такі речовини називаються *аморфними*. До них належить скло, різні смоли, пластмаси. Вони поводять себе як рідини з аномально великою в'язкістю, внаслідок якої вони при звичайних або низьких температурах не можуть текти. Проте при високих температурах вони набувають притаманної для рідин здатності текти.

У твердих тілах перехід у рідкий стан відбувається стрибком при цілком певній для даної речовини температурі – температурі плавлення. Ця та інші особливості твердого стану вказують на певні внутрішні особливості у будові твердих тіл, яких немає у рідин та аморфних тіл.

Термодинамічно стан твердого тіла, як і рідин та газів, визначається параметрами стану: об'ємом, тиском та температурою.

Для ідеального газу рівняння, яке пов'язує ці три параметри, було виведене досить точно. Для реальних газів і рідин точне рівняння стану вже не могли вивести через складність врахування сил взаємодії

між частинками. Тому доводиться використовувати наближене рівняння Ван дер Ваальса.

У випадку твердих тіл завдання ще важче, і у явному вигляді записати для них рівняння стану не можна. Для твердих тіл не можна скласти такого універсального рівняння, яке пов'язувало б параметри p , V , T і могло б дати для їх опису те, що дає, наприклад, рівняння Клапейрона-Менделєєва для ідеального газу.

Можна вважати доведеним, що властивості твердих тіл зумовлені переважно тим, що атоми (або інші частинки) розміщені не хаотично, як у рідинах чи газах, а у характерному для кожної речовини порядку, і при цьому у твердому тілі таке впорядковане розміщення атомів поширюється на весь об'єм тіла (так званий *дальній порядок*).

Такі тіла з правильним розміщенням частинок називаються *кристалічними*. Тільки їх слід вважати твердими тілами.

Доведено, що в аморфних тілах і рідинах упорядковане розміщення частинок поширюється лише на сусідні атоми (так званий *ближній порядок*).

Причиною переходу атомів до впорядкованого розміщення при утворенні твердого тіла є сили взаємодії між ними. Оскільки кристал при охолодженні утворюється сам собою, то атоми розміщуються у кристалі так, щоб їх потенціальна енергія у полі сил взаємодії була мінімальною. В іншому випадку вони не будуть у рівновазі. Звідси можна зробити висновок, що між атомами повинні діяти одночасно сили притягання і відштовхування, при цьому їх величина залежить від міжатомних відстаней.

Конфігурація атомів у кристалі та їх взаємні відстані у нормальних умовах повинні бути такими, щоб сили притягання і відштовхування дорівнювали одна одній.

На мал. 5.1 показані криві залежності сили відштовхування F_1 і сили притягання F_2 від відстані між атомами. Ці криві несиметричні: сили відштовхування при збільшенні відстані зменшуються набагато швидше, ніж сили притягання. Завдяки цьому сумарна сила при

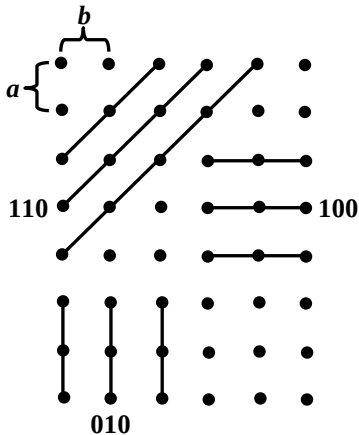
відстанях між атомами, більших від деякого r_0 , є силою притягання, а при менших – силою відштовхування.

При відстані, яка дорівнює r_0 , сумарна сила дорівнює нулю. Це і є положення рівноваги атома. У цьому положенні його потенціальна енергія найменша.

7.1.2. Основні характеристики кристалів

Одним з важливих наслідків правильного порядку у розміщенні атомів є відмінність властивостей кристалу у різних напрямках. Таку відмінність властивостей називають *анізотропією*.

При правильному розташуванні атоми неминуче розміщуються з різною густиною вздовж різних напрямків.



мал. 7.1

На мал. 7.1 показано схему розміщення атомів у кристалі. При цьому слід уявити собі, що таким самим способом атоми розміщуються і за площиною рисунка, утворюючи просторову ґратку, у вузлах якої є атоми.

Якщо провести через вузли ґратки площини у різних напрямках, то побачимо, що густина розташування атомів на цих площинах різна. Цим, переважно, пояснюється анізотропія кристалів.

Анізотропія проявляється, наприклад, у тому, що коли кристал утворюється у таких умовах, що жодні зовнішні дії не впливають на його ріст, то він набуває певної форми з характерною для цієї речовини огранкою.

Кристал буває обмежений плоскими гранями, що утворюють між собою кути, властиві лише певному виду кристалів. Ці грані є саме тими площинами, у яких частинки розміщені з найбільшою густиною, оскільки при рості кристалу саме до цих площин, а не до інших, переважно приєднуються нові атоми.

Зрозуміло, що у найщільніше заповнених площинах атоми найбільше зв'язані між собою, оскільки взаємні відстані між ними відносно малі.

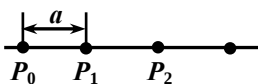
З іншого боку бачимо, що щільно заповнені площини більш віддалені одна від одної, ніж площини, заселеність яких менша. Отже, атоми у площинах, що щільно заповнені, міцно зв'язані один з одним, але сила взаємодії між такими площинами невелика і вони порівняно легко відокремлюються одна від одної. Тому кристал розколюється по деяких певних площинах, так званих площинах спайності.

Кристал кам'яної солі розколюється на куски, що мають форму прямокутних паралелепіпедів. Можна вважати, що площини зламу кристалів (площини спайності) – це саме ті площини, які містять найбільшу кількість атомів. Існування площин спайності – одна з характерних особливостей кристалів.

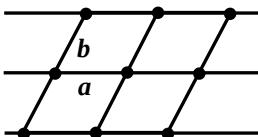
7.1.2.1. Геометрія кристалічної ґратки

Характерною особливістю кристалу, як було показано вище, є геометрично правильне розташування складових його частин (атомів, молекул, іонів). Отже, *кристал має неперервну періодичну структуру*. З геометричного погляду таке розміщення частинок, що періодично повторюється, можна здійснити за допомогою операції паралельного перенесення, яка називається *трансляцією*.

Уявімо собі (мал. 7.2), що ми переміщуємо деяку точку P_0 (центр ваги частинки) вздовж прямої на відстань a у положення P_1 ; потім на таку ж саму відстань – у положення P_2 і т.д.



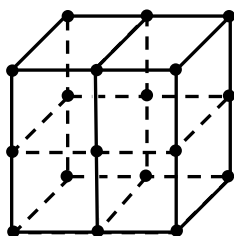
мал. 7.2



мал. 7.3

За допомогою трансляції $\vec{a}$ ми отримаємо ряд точок або одновимірний ланцюжок точок. Трансляцію $\vec{a}$ можна подати вектором, що має певний напрямок і числове значення, яке дорівнює a і називається періодом трансляції.

Якщо застосувати до точки P_0 одночасно дії двох операцій трансляції $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то отримаємо *плоску сітку* (мал. 7.3).



мал. 7.4

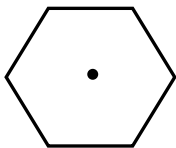
Нарешті, якщо точка P_0 знає одночасно трьох різних трансляцій $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, то отримаємо так звану *просторову ґратку* (мал. 7.4). Паралелепіпед, утворений векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, називається *елементарною коміркою*.

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – це *міжатомні відстані* у кристалічній ґратці. Їх числове значення порядку 10^{-10} м.

7.1.2.2. Симетрія кристалів. Елементи симетрії

Завдяки правильному періодичному розміщенню атомів кристал має певну симетрію. Поняття симетрії дуже звичне у щоденному житті (тіло людини, рослини, куля тощо).

Якщо уявно провести площину вздовж нашого тіла через його середину і уявити собі цю площину такою, що дзеркально відбиває з обох боків, то будь-яка точка однієї половини тіла, коли вона відбивається від цієї площини, співпадає з відповідною точкою другої половини тіла. Прийнято говорити, що елементом симетрії тіла людини є площина симетрії.



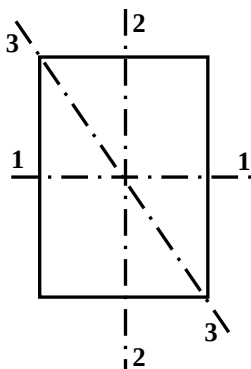
мал. 7.5

Симетричною є і фігура, показана на мал. 7.5. Симетрія її полягає у тому, що фігура співпадає сама з собою при повороті її навколо осі, що проходить через центр перпендикулярно до площини рисунка, на 60° . Ця вісь називається *віссю симетрії* фігури і є її елементом симетрії.

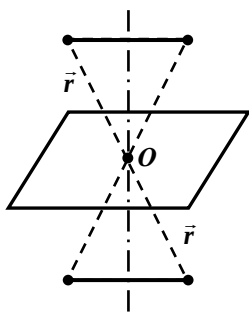
Ту чи іншу симетрію кристала зручно подавати як сукупність окремих елементів симетрії. Для кристалу як цілого таких елементів симетрії є чотири. Вони мають такі назви: *вісь симетрії*, *площина симетрії*, *центр симетрії*, *дзеркально-поворотна вісь симетрії*.

Вісь симетрії. Якщо кристал має вісь симетрії, то він може суміщатися сам з собою, повертаючись на деякий кут навколо цієї осі. Залежно від симетрії кристалу величина кута повороту, потрібного для суміщення його самим з собою, може становити 360, 180, 120, 90 і 60

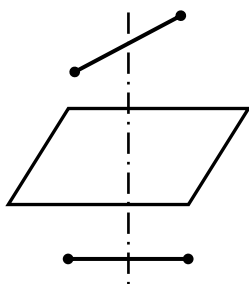
градусів (тобто $\frac{2\pi}{n}$, де $n = 1, 2, 3, 4$ або 6). Відповідно до цього, вісь симетрії називають віссю першого, другого, третього, четвертого або шостого порядку.



мал. 7.6



мал. 7.7



мал. 7.8

Площина симетрії. Якщо одна половина кристалу суміщається з другою при відбиванні у деякій площині як у дзеркалі, то така площина є елементом симетрії кристалу і називається площиною симетрії.

Для фігури, показаної на мал. 7.6, такими елементами симетрії є площини 1–1 та 2–2. Площина 3–3, яка також ділить цю фігуру навпіл, не є площиною симетрії, оскільки відбивання у цій площині не суміщає одну половину фігури з іншою.

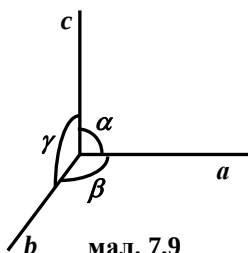
Центр симетрії. Якщо у кристалі є точка, яка має таку властивість, що при заміні радіус-вектора $\vec{r}$ будь-якої з частинок, які утворюють кристал, проведеного з цієї точки, на протилежний йому вектор $-\vec{r}$, кристал переходить у стан, що не відрізняється від вихідного, то ця точка, яку називають центром симетрії (або центром інверсії), є елементом симетрії кристалу (мал. 7.7).

Поворотно-дзеркальна вісь. До цього елемента симетрії приводить одночасне застосування двох операцій – повороту навколо осі і дзеркального відображення у площині, перпендикулярній до осі (мал. 7.8). Це означає, що кристал має поворотно-дзеркальну вісь симетрії, якщо його можна сумістити з самим собою, повернувши на деякий кут навколо осі і відобразивши у площині, перпендикулярній до цієї осі. Якщо кут повороту дорівнює $\frac{2\pi}{n}$, то n визначає порядок поворотно-дзеркальної осі.

7.1.2.3. Класи симетрії

Перелічені елементи симетрії у різних кристалах можуть комбінуватися по різному. Тобто різні кристали можуть мати декілька елементів симетрії. Чим більшу кількість елементів симетрії має дане тіло, тим воно симетричніше. Куля, що має безліч осей симетрії, площин симетрії, центрів симетрії, є найсиметричнішою фігурою. Детальне вивчення показує, що є тільки 32 можливі комбінації елементів симетрії. Кожна з таких можливих комбінацій елементів симетрії називається класом симетрії.

У природі можуть існувати лише кристали, які належать до одного з 32 класів симетрії, що було підтверджено на досліді.



У кристалографії об'єднують зазначені 32 класи симетрії у 7 систем симетрії (або сингоній), які мають такі назви в порядку зростання симетрії (мал. 7.9):

- триклінна, що об'єднує два класи симетрії:

$$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma;$$

- моноклінна, у яку входять два класи симетрії:

$$a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ; \beta \neq 90^\circ;$$

- ромбічна (об'єднує три класи симетрії):

$$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ;$$

- тригональна (об'єднує сім класів симетрії):

$$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ;$$

- гексагональна (об'єднує п'ять класів симетрії):

$$a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ;$$

- тетрагональна (об'єднує сім класів симетрії):

$$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ;$$

- кубічна (об'єднує п'ять класів симетрії):

$$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

7.1.2.4. Ґратки Браве

Повернемося до будови кристалічної ґратки. Для неї трансляція є основним елементом симетрії. Будь-яку кристалічну ґратку можна

подати у вигляді правильно укладених паралелепіпедів – елементарних комірок. Усі елементарні комірки, які утворюють ґратку, однакові за формою та об'ємом і у кожній з них є однакова кількість атомів.

У всіх вершинах елементарних комірок містяться однакові атоми, тому всі ці вершини еквівалентні одна одній і є вузлами ґратки.

Кожен з цих вузлів можна сумістити з будь-яким іншим за допомогою паралельного перенесення на один з періодів ґратки. Сукупність еквівалентних вузлів ґратки, які можуть бути поєднані один з одним лише за допомогою паралельного перенесення (трансляції), утворює так звану *трансляційну ґратку кристалу* або *ґратку Браве*.

Отже, ґратка Браве є паралелепіпедом, побудованим за допомогою паралельного перенесення якого-небудь з вузлів у трьох напрямках. За такі напрямки (координатні осі) вибирають напрямки, які паралельні до осей симетрії кристалу або перпендикулярні до його площин симетрії.

У кристалографії ці напрямки вибирають як кристалографічні осі.

У паралелепіпедах, побудованих за таким принципом, еквівалентні вузли (атомы) можуть розміщуватися не лише у вершинах, а й у центрі граней, у центрі діагональної площини. У першому випадку ґратка Браве називається *гранецентрованою*, а в другому – *об'ємноцентрованою* (мал. 7.10).



