

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ**

Розділ 2

Елементи математичної логіки

Дрогобич, 2024

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Розділ 2

Елементи математичної логіки

*Навчально-методичний посібник для підготовки здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань 01 Освіта/ Педагогіка
спеціальності 013 Початкова освіта
Освітні програми: Початкова освіта та інформатика.
Початкова освіта та англійська мова*

Дрогобич, 2024

УДК 510 (08)

Б. 61

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 3 від 21 березня 2024 року)

Рецензенти:

Війчук Тарас Іванович, доцент, завідувач кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат педагогічних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

Комарницька Леся Іванівна, доцент кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат фізико-математичних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

Відповідальний за випуск:

Ковальчук В.Ю., завідувач, професор кафедри фундаментальних дисциплін початкової освіти факультету початкової освіти та мистецтва, доктор педагогічних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

Теоретичні основи початкового курсу математики. Розділ 2. Елементи математичної логіки. Дрогобич: Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2024. 88 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Теоретичні основи початкового курсу математики» для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта/ Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта. Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова денної та заочної форм здобуття освіти. У ньому вміщено теоретичний та практичний блоки з розділу «Елементи математичної логіки». Посібник містить виклад основних положень розділу, які розкриваються через конкретні приклади. Запропонована у посібнику система вправ підібрана відповідно до вимог програми дисципліни з метою забезпечення високого рівня сформованості компетентностей студентів.

Бібліографія: 9 назв.

Зміст

Вступ	5
Тексти лекцій	6
1. Висловлювання та операції над ними	6
1.1. Поняття висловлювання. Значення істинності висловлювань	6
1.2. Прості та складені висловлювання. Логічні зв'язки. Логічна структура висловлювань	11
1.3. Операції над висловлюваннями	13
1.4. Закони операцій над висловлюваннями	18
2. Предикати та операції над ними	24
2.1. Поняття предиката. Множина визначення і множина істинності предиката. Тотожно істинні, тотожно хибні, рівносильні предикати	24
2.2. Операції над предикатами та їх множини істинності	28
2.3. Квантори та їх види	35
2.4. Квантифікація предикатів	38
2.5. Заперечення тверджень з кванторами	41
2.6. Логічний наслідок. Рівносильні предикати	42
2.7. Необхідні і достатні умови	43
3. Теореми	45
3.1. Теорема та її будова. Прості і складені теореми	45
3.2. Види теорем. Побудова логічного квадрата	47
Тематика лекцій	51
Теми практичних занять	52
Завдання для практичних занять та самостійної роботи	53
Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи	79
Типовий варіант контрольної роботи	80
Питання для самоконтролю та підготовки до екзамену	81
Список використаної літератури	83
Предметний покажчик	84

Вступ

Навчальна дисципліна «Теоретичні основи початкового курсу математики» передбачена як обов'язковий компонент освітньо-професійної програми для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта / Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта (Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова) денної та заочної форм здобуття освіти.

Відповідно до затвердженої робочої програми вивчення цієї дисципліни містить розділ 2 «Елементи математичної логіки». У ньому розглядаються важливі поняття математичної логіки: висловлювання і предикати, операції над ними (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція); основні логічні закони; теореми, їх будова та види. Теоретичний виклад матеріалу ілюструється розв'язанням основних типових вправ відповідно до програми.

Вивчення елементів математичної логіки сприяє підвищенню загальної логічної грамотності здобувачів, їх умінню правильно будувати речення – висловлювання, здійснювати логічні міркування, обґрунтовувати умовиводи, формулювати теореми, добирати шляхи аргументації правильності логічних міркувань та доведення певних фактів і тверджень.

Теоретичний виклад матеріалу ілюструється розв'язанням основних типових вправ про основні поняття математичної логіки.

У запропонованому навчально-методичному посібнику подано тематику та тексти лекцій, теми практичних занять, завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів, методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи, типовий варіант контрольної роботи, перелік питань для самоконтролю та підготовки до екзамену, список використаної літератури, предметний покажчик.

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

1. Висловлювання та операції над ними

1.1. Поняття висловлювання. Значення істинності висловлювань

Пізнаючи довколишній світ, кожна людина встановлює певні істини про співвідношення між об'єктами та їх властивості, які виражаються у вигляді розповідних речень.

Означення. *Висловлюванням* називається речення, у якому щось стверджується, і про яке можна сказати або дізнатися, істинне воно чи хибне.

Наприклад, твердження « $12 : 4$ », «Число -3 є розв'язком рівняння $x + 3 = 0$ », «Довільні три точки визначають площину» є висловлюваннями, бо у цих реченнях стверджуються певні факти та можна чітко встановити, істинні ці твердження чи хибні. Подані вище висловлювання є істинними.

Висловлювання «Груші досягають у лютому», «Париж – столиця Нідерландів», «Через одну точку можна провести єдину пряму» є прикладами хибних висловлювань.

У загальному випадку **висловлюваннями є:**

- *стверджувальні та розповідні речення (наприклад, «Дніпро впадає у Чорне море», «Січень має 30 днів»);*
- *числові рівності (наприклад, « $7 + 2 = 9$ », « $20 - 8 = 10$ »);*
- *числові нерівності (наприклад, « $12 < 15$ », « $3 + 9 > 17$ »);*
- *твердження, записані математичними символами, для яких можна визначити їх виконання (наприклад, « $a \cdot 1 = a$ », « $|a| \geq 0$ »).*

Твердження « $x - 4 = 9$ » не є висловлюванням, бо при певних значеннях змінної x воно перетворюється в істинну числову рівність, тобто є істинним висловлюванням, а при інших – у хибну числову рівність, тобто є хибним висловлюванням.

У реченнях на зразок «Хай щастить!», «Агов!», «Зачиніть двері», «О котрій годині почався концерт?» нічого не стверджується, тому вони теж не є висловлюваннями.

У загальному випадку **не є висловлюваннями:**

- окличні, спонукальні та запитальні речення (наприклад, «Яка гарна в тебе коса!», «Поставте вазу з квітами на стіл», «Як справи?»);
- числові вирази (наприклад, $(36 - 10) : 2$);
- вирази зі змінною (наприклад, $4x + 7$);
- рівняння (наприклад, $12 + 3x = 21$);
- нерівності зі змінними (наприклад, $6 - x < 10$);
- твердження, записані математичними символами, для яких не можна визначити їх справедливості (наприклад, $a \parallel b$).

Висловлювання позначають великими буквами латинського алфавіту: *A, B, C* і т.д.

Кожне висловлювання має лише одне **значення істинності:**

- якщо висловлювання є істинним, то йому присвоюється значення істинності «**істина**», яка позначається **символом 1**;
- якщо висловлювання є хибним, то йому присвоюється значення істинності «**хиба**», яка позначається **символом 0**.

Отже, висловлювання може бути або істинним (1), або хибним (0).

Приклад 1. Серед поданих тверджень визначити висловлювання і вказати його значення істинності:

- а) «При діленні числа 40 на 7 утворюється остача 4»;
- б) «У довільного ромба діагоналі взаємно перпендикулярні»;
- в) $x + 5 = 11$;
- г) $21 - 7 = 14$;
- д) $x : 5$;
- е) «Побудуйте трикутник»;

є) «Коли у тебе день народження?»;

ж) « $28 + 15$ »;

з) « $14 - 3x$ »;

и) « $x > 10$ »;

і) «Київ – столиця України»;

ї) « $23 + 30 = 50$ »;

ж) « $2 - 30 > 10$ »;

з) « $5 \geq 5$ »;

к) « $a \cdot 0 = 0$ »;

л) «Чудовий ранок!»;

м) «Ти підеш з нами у театр?»;

н) «Прочитайте вголос повідомлення»;

о) « $6x > 12$ »;

п) « $a \in A$ »

Розв'язання. Використовуючи означення поняття висловлювання, робимо такі висновки:

а) є висловлюванням, бо це розповідне речення; висловлювання хибне (0);

б) є висловлюванням, бо це відома теорема; висловлювання істинне (1);

в) не є висловлюванням, бо це рівняння з однією змінною;

г) є висловлюванням, бо це числова рівність; висловлювання істинне (1), бо це правильна числова рівність;

д) не є висловлюванням, бо це речення, яке містить змінну;

е) не є висловлюванням, бо це спонукальне речення;

є) не є висловлюванням, бо це запитальне речення;

ж) не є висловлюванням, бо це числовий вираз;

з) не є висловлюванням, бо це вираз зі змінною;

и) не є висловлюванням, бо це нерівність зі змінною;

і) є висловлюванням, бо це розповідне речення; висловлювання істинне (1);

- ї) є висловлюванням, бо це числова рівність; висловлювання хибне (0), бо це неправильна числова рівність;
- ж) є висловлюванням, бо це числова нерівність; висловлювання хибне (0), бо це неправильна числова нерівність;
- з) є висловлюванням, бо це числова нерівність; висловлювання істинне (1), бо це правильна числова нерівність;
- к) є висловлюванням, висловлювання істинне (1), бо це відома властивість множення чисел;
- л) не є висловлюванням, бо це окличне речення;
- м) не є висловлюванням, бо це запитальне речення;
- н) не є висловлюванням, бо це спонукальне речення;
- о) не є висловлюванням, бо це нерівність зі змінною;
- п) не є висловлюванням, бо правильність цього факту не можна встановити.

Приклад 2. Вказати значення істинності наступних висловлювань:

A: «Після літа настає осінь»;

B: « $15 - 3 > 16$ »;

C: «У довільного квадрата діагоналі рівні»;

M: « $|x| < 0$ »;

K: «Березень, квітень, травень – весняні місяці»;

P: « $45 : 5 = 8$ ».

D: «12 – парне число»;

Q: «45 ділиться на 8 з остачею 5»;

L: « $-13 \leq 16$ »;

N: « $36 + 5 = 42$ »;

G: «2024 рік є високосним роком»;

F: «Середа є третім днем тижня»;

H: «Тарас Шевченко є автором поеми «Гайдамаки»;

J: «Лютий є найкоротшим місяцем року»;

I: « $6 \cdot (10 + 5) = 100$ »;

O: « $-3 > 6$ »;

W: «13 є простим числом»;

T: « $6 - 20 = 26$ »;

V: « $15 + 3 > 16 - 1$ »;

C: «число 3 є єдиним дільником числа 9»;

E: «Розгорнутий кут має 180 градусів».

Розв'язання.

A – висловлювання істинне (1),

B – висловлювання хибне (0),

C – висловлювання істинне (1),

M – висловлювання хибне (0),

K – висловлювання істинне (1),

P – висловлювання хибне (0),

D – висловлювання істинне (1),

Q – висловлювання істинне (1),

L – висловлювання істинне (1),

N – висловлювання хибне (0),

G – висловлювання істинне (1),

F – висловлювання істинне (1),

H – висловлювання істинне (1),

J – висловлювання істинне (1),

I – висловлювання хибне (0),

O – висловлювання хибне (0),

W – висловлювання істинне (1),

T – висловлювання хибне (0),

V – висловлювання істинне (1),

C – висловлювання хибне (0),

E – висловлювання істинне (1).

1.2. Прості та складені висловлювання. Логічні зв'язки.

Логічна структура висловлювань

Означення. Висловлювання називається **простим**, якщо воно не містить у собі ніяких інших висловлювань.

Наприклад, «Число 25 – двоцифрове» – просте висловлювання.

Означення. Слова та словосполучення «не», «і», «або», «якщо ..., то ...», «..., тоді і тільки тоді, коли ...» називаються **логічними зв'язками**.

Означення. Висловлювання називається **складеним**, якщо воно складається з двох або більше простих висловлювань, які з'єднані між собою логічними зв'язками.

Висловлювання мають певну будову, тому для них визначають **логічну структуру**. Для цього треба знати, скільки і які прості висловлювання містить складене висловлювання та якими логічними зв'язками воно утворене з цих простих висловлювань.

Наприклад, складене висловлювання « $32 : 8$ і 31 – непарне число» складається з двох простих висловлювань A : « $32 : 8$ », B : « 31 – непарне число». Вони з'єднані логічним зв'язком «і», тому його логічну структуру можна символічно записати так: « A і B ».

Приклад 1. Серед поданих висловлювань вказати прості і складені:

A : «9 – натуральне число»;

B : «Якщо у ромбі всі кути прямі, то він є квадратом»;

C : «Числа 2 і -2 є розв'язками рівняння $x^2 = 4$ »;

K : « $20 < 4$ ».

M : «Трикутник є рівностороннім, тоді і тільки тоді, коли його сторони є рівними»,

P : «25 є непарним і простим числом»,

Q : «54 ділиться на 8»,

L : «18 є складеним числом»,

N : « $6 + 23 = 29$ ».

Розв'язання. Висловлювання A , K , Q , L і N є простими. Висловлювання B , C , M і P є складеними, бо складаються з двох простих висловлювань, які з'єднані певним логічним зв'язком.

Приклад 2. Визначити логічну структуру поданих висловлювань:

- а) «Число 10 є раціональним і складеним»;
- б) «Якщо кути вертикальні, то вони рівні»;
- в) «В 1 т є 10 ц або 1000 кг»;
- г) «Рік має не більше 366 днів»;
- д) «Число ділиться на 4, тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2».
- е) «24 ділиться на 3 і на 8»;
- є) «Якщо діагоналі прямокутника рівні, то він є квадратом»;
- ж) «18 ділиться на 6, тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 2 і 3»;
- з) «35 ділиться на 7 або на 6»;
- и) «Число 3 не є коренем рівняння $x + 17 = 24$ ».

Розв'язання.

- а) « A і B », де A : «10 є раціональним числом», B : «10 є складеним числом»;
- б) «Якщо X , то Y », де X : «Кути є вертикальні», Y : «Кути є рівні»;
- в) « X або Y », де X : «В 1 т є 10 ц», Y : «В 1 т є 1000 кг»;
- г) «не C », де C : «Рік має більше 366 днів»;
- д) « A , тоді і тільки тоді, коли B », де A : «Число ділиться на 4»,
 B : «Число ділиться на 2».
- е) « A і B », де A : «24 ділиться на 3», B : «24 ділиться на 8»;
- є) «Якщо X , то Y », де X : «Діагоналі прямокутника рівні»,
 Y : «Прямокутник є квадратом»;
- ж) « A , тоді і тільки тоді, коли B або C », де A : «18 ділиться на 6»,
 B : «18 ділиться на 2», C : «18 ділиться на 3»;
- з) « A або B », де A : «35 ділиться на 7», B : «35 ділиться на 6»;
- и) «не B », де B : «число 3 є коренем рівняння $x + 17 = 24$ ».

1.3. Операції над висловлюваннями

Означення 1. *Запереченням висловлювання A називається складене висловлювання «не A » (позначається $\bar{A}$), яке істинне тоді і тільки тоді, коли A є хибним висловлюванням, і навпаки.*

Таблиця істинності для заперечення висловлювання A має вигляд:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Наприклад, висловлювання «Число 30 **не** є простим» є істинним, бо просте висловлювання «Число 30 є простим» є хибним.

Висловлювання «Варшава не є столицею Польщі» є хибним, бо висловлювання «Варшава є столицею Польщі» є істинним.

Означення 2. *Кон'юнкцією двох висловлювань A і B називається складене висловлювання « A і B » (позначається $A \wedge B$), яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A і B є істинними.*

Таблиця істинності для кон'юнкції двох висловлювань A і B має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

З таблиці істинності для кон'юнкції двох висловлювань бачимо, що:

- вона буде істинною лише в одному випадку, коли кожне з обидвох простих висловлювань буде істинним;
- вона буде хибною у тих випадках, коли хоча б одне з простих висловлювань буде хибним.

Наприклад, висловлювання «40 – парне і двоцифрове число» є істинним, бо воно є кон'юнкцією двох істинних простих висловлювань «40 – парне число» і «40 – двоцифрове число».

Висловлювання « $8 : 0 = 8$ і $8 \cdot 0 = 0$ » є хибним, бо воно є кон'юнкцією хибного простого висловлювання « $8 : 0 = 8$ » та істинного простого висловлювання « $8 \cdot 0 = 0$ ».

Висловлювання «40 – непарне і трицифрове число» хибним, бо воно є кон'юнкцією двох хибних простих висловлювань «40 – непарне число» і «40 – трицифрове число».

Означення 3. Диз'юнкцією двох висловлювань A і B називається складене висловлювання « A або B » (позначається $A \vee B$), яке хибне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A і B є хибними.

