

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ**

Розділ 1

Елементи теорії множин та комбінаторики

Дрогобич, 2024

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

кафедра фундаментальних дисциплін початкової освіти

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Розділ 1

Елементи теорії множин та комбінаторики

*Навчально-методичний посібник для підготовки здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
галузі знань 01 Освіта/ Педагогіка
спеціальності 013 Початкова освіта
Освітні програми: Початкова освіта та інформатика.
Початкова освіта та англійська мова*

Дрогобич, 2024

УДК 510 (08)

Б. 61

**Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 3 від 21 березня 2024 року)**

Рецензенти:

Війчук Тарас Іванович, доцент, завідувач кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат педагогічних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

Галь Юрій Михайлович, доцент кафедри математики та економіки факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій, кандидат фізико-математичних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

Відповідальний за випуск:

Ковальчук В.Ю., професор, завідувач кафедри фундаментальних дисциплін початкової освіти факультету початкової освіти та мистецтва, доктор педагогічних наук (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

Теоретичні основи початкового курсу математики. Розділ 1. Елементи теорії множин та комбінаторики. Дрогобич: Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2024. 80 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми курсу «Теоретичні основи початкового курсу математики» для підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта / Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта. Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова денної та заочної форм здобуття освіти. У ньому вміщено теоретичний та практичний блоки з розділу «Елементи теорії множин та комбінаторики». Посібник містить виклад основних положень розділу, які розкриваються через конкретні приклади. Запропонована у виданні система вправ підібрана відповідно до вимог програми дисципліни з метою забезпечення високого рівня сформованості компетентностей студентів.

Бібліографія: 5 назв.

Зміст

Вступ	5
Тексти лекцій	6
I. Елементи теорії множин	6
1.1. Множина. Елемент множини. Порожня множина	6
1.2. Скінченні та нескінченні множини. Числові множини	7
1.3. Способи задання множин	9
1.4. Підмножина. Невласні та власні підмножини. Рівні множини. Універсальна множина	11
1.5. Спільні елементи множин. Круги Ейлера. Діаграми Ейлера–Венна. Відношення між множинами	14
1.6. Операції над множинами	17
1.7. Закони (властивості) операцій над множинами	21
1.8. Упорядкована пара елементів та її компоненти. Декартовий добуток двох множин та його властивості	25
1.9. Координатна площина. Зображення декартового добутку двох числових множин на координатній площині	26
1.10. Кортеж та його компоненти. Декартовий добуток кількох множин	30
II. Елементи комбінаторики	31
2.1. Правило суми	31
2.2. Правило добутку	36
2.3. Комбінаторні сполуки	38
2.4. Розв’язування комбінаторних задач	42
Тематика лекцій	44
Теми практичних занять	45
Завдання для практичних занять та самостійної роботи	46
Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи	69
Типовий варіант контрольної роботи	70
Перелік питань для самоконтролю та підготовки до екзамену	71
Список використаної літератури	73
Предметний покажчик	74

Вступ

Навчальна дисципліна «Теоретичні основи початкового курсу математики» передбачена як обов'язковий компонент освітньо-професійної програми для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань 01 Освіта / Педагогіка спеціальності 013 Початкова освіта (Освітні програми: Початкова освіта та інформатика. Початкова освіта та англійська мова) денної та заочної форм здобуття освіти.

Відповідно до затвердженої робочої програми вивчення цієї дисципліни починається з розділу «Елементи теорії множин та комбінаторики». У ньому розглядаються поняття множин, їхні види та способи задання множин; відношення між множинами та їх зображення за допомогою кругів Ейлера; операції над множинами та їх властивості; побудова діаграм Ейлера–Венна для доведення рівностей; декартовий добуток множин та його властивості; правила суми та добутку; комбінаторні сполуки та їх застосування до розв'язання комбінаторних задач. Теоретичні положення ілюструються прикладами.

У запропонованому навчально-методичному посібнику подано тексти та тематику лекцій, теми практичних занять, завдання для практичних занять та самостійної роботи, методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи, типовий варіант контрольної роботи, перелік питань для самоконтролю та підготовки до екзамену, список використаної літератури, предметний покажчик.

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

І. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Множина. Елемент множини. Порожня множина

У математиці є поняття, які називаються *первісними, неозначуваними*, бо їм не можна подати чіткого означення. Вони лише пояснюються, тлумачаться, але чітко не означаються. Наприклад, до неозначуваних математичних понять відносять такі поняття шкільного курсу математики: *точка, пряма, площа* тощо.

Ще одним із таких неозначуваних математичних понять є поняття «**множина**». Під множиною розуміють сукупність тих чи тих об'єктів, які можна згрупувати між собою за певними ознаками. Наприклад, набір іграшок, колекція марок, учнівський клас, зграя птахів, рій бджіл тощо.

Означення. *Об'єкти, з яких складається множина, називаються елементами множини.*

Елементами множини можуть бути як матеріальні об'єкти (яблука, іграшки, предмети тощо), так і абстрактні об'єкти (числа, геометричні фігури, символи, самі множини і т. д.).

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими буквами латинського алфавіту.

Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A .

Запис $a \notin A$ означає, що елемент a не належить множині A .

Множини можуть мати різну **кількість елементів**:

- *мати декілька елементів* (наприклад, множина букв українського алфавіту; множина студентів групи; множина цифр у записі числа),
- *не мати жодного елемента* (наприклад, множина людей на Сонці),
- *мати безліч елементів* (наприклад, множина трикутників площини); множина чисел, кратних 5).

Означення. *Множина, яка не містить жодного елемента, називається порожньою і позначається символом $\emptyset$.*

Наприклад, порожньою є множина від'ємних натуральних чисел.

1.2. Скінченні та нескінченні множини. Числові множини

Означення. Множина, яка містить обмежену кількість елементів, називається **скінченною**.

Наприклад, скінченною є множина одноцифрових чисел (містить десять елементів), множина вершин квадрата (містить чотири елементи), множина сторін трикутника (містить три елементи), множина днів тижня (містить сім елементів).

Означення. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається **нескінченною**.

Наприклад, нескінченною є множина точок на прямій, множина прямих на площині, множина зірок на небі (містять безліч елементів).

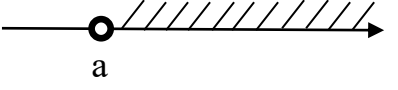
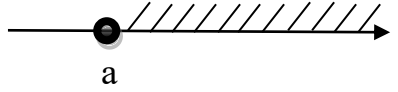
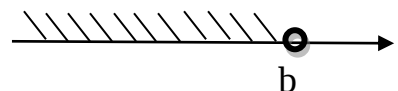
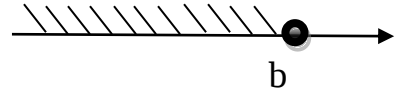
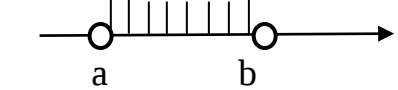
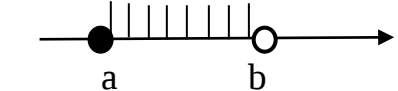
Означення. Якщо елементами множини є числа, то множина називається **числовою**.

Відомі такі **нескінченні числові множини**:

Позначення множини	Назва множини	Зміст множини
N	Множина натуральних чисел	Множина чисел, які використовуються при лічбі: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; ...
Z	Множина цілих чисел	Множина натуральних чисел, чисел до них протилежних чисел та нуль: ..., -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...
Q	Множина раціональних чисел	Множина цілих і дробових чисел, тобто чисел, які можна зобразити у вигляді звичайного дробу m/n , де m – ціле число, n – натуральне число
I	Множина ірраціональних чисел	Множина нескінченних десяткових неперіодичних дробів
R	Множина дійсних чисел	Множина раціональних та ірраціональних чисел, тобто $R = (-\infty; +\infty)$

Графічним зображенням множини $\mathbb{R}$ є **числова (координатна) пряма**, тобто пряма, яка має напрям, початок відліку та одиницю.