мал. 7.10

Співвідношення довжин ребер a , b , c ґратки Браве і кути між ними можуть бути різними. При цьому постає питання, скільки може бути різних типів ґраток Браве. Можна показати, що *є тільки 14 різних типів ґраток Браве*. Оскільки за координатні осі, на яких будують ці елементарні паралелепіпеди, вибрано кристалографічні осі кристалу,

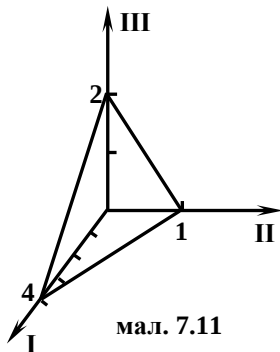
то кожному з ґраток Браве можна віднести до однієї з семи зазначених вище систем, які мають такі назви: триклінна, моноклінна, гранецентрована моноклінна, проста ромбічна, ромбічна з центрованою основою, ромбічна об'ємноцентрована, ромбічна гранецентрована, гексагональна, ромбоєдрична, тетрагональна проста, тетрагональна об'ємноцентрована, кубічна проста, кубічна об'ємноцентрована, кубічна гранецентрована.

7.1.2.5. Символічні позначення площин і напрямків у кристалі

Анізотропія кристалу вимагає виділяти і певним способом позначати різні площини та напрямки у кристалі. Для цього використовують систему координат, яка пов'язана з кристалом так, що координатні осі проводять паралельно до осей симетрії або перпендикулярно до площин симетрії, а початок координат співпадає з одним з вузлів ґратки. Координати у такій системі вимірюють в одиницях, які дорівнюють міжatomним відстаням у даному напрямку (ці відстані називаються сталими ґратки або параметрами ґратки).

Положення і орієнтація довільної площини однозначно визначаються координатами будь-яких трьох точок цієї площини, наприклад, тих, у яких вона перетинається з трьома осями координат (мал. 7.11).

Якщо площина перетинає вісь **I** у точці на відстані в 4 одиниці, вісь **II** на відстані в 1 одиницю та вісь **III** на відстані в 2 одиниці, то положення площини визначається трьома числами: 4, 1 та 2. Але для позначення площин у кристалі використовують не ці числа, а

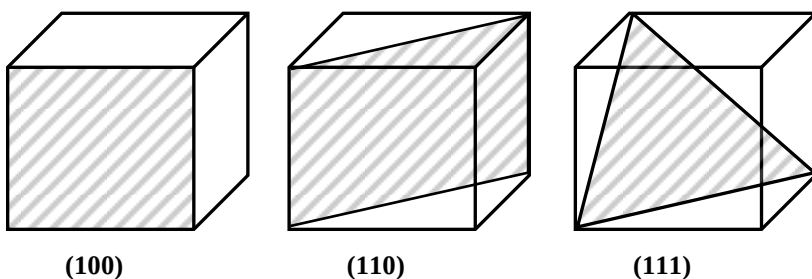


особливі *індекси Міллера*, які визначаються так: знаходять координати трьох точок перетину площини з координатними осями (в одиницях сталих ґратки). Обернені значення знайдених чисел зводять до спільного знаменника і знаменник відкидають. Чисельники дробів і є індексами Міллера. Для розглянутої площини оберненими значеннями

знайдених чисел 4, 1, 2 є $\frac{1}{4}$, 1, $\frac{1}{2}$.

Їх спільний знаменник дорівнює 4, тобто маємо: $\frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{2}{4}$. Отже, індекси Міллера: 1 4 2. Ці числа беруть у круглі дужки і записують так: (1 4 2). Такий вибір індексів визначає не одну площину, а всю сім'ю паралельних площин. Буквами індекси Міллера позначають через ***h, k, l***.

Якщо площина паралельна до однієї з осей координат, тобто перетинає її в нескінченності, то відповідний індекс Міллера дорівнює нулю (мал. 7.12).



мал. 7.12

Напрями у кристалі також задаються індексами, які визначаються так: уздовж напрямку, який визначають, вибирають деякий вектор довільної довжини і знаходять величини складових цього вектора по осях координат в одиницях сталої ґратки. Тоді індексами цього напрямку будуть найменші цілі числа, відношення яких між собою дорівнюють відношенню складових вектора.

Наприклад, якщо компоненти вектора дорівнюють відповідно 6, 4 та 8 одиниць, то індексами напрямку, що відповідає цьому вектору, будуть 3, 2 та 4. Ці числа беруть у квадратні дужки: [3 2 4]. Буквами індекси напрямків позначають через ***u, v*** та ***w***.

Напрямок, який визначається цим набором індексів [***u v w***], іноді (а для кубічного кристалу завжди) є перпендикулярним до площини з таким самим набором індексів (***h k l***).

7.1.3. Іонні, ковалентні, молекулярні та металічні кристали

Залежно від природи частинок, які утворюють кристали, і від характеру сил, які діють між частинками, можливі чотири типи кристалічних структур: іонні, атомні (ковалентні), металічні й молекулярні.

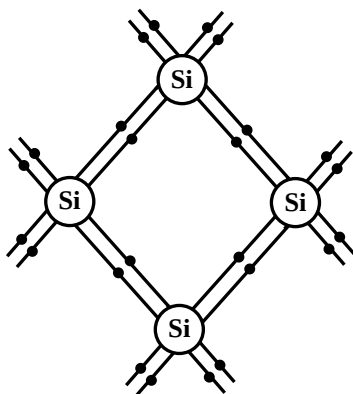
Іонні кристали. У кристалів цього типу у вузлах кристалічної ґратки є іони різних знаків. Сили взаємодії між ними мають електричну природу (кулонівські сили), змінюються вони обернено пропорційно до квадрата відстані. Зв'язок такого роду називається гетерополярним або іонним.

Ґратка кухонної солі (NaCl) належить до простої кубічної системи (додатньо заряджені іони натрію, від'ємно заряджені іони хлору). Кристали багатьох речовин, які у хімії називаються солями, є іонними кристалами. Такі кристали “утримуються” силами притягання між різнойменно зарядженими іонами. Температура плавлення іонних кристалів доволі часто висока (NaCl: 800°C; KCl: 790°C).

Атомні кристали. У вузлах кристалічної ґратки атомного кристалу розміщуються нейтральні атоми. Кристали цього типу утворюються за рахунок ковалентних (гомеополярних) зв'язків між атомами (мал. 7.13).

Ковалентний зв'язок характерний не тільки для атомних кристалів, але й для ряду двохатомних сполук (H_2 , O_2 , N_2 , ...).

Такий зв'язок породжується колективізацією електронів: по одному від кожного атома. Між двома атомами, які колективізували свої зовнішні валентні електрони, виникає дуже сильне взаємне електричне притягання. Ковалентний зв'язок має направлений характер. Такий зв'язок може здійснюватися однією, двома, трьома і чотирма парами електронів, що відповідає валентності атомів. Так, у кристалах алмазу, кремнію, германію усі чотири валентні



мал. 7.13

електрони атомів беруть участь у створенні ковалентного зв'язку.

Чотири валентних електрони кожного атома кремнію колективізовані з електронами чотирьох ближніх атомів кремнію (по одному електрону від кожного атома на один зв'язок) (мал. 7.13).

Таке усуспільнення електронів приводить до заповнення валентних оболонок атомів (кількість електронів оболонки дорівнює 8).

Ковалентний зв'язок дуже сильний, про що свідчить висока твердість і висока температура плавлення таких речовин, як алмаз і кремній.

У графіті ковалентний зв'язок реалізується тільки в його шарах, де атоми вуглецю мають три близьких сусідів. Між атомами різних шарів діють сили Ван дер Ваальса, значно слабші, ніж обмінні сили, породжені колективізацією електронів.

Перехід графіту в алмаз відбувається при температурах, вищих за 1700°C та дуже високих тисках (до 10^{10} Па).

Металічні кристали. Ці кристали містять у вузлах кристалічної ґратки додатні іони, у просторі між якими рухаються вільні електрони. Зв'язок у таких кристалах здійснюють вільні електрони, які належать усій системі в цілому. Очевидно, така ґратка розпалась би під впливом сил відштовхування іонів, якщо б електрони, колективізовані при утворенні кристалу, не перебували між вузлами ґратки.

Вільні електрони переміщуються по об'єму кристалу, ніби не зауважуючи іонів, які знаходяться у вузлах кристалічної ґратки. Цим пояснюється висока електропровідність металів.

Молекулярні кристали. У вузлах ґраток таких кристалів розміщуються певним чином орієнтовані молекули. Силами зв'язку у цьому випадку виступають міжмолекулярні сили Ван дер Ваальса.

Молекулярні кристали можуть утворювати одноатомні молекули інертних газів, неполярні двоатомні молекули, такі як, H_2 , N_2 , O_2 , Cl_2 , ..., багатоатомні молекули парафінів та інших органічних сполук.

Кристали, які складаються з неполярних молекул, зазвичай мають малу міцність та низьку температуру плавлення. Молекули багатьох речовин мають постійний дипольний електричний момент (полярні

молекули). Кристали, які складаються з полярних молекул, завдяки значнішим силам взаємодії є міцнішими.

Частинки однієї і тієї ж речовини можуть утворювати різні за своїми властивостями кристалічні структури. Лід, наприклад, залежно від температури і тиску може існувати більше, ніж в п'яти різних кристалічних модифікаціях.

7.2. Дефекти у кристалах

7.2.1. Монокристали та полікристали

Здавна відомо, що деякі тверді тіла трапляються у природі у вигляді кристалів – тіл, грані яких є правильними багатокутниками.

Форма цих багатокутників залежить від умов утворення кристалу, але найхарактернішою властивістю кристалу є сталість кутів між його ребрами та відповідно між гранями. Так, кристал кухонної солі може мати форму куба, паралелепіпеда або призми, а також тіла довільної конфігурації. Але завжди в його вершині є три ребра, які утворюють між собою прями кути.

Великий одиничний кристал, який має більш-менш правильну форму, називається *монокристалом* (від грецького *monos* – один).

Характерною особливістю монокристалу є його анізотропія, тобто різні фізичні властивості у різних напрямках.

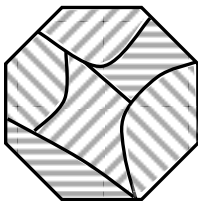
Анізотропія механічних властивостей монокристалу проявляється насамперед у тому, що його міцність у різних напрямках різна. Якщо, наприклад, виготовити з деякого монокристалу кулю, а потім ударом розбити її, то вона розколеться на шматки, грані яких утворюють кути, властиві для даної речовини. А це й означає, що міцність монокристалу у цих напрямках мінімальна.

Різною є і пружність монокристалу у різних напрямках. А оскільки швидкість звуку залежить від пружних властивостей речовини та її густини, то, як показує дослід, швидкість поширення звуку у монокристалах у різних напрямках різна.

Анізотропія теплових властивостей монокристалів проявляється у тому, що коефіцієнти лінійного розширення і теплопровідності мають різні значення у різних напрямках.

З розплавів металів можна одержати монокристали, якщо прийняти спеціальні міри. Якщо просто охолодити, наприклад, розплавлене залізо, то одержане тверде тіло не проявлятиме анізотропії. Причину

цього можна встановити, якщо добре відполіровану і протравлену його поверхню розглянути під мікроскопом.



мал. 7.14

Виявляється (мал. 7.14), що речовина складається з окремих зерен розмірами порядку $10^3 - 10^4 \text{ \AA}$. Кожне таке зерно – це кристал, який прийняв неправильну форму, оскільки його росту перешкоджали сусідні кристалики. Така зерниста структура, що утворилася при звичайному охолодженні, називається *полікристалічною* (полікристалом) (від грецького *poly* – багато).

Оскільки кристалографічні осі всіх зерен орієнтовані хаотично, їх анізотропія на великих відстанях не може проявлятися. Через це *полікристал є ізотропним*: його властивості в середньому в усіх напрямках однакові.

Велика кількість твердих тіл, що трапляються у природі – каміння, пісок, метали, солі – мають полікристалічну структуру. Виникнення великих монокристалів є виключним явищем, яке має місце при особливо сприятливих умовах.

7.2.2. Дефекти у кристалах

У реальних кристалах не можна спостерігати такого бездоганного порядку і такої періодичності у розміщенні атомів, про які говорилося вище.

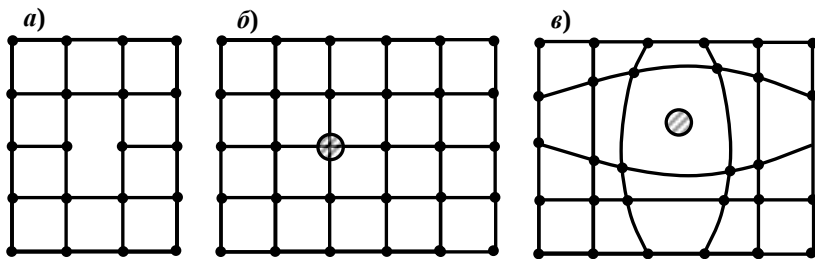
Насамперед слід зазначити, що хоча й атоми у кристалічній ґратці перебувають у тих місцях, які відповідають їх рівновазі, це не означає, що вони перебувають у стані спокою. Атоми у твердому тілі, як і в рідині та газі, перебувають у безперервному тепловому русі, енергія якого визначається температурою тіла.

Ці рухи мають характер малих коливань навколо положень рівноваги, які є вузлами ґратки. Навіть якщо б кристал мав ідеально правильну будову, теплові рухи атомів самі собою порушували б точну періодичність ґратки. Адже в кожен момент деяка частина атомів перебуває у положенні крайнього відхилення від положення рівноваги, інша – у положенні, близькому до середнього, ще інша – в певному проміжному положенні і т.д., а це призводить до порушення

періодичності ґратки. Тільки при абсолютному нулі температури кристал був би вільний від таких порушень періодичності, був би цілком упорядкованим.

У реальних кристалічних ґратках існують відхилення від цього ідеального розміщення атомів, про яке вже говорилось вище. Усі такі відхилення називають *дефектами кристалічної ґратки*. Їх можна розділити на *макроскопічні* та *мікроскопічні*. До макроскопічних дефектів належать тріщини, порожнини, чужі макроскопічні включення тощо.

Найпростішими мікроскопічними дефектами є *точкові дефекти*. До них належать відсутність атома у будь-якому вузлі (вакансія) (мал. 7.15, а), заміщення “свого атома” ґратки іншим “чужим” атомом (мал. 7.15, б), розміщення свого або чужого атома у міжвузловому просторі (міжвузловий атом) (мал. 7.15, в).



мал. 7.15

Точкові дефекти (вакансії і міжвузлові атоми) можуть виникати у результаті теплових флуктуацій. Такі дефекти називаються *термодинамічно рівноважними*. Вони такі ж неминучі, як і броунівський рух або будь-які флуктуації.

При нагріванні кристалу концентрація вакансій і міжвузлових атомів зростає за експоненціальним законом. Перший вид дефектів ще називають *дефектами типу Шотткі*, а другий – *дефектами за Френкелем*.