Таблиця істинності для диз'юнкції двох висловлювань A і B має вигляд:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

З таблиці істинності для диз'юнкції двох висловлювань бачимо, що:

- вона буде хибною лише в одному випадку, коли кожне з обидвох простих висловлювань буде хибним;
- вона буде істинною у тих випадках, коли хоча б одне з простих висловлювань буде істинним.

Наприклад, висловлювання « $63 : 7$ або $32 : 8$ » є істинним, бо воно є диз'юнкцією двох істинних простих висловлювань « $63 : 7$ » і « $32 : 8$ ».

Висловлювання « $33 : 9$ або $36 : 6$ » є істинним, бо воно є диз'юнкцією хибного простого висловлювання « $33 : 9$ » та істинного простого висловлювання « $36 : 6$ ».

Висловлювання « $33 \div 9$ або $20 \div 3$ » є хибним висловлюванням, бо воно є диз'юнкцією двох хибних простих висловлювань « $33 \div 9$ » і « $20 \div 3$ ».

Поняття кон'юнкції та диз'юнкції висловлювань поширюється на три і більше висловлювань, бо кон'юнкція та диз'юнкція двох висловлювань теж є висловлюванням.

Означення 4. Імплікацією двох висловлювань A і B називається складене висловлювання «Якщо A , то B » (позначається $A \Rightarrow B$), яке хибне тоді і тільки тоді, коли висловлювання A є істинним, а висловлювання B є хибним.

Означення 5. Для імплікації $A \Rightarrow B$ висловлювання A називається умовою імплікації, а висловлювання B – висновком імплікації.

Таблиця істинності для імплікації двох висловлювань A і B має вигляд:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

З таблиці істинності для імплікації двох висловлювань бачимо, що:

- вона буде хибною лише в одному випадку, коли умова імплікації буде істинним висловлюванням, а висновок імплікації – хибним;
- вона буде істинною у тих випадках, коли умова імплікації буде хибним висловлюванням (незалежно від значення істинності висновку імплікації), або коли і умова, і висновок імплікації обоє будуть істинними висловлюваннями.

Наприклад, висловлювання «Якщо $3 < 8$, то $-3 < -8$ » є хибним, бо умова імплікації є істинним висловлюванням, а висновок імплікації є хибним висловлюванням.

Висловлювання «Якщо $3 < -8$, то $-3 < 8$ » є істинним, бо умова імплікації « $3 < -8$ » є хибним простим висловлюванням, а висновок імплікації « $-3 < 8$ » є істинним висловлюванням.

Висловлювання «Якщо $y = x$ є непарною функцією, то число 5 кратно числу 5» є істинним висловлюванням, бо і умова імплікації – просте висловлювання « $y = x$ є непарною функцією», і висновок імплікації – просте висловлювання «число 5 кратно числу 5» обое є істинними висловлюваннями (хоча між ними очевидного смислового зв'язку не існує).

Означення 6. Якщо задана (пряма) імплікація має вигляд $A \Rightarrow B$, то $B \Rightarrow A$ називається *оберненою імплікацією до заданої*,
 $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ називається *протилежною імплікацією до заданої*,
 $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ називається *імплікацією, протилежною до оберненої, або оберненою до протилежної*.

Усі згадані імплікації називаються **видами імплікацій**, яких є чотири.

Наприклад, нехай задано імплікацію $A \Rightarrow B$: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» (1). Умова імплікації – A : «Кути є вертикальними», висновок імплікації – B : «Кути є рівними». До заданої імплікації (1) вид імплікації) можна побудувати ще три види імплікацій, які можуть бути як істинними, так і хибними:

- 2) $B \Rightarrow A$: «Якщо кути є рівними, то вони є вертикальними» (0).
- 3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$: «Якщо кути не є вертикальними, то вони не є рівними» (0).
- 4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$: «Якщо кути не є рівними, то вони не є вертикальними» (1).

Означення 7. Еквіваленцією двох висловлювань A і B називається складене висловлювання « A , тоді і тільки тоді, коли B » (позначається $A \Leftrightarrow B$), яке є істинним, тоді і тільки тоді, коли обидва висловлювання A і B набувають однакових значень істинності, тобто, вони обое є одночасно або істинними, або хибними висловлюваннями.

Таблиця істинності для еквіваленції двох висловлювань A і B має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

З таблиці істинності для еквіваленції двох висловлювань бачимо, що:

- вона буде істинною лише у тих випадках, коли обидва прості висловлювання будуть одночасно або істинними, або хибними;
- вона буде хибною лише у тих випадках, коли одне з простих висловлювань буде істинним, а інше – хибним.

Наприклад, еквіваленція « $4 < 9$, тоді і тільки тоді, коли $-4 < -9$ » є хибним висловлюванням, бо перше просте висловлювання « $4 < 9$ » є істинним, а друге просте висловлювання « $-4 < -9$ » є хибним.

Еквіваленція «Функція $y=x$ є непарною, тоді і тільки тоді, коли число 7 є простим» є істинним висловлюванням, бо обидва прості висловлювання «Функція $y=x$ є непарною» і «Число 7 є простим» є істинними (хоча між ними не існує очевидного смислового зв'язку).

Приклад. Над простими висловлюваннями A і B виконати всі можливі операції, сформулювати отримані висловлювання і встановити їх значення істинності, якщо A : « $4 > 3$ », B : « $8 < 6$ ».

Розв'язання. Знайдемо значення істинності заданих простих висловлювань: A : « $4 > 3$ » (1), B : « $8 < 6$ » (0). Утворимо з них усі можливі складені висловлювання, встановимо за означеннями їх значення істинності:

$\bar{A}$: «4 не більше 3» (0).

$\bar{B}$: «8 не менше 6» (1).

$A \wedge B$: « $4 > 3$ і $8 < 6$ » (0).

$A \vee B$: « $4 > 3$ або $8 < 6$ » (1).

$A \Rightarrow B$: «Якщо $4 > 3$, то $8 < 6$ » (0).

$B \Rightarrow A$: «Якщо $8 < 6$, то $4 > 3$ » (1).

$A \Leftrightarrow B$: « $4 > 3$, тоді і тільки тоді, коли $8 < 6$ » (0).

1.4. Закони операцій над висловлюваннями

1. Комутативний закон (переставний):

$$A \vee B = B \vee A \quad (\text{для диз'юнкції});$$

$$A \wedge B = B \wedge A \quad (\text{для кон'юнкції}).$$

2. Асоціативний закон (сполучний):

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) \quad (\text{для диз'юнкції});$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \quad (\text{для кон'юнкції}).$$

3. Дистрибутивний закон (розподільний):

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad (\text{для кон'юнкції відносно диз'юнкції});$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (\text{для диз'юнкції відносно кон'юнкції}).$$

$$4. \text{ Закон виключення третього: } A \vee \bar{A} = 1.$$

$$5. \text{ Закон несуперечливості: } A \wedge \bar{A} = 0.$$

$$6. \text{ Закон ідемпотентності: } A \wedge A = A, \quad A \vee A = A.$$

$$7. \text{ Закони де Моргана: } \overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}, \quad \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}.$$

$$8. \text{ Закон подвійного заперечення: } \overline{\bar{A}} = A.$$

$$9. \text{ Закон тотожності: } A = A.$$

$$10. \quad A \vee 0 = A, \quad A \wedge 1 = A.$$

$$11. \quad A \vee 1 = 1; \quad A \wedge 0 = 0.$$

$$12. \text{ Закон контрапозиції: } A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

$$13. \text{ Закон силізму: } (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) = (A \Rightarrow C).$$

$$14. \text{ Зв'язок імплікації з диз'юнкцією і запереченням: } A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B.$$

Істинність або хибність рівностей про прості висловлювання та операції над ними доводяться за допомогою **складання таблиць істинності**.

Зауважимо, що якщо складене висловлювання утворюється з n простих висловлювань, то всього існує 2^n різних можливих **наборів значень простих висловлювань**:

1. для складеного висловлювання з одного простого висловлювання існує $2^1 = 2$ – **два різні можливі набори значень** простих висловлювань (таблиця істинності заперечення),
2. для складеного висловлювання з двох простих висловлювань існує $2^2 = 4$ – **чотири різні можливі набори значень** простих висловлювань (таблиці істинності для кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції),
3. для складеного висловлювання з трьох простих висловлювань, існує $2^3 = 8$ – **вісім різних можливих наборів значень** простих висловлювань і т.д.

Означення. Два складені висловлювання називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо вони набувають одних і тих же значень істинності (1 або 0) на всіх можливих наборах значень істинності простих висловлювань, з яких вони складаються.

Приклад 1. Довести тотожність: $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$.

Розв'язання. Доведемо цю тотожність за допомогою складання таблиці істинності. Ця тотожність містить два прості висловлювання A і B , тому в таблиці істинності буде чотири різні можливі набори значень простих висловлювань, тобто чотири рядки. Стовпці утворюються відповідно до порядку виконання операцій у лівій та правій частинах рівності, причому у одному стовпці лише одна операція.

Таблиця заповнюється по стовпцях на основі означень операцій над висловлюваннями:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

З рівності отриманих значень лівої і правої частин рівності у двох виділених стовпцях таблиці істинності робимо висновок, що рівність істинна.

Приклад 2. Довести, що $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \equiv 1$.

Розв'язання. Оскільки простих висловлювань у виразі є три A, B, C , то різних наборів значень простих висловлювань є вісім ($2^3 = 8$).

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Бачимо, що вираз у лівій частині на всіх восьми наборах значень набуває значення тільки істини (1), такий вираз є **тотожно істинним**.

Приклад 3. Спростити вираз: $(A \vee B) \wedge \bar{A}$.

Розв'язання.

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} = (A \wedge \bar{A}) \vee (B \wedge \bar{A}) = 0 \vee (B \wedge \bar{A}) = B \wedge \bar{A}.$$

Використали дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції.

Приклад 4. Довести двома способами істинність або хибність рівності:

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

Складемо таблицю істинності для рівності:

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \wedge (\bar{A} \vee B)$	$A \wedge B$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

Зі значень виділених стовпців для лівої та правої частин рівності бачимо, що рівність істинна.

2 спосіб.

Спростимо ліву частину рівності і порівняємо її з правою:

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = (A \wedge \bar{A}) \vee (A \wedge B) = 0 \vee (A \wedge B) = A \wedge B.$$

Отже, рівність є істинною.

Приклад 5. Довести двома способами істинність або хибність рівності:

$$(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow (\bar{A} \vee B) = B \wedge \bar{C}.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

Складемо таблицю істинності для рівності:

A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow (\bar{A} \vee B)$	$\bar{C}$	$B \wedge \bar{C}$
1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0

Зі значень виділених стовпців лівої та правої частин рівності бачимо, що рівність хибна.

2 спосіб. Використаємо закони операцій над висловлюваннями до виразів у лівій і правій частинах рівності:

$$(A \wedge B \wedge C) \Rightarrow (\bar{A} \vee B) = \overline{A \wedge B \wedge C} \vee (\bar{A} \vee B) = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \vee (\bar{A} \vee B) = (\bar{A} \vee \bar{A}) \vee (\bar{B} \vee B) \vee \bar{C} = \bar{A} \vee 1 \vee \bar{C} \equiv 1.$$

$$B \wedge \bar{C} \neq 1.$$

Отже, рівність є хибною.

Приклад 6. Довести двома способами істинність або хибність рівності:

$$A \wedge B \Rightarrow C = A \Rightarrow C \vee B \Rightarrow C.$$

Розв'язання.

1 спосіб.

Складемо таблицю істинності для рівності:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C \vee B \Rightarrow C$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

Зі значень виділених стовпців лівої і правої частин бачимо, що рівність істинна.

2 спосіб.

Використаємо закони операцій над висловлюваннями до виразів у лівій і правій частинах рівності.

Спростимо ліву частину рівності:

$$A \wedge B \Rightarrow C = \overline{A \wedge B} \vee C = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C.$$

Спростимо праву частину рівності:

$$A \Rightarrow C \vee B \Rightarrow C = \overline{A} \vee C \vee \overline{B} \vee C = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C.$$

Бачимо, що отримані вирази у лівій і правій частинах рівності є рівними.

Отже, рівність є істинною.

2. Предикати та операції над ними

2.1. Поняття предиката. Множина визначення і множина істинності предиката. Тотожно істинні, тотожно хибні, рівносильні предикати

Розглянемо твердження: «Число x – одноцифрове», « $x : 5$ », « $x + 3 = 9$ ». Про них усіх можна сказати, що вони не є висловлюваннями, бо не можна чітко сказати, істинні вони чи хибні: адже при одних значеннях змінної x вони перетворюються в істинні висловлювання, а при інших – у хибні.

Означення. Твердження, яке містить змінну або змінні, і про яке не можна чітко сказати істинне воно чи хибне, називається **предикатом**.

Предикатами є такі твердження:

- речення, які містять змінну чи кілька змінних явно (наприклад, «Число x є від’ємним», «Прямі x та y є перпендикулярними»);
- речення, які містять змінну чи кілька змінних неявно (наприклад, «Число є непарним», «Дві геометричні фігури є рівними»);
- рівняння з однією чи кількома змінними (наприклад, « $x + 3 = 52$ », « $2x - 3y = 6$ »);
- нерівності з однією чи кількома змінними (наприклад, « $x + 2 > 6$ », « $5x - 3y < 10$ »);
- твердження, які записані математичними символами, що містять одну чи кілька змінних (наприклад, « $x : 3$ », « $x \parallel y$ »).

Не є предикатами окличні, запитальні та спонукальні речення.

За числом змінних, які входять до предиката, предикати поділяють на **одномісні**, **двомісні**, **трьохмісні** і т.д. Їх позначають великими буквами латиського алфавіту, а у дужках записують змінну чи змінні, які містить предикат: $A(x)$, $B(y)$, $C(n)$ є одномісними предикатами; $M(x,y)$, $C(y,z)$, $K(n,x)$ є двомісними предикатами; $P(x,y,n)$, $B(y,z,x)$, $C(x,y,z)$ є тримісними предикатами і т.д.

Наприклад, предикати $A(x)$: « x – одноцифрове натуральне число», $B(y)$: « $5y \geq 3$ » є одномісними; предикати $P(x,y)$: « $x < y$ », $K(y,z)$: « $2y - 3z = 12$ » є двомісними; предикати $C(x,y,z)$: « $3x + 4y = 5z$ », $B(x,y,z)$: « $3x = y - 2z$ » є трьохмісними.

Кожен предикат породжує множину висловлювань, які утворюються під час надання змінній чи змінним предиката різних значень. Утворені таким чином висловлювання з одного і того ж предиката можуть бути як істинними, так і хибними.

Наприклад, при підстановці різних значень змінної x у одномісний предикат $A(x)$: « $4x - 12 = 12$ » утворюються такі висловлювання:

- якщо $x = 6$, то « $4 \cdot 6 - 12 = 12$ » – істинне висловлювання;
- якщо $x = 1$, то « $4 \cdot 1 - 12 = 12$ » – хибне висловлювання;
- якщо $x = -2$, то « $4 \cdot (-2) - 12 = 12$ » – хибне висловлювання і т.д.

Кожен предикат характеризується заданням двох множин.

Означення. *Множиною визначення предиката називають множину всіх тих значень змінної, яка входить у цей предикат, при яких він має зміст (є визначеним).*

Множину визначення одномісного предиката позначають великою буквою такою ж, як і змінна, від якої залежить предикат.

Наприклад, множину визначення предиката $A(x)$ позначають X , множину визначення предиката $B(y)$ позначають Y і т.д.

Множиною визначення двомісного предиката $C(x, y)$ є декартовий добуток множин $X \times Y$.

Означення. *Множиною істинності предиката називають множину всіх тих значень змінної, яка входить у предикат, при яких він перетворюється у істинне висловлювання.*

Множину істинності предиката $A(x)$ позначають через T_A .

Між множиною визначення і множиною істинності одного і того ж предиката існує такий зв'язок: *множина істинності є підмножиною множини визначення предиката, тобто $T \subseteq X$.*

Для того щоб знайти множину істинності предиката, заданого рівнянням чи нерівністю зі змінною, треба розв'язати їх, тобто знайти множину розв'язків, і вибрати серед них лише ті значення, які належать області визначення заданого предиката.

Наприклад, множиною визначення одномісного предиката $A(x)$: « $x \geq 10$ » є множина всіх дійсних чисел, тобто $X = R$; множиною істинності одномісного предиката $A(x)$: « $x \geq 10$ » є множина розв'язків цієї нерівності, тобто $T_A = [10, +\infty)$, $T_A \subset X$.

Означення. Предикат $A(x)$, визначений на множині X , називається *тотожно істинним*, якщо його множина істинності збігається з усією множиною визначення, тобто $T_A = X$.