Різні частини числової прямої утворюють **числові проміжки**:

Зображення числового проміжка на числовій прямій	Нерівність	Запис числового проміжка
	$x > a$	$x \in (a; +\infty)$
	$x \geq a$	$x \in [a; +\infty)$
	$x < b$	$x \in (-\infty; b)$
	$x \leq b$	$x \in (-\infty; b]$
	$a < x < b$	$x \in (a; b)$
	$a \leq x < b$	$x \in [a; b)$
	$a < x \leq b$	$x \in (a; b]$
	$a \leq x \leq b$	$x \in [a; b]$

1.3. Способи задання множин

Є такі **способи задання множини**:

<i>Спосіб задання множини</i>	<i>Приклад запису задання множини</i>	<i>Приклад читання задання множини</i>
Словесний А – множина ...	А – множина натуральних чисел, які менші 25 і кратні 5	А – множина натуральних чисел, які менші 25 і кратні 5
Переліком елементів $A = \{ \quad \}$	$A = \{5; 10; 15; 20\}$	Множина А складається з елементів 5; 10; 15; 20
За допомогою характеристичних властивостей $A = \{x \mid \dots\}$	$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 25, x:5\}$	Множина А складається з усіх елементів x , таких, що є натуральними числами, меншими, ніж 25, та кратними 5
Числовим проміжком	$A = [4; 9]$	Множина А складається з дійсних чисел від 4 включно до 9 включно
Графічним зображенням проміжка на числовій прямій		Множина А складається з дійсних чисел від 3 включно до 8 включно

Зауважимо, що для переліку елементів множини порядок елементів у записі множини значення не має, а кожен елемент записується у ньому лише один раз.

Означення. *Характеристичною властивістю, яка визначає множину, називають таку властивість, якою володіють усі елементи заданої множини, і жоден елемент, який їй не належить, нею не володіє.*

Характеристичними властивостями для наведеного вище прикладу множини є: бути натуральним числом; бути меншим числом, ніж 25; бути числом, кратним 5. Характеристична властивість дає відповідь, чи належить заданий об'єкт множині A чи ні. Наприклад,

- $30 \notin A$, бо воно не є меншим, ніж 25, хоча $30 \in N$ і 30 кратне 5;
- $6,5 \notin A$, бо воно не є натуральним числом, хоча менше 25;
- $11 \notin A$, бо 11 не є кратним 5, хоча $11 \in N$ і $11 < 25$.

У низці випадків одну і ту саму множину можна задати різними способами.

Приклад 1. Записати різними способами множину A :

а) A – множина натуральних дільників числа 24;

б) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

в) $A = \{x \mid x \in R, 3 \leq x \leq 9\}$;

г) $A = [-2; 3]$.

Розв'язання:

а) 1) в умові завдання множина A задана словесним способом;

2) переліком елементів: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$;

3) з допомогою характеристичних властивостей: $A = \{x \mid x \in N, 24 \vdots x\}$.

б) 1) в умові завдання множина A задана переліком елементів;

2) словесним способом: A – множина натуральних чисел, менших 9;

3) за допомогою характеристичних властивостей: $A = \{x \mid x \in N, x \leq 8\}$.

в) 1) в умові множина A задана з допомогою характеристичних властивостей;

2) словесним способом: A – множина дійсних чисел, від 3 до 9 включно;

3) числовим проміжком: $A = [3; 9]$.

г) 1) в умові множина A задана числовим проміжком;

2) словесним способом: A – множина дійсних чисел, від -2 включно до 3 включно;

3) з допомогою характеристичних властивостей: $A = \{x \mid x \in R, -2 \leq x \leq 3\}$.

1.4. Підмножина. Невласні та власні підмножини.

Рівні множини. Універсальна множина

Означення. Множина B є **підмножиною** множини A , якщо кожен елемент множини B одночасно є елементом множини A і пишуть $B \subset A$.

Наприклад, для множин $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{4, 1, 2, 7, 5\}$, $C = \{2, 7, 1\}$ мають місце такі факти: $A \subset B$, $C \subset A$, $C \subset B$.

Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел; множина квадратів є підмножиною множини прямокутників.

Вважають, що:

1. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\emptyset \subset A$.
2. Кожна множина є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Отже, будь-яка множина A завжди має такі дві підмножини: порожню множину та саму себе – множину A . Їх називають **невласними підмножинами** множини A . Тобто невластних підмножин для довільної множини A , яка не є порожньою множиною, завжди є дві.

Решту підмножин множини A називають **власними підмножинами**.

Теорема. Для кожної множини, яка складається з n елементів, всього можна утворити 2^n підмножин (загальна кількість підмножин множини).

Наприклад, множина, яка має два елементи ($n = 2$), всього має $2^2 = 4$ підмножини. Дві з них невластні підмножини (порожня множина, вся множина). Решта підмножин ($4 - 2 = 2$) є власними підмножинами.

Означення. Якщо дві множини складаються з одних і тих же елементів, то їх називають **рівними множинами** і пишуть $A = B$, причому $A \subset B$ і $B \subset A$.

Наприклад, множини $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $C = \{2, 7, 1, 5\}$ є рівними, бо складаються з одних і тих же елементів, тому $A = C$.

Означення. Якщо розглядати лише підмножини певної множини U , то множину U називають **універсальною множиною**.

Поняття «універсальна множина» є відносним, бо, наприклад, множина трикутників є універсальною для множини прямокутних трикутників, але ця ж множина трикутників сама є підмножиною множини многокутників.

Наприклад, для множин $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{4, 1, 2, 7, 3\}$, $C = \{2, 7, 1, 3\}$ універсальними є множини N, Z, Q, R .

Універсальною множиною для довільних числових множин є **множина дійсних чисел R** .

Приклад 1. Записати всі підмножини множини $C = \{2; 4; 6\}$.

Розв'язання: Множина C , яка складається з трьох елементів, всього має вісім підмножин ($n = 3$, $2^3 = 8$). З них:

- дві невластні підмножини — $C_1 = \emptyset$; $C_2 = \{2; 4; 6\} = C$;
- шість власних підмножин — $C_3 = \{2\}$; $C_4 = \{4\}$; $C_5 = \{6\}$;
 $C_6 = \{2; 4\}$; $C_7 = \{4; 6\}$; $C_8 = \{2; 6\}$.

Приклад 2. Чи існує множина, яка має:

- а) 32 підмножини;
- б) 14 власних підмножин;
- в) 40 підмножин;
- г) 34 власні підмножини.

Розв'язання:

а) множина має всього 32 підмножини, тому за теоремою $2^n = 32$, $2^n = 2^5$, $n = 5$. Тому така множина існує і має п'ять елементів.

б) множина має 14 власних підмножин. Відомо, що кожна множина, крім власних підмножин, ще має 2 невластні підмножини, тому разом підмножин

буде $14 + 2 = 16$. Отже, $2^n = 16$, $2^n = 2^4$, $n = 4$. Тому така множина існує і має чотири елементи.

в) множина має 40 підмножин, тому за теоремою $2^n = 40$. Але такого натурального числа n не існує, яке задовольняло б це рівняння. Тому множини, яка мала б 40 підмножин, не існує.

г) множина має 34 власні підмножини. Відомо, що крім власних підмножин, кожна множина має ще 2 невластні підмножини, тому всіх підмножин буде $34 + 2 = 36$. Отже, $2^n = 36$. Але такого натурального числа n , яке задовольняло б це рівняння, не існує. Тому множини, яка мала б 34 власні підмножини, не існує.

Приклад 3. Вказати універсальну множину для множини N .

Розв'язання: для множини N універсальними є кілька множин. Ними є множини Z , Q , R , бо множина N є підмножиною і множини цілих чисел, і множини раціональних чисел, і множини дійсних чисел.

Приклад 4. Вказати універсальну множину для множин A , B , C , E , якщо A – множина прямих кутів, B – множина гострих кутів, C – множина тупих кутів, E – множина розгорнутих кутів.

Розв'язання: Усі множини A , B , C , E є підмножинами однієї множини P – множини плоских кутів. Сама ж множина P є підмножиною множини X – множини плоских геометричних фігур. Тому для множин A , B , C , E універсальними множинами є множини P та X .

Приклад 5. Вказати множини, для яких множина A є універсальною множиною, якщо A – множина чотирикутників.

Розв'язання: Відомо, що множина A – множина чотирикутників. Щоб вказати множини, для яких множина A є універсальною множиною, треба назвати її підмножини: B – множина квадратів, C – множина прямокутників, E – множина ромбів, P – множина трапецій, X – множина паралелограмів.

1.5. Спільні елементи множин. Круги Ейлера.

Діаграми Ейлера–Венна. Відношення між множинами

Означення. Елемент, який належить одночасно і множині A , і множині B , називається **спільним елементом** цих множин.