Енергія точкових дефектів значно більша від енергії теплових коливань ґратки. Наприклад, для міді енергія вакансії $E_v \approx 1 \text{ eV}$, енергія міжвузлового атома $E_M \approx 3 \text{ eV}$, у той час, як енергія теплових коливань

kT навіть біля температури плавлення (1085°C) становить всього $0,12\text{ eB}$. Тому рівноважна концентрація точкових дефектів, як правило, невелика. Так, для міді біля температури плавлення рівноважна концентрація вакансій і міжвузлових атомів, якщо її оцінити за формулою Больцмана, буде:

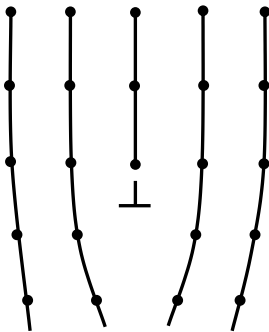
$$C_e \approx \exp\left(-\frac{E_e}{kT}\right) \sim 10^{-4}, \quad C_M \approx \exp\left(-\frac{E_M}{kT}\right) \sim 10^{-4}.$$

Але в кристалах у результаті загартування, опромінення нейтронами і т.д. концентрація точкових дефектів часто буває набагато вища від рівноважної.

Окрім точкових дефектів, у кристалах спостерігаються *лінійні дефекти*, які одержали назву дислокацій. *Дислокації* – це специфічні лінійні дефекти кристалічної ґратки, які порушують правильне чергування атомних площин.

На відміну від точкових дефектів, які порушують ближній порядок, дислокації порушують дальній порядок у кристалі, відповідно порушуючи всю його структуру. Тому дислокації відіграють дуже важливу роль у механічних властивостях твердих тіл. *Розрізняють два головних типи дислокацій: крайові та гвинтові* (мал. 7.16, 7.17).

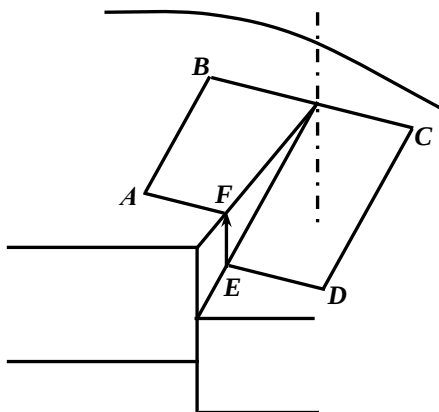
Крайова дислокація характеризується зайвою кристалічною площиною, яка вставлена між двома сусідніми шарами атомів. Лінією дислокації у цьому випадку є пряма, яка перпендикулярна до площини рисунка і позначена на ньому значком $\perp$. Зайвий шар атомів розміщений над цим значком. Крайова дислокація може існувати



мал. 7.16

протягом десятків і сотень міжатомних відстаней.

Гвинтову дислокацію можна наочно уявити, зробивши “розріз” ґратки по півплощині і змістивши частини ґратки назустріч одна одній на один період паралельно до краю розрізу (мал. 7.17). Цей край називається лінією гвинтової дислокації і зображений на малюнку пунктиром.



мал. 7.17

Для визначення виду дислокації використовують *метод Бюргерса*. Назвемо контуром Бюргерса контур, складений з основних векторів трансляції ґратки так, щоб він замикався в ідеальному кристалі.

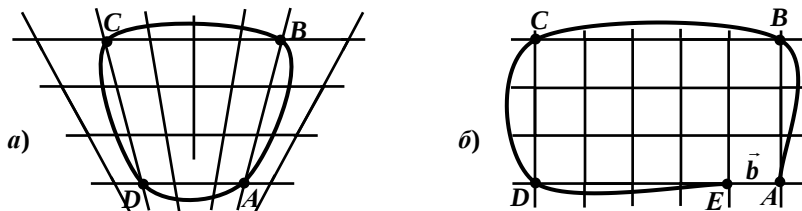
У дефектному кристалі при обході навколо лінії дислокації контур Бюргерса виявиться розімкнутим. Вектор, який з'єднує кінцеву точку контура Бюргерса з початковою,

називається вектором Бюргерса (вектор $\vec{EF}$, мал. 7.17).

У випадку крайової дислокації вектор Бюргерса перпендикулярний до лінії дислокації (мал. 7.18, вектор $\vec{b}$), а у випадку гвинтової дислокації паралельний до лінії дислокації (мал. 7.16, вектор $\vec{EF}$).

Дислокації і їх рух можна спостерігати за допомогою електронного мікроскопа. Інший метод ґрунтується на травленні кристалу спеціальним травником. У місцях виходу дислокацій на поверхню кристалу руйнування його відбувається інтенсивніше. Завдяки цьому виникають ямки травлення, які роблять дислокації видимими.

Для характеристики кількості дислокацій у тілі визначають їх густину. Густиною дислокацій називається кількість дислокаційних ліній, які перетинають одиничну площадку, уявно проведену у тілі. Ця кількість змінюється приблизно від $10^2 - 10^3 \text{ см}^{-2}$ у найдосконаліших чистих кристалах до $10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-2}$ у сильно деформованих металах.



мал. 7.18

7.2.2.1. Вплив дислокацій на міцність кристалів

Розглянемо вплив дислокацій на міцність кристалів на розрив.

Теоретичні оцінки міцності показують, що ця величина для кристалів може досягти $\sim 10^4 \text{ Н/мм}^2$. Насправді ж, у багатьох випадках одержане експериментальне значення міцності приблизно в 1000 разів менше. Це неспівпадіння пояснюють тим, що теорія не враховувала наявності дефектів у реальних кристалах.

Доведено, що на міцність кристалів насамперед впливають мікроскопічні поверхневі та об'ємні тріщини, які в них є.

Один з механізмів впливу тріщин полягає у тому, що напруга в межах тріщин розподіляється нерівномірно. Вона максимальна біля країв тріщин і може в багато разів переважати середню напругу в кристалі.

А.Ф. Йоффе (1880 – 1960) експериментально встановив, що при зануренні кристалів кухонної солі у воду їх міцність зростає від 5 Н/мм^2 до 1600 Н/мм^2 , тобто до величини, близької до теоретичної. Він пояснив цей результат розчиненням у воді поверхневого шару кристалу і ліквідацією у ньому мікротріщин та інших дефектів.

Існують і інші причини зниження міцності кристалів на розрив. Як показав П. Ребіндер (1898 – 1972), на міцність матеріалів великий вплив здійснюють поверхнево-активні речовини, які адсорбуються на поверхні тіл і понижують при цьому їх поверхневу енергію. Вважають, що частинки адсорбованих речовин розширюють зародкові тріщини, проникаючи при цьому у глибину тіла та сильно зменшуючи його міцність.

Вплив дефектів на міцність матеріалів яскраво проявляється при розгляді так званого “масштабного фактору”, тобто залежності середньої міцності зразка даного матеріалу від його розміру.

Для тонких ниток ця залежність є дуже яскравою. Наприклад, міцність скляних ниток з діаметром 22; 16; 12,5; 8 і 2 мкм відповідно дорівнює 220; 1000; 1400; 2000; 5500 Н/мм^2 . При зменшенні діаметра від 22 до 2,5 мкм міцність ниток збільшується у 25 разів. Це пояснюється тим, що ймовірність зустрічі “небезпечного дефекту” (наприклад, тріщини), який призводить до розриву зразка, для тонких ниток менша, ніж для товстих.

Міцність матеріалу збільшується у результаті зменшення інтенсивності процесів зародження тріщин, а також у результаті створення перешкод для їх поширення у тілі. Тому найміцніші матеріали можуть бути одержані двома протилежними способами. Один з них полягає в одержанні бездефектних (ниткоподібних) кристалів, де відсутні джерела внутрішніх напруг, на яких можуть зароджуватися тріщини.

Інший шлях, навпаки, полягає у максимальному спотворенні правильної структури кристалу, що утруднює поширення у тілі тріщин і пластичних деформацій (легкування, наклеп – сильне пластичне деформування кристалічної ґратки при холодній обробці металів, загартування).

7.2.2.2. Адсорбція. Ефект Ребіндера

Усі міркування і розрахунки, які приводять до висновку про наявність у рідинах надлишку енергії у поверхневому шарі, справедливі і для твердих тіл – як аморфних, так і кристалічних. Через анізотропію кристалів їх поверхнева енергія і поверхневий натяг є різними на різних гранях монокристалу.

Уже згадувалося, що при відсутності зовнішніх сил форма рідини цілком визначається силами поверхневого натягу і вільна рідина набирає форму кулі. У кристалах цього не відбувається завдяки їх малій текучості. Але звідси зовсім не випливає, що сили поверхневого натягу не відіграють в них жодної ролі. Встановлено, що вони суттєво впливають на такі механічні властивості кристалів, як міцність і твердість.

Деякі речовини, які називаються поверхнево-активними, легко концентруються на поверхні іншої речовини, утворюючи на ній дуже тонкий шар, найчастіше мономолекулярний, тобто шар товщиною в одну молекулу. Таке явище називається адсорбцією. Наприклад, на поверхні води добре адсорбується бутиловий спирт, на поверхні цинку – ртуть і олово.

Встановлено, що адсорбція супроводжується різким зменшенням поверхневої енергії, а отже, і зменшенням поверхневого натягу. Наприклад, якщо в одній літрі ртуті розчинити 0,48 г цезію, то

поверхневий натяг ртуті зменшиться від 0,47 Н/м до 0,228 Н/м, тобто більше, ніж вдвічі. А концентрація цезію у ртуті становить всього $3,5 \cdot 10^{-3} \%$.

Досліджено, що при адсорбції поверхнево-активних рідин на поверхні твердих тіл їх механічні властивості різко змінюються, зокрема, суттєво зменшується їх міцність. Про це свідчить такий дослід. Цинк при кімнатних температурах дуже пластичний, тому цинкову пластинку товщиною 2-3 мм легко можна зігнути під прямим кутом і при цьому вона не ламається. Якщо ж цю пластину перед згином почистити від окислів і нанести на її поверхню краплину ртуті масою навіть кілька міліграм, то характер деформації суттєво зміниться. З-під краплі ртуті побіжить тонка тріщина і пластинка розпадеться на два куски.

В інженерній практиці відомі випадки, коли міцність конструкцій значно зменшувалася, якщо ці конструкції працювали не у повітрі, а в інших середовищах.

У 1928 році академік П. Ребіндер висунув ідею, що зміна міцності твердих тіл при їх взаємодії з поверхнево-активними речовинами зумовлена зменшенням поверхневого натягу.

Дефекти кристалу типу дислокацій, границі зерен і мікротріщин мають надлишкову поверхневу енергію. Оскільки при адсорбції поверхнево-активних речовин поверхневий натяг зменшується, то відповідно зростає поверхня цих дефектів так, що повна енергія поверхневого шару, що дорівнює добутку поверхневої енергії на площу поверхні, залишається сталою. Збільшення поверхні дефектів, природно, зменшує міцність тіла.

Явище полегшення деформації і руйнування твердих тіл у результаті зменшення поверхневої енергії цих тіл при адсорбції ними поверхнево-активних речовин називається ефектом Ребіндера.

Цей ефект широко застосовується:

- при обробці металів різанням із застосуванням поверхнево-активних речовин як додаток до мастильно-охолоджувальних рідин, що значно збільшує швидкість різання;
- при видобутку нафти: нафтові свердловини мають глибину у декілька кілометрів і проходять через дуже міцні породи. Щоб

полегшити роботу долота, у свердловину закачують розчин поверхнево-активних речовин. При цьому процес буріння помітно полегшується.

У зв'язку з використанням у реакторах рідких металів як теплоносіїв виникла потреба зміни міцності металів у присутності розплавів інших металів. Аналогічні проблеми мають місце і в ракетній техніці.

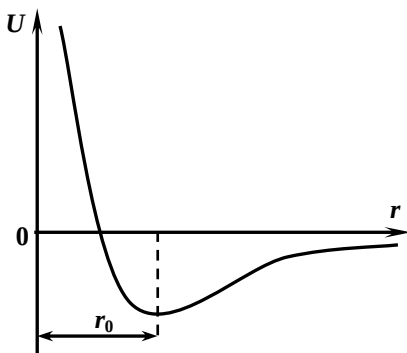
Звернемо увагу на те, що поверхнева енергія – це енергія, яка припадає на одиницю площі (про що було сказано вище), тобто коефіцієнт поверхневого натягу: $\alpha = \frac{E_{\text{повна}}}{\Delta S}$, $E_{\text{повна}} = \alpha \Delta S$ – повна енергія.

7.3. Теплові властивості твердих тіл

7.3.1. Тепловий рух у кристалах

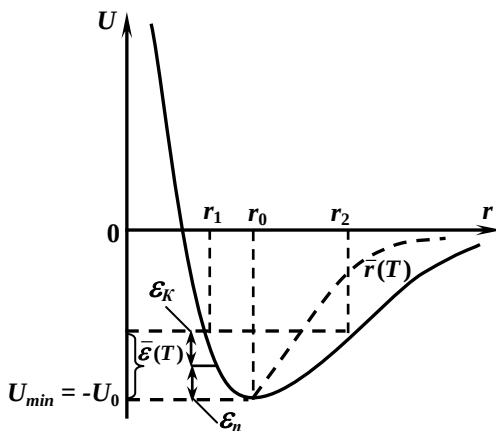
Вузли кристалічної ґратки визначають середні положення частинок. Самі ж частинки (іони, атоми, молекули) неперервно коливаються біля цих середніх положень. Інтенсивність коливань залежить від температури: із збільшенням температури вона зростає.

Характер сил взаємодії між частинками дуже залежить від відстані між ними. Сили притягання, які переважають на великих відстанях, переходять у сили відштовхування, що швидко зростають із зменшенням відстані між частинками (при $r < r_0$). Отже, взаємодія між



мал. 7.19

частинками будь-якого виду у кристалі може бути представлена потенціальною кривою, яка зображена на мал. 7.19. Крива несиметрична відносно мінімуму. З цієї причини тільки дуже малі коливання біля положення рівноваги будуть мати гармонічний характер. Із збільшенням амплітуди коливань (із збільшенням температури) все сильніше буде проявлятися ангармонічність.



мал. 7.20

При деякому значенні $r = r_0$ сили притягання і відштовхування зрівноважують одна одну, а потенціальна енергія взаємодії у цьому положенні рівноваги має мінімум $U_{min} = -U_0$ (мал. 7.20). При абсолютному нулі температури атоми твердого тіла повинні перебувати у цих певних положеннях рівноваги при $r = r_0$, а з підвищенням температури

починати здійснювати коливання біля цих положень рівноваги.