Наприклад, одномісний предикат $A(x)$: « $x \geq 1$ », який визначений на множині натуральних чисел N , є тотожно істинним, бо

$$X = N, \quad T_A = N, \quad X = T_A.$$

Означення. Предикат $A(x)$, визначений на множині X , називається *тотожно хибним*, якщо його множина істинності є порожньою, тобто $T_A = \emptyset$.

Наприклад, одномісний предикат $A(x)$: « $x < 0$ », визначений на множині натуральних чисел, є тотожно хибним, бо $T_A = \emptyset$.

Означення. Два предикати $A(x)$ і $B(x)$, задані на множині X , називаються *рівносильними*, якщо їх множини істинності збігаються, тобто $T_A = T_B$.

Наприклад, предикати $A(x)$: « $x^2 - 7x + 10 = 0$ » і $B(x)$: « $(x - 2)^2(x - 5) = 0$ » є рівносильними на множині дійсних чисел R , бо множини істинності цих предикатів рівні: $T_A = \{2; 5\}$, $T_B = \{2; 5\}$.

Приклад 1. На множині $M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ задано предикат $A(x)$: «Число x кратне 5». Чи належать значення $x=5$, $x=9$ і $x=10$ множині істинності предиката $A(x)$.

Розв'язання. Значення $x=5$ належить множині істинності предиката $A(x)$, бо число 5 належить множині M – множині визначення предиката і число 5 кратне 5. Значення $x=9$ не належить множині істинності предиката $A(x)$, бо 9 хоча і належить множині M , але число 9 не кратне числу 5. Значення $x=10$ не належить множині істинності предиката $A(x)$, бо 10 не належить множині M , хоча число 10 і є кратне 5.

Приклад 2. Записати по три елементи, які належать множинам істинності предикатів $A(x; y)$: « $x < y$ » і $B(x; y)$: « $x = y + 3$ », $X=N$, $Y=N$.

Розв'язання. Запишемо по три елементи, які належать множині істинності предикатів $A(x; y)$ і $B(x; y)$:

$$\{(1; 2), (3; 7), (5; 9)\} \in T_A; \quad \{(7; 4), (9; 6), (11; 8)\} \in T_B.$$

Приклад 3. Двомісний предикат $A(x; y)$: «Число x менше на 2 від числа y » задано на множині $M = \{(1; 4); (4; 6); (3; 4); (5; 7); (3; 6); (6; 8)\}$. Записати множину істинності предиката $A(x; y)$.

Розв'язання. Щоб знайти множину істинності двомісного предиката $A(x; y)$, який визначений на множині M , треба вибрати з множини M лише ті упорядковані пари, які перетворюють предикат $A(x; y)$ у істинне висловлювання: $T_A = \{(4; 6); (5; 7); (6; 8)\}$.

Приклад 4. Предикат $P(x)$: « $|x| \leq 5$ » задано на множині N , а предикат $Q(x)$: « $-5 \leq x \leq 5$ » задано на множині Z . Чи рівносильні ці предикати?

Розв'язання. Множина істинності предиката $P(x)$: $T_P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, а множина істинності предиката $Q(x)$: $T_Q = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Оскільки $T_P \neq T_Q$, то ці предикати не є рівносильними.

2.2. Операції над предикатами та їх множини істинності

Оскільки предикати при певних значеннях змінних перетворюються у висловлювання, то над ними можна виконувати такі ж операції, як і над висловлюваннями.

Означення 1. *Запереченням предиката $A(x)$, визначеного на множині X , називається предикат «не $A(x)$ », $x \in X$, (позначається $\overline{A(x)}$), який перетворюється в істинне висловлювання при тих і тільки тих значеннях змінної x з множини визначення X , при яких предикат $A(x)$ перетворюється в хибне висловлювання, і навпаки.*

Теорема 1. *Якщо T_A – множина істинності предиката $A(x)$, визначеного на множині X , то множина істинності заперечення предиката є доповненням множини істинності предиката $A(x)$ до множини визначення X , тобто*

$$T_{\overline{A}} = T'_A.$$

З цієї теореми випливає **алгоритм** знаходження множини істинності заперечення предиката $A(x)$, визначеного на множині X :

1. Знайти множину істинності предиката $A(x)$.
2. Знайти **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$ до множини визначення X , тобто $T'_A = X \setminus T_A$.

Означення 2. *Кон'юнкцією двох предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , називається предикат « $A(x)$ і $B(x)$ », $x \in X$, (позначається $A(x) \wedge B(x)$), який перетворюється в істинне висловлювання при тих і тільки тих значеннях змінної x з множини визначення X , при яких обидва предикати $A(x)$ і $B(x)$ перетворюються в істинні висловлювання.*

Теорема 2. Якщо T_A, T_B – множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , то **множина істинності кон'юнкції двох предикатів є перетином** множин істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, тобто

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B.$$

З цієї теореми випливає **алгоритм** знаходження множини істинності кон'юнкції предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X :

1. Знайти множину істинності предиката $A(x)$.
2. Знайти множину істинності предиката $B(x)$.
3. Знайти **перетин** множини істинності предиката $A(x)$ і множини істинності предиката $B(x)$.

Означення 3. Диз'юнкцією двох предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , називається предикат « $A(x)$ або $B(x)$ », $x \in X$, (позначається $A(x) \vee B(x)$), який перетворюється в хибне висловлювання при тих і тільки тих значеннях змінної x з множини визначення X , при яких обидва предикати $A(x)$ і $B(x)$ перетворюються у хибні висловлювання.

Теорема 3. Якщо T_A, T_B – множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , то **множина істинності диз'юнкції двох предикатів є об'єднанням** множин істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, тобто

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B.$$

З цієї теореми випливає **алгоритм** знаходження множини істинності диз'юнкції предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X :

1. Знайти множину істинності предиката $A(x)$.
2. Знайти множину істинності предиката $B(x)$.
3. Знайти **об'єднання** множини істинності предиката $A(x)$ і множини істинності предиката $B(x)$.

Закони де Моргана мають місце і для предикатів, тобто:

$$\overline{P(x) \vee Q(x)} = \overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)},$$

$$\overline{P(x) \wedge Q(x)} = \overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}$$

$$T_{\overline{P \vee Q}} = T'_P \cap T'_Q.$$

$$T_{\overline{P \wedge Q}} = T'_P \cup T'_Q.$$

Означення 4. Імплікацією двох предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , називається предикат «**Якщо** $A(x)$, **то** $B(x)$ », $x \in X$, (позначається $A(x) \Rightarrow B(x)$), який перетворюється у хибне висловлювання при тих і тільки тих значеннях змінної x з множини визначення X , при яких предикат $A(x)$ перетворюється в істинне висловлювання, а предикат $B(x)$ – у хибне висловлювання.

Відомо, що зв'язок між імплікацією та запереченням з диз'юнкцією виражається за допомогою формули: $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$.

Теорема 4. Якщо T_A і T_B – множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , то **множина істинності імплікації двох предикатів є об'єднанням** множини істинності предиката $B(x)$ та **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$ до множини визначення X , тобто

$$T_{A \Rightarrow B} = T_B \cup T'_A.$$

З цієї теореми випливає **алгоритм** знаходження множини істинності імплікації предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X :

1. Знайти множину істинності предиката $A(x)$.
2. Знайти множину істинності предиката $B(x)$.
3. Знайти **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$.
4. Знайти **об'єднання** множини істинності предиката $B(x)$ і доповнення множини істинності предиката $A(x)$.

Означення 5. *Еквіваленцією* двох предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , називається предикат « $A(x)$, **тоді і тільки тоді, коли** $B(x)$ », $x \in X$, (позначається $A(x) \Leftrightarrow B(x)$), який перетворюється в істинне висловлювання при тих і тільки тих значеннях змінної x з множини визначення X , при яких обидва предикати $A(x)$ і $B(x)$ перетворюються одночасно або у істинні, або у хибні висловлювання.

Відомо, що еквіваленція $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ є кон'юнкцією двох імплікацій, тому виражається за допомогою формули:

$$A(x) \Leftrightarrow B(x) = (A(x) \Rightarrow B(x)) \wedge (B(x) \Rightarrow A(x)) = (\overline{A(x)} \vee B(x)) \wedge (\overline{B(x)} \vee A(x)).$$

Теорема 5. *Якщо T_A і T_B – множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X , то множина істинності еквіваленції двох предикатів є множина:*

$$T_{A \Leftrightarrow B} = (T'_A \cup T_B) \cap (T'_B \cup T_A).$$

З цієї теореми випливає **алгоритм** знаходження множини істинності еквіваленції предикатів $A(x)$ і $B(x)$, визначених на множині X :

1. Знайти множину істинності предиката $A(x)$.
2. Знайти множину істинності предиката $B(x)$.
3. Знайти **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$.
4. Знайти **доповнення** множини істинності предиката $B(x)$.
5. Знайти **об'єднання** множини істинності предиката $B(x)$ і **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$.
6. Знайти **об'єднання** множини істинності предиката $A(x)$ і **доповнення** множини істинності предиката $B(x)$.
7. Знайти **перетин об'єднання** множини істинності предиката $B(x)$ і **доповнення** множини істинності предиката $A(x)$ та множини істинності предиката $A(x)$ і **доповнення** множини істинності предиката $B(x)$.

Приклад 1. Знайти множину істинності заперечення предиката $A(x)$: « $x < 4$ », визначеного на множині дійсних чисел.

Розв'язання. $A(x)$: « $x < 4$ », $X=R$.

Спочатку треба знайти множину істинності предиката $A(x)$, розв'язавши нерівність:

$$T_A = (-\infty; 4).$$

За теоремою 1 отримаємо, що:

$$T_{\neg A} = T'_A = [4; +\infty).$$

Приклад 2. Знайти множину істинності кон'юнкції предикатів $A(x)$: « $x - 2 < 6$ » і $B(x)$: « $3x > 3$ », визначених на множині дійсних чисел.

Розв'язання. $A(x)$: « $x - 2 < 6$ » і $B(x)$: « $3x > 3$ », $X=R$.

Спочатку треба знайти множину істинності предиката $A(x)$ і множину істинності предиката $B(x)$, розв'язавши відповідні нерівності:

$$T_A = (-\infty; 4), \quad T_B = (1; +\infty).$$

За теоремою 2 отримаємо, що:

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B = (1; 4).$$

Приклад 3. Знайти множину істинності диз'юнкції предикатів $A(x)$: « $x - 3 < 0$ » і $B(x)$: « $x + 5 > 0$ », визначених на множині дійсних чисел.

Розв'язання. $A(x)$: « $x - 3 < 0$ » і $B(x)$: « $x + 5 > 0$ », $X=R$.

Спочатку треба знайти множину істинності предиката $A(x)$ і множину істинності предиката $B(x)$, розв'язавши нерівності:

$$T_A = (-\infty; 3), T_B = (-5; +\infty).$$

За теоремою 3 отримаємо, що:

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B = R.$$

Отже, предикат $A(x) \vee B(x)$ є тотожно істинним.

Приклад 4. Знайти множину істинності імплікації предикатів $A(x)$: « $x - 4 < 0$ » і $B(x)$: « $x + 6 > 0$ », визначених на множині дійсних чисел.

Розв'язання. $A(x)$: « $x - 4 < 0$ » і $B(x)$: « $x + 6 > 0$ », $X = \mathbb{R}$.

Спочатку треба знайти множину істинності предиката $A(x)$ і множину істинності предиката $B(x)$, розв'язавши нерівності:

$$T_A = (-\infty; 4), \quad T_B = (-6; +\infty).$$

За теоремою 4:

$$T_{A \Rightarrow B} = T_B \cup T'_A.$$

$$T_A = (-\infty; 4), T'_A = [4; +\infty), \quad T_B = (-6; +\infty).$$

$$T_{A \Rightarrow B} = [4; +\infty) \cup (-6; +\infty) = (-6; +\infty).$$

Приклад 5. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ задано два предикати $P(x)$: « x – просте число», $Q(x)$: « $x \leq 5$ ». Знайти множину істинності заперечення цих предикатів, їх кон'юнкції та диз'юнкції.

Розв'язання. Спочатку треба знайти множину істинності предиката $P(x)$ і множину істинності предиката $Q(x)$:

$$T_P = \{2, 3, 5, 7\},$$

$$T_Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Використавши теореми про знаходження множин істинності операцій над предикатами, знайдемо:

$$T_{\bar{P}} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\},$$

$$T_{\bar{Q}} = \{6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$T_{P \vee Q} = \{2, 3, 5, 7, 1, 4\},$$

$$T_{P \wedge Q} = \{2, 3, 5\}.$$

Приклад 6. Знайти множини істинності предикатів, їх заперечень, кон'юнкції та диз'юнкції, якщо відомо, що $A(x)$: « $x < 7$ » і $B(x)$: « $2 \leq x \leq 9$ », $X = N$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо множини істинності предикатів $A(x)$ і $B(x)$ на множині N :

$$T_A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$T_B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Множина істинності заперечення цих предикатів на множині N :

$$T_{\overline{A}} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\};$$

$$T_{\overline{B}} = \{1, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}.$$

Множину істинності кон'юнкції цих предикатів знаходимо за теоремою 2:

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B.$$

$$T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Множину істинності диз'юнкції цих предикатів знаходимо за формулою 3:

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B.$$

$$T_{A \vee B} = T_A \cup T_B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Приклад 7. Дано предикати $P(x)$: « $x : 3$ » і $Q(x)$: « $x : 9$ », визначені на множині N . Сформулювати імплікації та еквіваленцію цих предикатів.

Розв'язання.

а) $Q(x) \Rightarrow P(x)$: «Якщо $x : 9$, то $x : 3$ ». Ця імплікація є істинною, бо не знайдеться такого числа x , щоб ділилося на 9, але не ділилося на 3.

б) $P(x) \Rightarrow Q(x)$: «Якщо $x : 3$, то $x : 9$ ». Ця імплікація є хибною, бо число може ділитися на 3, але воно може не ділитися на 9.

в) $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$: « $x : 3$, тоді і тільки тоді, коли $x : 9$ ». Ця еквіваленція для загального випадку є хибною. Вона істинна лише для всіх x , які діляться і на 3, і на 9, а також для тих, що не діляться ні на 3, ні на 9.

2.3. Квантори та їх види

У формулюваннях різноманітних математичних тверджень часто зустрічаються слова «хоча б один», «деякі», «всі», «кожен» та їх синоніми. З'ясуємо їх зміст та особливості їх використання у математиці.

Нехай задано одномісний предикат «Число кратне 4». Поставимо перед цим предикатом слова: «будь-яке», «існує» і отримаємо нові твердження: «Будь-яке число кратне 4», «Існує число, кратне 4», які вже є не предикатами, а висловлюваннями. Заданий предикат перетворився у два різні висловлювання, причому перше – хибне, а друге – істинне.

Означення. У математиці слова «всі», «деякі» та їх синоніми називаються **кванторами**.

Слово «квантор» латинського походження. Воно означає «скільки», тобто квантор вказує, про скільки об'єктів (про всі чи тільки про деякі) говориться у висловлюванні.

Розрізняють **три види кванторів**:

1. **Квантор загальності**, який виражається за допомогою слів «кожен», «будь-який», «всякий», «довільний», «всі» і т.д. і позначається символом $\forall$ (перевернута перша літера слова «All» – «всі»).
2. **Квантор існування**, який виражається за допомогою слів «існує», «деякі», «знайдеться», «хоча б один» і т.д. і позначається символом $\exists$ (відбита перша літера слова «Exit» – «існувати»).
3. **Квантор єдності**, який виражається словосполученням «існує єдиний» і позначається символом $\exists !$.

Квантори містяться у формулюваннях математичних означень, аксіом, теорем та інших тверджень.

Приклади використання кванторів:

$$(\forall a, b) \quad a + b = b + a \quad (\text{комутативний закон додавання чисел}),$$

$$(\forall x) f(x) = g(x) \quad (\text{означення тотожності}).$$

Істинність висловлювання з квантором загальності встановлюється шляхом доведення. Показати хибність висловлювання з квантором загальності можна за допомогою наведення **контрприкладу**. Наприклад, хибність висловлювання «Всі числа є натуральними» впливає з наведення контрприкладу $x = -3$.

Істинність висловлювання з квантором існування встановлюється за допомогою наведення хоча б одного **прикладу**. Наприклад, істинність висловлювання «Деякі числа є натуральними» пояснюється шляхом наведення прикладу $x=7$. Щоб впевнитися у хибності висловлювання з квантором існування, необхідно провести доведення.