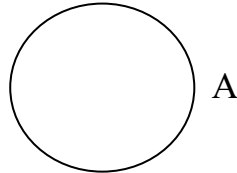
Якщо множини A і B мають лише деякі спільні елементи, то кажуть, що множини перебувають у **відношенні перетину**, і пишуть: $A \cap B \neq \emptyset$.

Якщо множини A і B не мають жодного спільного елемента, то кажуть, що множини **не перетинаються**, і пишуть: $A \cap B = \emptyset$.

Якщо усі елементи множин A і B є спільними, то кажуть, що множини рівні та перебувають у **відношенні рівності**, і пишуть: $A = B$.

Якщо усі елементи множини B є спільними елементами з множиною A , тобто множина B є підмножиною множини A , то кажуть, що множини A і B перебувають у **відношенні включення** і пишуть: $B \subset A$.

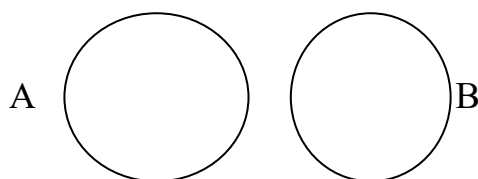
Для наочного зображення будь-якої множини використовують круг довільного радіусу, який називається **кругом Ейлера**:



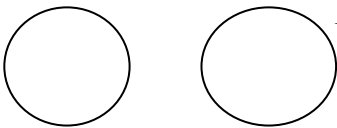
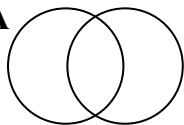
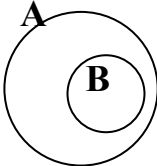
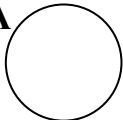
Універсальну множину U зображають за допомогою **прямокутника**:



Зображення кругами Ейлера двох і більше множин та наявних спільних елементів між ними утворюють певну конфігурацію з кругів Ейлера, яку називають **діаграмою Ейлера–Венна**. Наприклад,



Розрізняють такі **відношення (зв'язки) між множинами**:

Назва відношення між множинами	Позначення	Спільні елементи множин	Зображення колами Ейлера відношення між множинами
множини, які не перетинаються	$A \cap B = \emptyset$	жодного	A  B
відношення перетину	$A \cap B \neq \emptyset$	деякі	A  B
відношення включення	$B \subset A$	всі елементи множини B	A  B
відношення рівності	$A = B$	всі	A  B

Приклад. У яких відношеннях перебувають множини A і B , якщо:

а) A – множина чисел, кратних 3, B – множина чисел, кратних 5;

б) A – множина чисел, кратних 3, B – множина чисел, кратних 9;

в) A – множина ромбів з прямим кутом, B – множина квадратів;

г) A – множина трапецій, B – множина квадратів;

д) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 6\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\}$,

е) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\}$,

є) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$, $B = \{x | x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\}$.

Розв'язання:

а) множини A і B мають лише деякі спільні елементи, тому множини A і B перебувають у відношення перетину, тобто $A \cap B \neq \emptyset$.

б) всі елементи множини B є спільними елементами з множиною A , тому множини A і B перебувають у відношення включення і $B \subset A$.

в) всі елементи множин A і B є спільними елементами, тому множини A і B перебувають у відношення рівності, тобто $A = B$.

г) множини A і B не мають жодного спільного елемента, тому множини не перетинаються, тобто $A \cap B = \emptyset$.

д) Оскільки задані множини є скінченними, то для визначення відношення між ними задамо їх переліком елементів:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Бачимо, що множини A і B мають лише деякі спільні елементи – 4, 5, 6, тому вони перебувають у відношенні перетину, тобто $A \cap B \neq \emptyset$.

е) Задамо множини A і B переліком елементів:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2\} = \{1, 2\}, \quad B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Множини A і B не мають жодного спільного елемента, тому вони не перетинаються, тобто $A \cap B = \emptyset$.

є) Задамо множини A і B переліком елементів:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x < 8\} = \{4, 5, 6, 7\}.$$

Всі елементи множини B є спільними з множиною A , тому множини A і B перебувають у відношення включення і $B \subset A$.

1.6. Операції над множинами

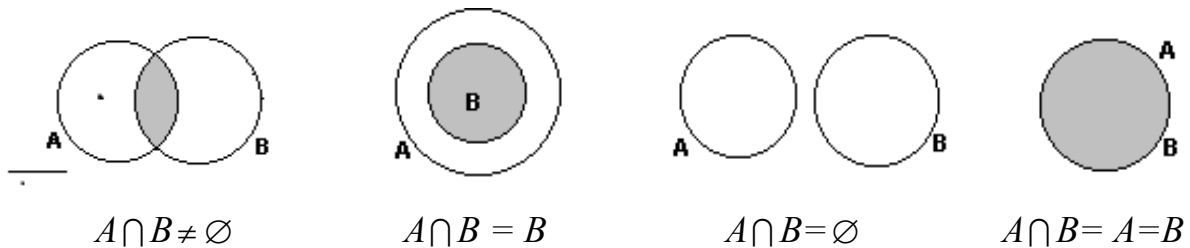
Означення 1. *Перетином множин A і B називається множина, яка позначається $A \cap B$ і містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин (і множині A , і множині B), тобто*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Поняття «перетин множин» можна поширити на довільну кількість множин, тобто

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ і } x \in A_2 \text{ і } \dots \text{ і } x \in A_n\}.$$

На діаграмі Ейлера–Венна перетин множин $A \cap B$ зображають так:



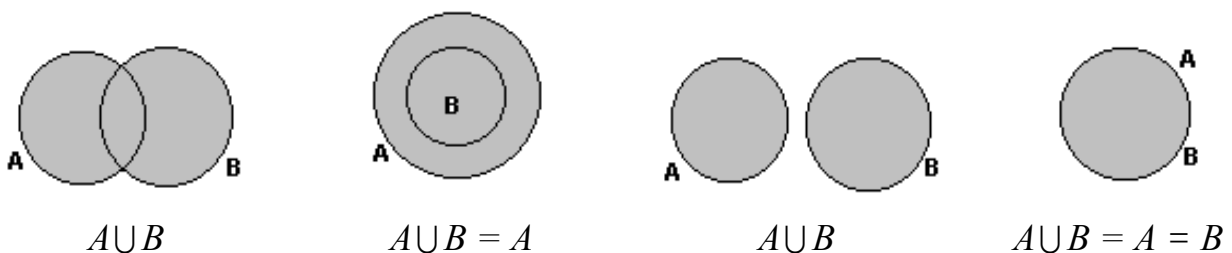
Означення 2. *Об'єднанням множин A і B називається множина, яка позначається $A \cup B$ і містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин (або множині A , або множині B), тобто*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Поняття «об'єднання множин» теж можна поширити на довільну кількість множин, тобто

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ або } x \in A_2 \text{ або } \dots \text{ або } x \in A_n\}.$$

На діаграмі Ейлера–Венна об'єднання множин $A \cup B$ зображають так:

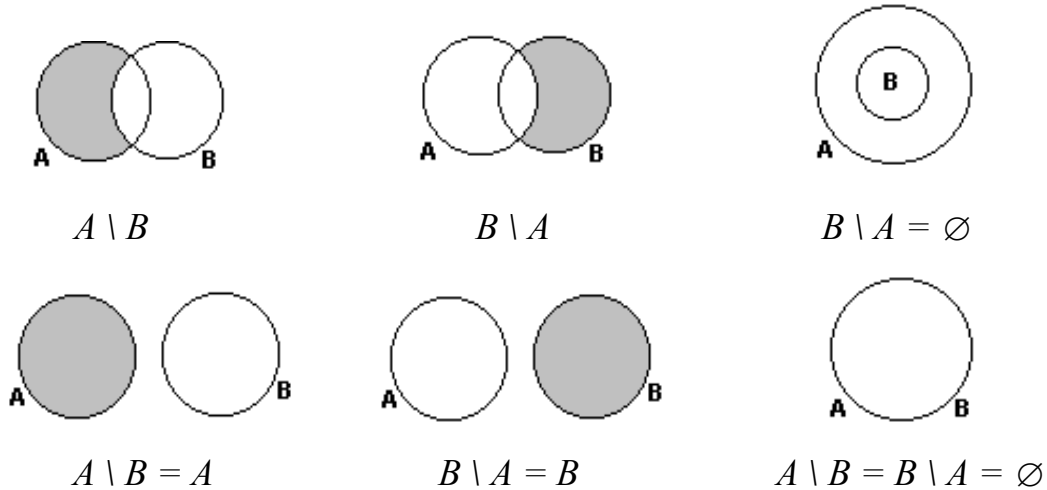


Якщо у виразі є різні операції, то спочатку виконуємо дії в дужках, а потім у послідовності: спершу перетин, а потім об'єднання.