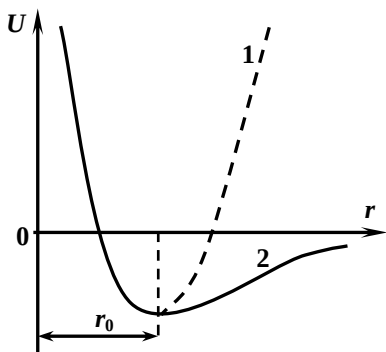
Якщо позначити середню енергію цього коливального руху вздовж r через $\bar{\mathcal{E}}(T)$ і відкласти її на графіку вгору від значення U_{min} , то рівень повної енергії $U_{min} + \bar{\mathcal{E}}(T)$ перетне криву потенціальної енергії $U(r)$ у двох крайніх точках r_1 і r_2 , між якими коливається взаємна відстань між атомами. На графіку показано, як при проміжних положеннях $r_1 < r < r_2$, відбувається неперервний перехід кінетичної енергії коливального руху $\mathcal{E}_k$ у потенціальну $\mathcal{E}_n$ і навпаки.

7.3.2. Теплове розширення твердих тіл

Відомо, що тверде тіло при нагріванні збільшує свій об'єм. Це – теплове розширення.

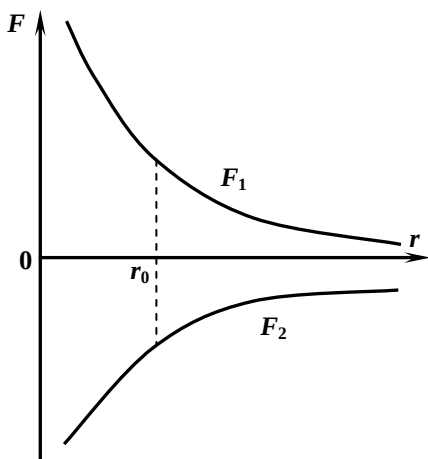
Зрозуміло, що збільшення об'єму кристалу зумовлене збільшенням середньої відстані між атомами. Отже, підвищення температури збільшує середню відстань між атомами кристалу $\bar{r}(T)$ (мал. 7.20).

Підвищення температури кристалу означає збільшення енергії теплового руху, тобто теплових коливань атомів у ґратці, а отже, і зростання амплітуди цих коливань. Але збільшення амплітуди коливань атомів не завжди призводить до збільшення середньої відстані між ними. Якщо б коливання атомів були строго гармонічними,



мал. 7.21

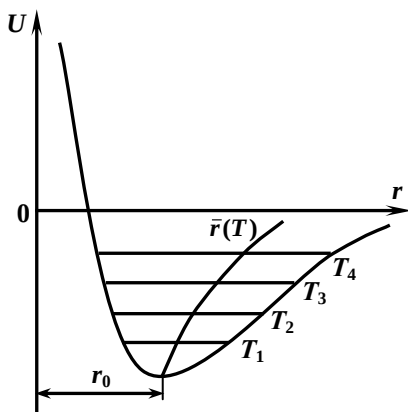
то через те, що при цьому кожен атом, коливаючись, настільки наближається до одного зі своїх сусідів, наскільки віддаляється від іншого, збільшення амплітуди їх коливань не призводило б до зміни середньої міжатомної відстані (мал. 7.21, крива 1). Але у кристалічній ґратці відбуваються ангармонічні коливання атомів. Це зумовлено характером залежності сил взаємодії між атомами від відстані між ними ($F \neq kx$, а $F = kx + b$). Як уже було сказано, при великих відстанях між атомами сили їх взаємодії проявляються як сили притягання, а при зменшенні відстані стають силами відштовхування, які швидко збільшуються із зменшенням відстані. Це призводить до того, що при збільшенні амплітуди коливань (при збільшенні температури кристалу) збільшення сил відштовхування F_1 між атомами переважає над збільшенням сил притягання F_2 (мал. 7.22).



мал. 7.22

Інакше кажучи, атому легше віддалитися від сусіда, ніж наблизитися до іншого. Це призводить до збільшення середньої відстані між атомами, тобто до збільшення об'єму тіла (мал. 7.23). Отже, причиною теплового розширення твердих тіл є ангармонічність коливань атомів у кристалічній ґратці.

Кількісно теплове розширення характеризується коефіцієнтом лінійного й об'ємного розширення. Коефіцієнт лінійного розширення визначають зі співвідношення:



мал. 7.23

$$\alpha = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}. \quad (7.1)$$

Він дорівнює відносній зміні довжини при зміні температури на один градус.

Аналогічно визначається коефіцієнт об'ємного розширення:

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}, \quad (7.2)$$

тобто коефіцієнт β дорівнює відносній зміні об'єму при зміні температури на один градус.

З формул (7.1) та (7.2) випливає, що довжина l_T і об'єм V_T при деякій температурі T , яка відрізняється від початкової на ΔT градусів, виражаються формулами:

$$l_T = l_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (7.3)$$

$$V_T = V_0(1 + \beta \Delta T), \quad (7.4)$$

де l_0 і V_0 – початкові довжина і об'єм тіла.

Внаслідок анізотропії кристалів коефіцієнт лінійного розширення α має різні значення у різних напрямках. Це означає, що коли з даного кристалу виготовити кулю, то після її нагрівання вона втратить свою сферичну форму.

Коефіцієнти теплового розширення по трьох осях, які пов'язані з кристалографічними осями кристалу, називають головними коефіцієнтами розширення кристалу. Якщо їх позначити відповідно через α_1 , α_2 та α_3 , то коефіцієнт об'ємного розширення кристалу:

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \quad (7.5)$$

Для кристалів з кубічною симетрією, як і для ізотропних тіл,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad (7.6)$$

$$\beta \approx 3\alpha. \quad (7.7)$$

Коефіцієнти лінійного й об'ємного розширення практично залишаються сталими, якщо інтервали температур малі, а самі температури високі.

А взагалі коефіцієнти теплового розширення залежать від температури і при цьому, як і теплоємність, тобто при низьких температурах коефіцієнти α та β зменшуються з пониженням температури пропорційно до куба температури, прямуючи до нуля при абсолютному нулі.

Теплоємність і теплове розширення пов'язані з коливаннями ґратки. Теплоємність визначає кількість теплоти, необхідної для збільшення середньої енергії теплових коливань атомів, яка залежить від амплітуди коливань, а коефіцієнт теплового розширення безпосередньо пов'язаний із середніми відстанями між атомами.

Звідси випливає важливий закон, відкритий Грюнайzenом: *відношення коефіцієнта теплового розширення до атомної теплоємності твердого тіла для даної речовини є величина стала, тобто не залежить від температури ($\alpha/C = \text{const}$).*

Коефіцієнти теплового розширення твердих тіл дуже малі (інтервал температур $0^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C}$), (1/K):

Алюміній –	$26 \cdot 10^{-6}$	Дюралюміній –	$22,6 \cdot 10^{-6}$
Срібло –	$19 \cdot 10^{-6}$	Молібден –	$5 \cdot 10^{-6}$
Кремній –	$7 \cdot 10^{-6}$	Фосфор –	$124 \cdot 10^{-6}$
Залізо –	$12 \cdot 10^{-6}$	Мідь –	$17 \cdot 10^{-6}$
Вольфрам –	$4 \cdot 10^{-6}$	Цинк –	$28 \cdot 10^{-6}$
Натрій –	$80 \cdot 10^{-6}$	Кварц –	$0,5 \cdot 10^{-6}$
Латунь –	$19 \cdot 10^{-6}$	Інвар (сплав нікелю і заліза) –	$1,0 \cdot 10^{-6}$

7.3.3. Теплопровідність

Якщо у твердому тілі є різниця температур між різними його частинами, то подібно до того, як це відбувається у газах і рідинах, тепло переноситься від більш нагрітої до менш нагрітої частини.

На відміну від рідин і газів, у твердому тілі не може виникнути конвекція, тобто переміщення маси речовини разом з теплом. Тому тепло у твердому тілі переноситься лише теплопровідністю.

Механізм перенесення тепла у твердому тілі впливає з характеру теплових рухів у ньому. Тверде тіло є сукупністю атомів, що здійснюють коливання. Але ці коливання залежать одне від одного.

Коливання можуть передаватися (зі швидкістю звуку) від одних атомів до інших. При цьому утворюється хвиля, яка і переносить енергію цих коливань.

Кількість перенесення тепла у твердому тілі описується так само, як і в газі. Якщо через одиницю площі за одиницю часу вздовж певного напрямку (перпендикулярно до площини) переноситься кількість теплоти q , то вона пов'язана з різницею температур співвідношенням:

$$q = -k \frac{dT}{dx}, \quad (7.8)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури у напрямку x .

А кількість теплоти, яка переноситься через площадку ΔS за час Δt у напрямку x , перпендикулярному до площадки ΔS , обчислюється за формулою:

$$Q = -k \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (7.9)$$

Величину коефіцієнта теплопровідності k твердого тіла не можна обчислити так, як це роблять для газу – системи простішої, яка складається з частинок, що не взаємодіють між собою.

Наближено коефіцієнт теплопровідності твердого тіла можна обчислити за допомогою квантових уявлень.

Квантова теорія дає змогу порівняти коливання, які поширюються у твердому тілі з швидкістю звуку, з деякими фіктивними частинками – фононами. Енергія одного фонона $E = h\nu$, де ν – частота коливань, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.

Якщо використовувати уявлення про фонони, то можна вважати, що теплові рухи у твердому тілі зумовлені саме ними. Вважається, що при абсолютному нулі температури фононів немає, а при підвищенні температури їх кількість зростає, але не лінійно, а за складнішим законом (при низьких температурах пропорційно до T^3).

Тверде тіло можна тепер розглядати як посудину, що заповнена газом з фононів – газом, який при не дуже високих температурах можна вважати ідеальним.

Як і у випадку звичайного газу, тепло у фононному газі переноситься за рахунок зіткнення фононів з атомами ґратки. Тоді всі

міркування, які були використані при обчисленні коефіцієнта теплопровідності ідеальних газів, справедливі й тут:

$$k = \frac{1}{3} \rho C_V \bar{\lambda} \bar{v}, \quad (7.10)$$

де ρ – густина тіла, C_V – його питома теплоємність, $\bar{v}$ – швидкість звуку у ньому.

Трохи складніше обчислити довжину вільного пробігу фононів $\bar{\lambda}$. Оцінка показує, що ця величина обернено пропорційна до абсолютної температури. Тому і коефіцієнт теплопровідності обернено пропорційний до температури:

$$k = \frac{a}{T}, \quad (7.11)$$

де a – деяка константа, різна для різних речовин.

У металах у перенесенні тепла беруть участь не тільки фонони, але й заряджені частинки – електрони. При високих температурах електронна складова теплопровідності набагато більша за граткову. Цим пояснюється висока теплопровідність металів порівняно з неметалами, у яких фонони – єдині носії тепла.

7.3.4. Теплоємність. Емпіричний закон Дюлонга і Пті

7.3.4.1. Закон Дюлонга і Пті

Тверде тіло є сукупністю частинок, що коливаються. Їх називають *осциляторами* (гармонічними осциляторами). Тепло, що підводиться до тіла, витрачається на збільшення енергії коливань осциляторів, яка складається з кінетичної та потенціальної енергій.

Кожне коливання можна розкласти на три складові по осях координат і енергія кожної складової також виражається через суму однакових між собою потенціальної та кінетичної енергій.

З кінетичної теорії газів знаємо, що середня кінетична енергія атома вздовж однієї з осей дорівнює $\frac{1}{2}kT$. Це кінетична енергія, яка припадає на одну ступінь вільності. Але оскільки потенціальна енергія осцилятора дорівнює кінетичній, то повна енергія, що припадає на одну ступінь вільності, дорівнює $2 \times \frac{1}{2}kT = kT$.

Але кожен атом має три ступені вільності, і коли прийняти, що на кожен ступінь вільності припадає однакова енергія, то повна енергія одного атома твердого тіла дорівнює $3kT$.

Якщо ж тіло має N атомів, то внутрішня енергія тіла дорівнює $3NkT$. Отже, внутрішня енергія одного моля дорівнює

$$U = 3N_A kT = 3RT, \quad (7.12)$$

де N_A – число Авогадро, R – універсальна газова стала.

При підведенні тепла в умовах сталого об'єму все тепло витрачається на збільшення внутрішньої енергії. Тому атомна теплоємність при сталому об'ємі визначається з рівняння:

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = 3R. \quad (7.13)$$

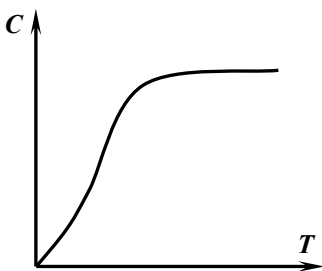
Отже, атомна теплоємність (грам-атома) твердих тіл є величиною сталою, однаковою для всіх речовин, і не залежить від температури. Це твердження називається **законом Дюлонга і Пті**.

Достатньо перевести речовину з газоподібного стану у твердий, щоб її молярна теплоємність подвоїлась. Теплоємність подвоюється тому, що при нагріванні твердого тіла теплота, яка підводиться, витрачається на збільшення не тільки кінетичної, а й потенціальної енергії частинок.

Дослід показує, що при звичайних температурах молярна теплоємність більшості твердих тіл справді близька до значення $3R$ і майже не залежить від температури (мал. 7.24). Але є винятки. У чотирьох речовин – хімічних елементів: берилію, бору, кремнію і алмазу теплоємність при звичайних температурах значно менша від

$3R$ і помітно залежить від температури. З підвищенням температури теплоємність цих речовин зростає, прямуючи до $3R$.

Це неєдине відхилення від закону Дюлонга і Пті. При низьких температурах теплоємність усіх речовин, у тому числі й тих, які при звичайних температурах відповідали закону Дюлонга і Пті, швидко спадає, прямуючи до нуля при абсолютному нулі температури.



мал. 7.24

Численні дослідження показали, що спільною для всіх твердих тіл закономірністю є не закон Дюлонга і Пті, а відхилення від нього.

Справді, теплоємність твердих тіл залежить від температури: з пониженням температури вона зменшується пропорційно до куба температури і прямує до нуля при абсолютному нулі. Для берилію, бору, кремнію і алмазу кімнатна температура є вже низькою температурою.

7.3.4.2. Залежність теплоємності від температури

Закон Дюлонга і Пті, як ми бачили, є наслідком закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності. Тому той факт, що тверді тіла насправді не відповідають закону Дюлонга і Пті при низьких температурах показує, що гіпотеза про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності є наближенням.

Експериментально одержану залежність теплоємності від температури можна пояснити, виходячи з квантових уявлень.

Відомо, що молекули твердого тіла – осцилятори. Згідно з квантовою теорією, енергія осцилятора є кратною величині $h\nu$ (ν – частота коливань осцилятора, h – стала Планка). Отже, енергія молекули, що коливається:

$$W = nh\nu, \quad (7.14)$$

де n – будь-яке ціле число.