Приклад 1. Записати символами висловлювання і вказати їх значення істинності:

- а) «Сума довільного натурального числа і нуля дорівнює тому ж числу»;
- б) «Добуток всіх натуральних чисел і одиниці дорівнює тому ж числу»;
- в) «Існує натуральне число, різниця якого з нулем дорівнює тому ж числу»;
- г) «Хоча б одне натуральне число кратне 5»;
- д) «Існує єдине ціле число, модуль якого дорівнює нулю»;
- е) «Кожне ціле число є від'ємним»;
- є) «Число 1 є дільником будь-якого натурального числа»;
- ж) «Знайдуться цілі числа, сума яких дорівнює нулю».

Розв'язання.

- а) «Сума **довільного** натурального числа і нуля дорівнює тому ж числу» (1)

$$(\forall x \in N)x + 0 = x$$

- б) «Добуток **всіх** натуральних чисел і одиниці дорівнює тому ж числу» (1)

$$(\forall x \in N)x \cdot 1 = x$$

- в) «**Існує** натуральне число, різниця якого з нулем дорівнює тому ж числу» (1)

$$(\exists x \in N)x - 0 = x$$

- г) «**Хоча б одне** натуральне число кратне 5» (1)

$$(\exists x \in N)x \div 5$$

д) «**Існує єдине** ціле число, модуль якого дорівнює нулю» (0)

$$(\exists! x \in Z) | x| = 0$$

е) «**Кожне** ціле число є від'ємним» (0)

$$(\forall x \in Z)x < 0$$

є) «Число 1 є дільником **будь-якого** натурального числа» (1)

$$(\forall x \in N)x \div 1$$

ж) «**Знайдуться** цілі числа, сума яких дорівнює нулю» (1)

$$(\exists x \in Z)(\exists y \in Z)x + y = 0.$$

Приклад 2. Сформулювати висловлювання, які записані символічно, і визначити їх значення істинності:

а) $\forall x \in R, x \leq 8;$

б) $\exists x \in R, x \leq 8;$

в) $\exists! x \in R, x \leq 8;$

г) $\forall x \in R, \forall y \in R, x + y = 9;$

д) $\exists x \in R, \forall y \in R, x + y = 9;$

е) $\forall x \in R, \exists y \in R, x + y = 9;$

є) $\exists x \in R, \exists y \in R, x + y = 9.$

Розв'язання.

а) $\forall x \in R, x \leq 8$ – «**Довільне** дійсне число є меншим або дорівнює 8».

б) $\exists x \in R, x \leq 8$ – «**Існує** дійсне число, яке є меншим або дорівнює 8».

в) $\exists! x \in R, x \leq 8$ – «**Існує єдине** дійсне число, яке є меншим або дорівнює 8».

г) $\forall x \in R, \forall y \in R, x + y = 9$ – «Сума **всіх** дійсних чисел дорівнює 9».

д) $\forall x \in R, \exists y \in R, x + y = 9$ – «**Існує** дійсне число y , сума якого з дійсним числом x дорівнює 9».

е) $\exists x \in R, \forall y \in R, x + y = 9$ – «**Існує** дійсне число x , сума якого з дійсним числом y дорівнює 9».

є) $\exists x \in R, \exists y \in R, x + y = 9$ – «**Існують** дійсні числа x і y , сума яких дорівнює 9».

2.4. Квантифікація предикатів

Означення. Операція застосування квантора чи кванторів до предиката називається **квантифікацією предиката**.

Квантифікацію одномісного та двомісного предикатів проводять по-різному.

Квантифікація одномісного предиката

Алгоритм здійснення квантифікації одномісного предиката:

1. Записати кванторну частину (квантор і змінну предиката, яка належить його множині визначення).
2. Записати заданий предикат.
3. Кванторну частину відокремити комою від заданого предиката.

Квантифікація одномісного предиката $P(x)$ (тобто застосування до одномісного предиката $P(x)$ трьох різних видів кванторів) перетворює його у три різні висловлювання, які можуть бути як істинними, так і хибними, і які записують та читають так:

$\forall x \in X, P(x)$ – «Для **довільного** x з множини X , істинне $P(x)$ »;

$\exists x \in X, P(x)$ – «**Існує** таке x з множини X , що істинне $P(x)$ »;

$\exists! x \in X, P(x)$ – «**Існує єдине** x з множини X , що істинне $P(x)$ ».

Під час квантифікації конкретного предиката $P(x)$ утворені висловлювання не лише записують символами, але і формулюють словесно та встановлюють його значення істинності.

Наприклад, застосувавши квантори до одномісного предиката «Натуральне число є парним», отримаємо такі три висловлювання:

1. «**Кожне** натуральне число є парним» – хибне висловлювання, контрприклад $x = 11$;
2. «**Деякі** натуральні числа є парними» – істинне висловлювання, приклад $x = 10$;
3. «**Існує єдине** парне натуральне число» – хибне висловлювання, контрприклад $x = 8, x = 14, x = 20$ і т.д.

II. Квантифікація двомісного предиката

Залежно від кількості використаних кванторів у результаті квантифікації двомісного предиката можна отримати або висловлювання, або одномісний предикат.

Для отримання висловлювання під час квантифікації двомісного предиката $P(x,y)$, потрібно зв'язати квантором його обидві змінні x і y . При цьому отримують висловлювання, які можуть бути як істинними, так і хибними, і які записують та читають так:

$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)P(x, y)$ – «Для **довільних** x з множини X і y з множини Y , істинне $P(x,y)$ »;

$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)P(x, y)$ – «Для **довільного** x з множини X існує y з множини Y таке, що істинне $P(x,y)$ »;

$(\exists x \in X)(\forall y \in Y)P(x, y)$ – «Існує x з множини X для **довільного** y з множини Y таке, що істинне $P(x,y)$ »;

$(\exists x \in X)(\exists y \in Y)P(x, y)$ – «Існують x з множини X і y з множини Y такі, що істинне $P(x,y)$ ».

Під час квантифікації конкретного предиката $P(x,y)$ утворені висловлювання не лише записують символами, але і формулюють словесно та встановлюють його значення істинності.

Наприклад, застосувавши квантори до двомісного предиката «Прямі x і y паралельні», отримаємо такі чотири висловлювання:

1. $(\forall x)(\forall y)x \parallel y$ – «**Всі** прямі паралельні», хибне висловлювання, бо є прямі, які не є паралельними;
2. $(\forall x)(\exists y)x \parallel y$ – «Для **довільної** прямої існує пряма, яка паралельна до неї», істинне висловлювання, бо до кожної прямої завжди можна побудувати паралельну до неї пряму;
3. $(\exists x)(\forall y)x \parallel y$ – «Існує пряма, яка паралельна до **довільної** прямої», істинне висловлювання, бо до

довільної прямої існує паралельна до неї пряма;

4. $(\exists x)(\exists y)x \parallel y$ – *«Існують прямі, які паралельні між собою»*, істинне висловлювання, бо на площині є паралельні між собою прямі.

Якщо ж двомісний предикат квантифікувати лише за однією змінною, то він перетвориться у одномісний предикат.

Означення. Змінна, за якою проведено квантифікацію предиката, називається *зв'язаною змінною*. Змінна, до якої не застосовували квантор, називається *вільною змінною*.

Наприклад, $(\exists x)(\forall y)x^2 + y^2 = 1$ – висловлювання, бо двомісний предикат квантифікований двома кванторами, а змінні x , y – зв'язані; $(\forall x)x^2 + y^2 = 1$ – одномісний предикат, бо двомісний предикат квантифікований одним квантором, x – зв'язана змінна, y – вільна змінна.

Квантифікацію предиката інколи називають *операцією зв'язування змінної предиката*.

Приклад 1. Квантифікувати предикат $A(x)$: « $x < 7$ », визначений на множині дійсних чисел, і встановити значення істинності отриманих висловлювань.

Розв'язання. Задано одномісний предикат $P(x)$: « $x \leq 7$ », який визначений на множині дійсних чисел. Для його квантифікування зв'яжемо змінну x одним з трьох кванторів і отримаємо висловлювання:

1. $\forall x \in R, x \leq 7$ – «**Всі** дійсні числа менші або дорівнюють 7», хибне висловлювання, контрприклад $x = 10$.
2. $\exists x \in R, x \leq 7$ – «**Існує** дійсне число, яке менше або дорівнює 7», істинне висловлювання, приклад $x = 4$.
3. $\exists! x \in R, x \leq 7$ – «**Існує єдине** дійсне число, яке менше або дорівнює 7», хибне висловлювання, контрприклади $x = 1$, $x = 3$, $x = -1$.

2.5. Заперечення тверджень з кванторами

Заперечити висловлювання, яке містить квантор, можна двома способами. Для цього треба використати **правило**:

1. *заперечити все висловлювання, тобто перед заданим висловлюванням треба поставити слова «не», «хибно, що».*
2. *квантор загальності замінити на квантор існування, і навпаки, а замість предиката взяти його заперечення.*

Побудуємо за цим правилом заперечення висловлювання $(\forall x)P(x)$:

1. $\overline{(\forall x)P(x)}$ – **«Не для всякого x має місце $P(x)$ »**,
«Хибно, що для всякого x має місце $P(x)$ ».
2. $\overline{(\forall x)P(x)} = (\exists x)\overline{P(x)}$.

Побудуємо за цим правилом заперечення висловлювання $(\exists x)P(x)$:

1. $\overline{(\exists x)P(x)}$ – **«Не існує такого x , для якого має місце $P(x)$ »**,
«Хибно, що існує таке x , для якого має місце $P(x)$ ».
2. $\overline{(\exists x)P(x)} = (\forall x)\overline{P(x)}$.

Побудуємо заперечення висловлювання $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$:

$$\overline{(\exists x)(\forall y)Q(x, y)} = \overline{(\exists x)(\forall y)Q(x, y)} = (\forall x)\overline{(\forall y)Q(x, y)} = (\forall x)(\exists y)\overline{Q(x, y)}.$$

Приклад. Знайти заперечення висловлювання «Кожне число менше 2».

Розв'язання. Висловлювання «Кожне число менше 2» можна символічно записати так: $(\forall x)x < 2$ (0).

Знайдемо його заперечення двома способами:

1. $\overline{(\forall x)x < 2}$, тобто **«Не кожне число менше 2»** або
«Хибно, що кожне число менше 2» (1).
2. $\overline{(\forall x)x < 2} = (\exists x)\overline{x < 2} = (\exists x)x \geq 2$, тобто **«Існує число, яке не менше 2»**, **«Існує число, яке більше або дорівнює 2»** (1).

2.6. Логічний наслідок. Рівносильні предикати

Означення 1. Якщо множина істинності предиката $P(x)$ є підмножиною множини істинності предиката $Q(x)$, то предикат $Q(x)$ називається **логічним наслідком** предиката $P(x)$, тобто виконується умова:

$$T_P \subset T_Q.$$

Означення 2. Предикат $Q(x)$ є **логічним наслідком** предиката $P(x)$, якщо істинною є імплікація $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Наприклад, на множині натуральних чисел предикат «Число x кратне 2» є логічним наслідком предиката «Число x кратне 4».

Множина істинності предиката «Число x кратне 4» є підмножиною множини істинності предиката «Число x кратне 2».

Імплікація «Якщо число кратне 4, то воно кратне 2» є істинною.

Означення 3. Якщо предикат $Q(x)$ є логічним наслідком предиката $P(x)$ і предикат $P(x)$ є логічним наслідком предиката $Q(x)$, то предикати $P(x)$ і $Q(x)$ є **рівносильними**, а їх множини істинності є рівними, тобто виконується умова:

$$T_P = T_Q.$$

Означення 4. Предикати $P(x)$ і $Q(x)$ є **рівносильними**, якщо істинною є еквіваленція $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, і навпаки.

Наприклад, на множині дійсних чисел предикат « $|x| = 5$ » є рівносильним з предикатом « $x^2 = 25$ ».

Множина істинності предиката « $|x| = 5$ » дорівнює множині істинності предиката « $x^2 = 25$ ».

Еквіваленція « $|x| = 5$, тоді і тільки тоді, коли $x^2 = 25$ » є істинною.

2.7. Необхідні і достатні умови

На основі взаємного зв'язку між двома предикатами у вигляді їх логічного слідування визначають необхідні і достатні умови для них.

Означення 1. Якщо предикат $Q(x)$ є логічним наслідком предиката $P(x)$, то предикат $P(x)$ є **достатньою умовою** для $Q(x)$, а предикат $Q(x)$ є **необхідною умовою** для предиката $P(x)$, тобто.

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$P(x)$ – достатня умова для $Q(x)$,

$Q(x)$ – необхідна умова для $P(x)$.

Означення 2. Якщо предикати $P(x)$ і $Q(x)$ є рівносильними, то предикат $P(x)$ є **необхідною і достатньою умовою** для предиката $Q(x)$, а предикат $Q(x)$ є **необхідною і достатньою умовою** для предиката $P(x)$.

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

$P(x)$ – необхідна і достатня умова для $Q(x)$,

$Q(x)$ – необхідна і достатня умова для $P(x)$.

Приклад 1. Дано предикати $A(x)$: «Натуральне число x ділиться на 5» і $B(x)$: «Натуральне число x ділиться на 10». Сформулювати імплікації та еквіваленцію цих предикатів. Визначити для них необхідні і достатні умови.

Розв'язання. Щоб встановити, у якому зв'язку логічного слідування перебувають між собою ці два предикати, треба визначити істинність чи хибність їх імплікацій та еквіваленції:

- 1) $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Якщо натуральне число x ділиться на 5, то воно ділиться на 10» (0).
- 2) $B(x) \Rightarrow A(x)$: «Якщо натуральне число x ділиться на 10, то воно ділиться на 5» (1).
- 3) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$: «Натуральне число x ділиться на 5, тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 10» (0).

Зі встановлених значень істинності імплікацій та еквіваленції цих предикатів бачимо, що істинною є лише імплікація $B(x) \Rightarrow A(x)$, тобто предикат $A(x)$ є логічним наслідком предиката $B(x)$.

Отже, за означенням 1 отримуємо, що:

- предикат $B(x)$ є **достатньою умовою** для предиката $A(x)$: для того щоб натуральне число x ділилося на 5, достатньо, щоб воно ділилося на 10.
- предикат $A(x)$ є **необхідною умовою** для предиката $B(x)$: для того щоб натуральне число x ділилося на 10, необхідно, щоб воно ділилося на 5.

Приклад 2. Встановити, у якому відношенні перебувають предикати $P(x)$: «У трикутнику всі сторони рівні», $Q(x)$: «У трикутнику всі кути рівні». Визначити для них необхідні і достатні умови.

Розв'язання. Щоб встановити, у якому відношенні перебувають між собою ці два предикати, треба визначити істинність чи хибність їх імплікацій та еквіваленції:

- 1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$: «Якщо у трикутнику всі сторони рівні, то у ньому всі кути теж рівні» (1).
- 2) $Q(x) \Rightarrow P(x)$: «Якщо у трикутнику всі кути рівні, то у ньому всі сторони теж рівні» (1).
- 3) $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$: «У трикутнику всі сторони рівні, тоді і тільки тоді, коли у ньому всі кути теж рівні» (1).

Еквіваленція цих предикатів є істинною, тому предикати $P(x)$ і $Q(x)$ є рівносильними. Отже, за означенням 2 отримуємо, що:

- предикат $Q(x)$ є **необхідною і достатньою умовою** для предиката $P(x)$: для того щоб у трикутнику всі кути були рівними, необхідно і достатньо, щоб у ньому були рівними всі сторони.
- предикат $P(x)$ є **необхідною і достатньою умовою** для предиката $Q(x)$: для того у трикутнику були рівними всі сторони, необхідно і достатньо, щоб у ньому були рівними всі кути.

3. Теореми

3.1. Теорема та її будова. Прості і складені теореми

При аксіоматичному методі побудови певної теорії в її основу кладуться основні твердження, які називаються **аксіомами** і не потребують доведення.

Всі інші твердження теорії отримуються як логічні висновки з системи аксіом і строго доводяться.

Означення. *Теоремою називається твердження, істинність якого доводиться на основі системи аксіом.*

З курсу математики середньої загальноосвітньої школи відомо багато теорем алгебри та геометрії (у вигляді певних ознак, властивостей, наслідків, формул, тотожностей, правил тощо).

Незважаючи на різні формулювання, з логічної точки зору теореми є висловлюваннями. **Логічна структура теореми** має **будову** у вигляді **імплікації** $A \Rightarrow B$. У будові теорем виділяють такі **структурні елементи**:

- **A – умова теореми** (те, що дано);
- **B – висновок теореми** (те, що треба довести).