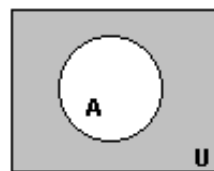
Означення 3. *Різницею множин A і B називається множина, яка позначається $A \setminus B$ і містить усі ті і тільки ті елементи множини A , які не належать множині B , тобто*

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

На діаграмі Ейлера–Венна різницю множин $A \setminus B$ зображають так:

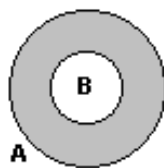


Означення 4. *Різниця універсальної множини U і її будь-якої підмножини A називається доповненням множини A до універсальної множини і позначається A' , тобто $A' = U \setminus A$*



$$U \setminus A = A'$$

Означення 5. *Якщо $B \subset A$, то різниця множини A і B називається доповненням підмножини B до множини A і позначається B'_A , тобто*



$$A \setminus B = B'_A$$

Приклад 1. Виконати усі можливі операції над множинами B і C :

$$a) \quad B = \{x \mid x \in N, x \leq 6\}, \quad C = \{x \mid x \in N, 4 \leq x < 8\};$$

$$б) \quad B = \{x \mid x \in N, x \leq 6\}, \quad C = \{x \mid x \in N, 2 \leq x < 5\};$$

$$в) \quad B = \{x \mid x \in N, x \leq 2\}, \quad C = \{x \mid x \in N, 4 \leq x < 8\};$$

$$г) \quad B = \{x \mid x \in N, x \leq 6\}, \quad C = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}.$$

Розв'язання: Задамо множини B і C за допомогою переліку елементів:

а) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$, тобто множини B і C мають деякі спільні елементи.

Виконаємо усі можливі операції над множинами B і C :

$$B \cap C = \{4, 5, 6\},$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$B \setminus C = \{1, 2, 3\},$$

$$C \setminus B = \{7\}.$$

б) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3, 4\}$, тобто множина C є підмножиною множини B , всі елементи множини C є спільними елементами з множиною B .

Виконаємо усі можливі операції над множинами B і C :

$$B \cap C = \{2, 3, 4\} = C,$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B,$$

$$B \setminus C = \{1, 5, 6\} = B_C',$$

$$C \setminus B = \emptyset.$$

в) $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$, тобто множини B і C не мають жодного спільного елемента, вони не перетинаються.

Виконаємо усі можливі операції над множинами B і C :

$$B \cap C = \emptyset,$$

$$B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\},$$

$$B \setminus C = \{1, 2\} = B,$$

$$C \setminus B = \{4, 5, 6, 7\} = C.$$

г) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$, тобто множини B і C мають всі спільні елементи, множини B і C рівні, $B = C$.

Виконаємо усі можливі операції над множинами B і C :

$$B \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B = C.$$

$$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = B = C.$$

$$B \setminus C = \emptyset,$$

$$C \setminus B = \emptyset.$$

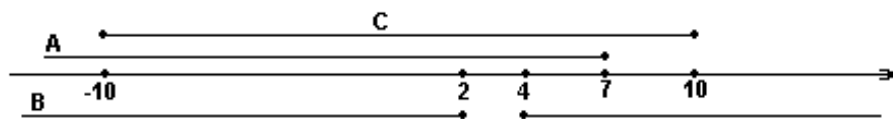
Приклад 2. Знайти $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $C \setminus A$, якщо

$$A = \{x | x \leq 7\}, B = \{x | x \leq 2 \text{ або } x \geq 4\}, C = \{x | |x| \leq 10\}.$$

Розв'язання: Задамо множини A , B і C числовими проміжками:

$$A = (-\infty; 7], \quad B = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty), \quad C = [-10; 10].$$

Зобразимо ці множини на числовій прямій:



Виконаємо потрібні операції:

$$A \cap B = (-\infty; 2] \cup [4; 7];$$

$$B \cup C = \{x | x \in \mathbb{R}\} = (-\infty; +\infty);$$

$$A \cap B \cap C = [-10; 2] \cup [4; 7];$$

$$A \setminus B = (2; 4);$$

$$C \setminus A = (7; 10].$$

Приклад 3. Знайти A' , якщо $A = (-\infty; 2)$; $A = [2; 7]$; $A = (-3; 7]$.

Розв'язання:

$$A = (-\infty; 2), \quad A' = [2; +\infty);$$

$$A = [2; 7], \quad A' = (-\infty; 2) \cup (7; +\infty);$$

$$A = (-3; 7], \quad A' = (-\infty; -3] \cup (7; +\infty).$$

1.7. Закони (властивості) операцій над множинами

1. комутативні (переставні) закони:

$$A \cap B = B \cap A \quad (\text{для перетину})$$

$$A \cup B = B \cup A \quad (\text{для об'єднання})$$

2. асоціативні (сполучні) закони:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (\text{для перетину})$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (\text{для об'єднання})$$

3. дистрибутивні (розподільні) закони:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (\text{для перетину відносно об'єднання})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{для об'єднання відносно перетину})$$

$$(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A) \quad (\text{для різниці відносно об'єднання})$$

$$(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A) \quad (\text{для різниці відносно перетину})$$

$$4. A \cap U = A, \quad A \cup U = U.$$

$$5. A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$$

$$6. A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A.$$

$$7. \text{Якщо } A \subset B, \text{ то } A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

$$8. A' \cap A = \emptyset; \quad A' \cup A = U.$$

9. закони де Моргана:

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \quad (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

$$10. (A')' = A.$$

$$11. A \setminus A = \emptyset; \quad A \setminus \emptyset = A; \quad A \setminus U = \emptyset.$$

$$12. A \setminus B = A \cap B'.$$

$$13. \text{Якщо } A = B, \text{ то } A' = B'.$$

Закони операцій над множинами використовують для спрощення виразів, які містять множини та операції між ними.

Істинність або хибність рівностей про множини та операції над ними доводять за допомогою побудови діаграм Ейлера–Венна.

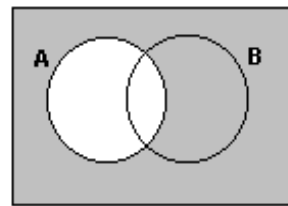
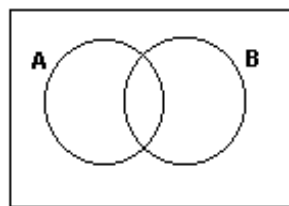
Приклад 1. За допомогою законів операцій над множинами спростити вираз $(A \cap B \cap X')' \cup A$.

Розв'язання:
$$(A \cap B \cap X')' \cup A = (A' \cup B' \cup (X')') \cup A = (A' \cup B' \cup X) \cup A = (A' \cup A) \cup B' \cup X = U \cup B' \cup X = U.$$

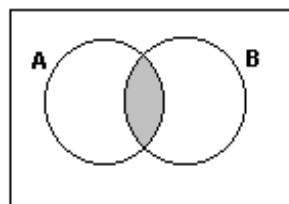
Приклад 2. Довести рівність $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Розв'язання: щоб довести цю рівність, треба побудувати діаграми Ейлера – Венна. Для цього в прямокутнику, який зображає універсальну множину U , будемо два круги Ейлера для множин A і B так, щоб вони перетиналися. Далі будемо ці зображення у лівому і правому стовпцях (для лівої частини – два, бо у лівій частині рівності треба виконати дві дії: перетин і доповнення; для правої частини – три, бо у правій частині рівності треба виконати три дії: два рази доповнення і об'єднання). Кожне зображення підписуємо виразами у послідовності виконання дій у лівій і правій частинах рівності та заштрихуємо результат виконання дій над множинами. На завершення міркувань порівнюємо зображення останніх дій для лівої та правої частин рівності. Якщо заштриховані частини рівні, то рівність доведена, а якщо зображення є різними, то рівність є неправильною.