У різних молекул твердого тіла ν може бути різним, і відповідно до цього, й енергія їх різна.

Припустимо, як це зробив Ейнштейн, що всі молекули коливаються з однаковою частотою. Щоб знайти середню енергію $\bar{W}$ однієї молекули, використаємо формулу Больцмана для визначення частки молекул, які мають енергію $W = nh\nu$:

$$N = N_0 e^{-\frac{nh\nu}{kT}}. \quad (7.15)$$

Тоді середня енергія молекули $\bar{W}$, що дорівнює відношенню суми енергій до суми числа молекул, визначається виразом:

$$\bar{W} = \frac{n \sum h\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{n \sum e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu \sum n e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}, \quad (7.16)$$

або позначивши:

$$\frac{h\nu}{kT} = x, \quad (7.17)$$

рівняння (7.16) перепишемо так:

$$\bar{W} = \frac{h\nu \sum n e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}}. \quad (7.18)$$

При великому значенні n матимемо:

$$\frac{\sum n e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}} = -\frac{d}{dx} \ln \sum e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}. \quad (7.19)$$

Враховавши (7.19), рівняння (7.18) запишемо так:

$$\bar{W} = \frac{h\nu}{e^x - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (7.20)$$

Отже, на відміну від класичної теорії, за якою середня енергія однієї молекули $\mathbf{W} = kT$, згідно з квантовою теорією вона визначається (7.20).

При високих температурах, коли $kT \gg h\nu$, обидва вирази співпадають. Якщо обмежитись двома першими членами розкладу у

ряд функції $e^{\frac{h\nu}{kT}}$, одержимо:

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT}. \quad (7.21)$$

Тоді

$$\overline{W} = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = kT. \quad (7.22)$$

У результаті енергія одного моля замість значення $3N_A kT$ приймає значення:

$$U = 3N_A \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (7.23)$$

Тоді теплоємність C_V :

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3N_A k \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2}. \quad (7.24)$$

При великих значеннях T цей вираз дає для теплоємності C_V значення, яке дорівнює $3R$, тобто закон Дюлонга і Пті, а при $T = 0$ теплоємність C_V дорівнює нулю, що відповідає експериментальним результатам.

Температурна залежність теплоємності, обчислена за теорією Ейнштейна (7.24), загалом близька до тієї, яка спостерігається при експериментальних дослідженнях, але при низьких температурах розбіжності між теорією і дослідом дуже значні.

Звичайно, ці розбіжності пояснюють припущенням, що всі молекули твердого тіла коливаються з однаковою частотою ν .

Дебай, зберігши основну ідею Ейнштейна, істотно вдосконалив теорію, зробивши припущення, що у твердому тілі існує цілий набір частот коливань. Набір частот коливань системи називають спектром. Коливання, які тут розглядаються, це ті пружні коливання, які відповідають за поширення звуку у твердому тілі, швидкість якого дорівнює $\frac{E}{\rho}$ (де E – модуль Юнга, ρ – густина тіла).

Зі спектром частот ми маємо справу, наприклад, коли розглядаємо коливання струни, які є результатом накладання коливань нескінченного числа обертонів на основний тон струни.

Як було уже показано вище, у квантовій теорії енергію звукових коливань $h\nu$ розглядають як енергію особливих частинок – фононів. Кількість можливих частот коливань є нескінченно велике. Число ж атомів у твердому тілі хоча й дуже велике (порядку 10^{22} в 1 см^3), але скінченне; тому Дебай зробив припущення, що у твердому тілі спектр коливань обмежений деякою максимальною частотою $\nu_{\max}$.

Згідно з теорією Дебая, починаючи з деякої температури θ (характеристична температура Дебая), теплоємність швидко зменшується із зменшенням температури. Це та температура, при якій енергія теплових рухів $k\theta$ починає дорівнювати максимальній енергії осциляторів:

$$k\theta = h\nu_{\max} \quad (7.25)$$

звідки

$$\theta = \frac{h\nu_{\max}}{k} \quad (7.26)$$

При $T > \theta$ уже всі фонони збуджені, тому C_V не змінюється. А при температурах значно менших від θ , теплоємність зменшується пропорційно до третього степеня температури (“закон T^3 ”), що відповідає дослідним даним.

З погляду квантової теорії теплоємності той факт, що деякі речовини (алмаз, бор і інші) не підлягають закону Дюлонга і Пті навіть при кімнатних температурах, пояснюється саме тим, що в цих речовинах характеристична температура Дебая така висока, що кімнатну температуру слід вважати низькою температурою. Так, для срібла $\theta = 210^\circ\text{C}$, для алюмінію $\theta = 400^\circ\text{C}$, для свинцю $\theta = 90^\circ\text{C}$, а для алмазу $\theta = 2000^\circ\text{C}$.

Зазначимо, що безпосередньому вимірюванню доступна лише теплоємність при сталому тиску, а не при сталому об’ємі, оскільки через теплове розширення не можна забезпечити сталість об’єму тіла. Однак внаслідок дуже малої зміни об’єму при нагріванні різниця між C_V та C_p мала.

Дебай отримав таку формулу для теплоємності твердого тіла (**закон кубів Дебая**):

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{12N_A k \pi^4}{5} \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \quad (7.27)$$

Запитання для самоконтролю

1. Які характерні властивості має кристалічний стан речовини?
2. Яка будова кристалічних тіл?
3. Які сили діють між частинками, з яких складаються кристалічні тіла? Як ці сили залежать від відстані між частинками?
4. Яка причина анізотропії властивостей кристалічних тіл?
5. Які є елементи симетрії кристалів? Поясніть їх.
6. Що називають віссю симетрії, площиною симетрії, центром симетрії?
7. Чим відрізняється вісь симетрії від поворотно-дзеркальної осі симетрії?
8. Скільки існує класів симетрії та систем симетрії?
9. Що розуміють під ґраткою Браве? Скільки існує типів ґраток Браве? Які вони мають назви?
10. Як позначають площини та напрямки у кристалі?
11. Які існують типи кристалічних структур?
12. Який зв'язок називається гетерополярним?
13. Який зв'язок називається ковалентним?
14. Яка природа металічних кристалів?
15. Як утворюються молекулярні кристали?
16. Чим відрізняються полікристали від монокристалів?
17. Які дефекти існують в реальних кристалах? Поясніть їх.
18. Як впливають дислокації на властивості кристалів? Чому?
19. Поясніть фізичну суть ефекту Ребіндера.
20. Які коливання називаються гармонічними? Чому для пояснення теплового розширення тіл використовують ангармонічність коливань атомів? За рахунок чого такі коливання реалізуються у кристалічних тілах?
21. Чому середня відстань між частинками кристалу залежить від температури?
22. Який фізичний зміст мають коефіцієнти лінійного й об'ємного розширення? Запишіть їх формули.
23. Який механізм теплопровідності твердих тіл?
24. Поясніть закон Дюлонга і Пті. Запишіть його. Які він має обмеження?
25. Як пояснили температурну залежність теплоємності Ейнштейн і Дебай?

8. РІВНОВАГА ФАЗ І ФАЗОВІ ПЕРЕХОДИ

8.1. Фазові переходи

8.1.1. *Гомогенні та гетерогенні термодинамічні системи. Правило фаз Гіббса. Рівновага фаз*

Термодинамічними системами або просто системами називають сукупність макроскопічних тіл, які можуть взаємодіяти як між собою, так і з зовнішнім середовищем. Усі системи поділяються на два види: гомогенні та гетерогенні.

Гомогенними (фізично однорідними) називають системи, всередині яких немає поверхонь розділення, які б розмежовували їх на окремі частини за структурою та фізичними параметрами (густиною, твердістю, коефіцієнтом розширення, теплопровідністю тощо). До них належать однорідні речовини у різних агрегатних станах, суміші газів, ненасичені розчини солей, рідкі та тверді розчини речовин, які необмежено розчиняються одні в одних (вода – спирт, мідь – нікель, золото – срібло, HgTe – CdTe тощо).

Гетерогенними називають системи, всередині яких є поверхні розділення, які розмежовують окремі їх частини, що відрізняються за структурою і властивостями. Прикладами таких систем є рідини, які контактують зі своєю насиченою парою, розчини солей з їх осадом, розшаровані рідкі системи (вода – гас), твердофазні суміші (евтектики, конгломерати) тощо.

Гомогенну частину гетерогенної системи, що відокремлена від інших частин системи поверхнею розділення, називають *фазою*. Її ще можна розглядати як однорідну частину гетерогенної системи, термодинамічні властивості якої однаково пов'язані з параметрами стану. Важливою ознакою фаз є їх відмінність за структурою і властивостями від інших частин системи, а не тільки наявність поверхні розділення.

За агрегатним станом фази поділяють на тверді, рідкі та газоподібні. При зміні зовнішніх умов (температури, тиску, електричного і магнітного полів тощо) фази можуть переходити одна в одну.

Якщо дві або більше різних фаз речовини при даних температурі і тиску існують одночасно, стикаючись одна з одною, і якщо при цьому маса однієї з фаз не зростає за рахунок іншої, то говорять про *фазову рівновагу*.

Перехід речовини з одного стану (фази) в інший називають *фазовим переходом* або *фазовим перетворенням*.

Кількість фаз, які можуть перебувати у рівновазі, може бути різною і залежить від складу речовини.

Американський фізик-теоретик Д. Гіббс сформулював правило, яке визначає найбільшу кількість фаз, що можуть перебувати у рівновазі, залежно від кількості компонентів K та кількості незалежних параметрів C (ступенів вільності), зміна яких не впливає на фазовий стан системи:

$$C = K - \Phi + 2, \quad (8.1)$$

де Φ – кількість фаз.

Кількість незалежних параметрів C визначає кількість ступенів вільності термодинамічної системи, які можна довільно змінювати, не порушуючи її фазової рівноваги. Ця кількість визначає варіантність системи. При $C = 0$ система називається інваріантною, при $C = 1$ – моноваріантною, при $C = 2$ – диваріантною, при $C \geq 3$ – поліваріантною.

Кількість незалежних компонентів системи K за відсутності у ній хімічних реакцій дорівнює кількості простих речовин, з яких складається ця система. Якщо ж у системі відбуваються хімічні реакції, то кількість компонентів K дорівнює різниці між кількістю простих речовин та кількістю незалежних реакцій.

Кількість фаз Φ є кількістю фізично однорідних частин гетерогенної системи, які перебувають у рівновазі при заданих зовнішніх параметрах. Як уже зазначалося, фази гетерогенної системи

відрізняються між собою структурою та властивостями і відокремлені одна від одної поверхнями розділення.

Враховуючи, що кількість ступенів вільності не може бути від'ємною, на підставі співвідношення (8.1) одержуємо:

$$\Phi \leq K + 2. \quad (8.2)$$

З (8.2) випливає, що кількість фаз Φ , у яких може перебувати речовина у рівноважному стані, не може перевищувати кількість незалежних компонентів більше, ніж на два.

Припустимо, що у закритій посудині міститься деяка маса води, над якою перебуває суміш повітря з водяною парою. Ця система є двофазною. Вона складається з двох фаз: рідкої (вода) та газоподібної (суміш повітря і водяної пари). Кинемо у воду шматок льоду. Система перетвориться у трифазну і буде складатися з твердої фази (лід), рідкої (вода) та газоподібної (суміш повітря і водяної пари).

Додамо до води деяку кількість спирту. Кількість фаз не зміниться, оскільки вода змішується зі спиртом, утворюючи фізично однорідну рідину. Але якщо до води додати ртуть, то вона не змішається з водою, і отримаємо систему з двома рідкими фазами: ртуттю та водою. Газоподібна фаза й надалі буде одна, вона складається із суміші повітря, пари води та ртуті.

Кинувши у воду шматок кухонної солі, одержимо систему з двома твердими фазами: льодом і твердою кухонною сіллю.

У системі може бути декілька твердих або рідких фаз, але не більше, ніж одна газоподібна фаза, оскільки всі гази змішуються між собою.

Важливим питанням є з'ясування умов, при яких система, що складається з двох або декількох фаз, перебуває у рівновазі. Остання включає в себе механічну і теплову рівновагу.

Для теплової рівноваги необхідно, щоб всі фази системи мали одну й ту ж саму температуру.

Необхідною умовою механічної рівноваги є рівність тисків з обох боків границі розділу контактуючих фаз.

Рівність температур і тисків ще не означає, що система перебуватиме у рівновазі, оскільки фази, які стикаються, можуть перетворюватися одна в одну. Такі перетворення називають фазовими перетвореннями. При фазових перетвореннях одні фази зростають, а інші зменшуються і навіть можуть зовсім зникнути.

Стан рівноваги характеризується тим, що маси всіх фаз системи залишаються незмінними. Отже, повинна виконуватись ще одна умова рівноваги – рівновага щодо взаємного перетворення фаз. Вона є головною умовою у вченні про рівновагу фаз і фазових перетворень

Прикладами фазових перетворень можуть бути зміни агрегатного стану речовини. Під агрегатними станами розуміють твердий, рідкий та газоподібний стан речовини.

Твердий і рідкий стани називають конденсованими. Випаровуванням або пароутворенням у широкому розумінні слова називають перехід речовини з конденсованого стану в газоподібний. Зворотний перехід називають конденсацією.

У вузькому значенні випаровування – це перехід речовини з рідкого стану в газоподібний.

Перехід з твердого стану безпосередньо в газоподібний називають сублімацією або возгонкою. Перехід з твердого стану в рідкий називають плавленням, а обернений – кристалізацією. Прикладами сублімації є перетворення у пару, кристаликів йоду та льоду.

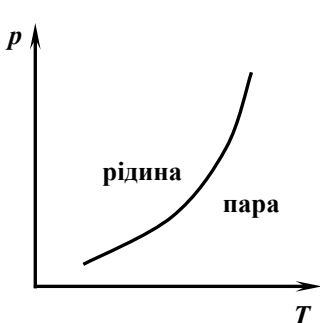
Твердий стан речовини може реалізуватися у різних кристалічних модифікаціях. Це явище називають поліморфізмом (тверде залізо може існувати у 4-ох модифікаціях: α , β , γ , δ).

8.1.2. Фазові діаграми

Діаграми стану (фазові діаграми) однозначно описують залежність стійкого фазового стану системи від внутрішніх і зовнішніх параметрів, які його визначають. Із зовнішніх параметрів найбільше значення мають температура і тиск. За кількістю компонентів (які визначають кількість внутрішніх параметрів) розрізняють прості (однокомпонентні) системи, подвійні (двокомпонентні), потрійні

(трикомпонентні) тощо. Залежно від кількості зовнішніх параметрів діаграми стану бувають двовірними, тривірними і багатовірними.