Наприклад, у теоремі «Якщо запис числа закінчується цифрою 0, то воно ділиться націло на 5» умовою є «Запис числа закінчується цифрою 0», а висновком – «Число ділиться націло на 5».

Але є теореми, формулювання яких не містить слів «Якщо ..., то ...». Тоді такі теореми треба перефразувати і вжити логічний зв'язок «Якщо, то ...». Для цього треба чітко визначити у теоремі умову і висновок. Наприклад, розглянемо теорему «Вертикальні кути рівні» (1). Ця теорема може бути переформульована так: «Якщо кути є вертикальними, то вони є рівними». Умова теореми: «Кути є вертикальними»; висновок теореми: «Кути є рівними».

Означення. Якщо умова і висновок теореми є простими висловлюваннями, то теорему називають **простою**.

Наприклад, простою є теорема «Якщо трикутник рівнобедрений, то його два кути рівні», бо умова теореми – «Трикутник є рівнобедрений» і висновок теореми – «Два кути трикутника є рівні» є простими висловлюваннями.

Означення. Якщо хоча б одна частина теореми є складеним висловлюванням, то теорему називають **складеною**.

Наприклад, складеною є теорема «Якщо дві різні прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні між собою». Її символічно можна записати так: $(a \perp c) \wedge (b \perp c) \Rightarrow a \parallel b$. Умовою теореми є складене висловлювання « $(a \perp c) \wedge (b \perp c)$ » – кон'юнкція двох простих висловлювань « $a \perp c$ » і « $b \perp c$ ». Висновок теореми « $a \parallel b$ » є простим висловлюванням.

Приклад. Визначити будову теореми:

- а) «Сума суміжних кутів дорівнює 180^0 »;
- б) «Якщо один із двох множників дорівнює нулю, то добуток цих множників дорівнює нулю».

Розв'язання.

а) Перефразуємо теорему так: «Якщо два кути є суміжними, то їх сума дорівнює 180^0 ». Умова теореми – А: «Два кути є суміжними», висновок теореми – В: «Сума двох кутів дорівнює 180^0 », які є простими. Отже, теорема є має структуру $A \Rightarrow B$ і є простою (1).

б) Цю теорему можна записати символічно так: $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow ab = 0$. Умова теореми є складеним висловлюванням, яке є диз'юнкцією двох простих висловлювань – А: « $a = 0$ » і В: « $b = 0$ ». Висновок теореми є простим висловлюванням С: « $ab = 0$ ». Будова, тобто логічна структура теореми має вигляд: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Отже, теорема є складеною (1).

3.2. Види теорем. Побудова логічного квадрата

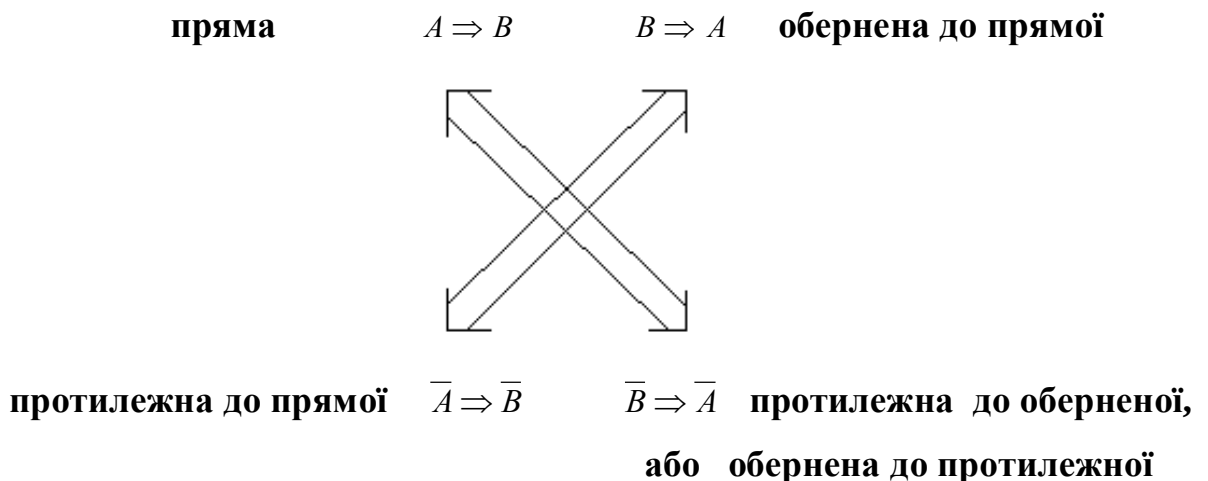
Означення. Теоремами $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ називаються **взаємно оберненими**. Теоремами $A \Rightarrow B$ і $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ називаються **взаємно протилежними**.

Наприклад, для заданої **прямої теореми** $A \Rightarrow B$ «Якщо діагоналі паралелограма є взаємно перпендикулярними, то цей паралелограм є ромбом» (1), можна утворити:

- **обернену теорему до прямої** $B \Rightarrow A$: «Якщо паралелограм є ромбом, то його діагоналі є взаємно перпендикулярними» (1);
- **протилежну теорему до прямої** $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$: «Якщо діагоналі паралелограма не є взаємно перпендикулярними, то цей паралелограм не є ромбом» (1);
- **обернену теорему до протилежної** $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$: «Якщо паралелограм не є ромбом, то його діагоналі не є взаємно перпендикулярними» (1).

За законом контрапозиції знаємо, що імплікації $A \Rightarrow B$ і $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ є рівносильними, тому пряма теорема і обернена теорема до протилежної – є рівносильними теоремами. Аналогічно, обернена теорема і протилежна теорема до прямої теж рівносильні теоремами.

Усі чотири види теорем та зв'язки між ними можна зобразити графічно. Отримана схема називається **логічним квадратом** і має вигляд:



Варто зазначити, що якщо істинною є пряма теорема $A \Rightarrow B$, то обернена до неї теорема може бути як істинною, так і хибною.

Якщо обидві теореми (пряма і обернена до прямої) будуть істинними, то їх можна з'єднати з допомогою слів «*тоді і тільки тоді, коли*» в одну теорему, структурою якої є еквіваленція $A \Leftrightarrow B$.

З іншого боку, якщо теорема має структуру $A \Leftrightarrow B$, то її доведення зводиться до доведення двох теорем: прямої теореми $A \Rightarrow B$ і оберненої теореми до прямої $B \Rightarrow A$.

Приклад 1. Дано теорему «Якщо запис числа закінчується цифрою 0, то воно ділиться на 5». Визначити її будову. Записати всі види теорем, які утворюють з даною теоремою логічний квадрат. Визначити необхідні і достатні умови.

Розв'язання. Спершу визначимо будову заданої теореми:

Умова теореми А: «Запис числа закінчується цифрою 0».

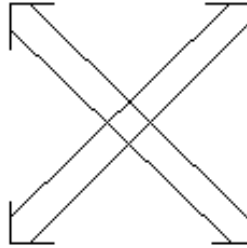
Висновок теореми В: «Число ділиться на 5».

Сформулюємо види теорем і встановимо їх значення істинності:

1. Пряма теорема $A \Rightarrow B$: «Якщо запис числа закінчується цифрою 0, то воно ділиться на 5» (1).
2. Обернена теорема до прямої $B \Rightarrow A$: «Якщо число ділиться на 5, то його запис закінчується цифрою 0» (0).
3. Протилежна теорема до прямої $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$: «Якщо запис числа не закінчується цифрою 0, то воно не ділиться на 5» (0).
4. Обернена теорема до протилежної $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$: «Якщо число не ділиться на 5, то його запис не закінчується цифрою 0» (1).

Побудуємо логічний квадрат для цих теорем:

пряма $A \Rightarrow B$ (1) $B \Rightarrow A$ (0) **обернена до прямої**



протилежна до прямої $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ (0) $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (1) **протилежна до оберненої**
або обернена до протилежної

Теорема є за логічною структурою імплікацією $A \Rightarrow B$ (1).

Тому А є достатньою умовою для В;

В є необхідною умовою для А.

Для того щоб запис числа закінчувався цифрою 0, **необхідно**, щоб число ділилося націло на 5.

Для того щоб число ділилося націло на 5, **достатньо**, щоб запис числа закінчувався цифрою 0.

Приклад 2. Дано теорему «Якщо добуток двох дійсних чисел від'ємний, то співмножники мають різні знаки». Визначити її будову. Записати всі види теорем, які утворюють з даною теоремою логічний квадрат. Визначити необхідні і достатні умови.

Розв'язання. Спершу визначимо будову заданої теореми:

Умова теореми А: «Добуток двох дійсних чисел від'ємний».

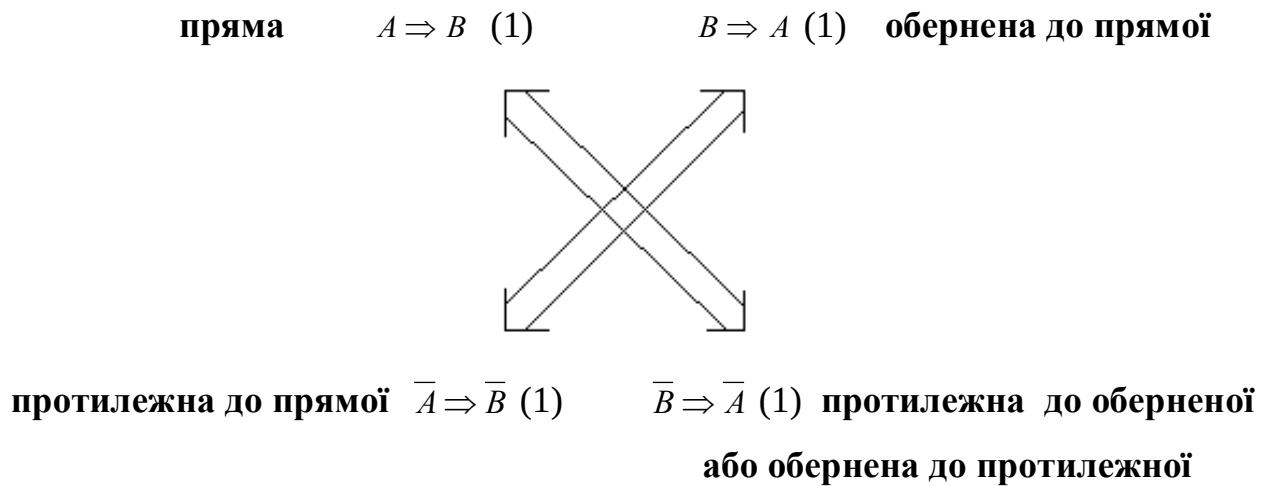
Висновок теореми В: «Співмножники мають різні знаки».

Сформулюємо види теорем і встановимо їх значення істинності:

1. Пряма теорема $A \Rightarrow B$: «Якщо добуток двох дійсних чисел від'ємний, то його співмножники мають різні знаки» (1).

2. Обернена теорема до прямої $B \Rightarrow A$: «Якщо співмножники мають різні знаки, то добуток цих чисел буде від'ємний» (1).
3. Протилежна теорема до прямої $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$: «Якщо добуток двох дійсних чисел не є від'ємним, то його співмножники не мають різних знаків» (1).
4. Обернена теорема до протилежної $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$: «Якщо співмножники не мають різних знаків, то добуток цих чисел не є від'ємний» (1).

Побудуємо логічний квадрат для цих теорем:



Теорема є за логічною структурою еквіваленцією $A \Leftrightarrow B$ (1).

Тому A є достатньою і необхідною умовою для B ;

B є достатньою і необхідною умовою для A .

Для того щоб добуток двох дійсних чисел був від'ємним, **необхідно і достатньо**, щоб його співмножники мали різні знаки.

Для того щоб співмножники мали різні знаки, **необхідно і достатньо**, щоб добуток цих дійсних чисел був від'ємним.

Тематика лекцій

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

- 1. Висловлювання.** Поняття висловлювання. Значення істинності висловлювання. Прості та складені висловлювання. Логічні зв'язки. Логічна структура висловлювань.
- 2. Операції над висловлюваннями:** заперечення висловлювання, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція двох висловлювань та їх таблиці істинності.
- 3. Закони операцій над висловлюваннями.** Основні закони заперечення висловлювання, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції двох висловлювань. Доведення рівностей складанням таблиць істинності та використанням законів.
- 4. Предикати.** Поняття предиката. Одномісні, двомісні та трьохмісні предикати. Множина визначення предиката. Множина істинності предиката. Тотожно істинні, тотожно хибні, рівносильні предикати.
- 5. Операції над предикатами:** заперечення предиката, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція двох предикатів. Теореми про їх множини істинності.
- 6. Квантори.** Поняття квантора. Види кванторів: квантор загальності, квантор існування, квантор єдиності. Квантифікація одномісних та двохмісних предикатів. Зв'язані та вільні змінні. Правила побудови заперечення висловлювань з кванторами.
- 7. Логічне слідування.** Логічний наслідок. Рівносильні предикати. Необхідні і достатні умови. Теорема та її будова. Прості і складені теореми. Логічна структура теорем. Види теорем. Логічний квадрат та його побудова.

Теми практичних занять

№ з/ п	Теми практичних занять
1.	Поняття висловлювання. Значення істинності висловлювання. Прості та складені висловлювання. Логічні зв'язки. Логічна структура висловлювань
2.	Операції над висловлюваннями та їх таблиці істинності
3.	Основні закони операцій над висловлюваннями. Доведення рівностей складанням таблиць істинності та використанням законів
4.	Поняття предиката. Множина визначення і множина істинності предиката. Види предикатів
5.	Операції над предикатами та їх множини істинності
6.	Квантори та їх види. Квантифікація предикатів. Заперечення тверджень з кванторами
7.	Логічний наслідок. Рівносильні предикати. Необхідні і достатні умови
8.	Теорема та її будова. Прості і складені теореми. Види теорем. Логічний квадрат та його побудова
9.	Розв'язування вправ розділу
10.	Контрольна робота
11.	Підсумкове заняття

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

1. Поняття висловлювання. Значення істинності висловлювання.

Прості та складені висловлювання. Логічні зв'язки.

Логічна структура висловлювань

1. Визначити, які з поданих тверджень є висловлюваннями, та вказати для них значення істинності:

а)

- « $17 - 6 = 10$ »;
- «Яка чудова осінь!»;
- «Місяць – супутник Землі»;
- «Розв'яжіть рівняння»;
- «8 – ірраціональне число»;
- « $7 + 4 < 10$ »;
- « $x - 27 = 64$ »;
- « $(12+3) : 5$ »;
- «Вчора був дощ?»;
- «Число 8 безпосередньо слідує за числом 7»;
- « $x + 17$ »;
- « $x - 8 < 12$ »;
- «число кратне 5»;
- «Літера Я – остання в українському алфавіті»;
- «Лютий має 30 днів»;
- «Сума протилежних чисел дорівнює нулю»;
- «Число 3,7 є раціональним»;

б)

- «24 серпня – День Незалежності України»;
- «Гарного дня!»;
- «Принеси мені, будь ласка, книгу»;

- «Число 9 – ціле»;
- « $4 + x = 12$ »;
- « $4 + 2 - 6 : 2$ »;
- «Ви були у театрі?»;
- «Число є дільником числа 5»;
- «Модуль числа – 2 дорівнює – 2»;
- « $3x + 12$ »;
- « $3 + x < 8$ »;
- «99 – найбільше двоцифрове число»;
- «У тижні 7 днів»;
- «Число 0 є натуральним»;
- « $45 + 100 = 150 - 5$ »;
- «Добуток взаємно обернених дробів дорівнює одиниці»;
- « $5 : 5 < 12$ ».

2. Навести чотири приклади істинних висловлювань.

3. Навести чотири приклади хибних висловлювань.

4. Знайти значення істинності наступних висловлювань:

а) « $|3 - 5| = |3| - |5|$ »;

б) « $\sqrt{16} = -4$ »;

в) « $6,7 \in \mathbb{N}$ »;

г) « $(6 - 3)^2 > 8$ »;

д) «Об'єднанням множин $A = \{a, b, c\}$ і $B = \{c, d\}$ є множина $C = \{a, b, d\}$ »;

е) « $\{9, 12, 14, 17\} = \{17, 9, 12, 14\}$ ».