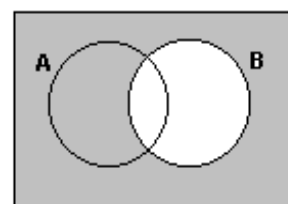
Побудуємо діаграми Ейлера–Венна для доведення закону де Моргана – рівності $(A \cap B)' = A' \cup B'$:



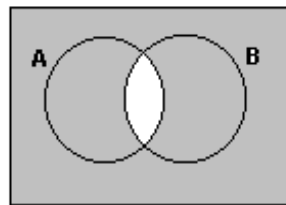
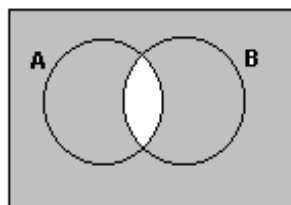
A'



$A \cap B$



B'

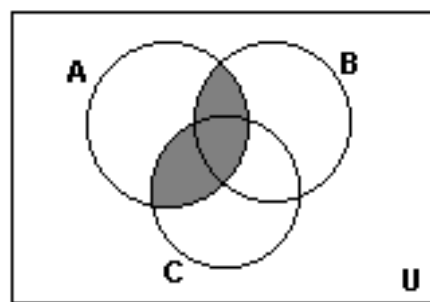
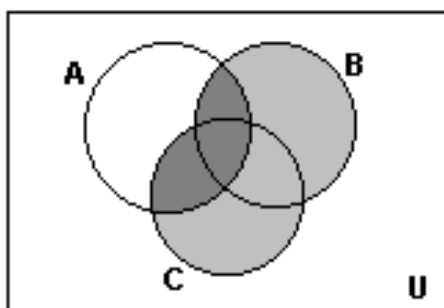


$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Зображення на діаграмах Ейлера–Венна для лівої та правої частин доводить правильність рівності $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Приклад 3. Довести рівність $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Розв’язання: щоб довести рівність, треба побудувати діаграми Ейлера–Венна для лівої та правої її частин:



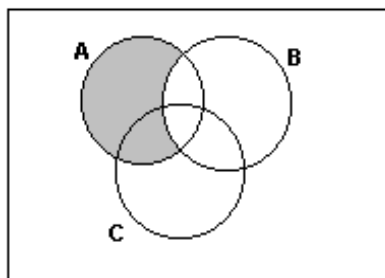
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Отже, рівність $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ є правильною.

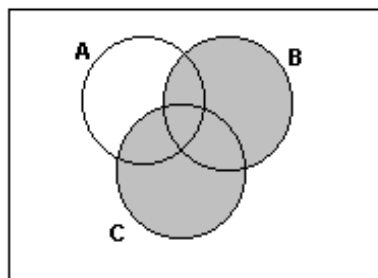
Приклад 4. Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ двома способами.

Розв’язання:

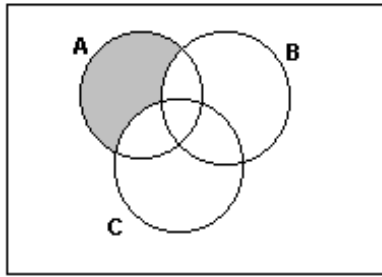
1) спосіб – за допомогою побудови діаграми Ейлера–Венна:



$$A \setminus B$$

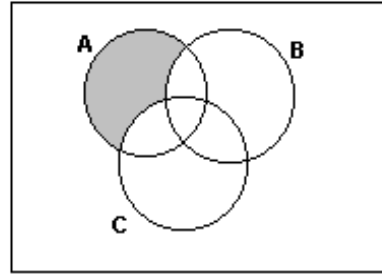


$$B \cup C$$



$$(A \setminus B) \setminus C$$

=



$$A \setminus (B \cup C)$$

Спочатку штрихуємо $A \setminus B$, а потім різницю утвореної множини і множини C .

Спочатку штрихуємо $B \cup C$, а потім різницю множини A і заштрихованої частини.

Через те, що заштриховані частини на діаграмах Ейлера–Венна для лівої і правої частин рівності рівні між собою, то рівність доведено.

2) спосіб – за законами операцій над множинами:

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= (A \setminus B) \cap C' = (A \cap B') \cap C' = A \cap B' \cap C'. \\ A \setminus (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = A \cap B' \cap C'. \end{aligned}$$

У проведених перетвореннях використовувались закони де Моргана, сполучна властивість та зв'язок різниці з перетином і доповненням $A \setminus B = A \cap B'$.

$$\text{Отже, } (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

1.8. Упорядкована пара елементів та її компоненти.

Декартовий добуток двох множин та його властивості

Означення. Два елементи a і b , розміщені у певному порядку, називаються **упорядкованою парою**, яка записується (a,b) . Елементи a і b упорядкованої пари (a,b) називають **компонентами упорядкованої пари**.

Означення. Декартовим добутком двох множин A і B називається множина всіх упорядкованих пар вигляду (a,b) , де $a \in A, b \in B$.

Позначається декартовий добуток множин A і B символом $A \times B$ і за означенням можна записати: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Приклад. Знайти декартовий добуток множин $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$.

Розв'язання: $A \times B = \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2)\}$. Декартовий добуток $A \times B$ заданий переліком елементів у вигляді упорядкованих пар.

Якщо множини A і B скінченні і мають порівняно невелике число елементів, то елементи декартового добутку зручно записувати у вигляді прямокутної таблиці. У вище наведеному прикладі утворилися пари так:

$B \backslash A$	1	2
a	$(a,1)$	$(a, 2)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$
c	$(c,1)$	$(c,2)$

Властивості декартового добутку множин:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$ для будь-якої множини A .
- Якщо $A \neq B$, то $A \times B \neq B \times A$. Декартовий добуток множин **не володіє комутативною (переставною) властивістю**.
- а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; б) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Операція декартового добутку множин пов'язана з операціями об'єднання та різниці множин **дистрибутивною (розподільною) властивістю**.

1.9. Координатна площина. Зображення декартового добутку двох числових множин на координатній площині

Відомо, що **координатною площиною XOY** називають площину, визначену двома взаємно перпендикулярними координатними прямими Ox та Oy , які мають спільний початок та спільні одиниці вимірювання.

Вісь Ox є горизонтальною прямою ($y = 0$) і називається **віссю абсцис**.

Вісь Oy є вертикальною прямою ($x = 0$) і називається **віссю ординат**.

Спільна точка координатних осей точка $O(0; 0)$ є **початком відліку**.

Координатна площина поділена на чотири **координатні кути (чверті)**:

I чверть – $x > 0, \quad y > 0;$

II чверть – $x < 0, \quad y > 0;$

III чверть – $x < 0, \quad y < 0;$

IV чверть – $x > 0, \quad y < 0.$

Довільній точці площини M ставиться у відповідність упорядкована пара чисел $(x; y)$, яка називається її **координатою точки**. Перша компонента x цієї упорядкованої пари називається **абсцисою** і дорівнює проєкції точки M на вісь Ox . Друга компонента y упорядкованої пари називається **ординатою** і дорівнює проєкції точки M на вісь Oy .

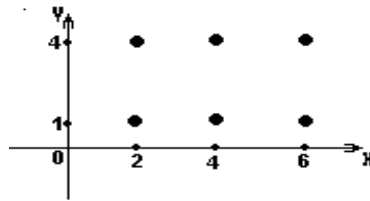
Якщо X і Y – числові множини, то декартовий добуток $X \times Y$ цих множин можна зобразити на координатній площині XOY , бо елементами декартового добутку числових множин будуть упорядковані пари чисел (x, y) , які однозначно визначають точку на координатній площині з абсцисою x і ординатою y . У сукупності отримаємо геометричну фігуру, яка буде наочно зображати весь декартовий добуток $X \times Y$ на координатній площині.

При цьому можливі такі **випадки зображення декартового добутку**:

1) якщо обидві множини X і Y є скінченними, то їх декартовий добуток $X \times Y$ зображується на координатній площині у вигляді **точок**.

Наприклад: $X = \{2, 4, 6\}, \quad Y = \{1; 4\}.$

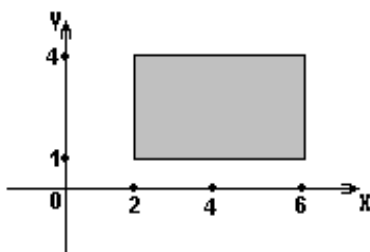
$$X \times Y = \{(2,1), (2,4), (4,1), (4,4), (6,1), (6,4)\}.$$



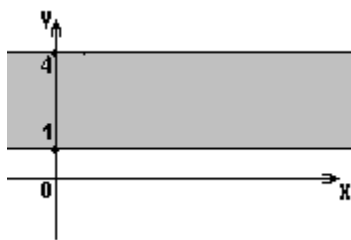
2) якщо обидві множини X і Y є нескінченними, то їх декартовий добуток $X \times Y$ зображується на координатній площині у вигляді **прямокутника (квадрата), смуги (півсмуги), прямого кута, півплощини, площини**.