Як зазначалося вище, рівновага рідинної і газоподібної фаз, тобто рівновага між рідиною і її насиченою парою, буває при певних тисках і температурі (нижчій від критичної).



мал. 8.1

Зміна однієї з цих величин, наприклад, температури, викликає зміну і того тиску, при якому можлива фазова рівновага, тобто зміну пружності насиченої пари. Причому, як це видно з мал. 8.1, при підвищенні температури пружність насиченої пари зростає. Будь-яка точка зліва від наведеної кривої відповідає рідкому стану, а точки справа від неї відповідають газоподібній фазі.

Це означає, що пара, стан якої характеризується певною точкою справа від кривої, сконденсується, якщо понизити її температуру, зберігаючи незмінним тиск. Аналогічно, рідина, стан якої задано координатами будь-якої точки, що лежить зліва від кривої, перетвориться у пару, якщо підвищити її температуру.

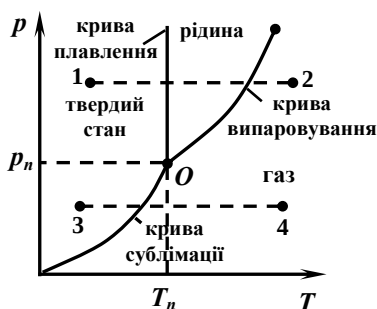
І тільки точки на самій кривій відповідають фазовій рівновазі, тобто одночасному існуванню рідини і пари над нею.

Криву, точки якої відповідають рівновазі фаз, називають *фазовою діаграмою* або кривою рівноваги фаз. Вона розділяє області, точки яких відповідають однофазним станам речовини, і є однією з важливих її характеристик.

Такі діаграми іноді називають діаграмами стану. Характерною особливістю кривої, зображеної на мал. 8.1, є те, що вона має кінець, оскільки її не можна продовжити вище від критичної температури. Адже вище цієї температури немає двох фаз, а тому не може бути і їх рівноваги.

8.1.3. Потрійна точка

Розглянемо речовину у вигляді рідини і пари, яка перебуває з рідиною у рівновазі. Не змінюючи об'єму, будемо забирати від неї тепло. Цей процес буде супроводжуватися пониженням температури речовини і відповідним зменшенням тиску (див. мал. 8.2).



мал. 8.2

Тому точка, яка відображає стан речовини на діаграмі (p, T) , переміщуватиметься вниз по кривій випаровування. Це триватиме доти, доки не буде досягнуто температури кристалізації речовини, позначеної як T_n . Увесь час, доки проходить процес кристалізації, температура і тиск будуть залишатися сталими. Забране при цьому тепло – це тепло, яке виділяється при кристалізації.

Температура T_n та відповідний їй рівноважний тиск p_n – єдині значення температури та тиску, при яких можуть перебувати у рівновазі три фази речовини: тверда, рідка і газоподібна. Відповідна точка на діаграмі (p, T) називається *потрійною точкою*.

Отже, *потрійна точка визначає умови, при яких можуть бути у рівновазі одночасно три фази речовини.*

Будь-яка точка, що лежить на одній з кривих, що розмежовують області твердого тіла, рідини та пари, відображає стан рівноваги двох відповідних фаз речовини.

Потрійна точка відображає стан рівноваги всіх трьох фаз.

Знаючи діаграму стану, можна передбачити, у якому стані буде знаходитися речовина при різних умовах (при різних значеннях p і T), а також яких перетворень будуть зазнавати речовини при різних процесах.

Якщо взяти речовину у стані 1 і піддати її ізобаричному нагріванню, то речовина буде проходити послідовність 1 – 2 станів: кристал – рідина – газ.

Якщо ж взяти ту ж саму речовину в стані 3 й також піддати її ізобаричному нагріванню, то послідовність станів (3 – 4) буде іншою: кристали перетворюються безпосередньо в газ, оминаючи рідку фазу.

З діаграми стану випливає, що рідка фаза може існувати у рівноважному стані тільки при тисках не менших, ніж тиск потрійної точки.

У більшості звичайних речовин потрійна точка лежить значно нижче атмосферного тиску, внаслідок чого перехід цих речовин з твердого стану у газоподібний здійснюється через проміжну рідку фазу. Так, наприклад, потрійній точці води відповідає тиск 4,58 *мм рт. ст.* і температура 0,0075°C.

Для вуглекислоти тиск потрійної точки дорівнює 5,118 *атм.* (температура потрійної точки -56,6°C). Тому при атмосферному тиску вуглекислота може існувати тільки у твердому або газоподібному станах. Тверда вуглекислота (сухий лід) перетворюється безпосередньо в газ. Температура сублімації вуглекислоти при атмосферному тиску дорівнює -78°C.

8.1.4. Аномалія води

Більшість рідин, як і інших тіл, при підвищенні температури збільшують свій об'єм, зменшуючи при цьому свою густину.

Вода відзначається певною аномалією, яка полягає у тому, що в області температур від 0°C до 4°C підвищення температури викликає не збільшення, а зменшення об'єму, так що при 4°C вода має максимальну густину.

Ця аномалія пояснюється тим, що молекули води частково асоціюють, тобто збираються у групи з кількох молекул, утворюючи своєрідні великі молекули. Вода складається з трьох видів молекул, що відповідають формулам H_2O , $(\text{H}_2\text{O})_2$ і $(\text{H}_2\text{O})_3$, питомий об'єм яких різний. При різних температурах співвідношення концентрацій цих груп молекул різне. Цим і пояснюється, що при певній температурі (4°C) питомий об'єм води має мінімальне значення.

Трапляються речовини, у яких кристалічна упаковка більш “рихла” (пориста), ніж рідина. У цих речовин густина кристалу менша від густини рідини. Як видно з вищесказаного, прикладом таких речовин може бути вода (вісмут, сірий чавун).

У цьому випадку точки, які відповідають рідкому стану, розміщуються правіше і вище від кривої фазового переходу, а точки, які відповідають кристалічному стану – лівіше і нижче від кривої.

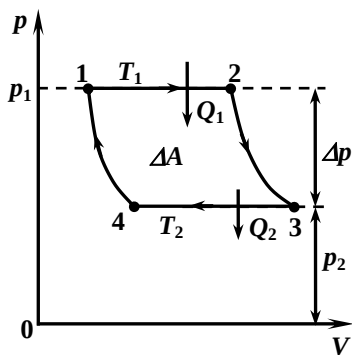
8.2. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса.

Залежність температури фазового переходу від тиску

8.2.1. Рівняння Клапейрона-Клаузіуса

Обчислення теплоти пароутворення з використанням молекулярних параметрів завжди пов'язане з певними припущеннями. Однак існує фундаментальне рівняння Клапейрона-Клаузіуса, яке пов'язує теплоту пароутворення з іншими термодинамічними характеристиками системи і одержане строго на основі другого начала термодинаміки.

Нехай робочою речовиною, яка здійснює цикл Карно, є двофазна система рідина – насичена пара.



Початковий стан такої системи позначимо точкою 1 (мал. 8.3). Виконаємо ізобарично-ізоермічне розширення системи при температурі T_1 зі стану 1 в стан 2. При цьому деяка маса рідини випаровується і відповідно від нагрівника забирається теплота Q_1 , що дорівнює теплоті пароутворення рідини. Різниця об'ємів в станах 2 та 1 дорівнює різниці об'ємів у газоподібному та рідкому станах для

маси речовини, яка випарувалась: $V_2 - V_1 = V_n - V_p$. Зі стану 2 двофазна система адіабатично переходить у стан 3 з меншою температурою T_2 . Зі стану 3 речовина ізобарично-ізоермічно переводиться у стан 4, при цьому частина пари конденсується і холодильнику віддається теплота Q_2 . Зі стану 4 двофазна система адіабатичним стиском переводиться у початковий (вихідний) стан.

Робота циклу дорівнює:

$$\Delta A = \eta Q_1, \quad (8.3)$$

де

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = - \frac{\Delta T}{T_1}. \quad (8.4)$$

При малих різницях температур (тисків) робота за цикл дорівнює

$$\Delta A = (p_1 - p_2)(V_2 - V_1) = -\Delta p(V_n - V_p). \quad (8.5)$$

Використавши (8.4) і (8.5), рівняння (8.3) запишемо так:

$$\Delta p(V_n - V_p) = Q_1 \frac{\Delta T}{T_1}.$$

Зробивши заміну $Q = r$ і перейшовши до границі, одержуємо:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(V_n - V_p)}. \quad (8.6)$$

Це рівняння було знайдене французьким інженером Б. Клапейроном (1832 р.) до встановлення першого начала термодинаміки.

8.2.2. Залежність температури фазового переходу від тиску

Сучасне доведення цього рівняння зробив Р. Клаузіус, тому воно називається рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Це рівняння дає змогу обчислити теплоту пароутворення (питому, молярну), якщо відомі залежність тиску насиченої пари від температури та об'єми рідини і пари (питомі, молярні). Похідну $\frac{dp}{dT}$ визначають за експериментальною залежністю тиску насиченої пари від температури $p = p(T)$.

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса справедливе не тільки для переходу рідина – пара, але й для всіх інших фазових переходів. Воно описує зміну тиску, при якому фази перебувають у рівновазі, із зміною температури. Так, для плавлення рівняння (8.6) має вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_p - V_T)}. \quad (8.7)$$

де λ – теплота плавлення, V_T – об'єм твердої фази, T – температура плавлення.

Використаємо рівняння (8.6) для отримання наближеної залежності тиску насиченої пари від температури, далекої від критичної. При цих умовах $V_p \ll V_n$ і $V = \frac{RT}{p}$ (для одного моля пари). Взявши це до уваги та знехтувавши об'ємом рідини (порівняно з об'ємом пари), рівняння (8.6) перепишеться так:

$$\frac{dp}{p} = \frac{r}{RT^2} dT. \quad (8.8)$$

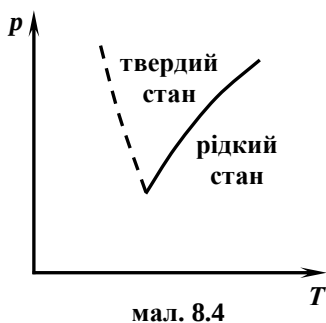
де r – молярна теплота пароутворення. Якщо вважати, що r не залежить від температури, то проінтегрувавши (8.8), одержимо:

$$\ln p = -\frac{r}{RT} + C, \quad (8.9)$$

де C – стала інтегрування. Залежності (8.8) і (8.9) виконуються при умові, коли пару можна вважати ідеальним газом.

Подібно до того, як температура кипіння залежить від тиску, температура кристалізації і температура плавлення, яка дорівнює їй, також залежить від тиску, зростаючи із збільшенням останнього.

Зростає вона тому, що зовнішній тиск зближує атоми між собою, а для руйнування кристалічної решітки при плавленні атоми потрібно віддаляти один від одного: при більшому тиску для цього потрібна велика енергія теплових рухів, тобто вища температура.



На мал. 8.4 подано криву залежності температури плавлення (кристалізації) від тиску.

Суцільна крива поділяє всю область (p , T) на дві частини. Область зліва від кривої відповідає твердому стану, а справа – рідкому. Точка, що лежить на самій кривій плавлення, відповідає рівновазі твердої і рідкої фаз; при цих тисках і температурах речовина у рідкому і твердому станах перебуває у рівновазі, стикаючись одна з одною, і при цьому рідина не твердне, а тверде тіло не плавиться.

Пунктиром показано криву плавлення для тих небагатьох речовин (вісмут, сурма, лід, германій), об'єм яких при твердненні збільшується. Природно, що у таких речовинах температура плавлення з підвищенням тиску зменшується.

Зміна температури плавлення dT пов'язана зі зміною тиску dp співвідношенням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V_2 - V_1)}{L}.$$

Тут T – температура плавлення, V_2 і V_1 – відповідно молярні об'єми рідкої і твердої фаз, L – молярна теплота плавлення.

З цієї формули видно, що знак зміни температури плавлення із зміною тиску визначається тим, яка з двох величин V_1 або V_2 більша. Крутизна кривої залежить також від величини прихованої теплоти переходу L : чим менше L , тим менше зменшуватиметься температура плавлення з тиском.

Рівняння Клапейрона-Клаузіуса можна записати і так:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}.$$

Це рівняння показує, як змінюється тиск, під яким перебувають обидві рівноважні фази при зміні температури.

8.2.3. Плавлення і кристалізація

Якщо тверде кристалічне тіло нагрівати, то при деякій температурі воно плавиться, тобто переходить у рідкий стан. Температура плавлення цієї речовини залежить від тиску. При плавленні кристалічна ґратка руйнується, при цьому властивості речовини змінюються стрибкоподібно.

При плавленні речовини подальше підведення тепла не призводить до підвищення температури, доки все тіло не розплавиться. Надане тілу тепло йде на роботу руйнування просторової ґратки; воно називається теплотою плавлення. Зазвичай теплоту плавлення відносять до 1 кг або 1 моля речовини. При нагріванні твердих аморфних тіл не спостерігається стрибкоподібної зміни їх властивостей, відбувається поступове розм'якшення тіл, оскільки в аморфних тілах відсутнє впорядковане розміщення частинок.

Перехід з кристалічного стану у рідкий відбувається при цілком певних умовах, які характеризуються рівноважними значеннями тиску і температури. Рівновазі цих двох фаз на діаграмі (p , T) відповідає крива, яка називається кривою плавлення.

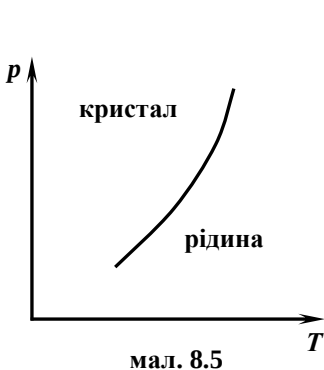
Рівняння Клапейрона-Клаузіуса для процесу плавлення має вигляд:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{Q_{12}}{T(V_p - V_{me})},$$

де V_p і V_{me} – молярні (або питомі) об'єми речовини у рідкому і твердому станах.

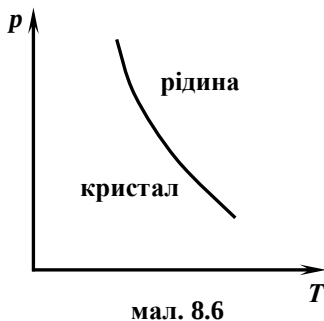
Здебільшого плавлення супроводжується збільшенням об'єму, тобто $V_p - V_{me} > 0$ і відповідно $\frac{dp}{dT} > 0$.