5. Серед поданих висловлювань вказати прості і складені висловлювання, визначити їх логічну структуру та вказати їх значення істинності:

а)

- « $\sqrt{4} = 2$ або $\sqrt{4} = -2$ »;
- « $-17 < 0$ »;
- «Трикутник прямокутний або гострокутний»;

- «Число 100 кратне 20»;
- «Протилежні сторони паралелограма рівні і паралельні»;
- «Число ділиться на 3, тоді і тільки тоді, коли сума цифр у його записі ділиться на 3»;
- «Число 6 не є більше числа 13»;
- «Через точку можна провести безліч прямих»;
- «Число 8 не є кратним числу 6»;
- «Число 15 кратне 3 і 5»;
- «У чотирикутнику прямий кут і діагоналі взаємно перпендикулярні»;

б)

- « $\sqrt{16} = 4$ і $\sqrt{16} = -4$ »;
- « $23 + 7 = 30$ »;
- «18 не ділиться націло на 9»;
- «Число 15 кратне 3 або 5»;
- «Число 64 не кратне 5»;
- «Паралелограм має центр симетрії»;
- «Трикутник прямокутний або тупокутний»;
- «Суміжні сторони квадрата рівні і перпендикулярні»;
- «Число 3 є дільником числа 18»;
- «Трикутник є прямокутним або гострокутним»;
- «Число ділиться на 2, тоді і тільки тоді, коли його запис закінчується парною цифрою».

6. Визначити логічну структуру висловлювань і вказати їх значення істинності:

а)

- «Число 12 – двоцифрове складене число»;
- « $5 \geq 3$ »;
- « $2 < 3 < 5$ »;

- «Вертикальні кути рівні»;
- «У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні»;
- «Число, яке кратне 4, кратне 2»;
- «В одній годині 60 хв або 60 с»;
- «В одному центнері 100 кг або 1 000 000 г»;
- «Число 2 – найменше просте натуральне число»;

б)

- «Число 2 є парним простим числом»;
- « $6 \leq 10$ »;
- « $10 < 18 < 25$ »;
- «Відповідні кути, які утворилися при перетині паралельних прямих третьою, рівні»;
- «У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні»;
- «Число, яке кратне 9, кратне 3»;
- «2 – єдине просте парне число»;
- «Місяць має не більше 31 доби»;
- «Значення $x = 1$ є розв'язком рівнянь $x - 1 = 0$ і $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$ ».

7. З висловлювань A : «6 кратне 3» і B : «20 кратне 3» утворити складені висловлювання за допомогою різних логічних зв'язків.
8. З висловлювань A : «15 кратне 6» і B : «18 кратне 6» утворити складені висловлювання за допомогою різних логічних зв'язків.
9. З висловлювань «Сьогодні падає дощ» і «Бруківка мокра» утворити складені висловлювання за допомогою логічних зв'язків «і», «...», «тоді і тільки тоді, коли ...» і вказати їх значення істинності.
10. З висловлювань «Трикутник ABC – рівнобедрений» і «Трикутник ABC – рівносторонній» утворити складені висловлювання за допомогою логічних зв'язків «або», «якщо ..., то ...» і вказати їх значення істинності.

2. Операції над висловлюваннями

- 11.** Сформулювати висловлювання, які мають таку логічну структуру, встановити їх значення істинності, якщо задано висловлювання A : «Число 2 менше 8», B : «Число 7 більше 5»:
- a) $\bar{A}$;
 - б) $\bar{B}$;
 - в) $A \wedge B$;
 - г) $A \vee B$;
 - д) $A \Rightarrow B$;
 - е) $A \Leftrightarrow B$.
- 12.** Сформулювати висловлювання, які мають таку логічну структуру, встановити їх значення істинності, якщо задано висловлювання A : «Число 8 більше 2», B : «Число 5 менше 15»:
- a) $\bar{A}$;
 - б) $\bar{B}$;
 - в) $A \wedge B$;
 - г) $A \vee B$;
 - д) $A \Rightarrow B$;
 - е) $A \Leftrightarrow B$.
- 13.** Сформулювати висловлювання, які мають логічну структуру:
- a) $A \wedge B$;
 - б) $C \vee D$;
 - в) $A \Rightarrow D$;
 - г) $\bar{A}$;
 - д) $A \Leftrightarrow B$;
 - е) $A \Rightarrow (C \vee D)$.
- 14.** З'ясувати, в яких випадках висловлювання B набуває значення істинності (1), а в яких – (0), якщо відомо, що:
- a) $A = (1), A \wedge B = (0)$;

б) $A = (1), \quad A \vee B = (0);$

в) $A = (1), \quad A \wedge B = (1);$

г) $A = (1), \quad A \vee B = (1);$

д) $A = (0), \quad A \wedge B = (1);$

е) $A = (0), \quad A \vee B = (1);$

є) $A = (0), \quad A \wedge B = (0);$

ж) $A = (0), \quad A \vee B = (0).$

15. З'ясувати, в яких випадках можна знайти значення істинності складених висловлювань $A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B$, якщо відомо, що:

а) $A = (1);$

б) $A = (0).$

16. З'ясувати, в яких випадках можна знайти значення істинності складених висловлювань $A \wedge B, \quad A \vee B, \quad A \Rightarrow B, \quad A \Leftrightarrow B$, якщо відомо, що:

а) $B = (1);$

б) $B = (0).$

17. Сформулювати і перевірити істинність формули $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ для таких висловлювань A і B :

а) A : « $23 = 8$ » і B : « $24 = 16$ »;

б) A : «Трикутник ABC – рівнобедрений» і B : «У трикутника ABC дві сторони рівні».

18. З простих висловлювань A і B утворити складені висловлювання з такою логічною структурою і встановити значення істинності кожного з них, якщо відомо, що A : «Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° »; B : «Сума внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює 360° »:

а) $A \Rightarrow B,$

б) $B \Rightarrow A,$

в) $\bar{A} \Rightarrow B,$

г) $\bar{B} \Rightarrow A,$

д) $\bar{A} \Rightarrow \bar{B},$

$$e) A \Leftrightarrow B,$$

$$\epsilon) \bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}.$$

19. З простих висловлювань A і B утворити складені висловлювання з такою логічною структурою і встановити значення істинності кожного з них, якщо відомо, що A : «Трикутник рівнобедрений»; B : «Два кути трикутника рівні»:

$$a) A \Rightarrow B,$$

$$б) B \Rightarrow A,$$

$$в) \bar{A} \Rightarrow B,$$

$$г) \bar{B} \Rightarrow A,$$

$$д) \bar{A} \Rightarrow \bar{B},$$

$$e) A \Leftrightarrow B,$$

$$\epsilon) \bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}.$$

20. Дано висловлювання: A : «Сьогодні неділя» і B : «Я сьогодні не буду в університеті». Побудувати з цих висловлювань усі види імплікації і вказати їх значення істинності.
21. Дано висловлювання: A : «Тиждень має сім днів» і B : «Понеділок – перший день тижня». Побудувати з цих висловлювань усі види імплікації і вказати їх значення істинності.
22. Замість крапок поставити відповідні слова «істинна» або «хибна»:
- 1) імплікація « $2 < 3 \Rightarrow -2 > -3$ » ..., бо умова ... і наслідок ...;
 - 2) імплікація « $2 < 3 \Rightarrow -2 < -3$ » ..., бо умова ... і наслідок ...;
 - 3) імплікація « $2 > 3 \Rightarrow -2 > -3$ » ..., бо умова ... і наслідок ...;
 - 4) імплікація « $2 > 3 \Rightarrow -2 < -3$ » ..., бо умова ... і наслідок
23. Записати висловлювання за допомогою символів математичної логіки, ввівши необхідні позначення, і встановити їх значення істинності:
- а) «Якщо $2 \cdot 2 = 4$, то $2 - 3 = 6$ »;
 - б) «Якщо $2 \cdot 2 = 5$, то $2 \cdot 3 = 7$ »;
 - в) «Якщо $|x| > 2$, то $x > 2$ і $x < -2$ »;

г) «Якщо $|x| < 2$, то $x > -2$ і $x < 2$ ».

24. Чи істинними є висловлювання:

а) $\overline{c > d} \Rightarrow c < d$;

б) $7 \geq 3 \Rightarrow \overline{7 < 3}$;

в) $\overline{a \geq b} \Rightarrow a < b$;

г) $\overline{c \leq d} \Rightarrow c > d$;

д) $5 + 4 = 9 \Rightarrow 7 + 2 \neq 9$;

е) $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$;

є) $a \perp b \wedge b \perp c \Rightarrow a \perp c$.

3. Основні закони операцій над висловлюваннями

25. Спростити вирази:

а) $A \wedge \overline{C} \wedge A$;

б) $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow D$;

в) $X \wedge Y \wedge C \vee X \wedge Y \wedge \overline{C} \vee X \wedge Y \wedge \overline{C}$;

г) $A \wedge B \Rightarrow C \vee \overline{A \wedge B} \vee C$;

д) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A \wedge \overline{B}}$;

е) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$;

є) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow A)$;

ж) $A \wedge \overline{B} \vee \overline{A} \wedge C \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge B$;

з) $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;

и) $(A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;

і) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$.

26. Довести за допомогою складання таблиці істинності:

а) асоціативний закон для диз'юнкції;

б) асоціативний закон для кон'юнкції;

в) розподільний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції;

г) розподільний закон для диз'юнкції відносно кон'юнкції;

- д) закон де Моргана для диз'юнкції;
- е) закон де Моргана для кон'юнкції;
- є) закон контрапозиції;
- ж) закон силогізму.

27. Довести істинність або хибність рівностей двома способами:

- а) $A \wedge \overline{\overline{C}} \wedge A = A \vee C$;
- б) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A) = A \vee B$;
- в) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow \overline{A} \vee B = B \wedge \overline{C}$;
- г) $A \wedge B \Rightarrow C \vee \overline{A} \wedge \overline{B} = A \Rightarrow \overline{A \wedge B \wedge C}$.
- д) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow \overline{A} \vee B = B \wedge \overline{C}$;
- е) $A \wedge B \Rightarrow C \vee \overline{A} \wedge \overline{B} = A \Rightarrow \overline{A \wedge B \wedge C}$.

4. Поняття предиката. Множина визначення і множина істинності предиката. Види предикатів

28. Серед наступних тверджень вказати предикати та аргументувати відповідь:

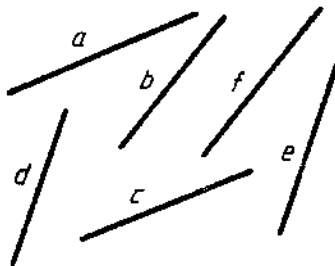
- а)
 - «2 – натуральне число»;
 - « $232 > 312$ »;
 - « $x = 11$ є розв'язком нерівності $2x > 5$ »;
 - «Різниця чисел x і 3 дорівнює 7»;
 - «Прямі паралельні»;
 - «Функція $y = x^2$ – парна»;
 - « $3 \cdot 4 + 5 > 17$ »;
 - « $9 \cdot 3 + 1 = 4$ »;
 - « $(9 - 5) \cdot (9 + 5) = 56$ »;
 - «Хоча б одне із чисел 1, 2, 3, 4, 5 є розв'язком рівняння $x^2 - 1 = 0$ »;

б)

- «Добуток чисел 2 і 7 дорівнює 15»;
- « $112 > 63$ »;
- «Число 10 є розв'язком рівняння $5x + 10 = 60$ »;
- «Частка чисел 10 і x менша 10»;
- «Геометричні фігури рівні»;
- «Графіком квадратичної функції є пряма»;
- «Для будь-якого числа n правильна нерівність $3n + 2 > 0$ »;
- « $3x + 13 = 5$ »;
- « $3y + 5 < 12$ »;
- « $xy = yx$ ».

29. Навести чотири приклади одномісного предиката.
30. Навести чотири приклади двомісного предиката.
31. Навести чотири приклади трьохмісного предиката.
32. На множині N заданий одномісний предикат $C(x)$: «Число x – дільник 12». Сформулювати висловлювання $C(4)$, $C(5)$, $C(8)$, $C(12)$ і знайти їх значення істинності. Вказати множину визначення та множину істинності предиката.
33. На множині N заданий одномісний предикат $B(x)$: «Число 15 має дільник x ». Сформулювати висловлювання $B(5)$, $B(7)$, $B(10)$, $B(15)$ і знайти їх значення істинності. Вказати множину визначення та множину істинності предиката.
34. На множині Z заданий одномісний предикат $B(y)$: « $y + 3 < 5$ ». Чи належать його множині істинності числа -2 ; 10 ; $\frac{3}{2}$? Відповідь пояснити.
35. На множині Z заданий одномісний предикат $C(y)$: « $-2y + 4 < 6$ ». Чи належать його множині істинності числа -1 ; 9 ; $\frac{3}{2}$? Відповідь пояснити.
36. Чи зміниться множина істинності предиката $D(x)$: « $x^2 - 4x - 5 = 0$ », якщо його областю визначення є:

- а) множина Z ;
 б) множина N ?
37. Чи зміниться множина істинності предиката $C(x)$: « $x^2 - 5x = 0$ », якщо його областю визначення є:
- а) множина Z ;
 б) множина N ?
38. Вказати множину визначення та множину істинності предикатів:
- а) $A(x)$: « $5x - 10 = 25$ »;
 $B(x)$: « $3x + 7 \geq 8$ »;
 б)
 $C(x)$: « $5x + 10 = 125$ »;
 $B(x)$: « $7x - 18 \geq 17$ ».
39. Двомісний предикат $A(x, y)$: « $x > y$ » заданий на множині $R \times R$. Назвати дві пари чисел, при підстановці яких у цей предикат отримаємо:
- а) істинне висловлювання;
 б) хибне висловлювання.
40. Двомісний предикат $A(x, y)$: « $x \leq y$ » заданий на множині $R \times R$. Назвати дві пари чисел, при підстановці яких у предикат отримаємо:
- а) істинне висловлювання;
 б) хибне висловлювання.
41. Дано двомісний предикат $D(x, y)$: «Пряма x паралельна до прямої y », де x і y належать множині X прямих площини (див. рисунок). Прочитати висловлювання $D(a, b)$, $D(c, e)$, $D(b, f)$, $D(a, a)$, $D(f, f)$ і вказати серед них істинні.



42. Знайти множини істинності предикатів, визначених на множинах:

- а) $B(x): \langle x < 6 \rangle, \quad x \in \mathbb{N};$
 $D(y): \langle 4 < y \leq 8 \rangle, \quad y \in \mathbb{N};$
 $C(y): \langle y + 2 > -4 \rangle, \quad y \in \mathbb{R};$
 $F(x, y): \langle x \cdot y = 6 \rangle, \quad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};$
 б) $B(x): \langle x < 10 \rangle, \quad x \in \mathbb{N};$
 $E(x): \langle 2 < x < 8 \rangle, \quad x \in \mathbb{N};$
 $C(y): \langle y - 12 > 20 \rangle, \quad y \in \mathbb{R};$
 $K(x, y): \langle x^2 + y^2 = 25 \rangle, \quad (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$

43. Навести чотири приклади тотожно істинного предиката.

44. Навести чотири приклади тотожно хибного предиката.

45. Навести чотири приклади рівносильних предикатів.

46. Чи є рівносильними предикати:

- а) $B(x): \langle x < 6 \rangle, x \in \mathbb{N}$ і $C(x): \langle x < 6 \rangle, x \in \mathbb{R}.$
 б) $B(x): \langle x < 10 \rangle, x \in \mathbb{N}$ і $C(x): \langle x < 10 \rangle, x \in \mathbb{R}.$

5. Операції над предикатами та їх множини істинності

47. Нехай предикати $A(x)$ і $B(x)$ задані на деякій множині X , $d \in X$.

Сформулювати умову, при якій:

- а) $d \in T_{A \wedge B};$
 б) $d \notin T_{A \wedge B};$
 в) $d \in T_{A \vee B};$
 г) $d \notin T_{A \vee B}.$

48. Відомо, що $d \in T_A$. Чи досить цього для того, щоб стверджувати, що:

- а) $d \in T_{A \wedge B};$
 б) $d \in T_{A \vee B}?$

49. Чи можна стверджувати, що $c \notin T_{A \wedge B}$, знаючи, що $c \notin T_A$?

50. Чи можна стверджувати, що $c \notin T_{A \vee B}$, знаючи, що $c \notin T_A$?

51. Вказати значення істинності висловлювань $A(d) \wedge B(d)$ і $A(e) \wedge B(e)$, якщо відомо, що елемент $d \notin T_{A \wedge B}$, а елемент $e \in T_{A \wedge B}$.