Наприклад:

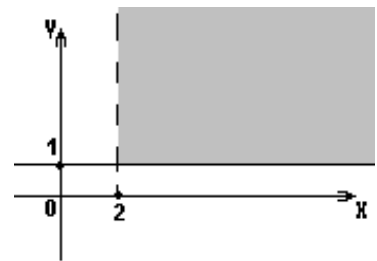
а) $X = [2, 6]$, $Y = [1, 4]$,



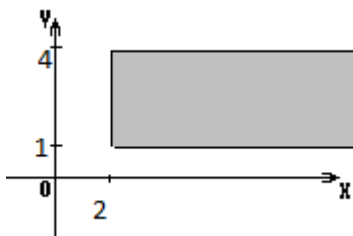
б) $X = \mathbb{R}$, $Y = [1, 4]$,



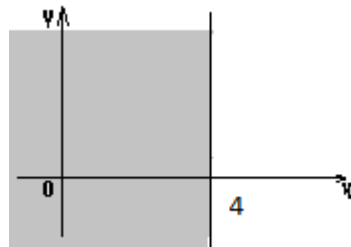
в) $X = (2; +\infty)$, $Y = [1; +\infty)$.



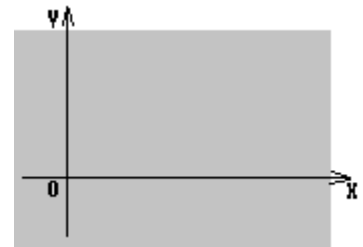
г) $X = [2; +\infty]$, $Y = [1, 4]$,



д) $X = (-\infty; 4]$, $Y = \mathbb{R}$,



е) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.



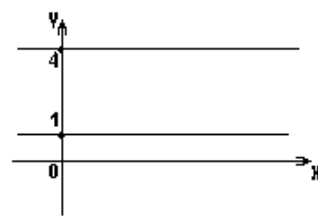
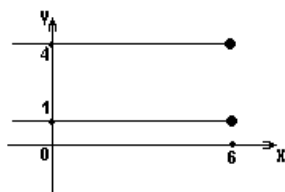
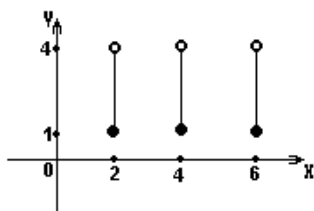
3) якщо одна з множин є скінченною, а друга – нескінченною, то їх декартовий добуток $X \times Y$ зображується на координатній площині у вигляді **відрізків, променів, прямих**.

Наприклад:

а) $X = \{2, 4, 6\}$, $Y = [1, 4]$;

б) $X = (-\infty; 6]$, $Y = \{1, 4\}$;

в) $X = \mathbb{R}$, $Y = \{1, 4\}$.



Приклад 1. Зобразити декартовий добуток множин X і Y , якщо:

а) $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $Y = \{y | |y| < 2\}$;

б) $X = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| = 3\}$, $Y = \{y | y^2 - 3y + 2 = 0\}$.

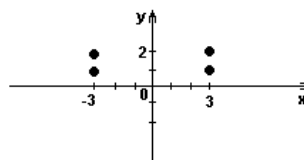
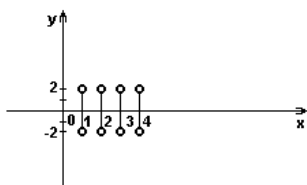
Розв'язання:

а) $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$;

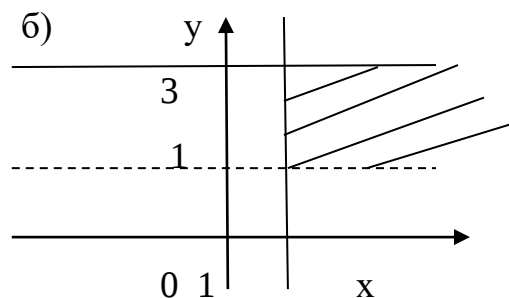
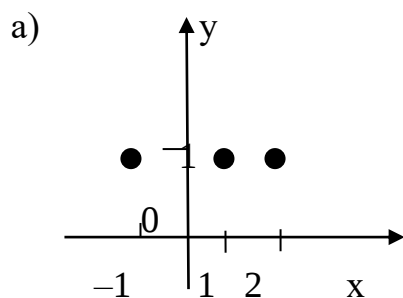
б) $X = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| = 3\} = \{-3; 3\}$;

$Y = \{y | |y| < 2\} = (-2; 2)$.

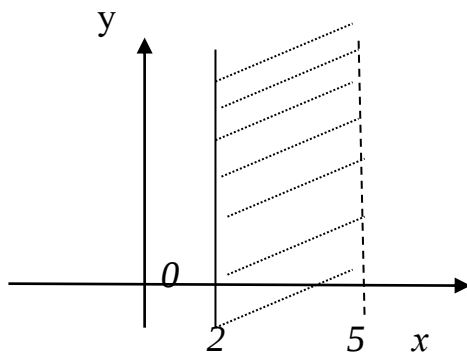
$Y = \{y | y^2 - 3y + 2 = 0\} = \{1; 2\}$.



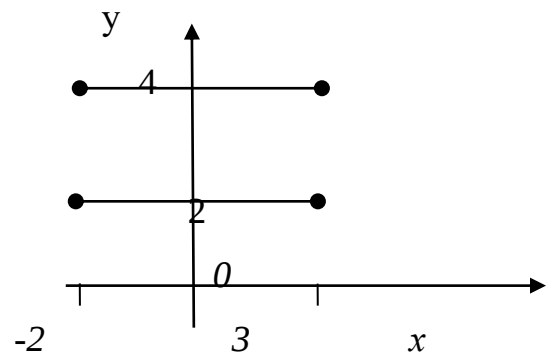
Приклад 2. На рисунках зображено декартові добутки множин X та Y . Назвати елементи цих множин.



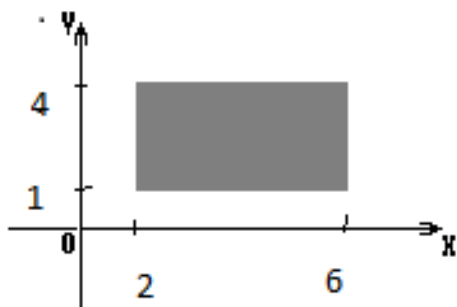
в)



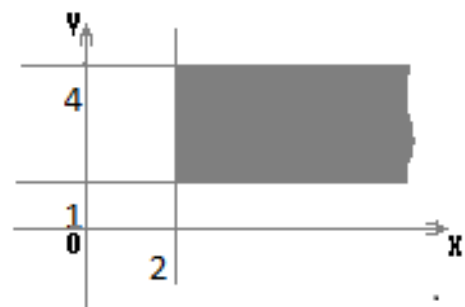
г)



д)



е)

**Розв'язання:**

- а) $X = \{-1, 1, 2\}$, $Y = \{1\}$.
 б) $X = [1, +\infty)$, $Y = (1, 3]$.
 в) $X = [2, 5)$, $Y = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$.
 г) $X = [-2, 3]$, $Y = \{2; 4\}$.
 д) $X = [2; 6]$, $Y = [1; 4]$.
 е) $X = [2, +\infty)$, $Y = [1; 4]$.

1.10. Кортеж та його компоненти. Декартовий добуток кількох множин

Означення декартового добутку двох множин можна узагальнити на випадок кількох множин, використавши нове поняття «кортеж».

Означення. Нехай дано k множин: $A_1, A_2, \dots, A_k$. Візьмемо довільний елемент x_1 з множини A_1 , елемент x_2 з множини A_2 , ..., елемент x_k з множини A_k . Вибрані елементи розмістимо у чіткому порядку $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Отримаємо упорядкований набір з k елементів, які належать відповідно множинам $A_1, A_2, \dots, A_k$, який називається **кортежем**, а число k – **довжиною кортежу**, елементи $x_1, x_2, \dots, x_k$ – **компонентами кортежу**.

Означення. Два кортежі називаються **рівними**, якщо вони мають однакову довжину і кожна компонента першого кортежу дорівнює компоненті другого кортежу за тим же номером, тобто $x_1 = y_1, \dots, x_k = y_k$.