Тому зі збільшенням тиску температура плавлення зростає. Крива плавлення у цьому випадку подібна до кривої випаровування, але значно крутіша. Наприклад, щоб змінити на 1 K температуру танення льоду, слід змінити тиск на 132 атм. , тоді як для пониження точки кипіння води на 1 K достатньо зменшити тиск на $0,036\text{ атм.}$



У деяких речовин (лід, чавун, вісмут) плавлення супроводжується зменшенням об'єму. У цьому випадку

$\frac{dp}{dT} < 0$ і відповідно точка плавлення понижується при збільшенні тиску.



Зворотний до плавлення процес кристалізації супроводжується виділенням теплоти плавлення. Ріст кристалів відбувається навколо зародків або центрів кристалізації, якими можуть служити завислі у рідині тверді частинки. Ретельно очищену від зародків кристалізації рідину можна охолодити нижче від температури плавлення. Стан такої рідини нестійкий.

Кристалізація може відбуватися як з розплавленої речовини, так і з розчинів. Зовнішній вигляд утвореного

кристалу залежить від умов його росту. Щоб одержати кристал у формі правильного багатогранника, потрібно здійснювати кристалізацію повільно і обережно, не переохолоджуючи розчин чи розплав. При сильному переохолодженні рідкої фази кристали ростуть у вигляді сплєтених ниток та голок (сніжинка) і одержується полікристал.

Для вирощування з розчину крупних монокристалів невеликий “зародковий” кристалик підвішують всередині насиченого розчину або розплаву і дуже повільно охолоджують рідину або випаровують розчин.

В ідеальному випадку форма вирощеного кристалу залежить тільки від умов кристалізації і хімічної природи кристалізуючої речовини. Кристал одержує таку форму, при якій його поверхнева енергія мінімальна. Ця поверхнева енергія різна для різних граней, оскільки коефіцієнт поверхневого натягу для них різний.

Якщо у системі є декілька поверхонь розділу, то умова рівноваги має вигляд:

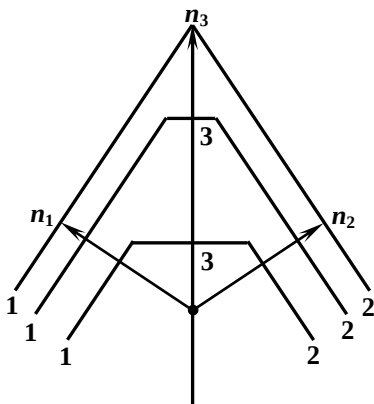
$$U_s = \sum_i \sigma_i S_i = \min \quad \text{або} \quad d \left(\sum_i \sigma_i S_i \right) = 0.$$

Якщо всі σ_i сталі, то $\sum_i \sigma_i S_i = 0$.

З цих співвідношень випливає, що при даному об’ємі повинні бути мінімальними ті поверхні кристала, для яких σ_i більше. Інакше кажучи, у кристалі найбільшу площу повинні мати грані з мінімальними σ_i . Це положення має назву *принципу Кюри*.

Якщо кристал перебуває у насиченому розчині або розплаві і його форма відрізняється від форми рівноваги, яка визначається мінімумом поверхневої енергії, то на одних гранях буде відбуватися розчинення, на інших – виділення речовини, доки кристал не прийме форму рівноваги. *При вирощуванні кристалу швидкість його росту на різних гранях (тобто по нормалі до відповідної грані) пропорційна до коефіцієнта поверхневого натягу на цій грані (закон Кюри-Вульфа).*

На мал. 8.7 показано три грані кристала 1, 2, 3 в послідовних стадіях їх росту через рівні проміжки часу. Площі граней 1, 2



мал. 8.7

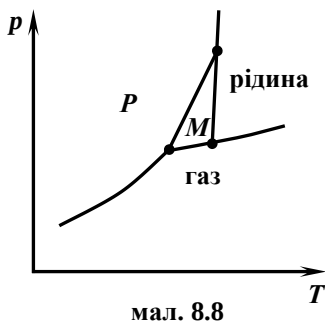
змінюються порівняно повільно – їх переміщення вздовж нормалі n_1 і n_2 мале. Площа грані 3 (нормаль n_3) змінюється значно швидше. Це відбувається згідно з законом Кюри-Вульфа, оскільки величина $\sigma_3 \gg \sigma_1 = \sigma_2$. У результаті площа грані 3 зменшується через збільшення площі граней 1 і 2, тобто зменшується площа грані з максимальним σ_i , що й потрібно для мінімуму вільної енергії.

8.3. Поліморфізм

Хімічно однорідна речовина може існувати у декількох різних кристалічних станах або модифікаціях. Наприклад, вуглець може перебувати у формі графіту й у формі алмазу. Лід існує у 5 різних кристалічних станах. Подібно до перетворення кристала у рідину, можуть відбуватися фазові перетворення однієї кристалічної форми в іншу. Наприклад, йодна ртуть HgJ_2 при кімнатній температурі має вигляд червоних кристаликів. При температурі 126°C – це вже жовті кристали, які плавляться при 253°C .

Здатність речовини існувати у кількох кристалічних модифікаціях називається *поліморфізмом*. При поліморфних перетвореннях відбувається зміна кристалічної ґратки тіла, причому змінюються і фізичні його властивості: колір, кристалічна форма, густина і т.д.

Діаграма стану при наявності поліморфізму ускладнюється. Кожна з кристалічних модифікацій утворює особливу фазу. Як і інші відомі нам фази, різні модифікації мають на діаграмі стану (p , T) свої області рівноваги. Дві різні кристалічні модифікації перебувають у рівновазі одна з одною лише вздовж певних ліній, тобто при певній залежності тиску від температури. Три фази, наприклад, дві кристалічні та рідка, можуть бути у рівновазі лише у певній потрібній точці, тобто при строго заданих значеннях тиску і температури. Таких потрібних точок на діаграмі може бути декілька.



На мал. 8.8 зображено діаграму стану сірки. Кристалічна сірка може існувати у двох формах: ромбічній і моноклінній. Тому на діаграмі стану є дві області стійкого твердого стану, позначені буквами *P* та *M*. Як бачимо, у цій системі кількість потрібних точок на діаграмі дорівнює трьом.

Перехід з однієї кристалічної модифікації в іншу називається поліморфним перетворенням. При таких переходах поглинається або виділяється тепло. Перехід α -заліза в γ -залізо відбувається при 810°C з поглинанням 1600 Дж/моль .

При поліморфних перетвореннях легко виникають метастабільні стани. Тепловим рухом частинок у кристалі є малі коливання цих частинок біля вузлів ґратки, які здійснюються з невеликими амплітудами. Через малу амплітуду перебудова ґратки кристала при низьких температурах утруднена; вона полегшується при підвищенні температури. Тому метастабільні стани значно частіше виникають при охолодженні речовини.

Поліморфне перетворення значно полегшується, якщо у нестійкій при даних умовах фазі є зародки нової (стійкої) фази. Так, наприклад, олово може перебувати у двох формах: білого олова (з тетрагональною ґраткою) і сірого олова (з кубічною ґраткою). При атмосферному тиску обидві модифікації знаходяться у рівновазі при $13,2^{\circ}\text{C}$. Причому при вищих від $13,2^{\circ}\text{C}$ температурах стійким є біле олово (високотемпературна форма), а при нижчих – сіре олово. При охолодженні білого олова воно зберігає свою структуру навіть на морозі, хоча швидкість перетворення, взагалі кажучи, сильно зростає при -30°C . При дотику білого олова з частинками сірого воно відразу ж розсипається у сірий порошок, оскільки крупинки останнього “заражають” біле олово, яке швидко переходить у стійку форму, а питомий об’єм сірого олова на 25,6 % більший, ніж білого (тобто перехід пов’язаний із значним збільшенням об’єму).

8.4. Рівновага фаз

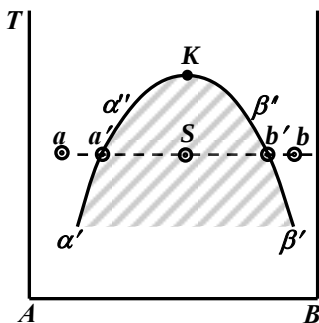
8.4.1. Рівновага двох рідких фаз

Розглянемо систему, яка складається з двох компонент у рідкому стані. У деяких випадках рідини змішуються одна з одною у будь-яких пропорціях (наприклад, спирт і вода), причому їх суміш утворює одну фазу.

Якщо ж взаємна розчинність рідин обмежена, то їх рідка суміш розділяється на дві фази, кожна з яких у випадку рівноваги є насиченим розчином однієї рідини в іншій. При цьому відбувається розшарування рідкої суміші: один шар розміщується над іншим (густіший шар знизу, легший – згори). У цьому випадку спостерігається рівновага двох рідких фаз.

Взаємна розчинність рідин залежить від температури. Залежність між температурою і концентрацією однієї з двох рідких фаз, які знаходяться між собою у рівновазі, зручно зображати на діаграмі температура – склад, де по осі абсцис відкладається концентрація C компонент суміші. Якщо система складається з компонент A і B , то концентрація першої з них C_A зменшується зліва направо від 100% до 0, а концентрація другої зростає від 0 до 100%. Крайні точки відрізка осі абсцис відповідають чистим компонентам A і B . По осі ординат відкладається температура (або інший параметр, пов'язаний зі складом системи, наприклад, тиск).

Розглянемо точки діаграми, розміщені на горизонтальній прямій, тобто ті, які відповідають різному складу системи при певній температурі. У точці a система складається в основному з компоненти A з невеликою домішкою компоненти B і утворює одну фазу – розчин



мал. 8.9

останньої у компоненті A . При збільшенні концентрації компоненти B її вміст у розчині у деякій точці a' досягає насичення і починається розшарування системи. Точки S всередині заштрихованої області діаграми відповідають два шари. У точці b' один з шарів перестає існувати і в системі залишається лише одна фаза – насичений розчин компоненти A у компоненті B . У точці b система – це розчин компоненти A у компоненті B .

Точки на відрізках $\alpha'\alpha''$ і $\beta'\beta''$ утворюють вітки кривої розшарування. Вітка $\alpha'\alpha''$ є графіком залежності концентрації насиченого розчину B у A від температури, вітка $\beta'\beta''$ – аналогічним графіком для насиченого розчину A у B .

Якщо взаємна розчинність двох рідин зростає з температурою (мал. 8.9), то може наступити момент, коли їх змішування стане необмеженим. Тоді вітки кривої розшарування співпадуть у точці K , яка називається критичною точкою змішування.

Гранична температура, вище від якої система не розшаровується, називається критичною температурою змішування рідин. Відомі також системи з двома критичними точками – верхньою та нижньою одночасно.

8.4.2. Фазові переходи першого та другого роду

Ми розглянули переходи з рідкого і газоподібного стану в твердий, тобто кристалізацію, і зворотні – плавлення та возгонку. Раніше ми ознайомилися з випаровуванням та конденсацією.

При всіх цих фазових переходах тіло або виділяє, або поглинає енергію у вигляді прихованої теплоти відповідного переходу (теплота плавлення, теплота випаровування і т.д.).

8.4.2.1. Фазові переходи першого роду

Фазові переходи, які супроводжуються *стрибкоподібною зміною енергії* або інших величин, пов'язаних з енергією, наприклад, густини, називають *фазовими переходами першого роду*.

Для фазових переходів першого роду характерна стрибкоподібна, тобто така, що відбувається у дуже вузькому інтервалі, зміна властивостей речовини.

Отже, можна говорити про певну температуру переходу або точку переходу: точку кипіння, точку плавлення і т.д.

Температури фазових переходів залежать від зовнішнього параметра тиску p . При даній температурі рівновага фаз, між якими відбувається перехід, встановлюється при цілком певному тиску.

Лінія фазової рівноваги описується відомим нам рівнянням Клапейрона-Клаузіуса:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}.$$

При фазових переходах першого роду нова фаза не виникає відразу в усьому об'ємі. Спочатку утворюються зародки нової фази, які потім ростуть, поширюючись на весь об'єм (центри конденсації, центри кристалізації).

Якщо таких центрів немає, пара й рідина можуть перебувати у переохолодженому стані: можна, наприклад, тривалий час спостерігати чисту воду при температурі -10°C .

Проте трапляються фазові переходи, при яких стрибкоподібно змінюється не енергія або пов'язані з нею величини, а їх похідні по температурі. У такому випадку фазовий перехід здійснюється без виділення або поглинання прихованої теплоти.

8.4.2.2. Фазові переходи другого роду

Фазові переходи, які супроводжуються стрибкоподібними змінами похідної від енергії по температурі, називають фазовими переходами другого роду.

Фазовий перехід другого роду супроводжується стрибкоподібною зміною теплоємності $C = \frac{dU}{dT}$, де U – внутрішня енергія системи. Він також супроводжується стрибком коефіцієнта об'ємного розширення

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT}.$$

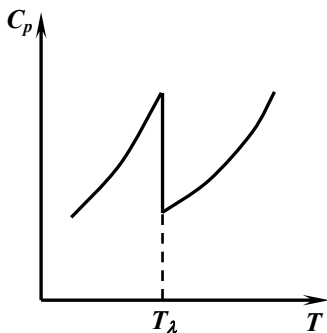
Типові приклади фазових переходів другого роду: перехід речовини з феромагнітного стану в неферомагнітний, що відбувається при цілком певній температурі, яка називається точкою Кюрі (для заліза ця температура дорівнює 750°C , для нікелю – 358°C , для гадолінію – 16°C); перехід ряду металів з нормального у надпровідний стан, при якому стрибком зникає електричний опір.

Фазові переходи другого роду можуть відбуватися лише у твердих тілах. Рідкий гелій є єдиним винятком з цього закону.

Фазовий перехід другого роду пов'язаний зі зміною симетрії розміщення частинок речовини.

Температура фазового переходу другого роду називається *точкою Кюрі* або λ -точкою.

Приклад. Те, що має місце фазовий перехід другого роду, виявляється при побудові кривої залежності теплоємності від температури. При фазовому переході другого роду вона має характерний вигляд, зображений на мал. 8.10.



мал. 8.10

У деякій точці $T = T_\lambda$ величина C_p різко зменшується, а потім знову зростає. Форма кривої нагадує грецьку букву λ і тому подібні точки називають λ -точками.

Такі ж стрибки спостерігаються і для деяких інших характеристик речовини, наприклад, для коефіцієнта теплового розширення, стисливості. Фазові переходи другого роду, звичайно, відбуваються між двома кристалічними фазами однієї і тієї ж

речовини і перехід полягає у зміні просторової ґратки речовини.

На відміну від фазових переходів першого роду, при фазових переходах другого роду структура ґратки змінюється неперервно. Підкреслимо, однак, що симетрія ґратки у точці переходу змінюється стрибком, так що завжди можна вказати, до якої саме з двох фаз належить тіло. У точці переходу другого роду стани обох фаз, на відміну від переходу першого роду, однакові.