52. Вказати значення істинності висловлювань $A(d) \vee B(d)$ і $A(f) \vee B(f)$, якщо відомо, що елемент $d \notin T_{A \vee B}$, а елемент $f \in T_{A \vee B}$.
53. На множині $X = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{5}{3}\}$ задані предикати $C(x)$: «Число x натуральне» і $D(x)$: «Число x є дробовим».
- а) Сформулювати висловлювання $C(1) \vee D(1)$, $C(0) \vee D(0)$, $C(-2) \vee D(-2)$ і знайти їх значення істинності.
- б) Чи правильно, що $\frac{1}{2} \in T_{C \vee D}$? $2 \in T_{C \vee D}$?
54. На множині $X = \{4; -3; 0; 1,5; 7, \frac{5}{3}\}$ задані предикати $C(x)$: «Число x ціле» і $D(x)$: «Число x є від'ємне».
- а) Сформулювати висловлювання $C(1) \vee D(1)$, $C(0) \vee D(0)$, $C(-4) \vee D(-4)$ і знайти їх значення істинності.
- б) Чи правильно, що $\frac{1}{2} \in T_{C \vee D}$? $2 \in T_{C \vee D}$?
55. На множині $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ задано предикати:
- $A(x)$: «Число x – просте»,
 $B(x)$: «Число x кратне 3»,
 $C(x)$: «Число x кратне 4».
- Сформулювати предикати і знайти їх множини істинності:
- а) $A(x) \wedge B(x)$;
 б) $A(x) \vee B(x)$;
 в) $C(x) \wedge A(x)$;
 г) $C(x) \vee B(x)$;
 д) $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$;
 е) $A(x) \vee B(x) \vee C(x)$;
 є) $A(x) \vee B(x) \wedge C(x)$;
 ж) $A(x) \vee C(x) \wedge D(x)$.

56. Сформулювати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x \geq 3$ » і $Q(x)$: « $x \leq 15$ », визначених на множині натуральних чисел, менших 20, та знайти множини їх істинності.
57. Сформулювати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x \geq 5$ » і $Q(x)$: « $x \leq 8$ », визначених на множині натуральних чисел першого десятка, та знайти множини їх істинності.
58. Сформулювати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x \geq 4$ » і $Q(x)$: « $x \leq 6$ », визначених на множині R , та знайти множини їх істинності.
59. Сформулювати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x \geq 10$ » і $Q(x)$: « $x \leq 4$ », визначених на множині R , та знайти множини їх істинності.
60. Задано предикати $P(x)$: « $4x^2 - 9 = 0$ » і $Q(x)$: « $2x - 1 = 2$ ». Чи будуть вони рівносильними на множині:
- раціональних чисел;
 - цілих чисел;
 - натуральних чисел;
 - дійсних чисел?
61. Знайти множини істинності предикатів, заданих на множині дійсних чисел, та їх заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції, якщо:
- $A(x): x - 2 > 2$;
 - $B(x): x^2 > 4$.
62. Записати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x \geq 4$ » і $Q(x)$: « $x \leq 6$ », визначених на множині R , та знайти їх заперечення кон'юнкції і диз'юнкції.
63. Записати заперечення, кон'юнкцію і диз'юнкцію предикатів $P(x)$: « $x < 5$ » і $Q(x)$: « $x \geq 3$ », визначених на множині R , та знайти їх заперечення кон'юнкції і диз'юнкції.
64. На множині трикутників площини задані предикати $A(x)$: «Трикутник x – прямокутний» і $B(x)$: «Трикутник x – рівнобедрений». Утворити

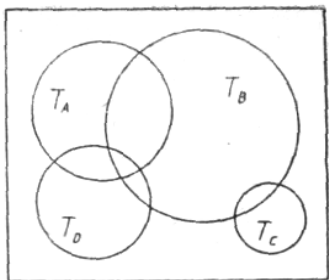
кон'юнкцію та диз'юнкцію цих предикатів і намалювати по дві фігури, які належать:

а) множині істинності кон'юнкції предикатів;

б) множині істинності диз'юнкції предикатів.

Відповідь пояснити.

65. На малюнку зображені множини істинності предикатів $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ і $D(x)$. Заштрихувати множини істинності предикатів:



а) $A(x) \wedge B(x)$;

б) $A(x) \vee B(x)$;

в) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;

г) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;

д) $B(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$;

е) $B(x) \vee C(x) \vee D(x)$.

66. На множині $X = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ задані предикати:

$A(x)$: «Число x кратне 5»,

$B(x)$: «Число x парне»,

$C(x)$: «Число x кратне 3»,

$D(x)$: «Число x складене».

Сформулювати предикати і знайти їх множини істинності:

а) $A(x) \wedge B(x)$;

б) $A(x) \vee B(x)$;

в) $C(x) \wedge D(x)$;

г) $C(x) \vee D(x)$;

д) $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$;

е) $A(x) \vee B(x) \vee D(x)$;

є) $A(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$;

ж) $A(x) \vee C(x) \vee D(x)$.

67. На множині X – множині геометричних фігур задано два предикати – $P(x)$: «Фігура x є прямокутником» і $Q(x)$: «Фігура x є ромбом». Знайти множину істинності диз'юнкції і кон'юнкції цих предикатів та проілюструвати її кругами Ейлера.

68. На множині студентів деякої групи задано два предикати – $P(x)$: «Студент x є учасником хору»; $Q(x)$: «Студент x має спортивний розряд». Сформулювати наступні предикати і описати характеристичні властивості множини істинності кожного з них. Зобразити їх кругами Ейлера:

а) $P(x) \vee Q(x)$;

$$\overline{P(x) \vee Q(x)};$$

$$\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)};$$

б) $P(x) \vee Q(x)$;

$$\overline{P(x) \wedge Q(x)};$$

$$\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}.$$

69. На множині $X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ дано предикати – $P(x)$: «Число x – просте» і $Q(x)$: « $x : 3$ », $R(x)$: « $x : 4$ ». Сформулювати і записати предикати $\overline{P(x)}$, $\overline{Q(x)}$, і $\overline{R(x)}$; $\overline{R(x) \vee Q(x)}$; $\overline{R(x) \wedge Q(x)}$; $\overline{P(x) \wedge Q(x)}$ і вказати їх множини істинності.

70. Знайти множини істинності предикатів, заданих рівняннями, подавши їх у вигляді кон'юнкції або диз'юнкції двох предикатів:

а) $x^2 - 4 = 0$;

б) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$;

в) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.

6. Квантори та їх види. Квантифікація предикатів.

Заперечення тверджень з кванторами

71. Встановити значення істинності висловлювань та квантори, які вони містять:

а) «Всі дерева є рослинами»;

«Існують числа, кратні 5»;

«В будь-якому рівнобедреному трикутнику два кути рівні»;
 «Кожне натуральне число додатне»;
 «Деякі рослини є кущами»;
 «Довільне число кратне 3»;
 «Існує єдине парне число»;
 «Знайдеться від'ємне дробове число»;
 «Існує єдина пряма, яка проходить через дану точку».

- б) «Всі фрукти є яблуками»;
 «Існує єдине число, кратне 10»;
 «В будь-якому рівносторонньому трикутнику всі кути рівні»;
 «Кожне ціле число додатне»;
 «Деякі рослини є деревами»;
 «Всі числа дробові»;
 «Існує єдине просте число»;
 «Знайдеться від'ємне ціле число»;
 «Існує єдина точка, рівновіддалена від кінців відрізка».

72. Записати наступні висловлювання за допомогою математичних символів:

- а) «При деяких натуральних значеннях x має місце рівність $5x - 2 = 10$ »;
 б) «Будь-яке ціле число x є розв'язком нерівності $2x + 1 > 0$ »;
 в) «Існує натуральне число, яке є дільником числа 24»;
 г) «Існують такі натуральні числа a і x , сума яких дорівнює 5»;
 е) «Кожне натуральне число кратне 2»;
 є) «Хоча б одне ціле число не перевищує 0»;
 ж) «Знайдеться таке ціле число, модуль якого дорівнює 5»;
 з) «Всі натуральні числа більші від 0».

73. Записати висловлювання за допомогою відповідних кванторів і вказати, які з них істинні, які хибні:

- а) «У будь-якому календарному році є місяць, що має 28 днів»;
 б) «У кожному році чотири місяці мають по 30 днів»;
 в) «Існує натуральне число, квадрат якого менший від 1»;

- г) «Квадрат будь-якого натурального числа більший від 1»;
- д) «Існує натуральне число, квадрат якого дорівнює 1»;
- е) «Добуток будь-яких двох цілих чисел є додатне число»;
- є) «Добуток будь-яких двох натуральних чисел є додатне число»;
- ж) «Добуток будь-яких двох чисел є додатне число».

74. Прочитати наступні висловлювання і встановіть їх істинність:

- а) $\exists n \in \mathbb{Z}, n > 2$;
 $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 2$;
 $\exists! n \in \mathbb{Z}, n > 2$;
 $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n > m$;
 $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! m \in \mathbb{Z}, n > m$;
 $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, n > m$;
 $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, n > m$.

- б) $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 6$;
 $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 6$;
 $\exists! x \in \mathbb{R}, x \leq 6$;
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 6$;
 $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 6$;
 $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 6$;
 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \cdot y = 6$.

75. Які з наведених нижче тверджень є висловлюваннями, а які предикатами? Відповідь обґрунтуйте.

- а) $x^2 + y^2 = 25$, де $x, y \in \mathbb{R}$;
- б) $\forall x \in \mathbb{R}, 3x > 1$;
- в) «У будь-якому паралелограмі діагоналі рівні»;
- г) «У паралелограмі діагоналі рівні»;
- д) «У прямокутнику всі сторони рівні».

76. Квантифікувати одномісний предикат всіма можливими способами і вказати значення істинності отриманих висловлювань:
- а) $\langle x \geq 3 \rangle$;
 - б) $\langle x \geq 8 \rangle$;
 - в) $\langle x < 5 \rangle$;
 - г) $\langle x < 8 \rangle$;
 - д) «Число парне»;
 - е) «Число кратне 5».
77. Квантифікувати двомісний предикат всіма можливими способами і вказати значення істинності отриманих висловлювань:
- а) $\langle x + y = 5 \rangle$;
 - б) $\langle x - y = 10 \rangle$;
 - в) «Числа x і y протилежні»;
 - г) «Числа x і y додатні».
78. Побудувати заперечення висловлювання і вказати значення істинності:
- а) «Кожне число більше 4»;
 - б) «Існує число менше 8»;
 - в) «Всі числа кратні 3»;
 - г) «Існують числа, меші 2».
79. Побудувати заперечення висловлювання і вказати значення істинності:
- а) «Сума довільних двох дійсних чисел дорівнює 6»;
 - б) «Для дійсного числа x знайдеться дійсне число y таке, що x більше y »;
 - в) «Існують два дійсні числа, добуток яких дорівнює 5»;
 - г) «Деяке число x менше довільного числа y ».
80. Сформулюйте заперечення наступних висловлювань і встановіть їх істинність:
- а) «Деякі іменники відповідають на питання «що?»»;
 - б) «Усі двоцифрові числа більші від 7»;
 - в) «Існує натуральне число, яке є розв'язком рівняння $2x + 5 = 11$ »;
 - г) «Всі геометричні фігури є трикутниками»;

д) «Кожний прямокутник є паралелограмом»;

е) «Будь-який кущ цвіте навесні».

- 81.** На множині студентів деякої групи дано предикат, що не є тотожно хибним і не є тотожно істинним $P(x)$: «Студент x здав екзамен з математики». Побудувати його заперечення і за допомогою кванторів утворити різні висловлювання з предикатів $P(x)$ і $\bar{P}(x)$.
- 82.** На множині натуральних чисел дано предикати $A(x)$: «Число x парне» і $B(x)$: «Число x кратне 8». Сформулювати словами і вказати значення істинності висловлювань:
- а) $\forall x, A(x) \vee B(x)$;
 - б) $\forall x, A(x) \wedge B(x)$;
 - в) $\exists x, A(x) \vee B(x)$;
 - г) $\exists x, A(x) \wedge B(x)$.
- 83.** Застосувати квантор загальності і квантор існування до предикатів:
 $A(x, y)$: « $x - y = y - x$ » і $B(x, y)$: « $|x - y| = |y - x|$ », визначених на множині цілих чисел. Перевірити, які з утворених висловлювань істинні, а які – хибні.
- 84.** До вас звернувся учень 6 класу з запитанням: не розумію, чому вчителька у моїй контрольній роботі підкреслила як помилку формулу $(a + b)^2 = a^2 + b^2$? Адже, я перевірів її: при $a = 0$ і $b = 0$ – рівність правильна; при $a = 1$ і $b = 0$ – рівність теж правильна; при $a = 0$ і $b = 2$ – рівність правильна і т. д. Допоможіть учню знайти його помилку.
- 85.** Підберіть предикати (з життя, з математики), в яких доцільно було б використати обидва квантори $\forall$ і $\exists$. Чи можна їх поміняти між собою місцями? (Тобто чи переставна властивість для кванторів має місце?)

7. Логічний наслідок. Рівносильні предикати.

Необхідні і достатні умови

- 86.** На множині елементарних функцій задано предикати:
 $A(x)$: «Функція $y = f(x)$ парна»;

$B(x)$: «Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно осі ординат»;

$Q(x)$: «Функція $y = f(x)$ непарна»;

$P(x)$: «Графік функції $y = f(x)$ симетричний відносно початку координат».

Сформулювати словами імплікації:

$$A(x) \Rightarrow B(x); \quad A(x) \Rightarrow P(x);$$

$$A(x) \Rightarrow \overline{Q(x)}; \quad A(x) \Rightarrow \overline{P(x)};$$

$$B(x) \Rightarrow A(x); \quad \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)};$$

$$Q(x) \Rightarrow P(x); \quad \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)};$$

$$\overline{Q(x)} \Rightarrow B(x); \quad \overline{P(x)} \Rightarrow A(x).$$

Який з цих предикатів є наслідком іншого з них? Знайти серед них рівносильні предикати (якщо такі є).

- 87.** Задано предикати – $A(x)$: «Многокутник x — опуклий чотирикутник»;
 $B(x)$: «Многокутник x — трапеція»; $C(x)$: «Многокутник x — паралелограм»;
 $D(x)$: «Многокутник x — прямокутник»;
 $E(x)$: «Многокутник x — квадрат».

Сформулювати імплікації:

а) $A(x) \Rightarrow B(x)$;

б) $B(x) \Rightarrow A(x)$;

в) $C(x) \Rightarrow D(x)$;

г) $D(x) \Rightarrow C(x)$;

д) $D(x) \Rightarrow B(x)$;

е) $C(x) \Rightarrow D(x)$;

Переформулювати їх, використовуючи відповідні слова «необхідно», «достатньо», «необхідно і достатньо».

- 88.** Дано предикати $A(x)$: «Натуральне число x менше 5» і $B(x)$: «Натуральне число x менше 10». Сформулювати імплікації та еквіваленцію цих предикатів. Визначити їх значення істинності та вказати для них необхідні і достатні умови.

89. Дано предикати $A(x)$: «Натуральне число x кратне 10» і $B(x)$: «Натуральне число кратне 5». Сформулювати імплікації та еквіваленцію цих предикатів. Визначити їх значення істинності та вказати для них необхідні і достатні умови.
90. На множині дійсних чисел дано предикати – $P(x,y): x^2 - y^2 = 0$, $Q(x, y): x - y = 0$, $D(x, y): x = y$. Який з предикатів є наслідком одного з інших? Які з цих предикатів є рівносильними? Записати це у вигляді імплікацій та еквіваленції.
91. Записати у вигляді імплікацій або еквіваленцій твердження:
- а) «Натуральне число x ділиться на 4 і на 25, тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на 100»;
 - б) «Натуральне число x ділиться на 5 тоді, коли його запис закінчується нулем»;
 - в) «Натуральне число x ділиться на 25, тоді і тільки тоді, коли запис його закінчується двома нулями»;
 - г) «Запис натурального числа x закінчується нулем тоді, коли воно ділиться на 5».
- Визначити, які з цих тверджень істинні.
92. Виділити предикати, які є наслідками якогось іншого з наведених нижче предикатів, заданих на множині дійсних чисел, і записати відношення слідування імплікаціями:
- 1) $A(x): \sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$;
 - 2) $C(x): \sqrt{x} \geq 3, x \geq 0$;
 - 3) $B(x): \sqrt{x^2} = |x|$;
 - 4) $D(x): x \geq 9$.
- Записати предикат, рівносильний предикату $C(x)$.
93. Визначити, чи рівносильні предикати $P(x,y)$: «Кути x і y є вертикальними» і $M(x, y)$: «Кути x і y є рівними».
94. Чи будуть рівносильними між собою такі пари тверджень:

- а) «Неправильно, що всі числа кратні 4 і 6 кратні 24» і «Існує число кратне 4 і 6 і не кратне 24».
- б) «Неправильно, що навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло» і «Існує чотирикутник, навколо якого не можна описати коло».
- в) «Неправильно, що всі вписані в коло чотирикутники правильні» і «Всі вписані в коло чотирикутники неправильні»?