Прикладами кортежів можуть бути: слово – кортеж букв; запис числа – кортеж цифр; весільний кортеж – кортеж автомобілів і т. д.

Упорядкована пара елементів – це кортеж довжиною 2; упорядкована трійка елементів – це кортеж довжиною 3; кортеж довжиною n називають упорядкованою n -кою.

Означення. Декартовим добутком кількох множин $A_1, A_2, \dots, A_k$ називають множину всіх кортежів $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ довжиною k , де $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k$.

Такий декартовий добуток позначають $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, тобто,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k \right\}.$$

II. Елементи комбінаторики

Під час розв'язування практичних задач часто використовуються поняття скінченної множини, підмножини, кортежу; вибираються з деякої множини її підмножини, причому різними способами.

Цю область математики називають **комбінаторикою**. Найпростішими задачами, які вивчає комбінаторика, є задачі, пов'язані з розташуванням за певними правилами елементів скінченних множин і відшукуванням числа всіх способів, якими це можна зробити. Такі задачі дістали назву комбінаторних.

Більшість комбінаторних задач розв'язуються за допомогою правила суми і правила добутку.

Кількість елементів множини A позначають через $n(A)$.

2.1. Правило суми

Правило суми дозволяє знайти кількість елементів об'єднання множин.

Залежно від наявності у множин спільних елементів та кількості самих множин розрізняють такі **правила суми**:

I. Множини попарно не перетинаються

1. **Правило суми для двох множин, які не перетинаються:**

Якщо множина A має $n(A)$ елементів, а множина B – $n(B)$ елементів, і ці множини попарно не перетинаються, то об'єднання цих множин має $n(A) + n(B)$ елементів, тобто

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Інколи правило суми формулюють ще так:

Якщо елемент x можна вибрати n способами, а елемент y – m способами, причому жоден спосіб вибору елемента x не збігається зі способом вибору елемента y , то вибір « x або y » можна здійснити $n + m$ способами.

2. **Правило суми для трьох множин, які не перетинаються:**

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C).$$

3. **Правило суми для кількох множин, які не перетинаються:**

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_k).$$

II. Множини попарно перетинаються

4. **Правило суми для двох множин, які перетинаються:**

Якщо множина A має $n(A)$ елементів, а множина B – $n(B)$ елементів, і ці множини попарно перетинаються, то об'єднання цих множин має $n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ елементів, тобто

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

5. **Правило суми для трьох множин, які перетинаються:**

Якщо множина A має $n(A)$ елементів, множина B – $n(B)$ елементів, множина C – $n(C)$ елементів, і ці множини попарно перетинаються, то

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Наведемо приклади розв'язування задач правилом суми.

Задача 1. На тарілці лежало 5 яблук і 4 груші. Скількома способами можна вибрати з тарілки один плід?

Розв'язання:

A – множина яблук на тарілці, $n(A) = 5$.

B – множина груш на тарілці, $n(B) = 4$.

$A \cup B$ – множина плодів (яблук або груш) на тарілці, $n(A \cup B) = ?$

Оскільки в умові задачі йде мова про дві множини, які не перетинаються, то за правилом суми для двох множин, які попарно не перетинаються, можна визначити, скількома способами можна вибрати з тарілки з яблуками та грушами один плід:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 5 + 4 = 9 \text{ (сп.)}.$$

Відповідь: дев'ятьма способами.

Задача 2. У класі 28 учнів. З них 18 вивчають англійську мову, а 16 – німецьку мову. Скільки учнів вивчають обидві мови?

Розв'язання:**1 спосіб (правило суми)**

U – множина всіх учнів класу, $n(U) = 28$.

A – множина учнів класу, які вивчають англійську мову, $n(A) = 18$.

B – множина учнів класу, які вивчають німецьку мову, $n(B) = 16$.

$A \cap B$ – множина учнів класу, які вивчають обидві мови, $n(A \cap B) = ?$

За правилом суми для двох множин, які попарно перетинаються:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

$$A \cup B = U, \quad n(A \cup B) = n(U) = 28.$$

Підставимо відомі значення у правило суми:

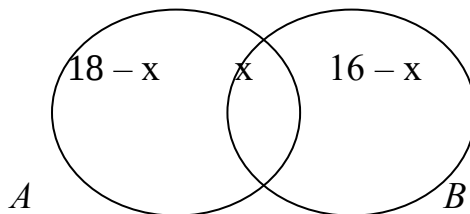
$$28 = 18 + 16 - n(A \cap B).$$

$$\text{Звідси } n(A \cap B) = 18 + 16 - 28 = 6 \text{ (учн.)}.$$

Відповідь: 6 учнів.

2 спосіб (за діаграмами Ейлера–Венна)

Дві множини A і B , які попарно перетинаються, зображаємо кругами Ейлера і вписуємо у них числа – кількості елементів множин, міркуючи так: нам невідомо, скільки учнів класу вивчають обидві мови, тому позначимо їх за x і напишемо x на перетині двох множин. Відомо з умови задачі, що у множині A всього 18 елементів, тому у частині множини, яка залишилася, пишемо кількість решти елементів $(18 - x)$. Аналогічно, у множині B всього 16 елементів, тому у частині множини, яка залишилася, пишемо кількість решти елементів $(16 - x)$. Всього у класі 28 учнів, тому утвориться рівність:



$$28 = (18 - x) + (16 - x) + x;$$

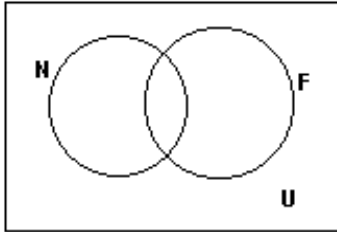
$$28 = 34 - x;$$

$$x = 6 \text{ (учн.)}.$$

Відповідь: 6 учнів.

Задача 3. Приїхало 100 туристів, з яких 10 осіб не знали ні німецької, ні французької мов, 75 осіб знали німецьку, 83 особи – французьку. Скільки туристів знали обидві мови?

Розв'язання:



Побудуємо діаграму Ейлера–Венна.

U – множина всіх туристів, які приїхали,
 $n(U) = 100$ туристів.

N – множина туристів, які володіють німецькою мовою, $n(N) = 75$ туристів.

F – множина туристів, які володіють французькою мовою, $n(F) = 83$ туристи.

$N \cap F$ – множина туристів, які володіють двома мовами, $n(N \cap F) = ?$

$N \cup F$ – множина туристів, що володіють хоча б однією з цих мов.

$(N \cup F)'$ – множина туристів, що не володіють жодною з цих мов (10 т.).

$$n(N \cup F) = n(U) - n((N \cup F)') = 100 - 10 = 90 \text{ (т.)}.$$

За правилом суми для двох множин, які перетинаються:

$$n(N \cup F) = n(N) + n(F) - n(N \cap F).$$

Підставляємо відомі значення у цю рівність:

$$90 = 75 + 83 - n(N \cap F),$$

$$90 = 158 - n(N \cap F),$$

$$n(N \cap F) = 158 - 90,$$

$$n(N \cap F) = 68 \text{ (т.)}.$$

Відповідь: 68 туристів.

У початкових класах цю задачу розв'язують арифметичними діями:

- 1) $100 - 10 = 90$ (т.) – володіють хоча б однією з цих мов.
- 2) $75 + 83 = 158$ (т.) – загальна кількість.
- 3) $158 - 90 = 68$ (т.) – володіють двома мовами.

Відповідь: 68 туристів.

Задача 4. На першому курсі 95 студентів займаються спортом, з них 50 займаються волейболом, 48 – баскетболом, 36 – тенісом; волейболом і баскетболом – 21, волейболом і тенісом – 15, баскетболом і тенісом – 18. Скільки студентів займаються іншими видами спорту, якщо 5 студентів займаються всіма трьома видами спорту?

Розв’язання: 1 спосіб (правило суми):

V – множина студентів-волейболістів, $n(V) = 50$.

B – множина студентів-баскетболістів, $n(B) = 48$.

T – множина студентів-тенісистів, $n(T) = 36$.

U – множина всіх студентів першого курсу, $n(U) = 95$.

За умовою задачі: $n(V \cap B) = 21$; $n(V \cap T) = 15$; $n(B \cap T) = 18$; $n(V \cap B \cap T) = 5$.