Для прикладу розглянемо тіло, яке при низьких температурах кристалізується у тетрагональній ґратці, тобто у ґратці, коміркою якої є прямокутний паралелепіпед з квадратною основою (сторона квадрата a) і з висотою $c \neq a$. Припустимо, що $c > a$. У процесі теплового розширення ребра a можуть рости швидше ребра c . Тоді при деякій температурі ґратка стане кубічною ($c = a$). При цьому змінюється симетрія кристала, однак ґратка, по суті, не перебудовується.

Якщо при температурі вищій від T_λ кристал залишається кубічним, то при $T = T_\lambda$ настає перехід із зміною симетрії ґратки, але він відбувається поступово, без стрибкоподібної зміни стану кристала й без затрати тепла на перебудову ґратки.

Хоча самі характеристики тіла (внутрішня енергія, об'єм і ін.) у точці фазового переходу другого роду не зазнають стрибка, їх похідні (як уже говорилося) змінюються стрибкоподібно.

Це зумовлено тим, що при $T = T_\lambda$ змінюється характер температурної залежності згаданих величин. Так, наприклад, у кристалах кубічної симетрії нагрівання викликає тільки зміну об'єму кристалічної комірки і теплове розширення буде іншим, ніж у кристалах тетрагональної симетрії, у яких нагрівання супроводжується ще й зміною форми комірки. Тому коефіцієнт теплового розширення, який дорівнює $(dV/dT)_p$, у точці $T = T_\lambda$ має стрибок. Аналогічно стрибкоподібно змінюються стисливість $(dV/dp)_T$, теплоємність $(dE/dT)_p$ і т.д. Саме наявність стрибків похідних теплових характеристик тіла і є головною властивістю фазових переходів другого роду.

Запитання для самоконтролю

1. Які термодинамічні системи називаються гомогенними, а які гетерогенними?
2. Що називають фазою гетерогенної системи? Які бувають фази?
3. Яке правило сформулював Д. Гіббс? Запишіть та поясніть його.
4. При яких умовах фази перебувають у рівновазі?
5. Що називають фазовим переходом (перетворенням)?
6. Що називають поліморфним перетворенням?
7. Що називають фазовою діаграмою? Наведіть приклади фазових діаграм.
8. Що називають потрійною точкою? Намалуйте фазову діаграму для води та вуглекислоти. Поясніть їх.
9. У чому полягає аномалія води? Намалуйте фазову діаграму сірого чавуну та поясніть її.
10. Запишіть рівняння Клапейрона-Клаузіуса. Як залежить температура фазового переходу від тиску?
11. Запишіть рівняння Клапейрона-Клаузіуса для процесу плавлення. Намалуйте фазову діаграму цього процесу та поясніть її.
12. Чим відрізняється процес кристалізації від процесу плавлення?

13. Сформулюйте закон Кюрі для процесу кристалізації. Від чого залежить швидкість росту кристала на різних його гранях?
14. Сформулюйте закон Кюрі-Вульфа та поясніть його.
15. Що називається поліморфізмом? Намалуйте діаграму стану сірки та поясніть її.
16. Що називається поліморфним перетворенням? Чим відрізняється сіре олово від білого при поліморфних перетвореннях?
17. Які фазові переходи називаються першого роду, а які другого? Наведіть приклади.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Авогадро **167, 169, 170**

Бернуллі **97**

Бойль **169**

Больцман **167, 170, 176, 188**

Бюргерс **333**

Ван дер Ваальс **266, 272**

Галілей **114**

Гук **36**

Гей-Люссак **169, 223**

Гельмгольц **207**

Гіббс **351**

Дальтон **170, 203**

Дебай **347**

Дюлонг **344**

Джоуль **207, 223, 279**

Ейнштейн **31, 55, 122, 345**

Жуковський **109**

Йоффе **334**

Капіца **314**

Карно **234, 238**

Кельвін **256**

Кеплер **53**

Коріоліс **28**

Клапейрон **169, 358**

Клаузіус **167, 240, 256, 358**

Кюри **362**

Лаплас **305**

Лінде **283**

Лоренц **114**

Магнус **108**

Максвелл **167, 180**

Мещерський **31**

Майєр **207, 217**

Маріотт **169**

Менделєєв **169**

Нернст **260**

Ньютон **18, 20, 22, 36, 52, 196**

Оствальд **256**

Пуазейль **102**

Планк **256**

Пті **344**

Пуасон **226**

Реомюр **177**

Рейнольдс **53, 103**

Стокс **52, 105**

Томсон **234, 256, 279**

Фаренгейт **177**

Фік **203**

Фур'є **200**

Ціолковський **31**

Шарль **169**

Шотткі **331**

Штейнер **81**

Штерн **179**

Юнг **37, 305**

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Адсорбція **335**
Амплітуда коливань **128, 130**
Абсолютно тверде тіло **4, 75**
Анізотропія **268, 319, 329**

Бернуллі рівняння **96**
Броунівський рух **165**
Бюргерса вектор **333**
 контур **333**

Вага тіла **30**
Вихор **106**
Векторна діаграма **133**
Вільна поверхня **298, 305**
Вісь симетрії **321**
 поворотно-дзеркальна **322**
Вічний двигун
 першого роду **215**
 другого роду **256**
Внутрішня енергія
 ідеального газу **209, 223**
 реального газу **278**
Внутрішнє тертя **196**
Вологість повітря **288**
 відносна **289**
В'язкість **52, 196**

Гігрометр **290**
Галілея перетворення **114**
Гістерезис **44**
Гравітаційна стала **54**
Густина енергії **153**
Гратка Браве **324**

Дифузія **164, 202**
Довжина вільного пробігу **189**
Дослід Штерна **178**
Декремент загасання **141**
Деформація **35**
 Деформація кручення **36, 40**
 Деформація розтягу **36, 37**
 Деформація зсуву **36, 39**
 Довжина хвилі **146, 151**
 Добротність **141**
 Дефекти точкові **331**
 лінійні (дислокації) **332**

Енергія кінетична **60**
Енергія потенціальна **57, 65**
Енергія пружної деформації **45**
Ентальпія **216**
Ентропія **239**
Ефект Джоуля-Томсона **279**
 Рейбіндера **335**

Замкнута система **59**
Закон Авогадро **170**
 Бойля-Маріотта **169**
 всесвітнього тяжіння **53**
 Гей-Люссака **169**
 Гаука **36**
 Дальтона **170**
 Дебая **348**
 додавання швидкостей:
 нерелятивістський **113**
 релятивістський **113, 120**
 Дюлонга і Пті **344**
 збереження енергії **67, 214**
 збереження імпульсу **23**
 збереження моменту імпульсу **88**
 зростання ентропії **247**
 Кюрі-Вульфа **362**
 Ньютона **18, 20, 23, 99, 196**
 Фіка **203**
 Фур'є **200**
 Шарля **169**
Змочування **303**

- Імпульс **20**
- Імпульс системи **24**
- Інертність **18**
- Інерція **18**
- Інтерференція хвиль **155**
- Ідеальний газ **166**
- Ізопроееси **222**
- Індекси Міллера **325**

- Кипіння **287**
- Кількість речовини **167**
- Кількість теплоти **200, 210**
- Класи симетрії **323**
- Коефіцієнт внутрішнього тертя
 - 52, 200, 312**
 - дифузії **204, 312**
 - корисної дії **236**
 - поверхневого натягу **299**
 - пружності **38**
 - теплопровідності **45, 208**
- Коливання вимушені **141**
- Коливання загасаючі **139**
- Коливання гармонічні **128**
- Коливання вільні **138**
- Коріоліса сила **28**
- Когерентність **155**
- Космічна швидкість: перша **71**
 - друга **71**
 - третя **72**
- Кристали атомні **327**
 - іонні **327**
 - металічні **328**
 - молекулярні **328**
- Критичний стан **271**
- Критичні параметри **277**
- Коефіцієнт в'язкості **52, 97**
- Коефіцієнт тертя **50**

- Лінії течії **92**
- Логарифмічний декремент загасання **141**

- Машина Лінде **283**
- Молекулярно-кінетична теорія **164, 167**
- Молярна маса **167**
- Монокристали **329**
- Матеріальна точка **4**
- Маятник: математичний **129**
 - фізичний **132**
 - пружинний **131**
- Момент: імпульсу **86**
 - інерції **80**
 - сили **77**
- Модуль зсуву **40**
- Модуль Юнга **38**

- Нерівність Клаузіуса **241**
- Напруженість поля **56**
- Набла-оператор **64**

- Обертон **160**
- Однорідність: часу **59**
 - простору **59**

- Площина симетрії **321**
- Поверхневий натяг **298**
- Полікрystalи **330**
- Поліморфізм **353, 363**
- Потрійна точка **355**
- Правило фаз Гіббса **350**
- Переміщення **7**
- Період коливань **16, 128**
- Період загасаючих коливань **140**
- Період коливань маятника:
 - математичного **131**
 - фізичного **133**
 - пружинного **132**
- Плече сили **78**

- Потік ламінарний **53, 102**
 стаціонарний **92**
 турбулентний **53, 102**
- Потужність **63**
- Потік енергії **153**
- Правило правого гвинта **12**
- Прискорення **10**
 кутове **13**
 сили тяжіння **54**
- Пучність стоячої хвилі **196**
- Процес адіабатний **225**
 ізобарний **224**
 ізотермічний **224**
 ізохорний **222**
 необоротний **244**
 оборотний **244**
 політропний **228**
- Пружність водяної пари **288**
- Психрометр **290**
- Реальний газ **262**
- Рівняння Ван дер Ваальса **272**
 Клапейрона-Клаузіуса **357**
 Майєра **217**
 Менделєєва-Клапейрона **170**
 молекулярно-кінетичної теорії **172**
 неперервності **93**
 Пуассона **226**
- Рідкі кристали **314**
- Розподіл Максвелла **180**
 Максвелла-Больцмана **189**
- Робота **45, 57, 61, 90, 211, 222, 236**
- Радіус-вектор **7**
- Резонанс механічний **143**
- Рейнольдса число **53, 104**
- Сила **21**
 інерції **27**
 лобового опору **52, 104, 107**
 підймальна крила **108**
 консервативна **65**
 тертя кочення **50**
 тертя спокою **47**
 тертя ковзання **49**
 тяжіння **54**
- Ступені вільності **69, 159, 218**
- Система відліку: інерціальні **18**
 неінерціальна **19**
- Стала Авогадро **167**
 Больцмана **176**
- Стан системи рівноважний **208**
 нерівноважний **208**
- Теорема про нерозривність струмини **93**
- Теорема Нернста **259**
 Штейнера **81**
- Тиск **166**
 парціальний **170, 203**
- Температура кипіння **282, 288**
 інверсії **281**
 Дебая **348**
- Теплопровідність **200, 247, 341**
- Теплоємність газу **217**
 твердого тіла **343**
- Термічний коефіцієнт розширення **293**
- Термодинамічна система **350**
 гомогенна **350**
 гетерогенна **350**
- Точка роси **289**
 Кюрі **367**
- Трубка течії **93**

- Умова-Пойтінга вектор **151**
- Універсальна газова стала **169, 171, 217**
- Фаза коливання **16**
- Фронт хвилі **147**
- Фазова діаграма **287**
 - рівновага **351**
- Фазовий перехід
 - першого роду **366**
 - другого роду **367**
- Хвиля:
 - біжуча **145, 149**
 - відбита **157**
 - плоска **147, 149**
 - повздовжня **147**
 - поперечна **147**
 - стояча **157**
- Центр симетрії **322**
- Цикл Карно **234**
- Центр мас (інерції) **24**
- Циклічна частота **16, 128**
- Число ступенів вільності **218**
- Частота коливань **16, 130**
 - резонансна **144**
- Частоти власних коливань струни **159**
- Швидкість молекул
 - найімовірніша **185**
 - середня (арифметична) **185**
 - середня квадратична **185**
- Швидкість миттєва **7**
 - кутова **13**
 - лінійна **14**
- Явища переносу **196**

ЛІТЕРАТУРА

1. Богацька І.Г., Головка Д.Б. Загальні основи фізики. У 2-х кн. Кн. 1. Механіка. Термодинаміка та молекулярна фізика. – К.: Либідь, 1998. – 192 с.
2. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Вища школа, 2002. – 375 с.
3. Бушок Г.Ф., Півень Г.Ф. Курс фізики. Ч.1. Механіка, молекулярна фізика, термодинаміка, електрика і магнетизм. – К.: Вища школа, 1969. – 428 с.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1985. – 382 с.
5. Гаркуша І.П. та ін. Загальний курс фізики. Збірник задач. – К.: Техніка, 2003. – 560 с.
6. Головка Д.Б., Ментковський Ю.Л. Загальні основи фізики: Термодинаміка, молекулярна фізика. – К.: Либідь, 1993. – 112 с.
7. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: К.: Вища школа, 1993. – 540 с.
8. Загальна фізика. Лабораторний практикум: Навчальний посібник для педагогічних інститутів / за заг. ред. Горбачука І.Т. – К.: Вища школа, 1992. – 509 с.
9. Загальний курс фізики у трьох томах. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Навчальний посібник. Друге видання, виправлене / за ред. Кучерука І.М. – К.: Техніка, 2007. – 532 с.
10. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Т. 2. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. Изд. 6-е. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
11. Кікоїн І.К., Кікоїн А.К. Молекулярна фізика. – К.: Рад. школа, 1968. – 476 с.
12. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. Т. 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Техніка, 2006. – 536 с.
13. Матвеев А.Н. Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1987. – 360 с.

14. Нечволод М.К., Голоденко М.М., Прун А.Ф. Курс фізики. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. Навчальний посібник. – К.: Просвіта, 2001. – 228 с.
15. Нечволод М.К., Голоденко М.М., Прун А.Ф. Курс фізики. Запитання і задачі. Навчальний посібник. – К.: Просвіта, 2001. – 232 с.
16. Перышкин А.В. Курс физики. Ч.2. Механика, теплота и молекулярная физика. – М.: Просвещение, 1967. – 240 с.
17. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 1987. – 432 с.
18. Сивухин Д.В. Общий курс, физика. Т.2. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
19. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа. 1981. – 496 с.
20. Яворський Б.М., Детлаф А.А., Милковська Л.В. Курс фізики. Т.1. – К.: Вища школа, 1978. – 468 с.

Навчально-методичне видання

Молекулярна фізика і термодинаміка. Тексти лекцій

Редакційно-видавничий відділ

**Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Редактор
Іванна Біблій

Технічний редактор
Наталя Кізима

Коректор
Світлана Бецько

Здано до набору 05.05.2011. Підписано до друку 14.06.2011.
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим.
Ум. друк. арк. 21,9. Зам. 190.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК №2155 від 12.04.2005).

82100 Дрогобич, вул. І. Франка, 24, к. 43, тел. 2-23-78.