95. Замість крапок поставити потрібні слова «необхідно», «досить» або «необхідно і досить»:

- а) «Для того щоб купити пальто за 4200 грн., ..., мати 4000 грн.»;
- б) «Для того щоб купити пальто за 3200 грн., ...; мати 4000 грн.»;
- в) «Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб діагоналі його точкою перетину ділились навпіл»;
- г) «Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб протилежні кути його були рівні»;
- д) «Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб кожна діагональ ділила його на два рівні трикутники»;
- е) «Для того щоб число ділилося на 12, ..., щоб воно ділилося на 3 і 4»;
- є) «Для того щоб число ділилося на добуток двох чисел, ..., щоб воно ділилося на кожне з цих чисел»;
- ж) «Для того щоб число ділилося на добуток двох взаємно простих чисел, щоб воно ділилося на кожне з цих чисел».

96. На множині дійсних чисел дано предикати:

$$P(x, y): x^2 - y^2 = 0,$$

$$Q(x, y): x - y = 0,$$

$$D(x, y): x = y.$$

Який з предикатів є наслідком одного з інших? Чи є ці предикати рівносильними? Записати це символами. Вказати необхідні і достатні умови.

97. На множині дійсних чисел дано предикати:

$$P(x, y): x^3 - y^3 = 0,$$

$$Q(x, y): x - y = 0,$$

$$D(x, y): x = y.$$

Який з предикатів є наслідком одного з інших? Чи є ці предикати рівносильними? Записати це символами. Вказати необхідні і достатні умови.

8. Теорема та її будова. Прості і складені теореми.

Види теорем. Побудова логічного квадрата

98. Визначити будову теореми:

- а) «Сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180^0 »;
- б) «Сума внутрішніх кутів чотирикутника дорівнює 360^0 »;
- в) «Діагоналі прямокутника рівні між собою»;
- г) «У будь-якому трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона»;
- д) «Пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу»;
- е) «Якщо натуральне число ділиться на 9, то воно ділиться на 3»;
- є) «Якщо натуральне число ділиться на 12, то воно ділиться на 3».

99. Виділити умову і висновок в кожній з теорем:

- а) «Для того щоб добуток двох дійсних чисел був від'ємним, необхідно і досить, щоб співмножники мали різні знаки»;
- б) «Для того щоб трикутник був рівнобедреним, необхідно і досить, щоб два його кути були рівні між собою»;
- в) «Протилежні кути паралелограма рівні між собою»;
- г) «Для того щоб $a + 5 \geq 6$, досить, щоб a було натуральним числом»;
- д) «Діагоналі прямокутника рівні між собою»;
- е) «Квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів».

100. Навести чотири приклади простих теорем. Записати їх символічно.

101. Навести чотири приклади складених теорем. Записати їх символічно.

102. Визначити логічну структуру складених теорем:

- а) «Якщо у трикутнику один кут прямий або тупий, то два інші — гострі»;
- б) «Пряма, перпендикулярна до радіуса в точці, що лежить на колі, є дотичною до цього кола»;
- в) «У правильному трикутнику всі висоти рівні між собою»;
- г) «Протилежні кути паралелограма рівні між собою»;

103. У шкільних підручниках з алгебри та геометрії відшукайте по дві складені теореми різного виду (коли умова — просте висловлення, а висновок — кон'юнкція або диз'юнкція висловлень, і навпаки; коли і умова є кон'юнкціями або диз'юнкціями простих висловлень, а висновок просте висловлювання). Записати кожна з них у вигляді імплікації або еквіваленції.

104. Визначити будову заданої теореми. Сформулювати решту видів теорем, які утворюють з нею логічний квадрат. Побудувати його. Вказати необхідні і достатні умови:

- «У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні»;
- «У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи є його висотою»;
- «Рівні фігури мають однакові площі»;
- «Рівні фігури мають однакові периметри»;
- «Точка перетину діагоналей паралелограма є його точкою симетрії»;
- «Бісектриси будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром вписаного в нього кола»;
- «Точки, розміщені на серединному перпендикулярі відрізка, рівновіддалені від його кінців»;
- «Перпендикуляр є найкоротша відстань від даної точки площини до прямої цієї ж площини, якій ця точка не належить».
- «Якщо сторони двох гострих кутів попарно паралельні, то ці кути рівні»;

- «Бісектриса кута є віссю симетрії його сторін»;
- «Рівні фігури є подібними»;
- «Діагональ паралелограма розбиває його на два рівні трикутники»;
- «Число, кратне 10, ділиться на 2»;
- «Число, кратне 3 і 5, ділиться на 15»;
- «Середня лінія трапеції паралельна її основам»;
- «Середня лінія трапеції дорівнює їх півсумі»;
- «У рівнобічній трапеції кути при основі рівні»;
- «Протилежні кути паралелограма рівні між собою»;
- «Частки від ділення двох рівних дійсних чисел на одне і те ж дійсне число, відмінне від нуля, рівні між собою»;
- «У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні між собою»;
- «Квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів»;
- «У рівносторонньому трикутнику всі сторони рівні між собою»;
- «Якщо у трикутнику один кут тупий, то два інші — гострі»;
- «Якщо дві прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні».

105. Розділити на прості теореми теорему про властивість кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою. Побудувати обернені твердження до кожної простої теореми, протилежні твердження і обернені до них.

Дану теорему можна розділити на п'ять простих теорем зі спільною умовою, а різними висновками:

Якщо дві паралельні прямі перетнути третьою (А), то:

- 1) відповідні кути, що утворюються при цьому, рівні (В);
- 2) внутрішні різносторонні кути рівні (С);
- 3) зовнішні різносторонні кути рівні (D);
- 4) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180^0 (Е);
- 5) сума зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 180^0 (F).

До кожної з цих теорем побудуйте ще три (за логічним квадратом).

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи

Для виконання контрольної роботи з розділу «*Елементи математичної логіки*» студент повинен:

знати: *означення висловлювання; значення істинності висловлювань; основні закони операцій над висловлюваннями; означення предиката; множину визначення і множину істинності предиката; операції над предикатами; квантори загальності, існування та єдиності; квантифікацію предикатів; зв'язані і вільні змінні; правила побудови заперечення тверджень, що містять квантори; означення теореми; будову теорем; види теорем.*

вміти: *визначати значення істинності висловлювань та логічну структуру складених висловлювань; будувати таблиці істинності для доведення рівностей; використовувати основні закони операцій над висловлюваннями для доведення рівностей; визначати область визначення і множину істинності предикатів; використовувати квантори загальності і існування для квантифікації предикатів; застосовувати правила побудови заперечення тверджень, що містять квантори; встановлювати необхідні і достатні умови; будову теорем; види теорем; будувати логічний квадрат.*

Контрольна робота містить 6 практичних завдань з даного розділу, які оцінюються **50 балів:**

- 1 завдання — **6 балів,**
- 2 завдання — **12 балів,**
- 3 завдання — **10 балів,**
- 4 завдання — **10 балів,**
- 5 завдання — **12 балів.**

Типовий варіант контрольної роботи

Розділ 2. Елементи математичної логіки

Варіант – 35

1. Визначити логічну структуру висловлювання «число 21 є раціональним або непарним» і вказати значення його істинності.

2. Довести двома способами істинність або хибність рівності:

$$\overline{D} \vee (B \vee \overline{D}) \wedge (B \vee \overline{D}) = \overline{\overline{D}} \Rightarrow B.$$

3. Сформулювати та знайти множини істинності заданих предикатів, їх заперечень, диз'юнкції, кон'юнкції, якщо $A(x)$: «число x – парне» і $B(x)$: «число x – складене» задані на множині $M = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$.

4. Сформулювати заперечення висловлювання «Існує паралелограм, що не має осі симетрії» і встановити, чи воно істинне.

5. Дано теорему «Число, яке не закінчується цифрою 0, не ділиться націло на 10». Записати всі види теорем та побудувати для них логічний квадрат. Визначити необхідні та достатні умови.

Питання для самоконтролю та підготовки до екзамену

1. Висловлювання. Приклади.
2. Значення істинності висловлювання. Приклади.
3. Прості і складені висловлювання. Приклади.
4. Логічні зв'язки. Логічна структура висловлювань. Приклади.
5. Заперечення висловлювання, його таблиця істинності.
6. Кон'юнкція двох висловлювань, її таблиця істинності.
7. Диз'юнкція двох висловлювань, її таблиця істинності.
8. Імплікація двох висловлювань, її таблиця істинності.
9. Види імплікації двох висловлювань.
10. Еквіваленція двох висловлювань, її таблиця істинності.
11. Основні закони заперечення.
12. Основні закони кон'юнкції.
13. Основні закони диз'юнкції.
14. Основні закони імплікації.
15. Основні закони еквіваленції.
16. Поняття предиката. Приклади.
17. Одномісні предикати. Двомісні предикати. Трьохмісні предикати.
Приклади.
18. Множина визначення предиката. Приклади.
19. Множина істинності предиката. Приклади.
20. Тотожно істинні предикати. Приклади.
21. Тотожно хибні предикати. Приклади.
22. Рівносильні предикати. Приклади.
23. Заперечення предиката, його множина істинності. Приклади.
24. Кон'юнкція двох предикатів, її множина істинності. Приклади.
25. Диз'юнкція двох предикатів, її множина істинності. Приклади.
26. Імплікація двох предикатів, її множина істинності. Приклади.
27. Еквіваленція двох предикатів, її множина істинності. Приклади.
28. Квантор загальності. Приклади.

29. Квантор існування. Приклади.
30. Квантор єдиності. Приклади.
31. Квантифікація одномісних предикатів. Приклади.
32. Квантифікація двомісних предикатів. Приклади.
33. Зв'язані і вільні змінні.
34. Правила побудови заперечення висловлювань з кванторами.
35. Відношення логічного слідування на множині предикатів. Логічний наслідок.
36. Відношення рівносильності на множині предикатів. Рівносильні предикати.
37. Необхідні і достатні умови. Приклади.
38. Теорема та її будова. Прості і складені теореми. Логічна структура теорем.
39. Види теорем.
40. Логічний квадрат та його побудова. Приклади.

Список використаної літератури

1. Гладунський В. Вища математика й елементи логіки: означення, формули, приклади : навчальний посібник/ В. Гладунський ; М-во освіти і науки України ; Науково-методичний центр вищої освіти, НБУ, ЛБІ. – Львів: Афіша, 2005. – 494с.
2. Затула Н.І. Математика : навчальний посібник для педвузів/ Н.І.Затула, А.М.Зуб, Г.І.Коберник, А.Ф.Нещадим. – К.: Кондор, 2006. – 560с.
3. Коберник Г.І. Математика. Практикум. Ч.І. : навч. посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта» / Г.І. Коберник, Г.М. Чирва. – Умань : ФОП Жовтий О.О., 2013. – 193с.
4. Коберник Г.І. Математика. Практикум. Ч.ІІ.: навч. посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта». 2-е вид. / Г.І. Коберник, Г.М. Чирва. – Умань : РВЦ «Софія», 2013. – 185с.
5. Кухар В.М. Математика: Множини. Логіка. Цілі числа: Практикум / В.М.Кухар, – К. : Вища школа, 1989. – 333с.
6. Кухар В.М. Теоретичні основи початкового курсу математики / В.М.Кухар, Б.М.Білий – К.: Вища школа, 1987. – 320с.
7. Пилипко Є.В. Курс лекцій «Логіка» (для студентів усіх форм навчання всіх спеціальностей) / Є.В. Пилипко. – Харків : ХНУМГ, 2013. – 94 с.
8. Сілков В.В. Математика : курс лекцій. Ч.ІІ. Методичні вказівки до вивчення курсу математики. Для студентів спец. № 8.01.01.02 «Початкова освіта», № 8.01.01.01 «Дошкільна освіта» / В.В.Сілков. – Рівне : РДГУ, 2008. – 104 с.
9. Шкільняк С.С. Математична логіка. Приклади і задачі : навч. посібник / С.С.Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київський ун-т", 2007. – 145с.

Предметний покажчик**А**

Аксіома 45

Асоціативний закон для диз'юнкції висловлювань 18

Асоціативний закон для кон'юнкції висловлювань 18

Б

Будова теореми 45

В

Взаємно обернені теореми 47

Взаємно протилежні теореми 47

Види імплікацій 16

Види кванторів 35

Види теорем 46

Вирази зі змінною 7

Висловлювання 6

Висновок імплікації 15

Висновок теореми 45

Вільна змінна 40

Д

Двомісний предикат 24

Диз'юнкція висловлювань 13

Диз'юнкція предикатів 29

Дистрибутивний закон для диз'юнкції відносно кон'юнкції 18

Дистрибутивний закон для кон'юнкції відносно диз'юнкції 18

Достатня умова 43

Е

Еквіваленція висловлювань 16

Еквіваленція предикатів 31

З

Закон виключення третього 18

Закон ідемпотентності 18

Закон контрапозиції 18

Закон несуперечливості 18

Закон подвійного заперечення 18

Закон силогізму 18

Закон тотожності 18

Закони де Моргана 18

Закони операцій над висловлюваннями 18

Заперечення висловлювання 13

Заперечення предиката 28

Зв'язана змінна 40

Зв'язок імплікації з диз'юнкцією і запереченням 18

Значення істинності висловлювання 7

І

Імплікація висловлювань 15

Імплікація предикатів 30

Істина 7

Істинне висловлювання 7

К

Квантифікація двомісного предиката 39

Квантифікація одномісного предиката 38

Квантифікація предиката 38

Квантор 35

Квантор єдності 35

Квантор загальності 35

Квантор існування 35

Комутативний закон для диз'юнкції висловлювань 18

Комутативний закон для кон'юнкції висловлювань 18

Кон'юнкція висловлювань 13

Кон'юнкція предикатів 28

Контрприклад 36

Л

Логічна структура висловлювання 11

Логічна структура теореми 45

Логічний квадрат 47

Логічний наслідок предиката 42

Логічні зв'язки 11

М

Множина визначення предиката 25

Множина істинності предиката 25

Н

Набори значень простих висловлювань 19

Необхідна і достатня умова 43

Необхідна умова 43

Нерівності 7

О

Обернена імплікація до заданої 16

Обернена імплікація до протилежної 16

Обернена теорема до протилежної 47
Обернена теорема до прямої 47
Одномісний предикат 24
Операції над висловлюваннями 13
Операції над предикатами 28
Операція зв'язування змінної предиката 40

П

Правило заперечення тверджень з кванторами 41
Предикат 24
Приклад 36
Проста теорема 46
Просте висловлювання 11
Протилежна імплікація дл заданої 16
Протилежна імплікація до оберненої 16
Протилежна теорема до оберненої 47
Протилежна теорема до прямої 47
Пряма імплікація 16
Пряма теорема 47

Р

Рівносілні висловлювання 19
Рівносілні предикати 26, 42
Рівняння 6, 7

С

Символ істини 7
Символ хиби 7
Складена теорема 46
Складене висловлювання 11

Структурні елементи будови теореми 45

Т

Таблиця істинності 13

Таблиця істинності для диз'юнкції висловлювань 14

Таблиця істинності для еквіваленції висловлювань 17

Таблиця істинності для заперечення висловлювання 13

Таблиця істинності для імплікації висловлювань 15

Таблиця істинності для кон'юнкції висловлювань 13

Теорема 45

Теорема про множину істинності диз'юнкції предикатів 29

Теорема про множину істинності еквіваленції предикатів 31

Теорема про множину істинності заперечення предиката 28

Теорема про множину істинності імплікації предикатів 30

Теорема про множину істинності кон'юнкції предикатів 29

Тотожно істинний вираз з висловлюваннями 20

Тотожно істинний предикат 26

Тотожно хибний предикат 26

Трьохмісний предикат 24

У

Умова імплікації 15

Умова теореми 45

Х

Хиба 7

Хибне висловлювання 7

Ч

Числові рівності і нерівності 6

Електронне навчально-методичне видання

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ**

Розділ 2

Елементи математичної логіки

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Редактор
Ірина Невмержицька
Коректор
Ірина Артимко

Здано до набору 04.04.2024 р. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 5,50. Зам. 25.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої ДК № 5140 від 01.07.2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І. Франка, 24. К. 203.