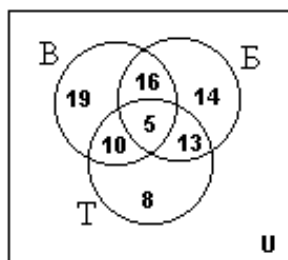
Оскільки ці три множини перетинаються, тому за правилом суми можна визначити, скільки студентів займаються хоча б одним видом спорту:

$$\begin{aligned} n(V \cup B \cup T) &= n(V) + n(B) + n(T) - n(V \cap B) - n(B \cap T) - n(V \cap T) + n(V \cap B \cap T) = \\ &= 50 + 48 + 36 - 21 - 15 - 18 + 5 = 85 \text{ (ст.)} \end{aligned}$$

Тоді іншими видами спорту займаються $95 - 85 = 10$ (ст.)

Відповідь: 10 студентів.

2 спосіб (за діаграмами Ейлера-Венна)



Числа на діаграмі проставляють у такій послідовності:

$$n(V \cap B \cap T) = 5.$$

$$16 = n(V \cap B) - 5; \quad 13 = n(B \cap T) - 5; \quad 10 = n(V \cap T) - 5.$$

$$19 = 50 - (16 + 5 + 10);$$

$$14 = 48 - (16 + 5 + 13);$$

$$8 = 36 - (10 + 5 + 13).$$

$n(V \cup B \cup T) = 19 + 16 + 5 + 10 + 14 + 13 + 8 = 85$ (ст.) – займаються хоча б одним видом спорту. $n(U) = 95$. Решта студентів не займаються жодним з цих видів спорту: $95 - 85 = 10$ (ст.)

Відповідь: 10 студентів.

2.2. Правило добутку

Правило добутку дозволяє знайти кількість елементів декартового добутку множин.

Залежно від кількості множин розрізняють такі **правила добутку**:

1. **Правило добутку для двох множин:**

Якщо множина A має $n(A)$ елементів, а множина B – $n(B)$ елементів, то декартовий добуток цих множин має $n(A) \cdot n(B)$ елементів, тобто

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Інколи правило добутку формулюють ще так:

Якщо елемент x можна вибрати n способами, а елемент y – m способами, то вибір упорядкованої пари елементів (x, y) можна здійснити $n \cdot m$ способами.

2. **Правило добутку для трьох множин:**

$$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C).$$

3. **Правило суми для кількох множин:**

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_k).$$

Наведемо приклади розв'язування задач правилом добутку.

Задача 1. На столі лежало 7 різних олівців і 5 різних блокнотів. Скількома способами можна утворити з них набір, який складається з 1 олівця і 1 блокнота?

Розв'язання:

A – множина олівців на столі, $n(A) = 7$.

B – множина блокнотів на столі, $n(B) = 5$.

$A \times B$ – множина усіх наборів з 1 олівця і 1 блокнота, $n(A \times B) = ?$

Оскільки в умові задачі йде мова про дві множини, то за правилом добутку для двох множин можна визначити кількість упорядкованих пар – наборів з 1 олівця і 1 блокнота, тобто знайти, скількома способами можна утворити з усіх олівців і блокнотів на столі різні набори з 1 олівця і 1 блокнота:

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) = 7 \cdot 5 = 35 \text{ (сп.)}.$$

Відповідь: тридцять п'ятьма способами.

Задача 2. З міста K до міста M ведуть 7 різних доріг, з міста M до міста P ведуть 5 різних доріг, з міста P до міста T ведуть 6 різних доріг. Скільки різних доріг ведуть з міста K до міста T ?

Розв'язання:

A – множина різних доріг з міста K до міста M , $n(A) = 7$.

B – множина різних доріг з міста M до міста P , $n(B) = 5$.

C – множина різних доріг з міста P до міста T , $n(C) = 6$.

$A \times B \times C$ – множина різних доріг з міста K до міста T , $n(A \times B \times C) = ?$

Оскільки в умові задачі йде мова про три множини, то за правилом добутку для трьох множин можна визначити кількість упорядкованих трійок елементів з множин A , B , C , тобто знайти, скільки різних доріг ведуть з міста K до міста T :

$$n(A \times B \times C) = n(A) \cdot n(B) \cdot n(C) = 7 \cdot 5 \cdot 6 = 210 \text{ (д.)}.$$

Відповідь: 210 доріг.

Задача 3. Скільки всього чотирицифрових чисел?

Розв'язання. Будь-яке чотирицифрове число у десятковій системі числення можна розглядати як кортеж (x_1, x_2, x_3, x_4) , складений з чотирьох цифр, причому $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3, x_4 \in A_4$, де $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_2 = A_3 = A_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $n(A_1) = 9$, $n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = 10$.

Тоді множина всіх чотирицифрових чисел є декартовим добутком чотирьох множин $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$. Число елементів декартового добутку шукаємо за правилом добутку:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot n(A_4) = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

Відповідь: 9000 чисел.

2.3. Комбінаторні сполуки

I. Розміщення без повторень

Означення. Нехай множина M містить m елементів, тобто $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. **Розміщенням без повторень з m елементів по n** (де $m \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$) називається множина усіх кортежів довжиною n , які складаються з елементів множини M , які містять по n упорядкованих елементів і які відрізняються між собою або елементами, або порядком їх розміщення, або і одним, і другим.

Зауваження. У розміщеннях, які вводяться за цим означенням, немає однакових елементів, бо кортежі з однаковими елементами не розглядаються.

Кажуть, що упорядковані пари (a, b) і (a, c) відрізняються елементами, а упорядковані елементи (a, c) і (c, a) відрізняються порядком розміщення елементів.

Наприклад:

1. Розміщень без повторень з двох елементів a і b по два може бути лише два: (a, b) , (b, a) . Вони відрізняються лише порядком елементів.

2. Розміщень без повторень з трьох елементів a , b , c по два може бути шість: (a, b) , (a, c) , (b, a) , (b, c) , (c, a) , (c, b) .

Кількість розміщень без повторень з m елементів по n позначають символом A_m^n , причому $m \geq n$.

Теорема. Число розміщень без повторень з m елементів по n визначається формулою

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)).$$

Наприклад, $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

II. Розміщення з повтореннями

Означення. Нехай множина M містить m елементів, тобто $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. **Розміщенням з повтореннями з m елементів по n** (де $m \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$) називається множина усіх кортежів довжиною n , які складаються з елементів множини M , які містять по n упорядкованих елементів і в якому хоча б один елемент повторюється.

Кількість розміщень з повтореннями з m елементів по n позначають

символом A_m^n , причому $m > n$.

Теорема. Число розміщень з повтореннями з m елементів по n визначається формулою

$$A_m^n = m^n.$$

Наприклад, $A_5^3 = 5^3 = 125$.

$$A_8^2 = 8^2 = 64.$$

$$A_4^3 = 4^3 = 64.$$

$$A_6^3 = 6^3 = 216.$$

III. Перестановки

Означення. Нехай множина M містить m елементів, тобто $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Будь-який кортеж довжиною m , де $m \in \mathbb{N}$, утворений з елементів множини M , у якого всі компоненти різні, називають **перестановкою з m елементів**.

Кількість перестановок з m елементів позначають символом P_m .

Перестановка з m елементів множини M — це розміщення без повторень з m елементів по m елементів цієї ж множини, тобто $P_m = A_m^m$

Теорема. Кількість перестановок з m елементів визначається формулою

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2) \dots (m-(m-1)) = m(m-1)(m-2) \dots 2 \cdot 1 = m!$$

Символ $m!$ читається « m – факторіал».

m – факторіал є добутком натуральних чисел від 1 до m , тобто

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m.$$

Наприклад,

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3.$$

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

IV. Комбінації

Означення. Нехай множина M містить m елементів, тобто $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, де $m \in \mathbb{N}$. Будь-яка підмножина A множини M ($A \subset M$), яка містить n елементів, де $n \in \mathbb{N}$, називається **комбінацією з m елементів по n** .

Кількість комбінацій з m елементів по n позначають символом C_m^n .

Відомо, що комбінаторні сполуки поєднані між собою формулою:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Теорема. Кількість комбінацій з m елементів по n визначається формулою

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Приймають за означенням: $C_m^0 = 1$; $C_0^0 = 1$.

Основні властивості числа C_m^n :

$$1. \quad C_m^n = C_m^{m-n}.$$

$$2. \quad C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Наприклад,

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

2.4. Розв'язування комбінаторних задач

Комбінаторні задачі розв'язуються за допомогою використання комбінаторних сполук. Наведемо приклади цих задач.

Задача 1. *Скільки трицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 5, 7, якщо кожна цифра може бути використаною лише один раз у кожному числі?*

Розв'язання: щоб знайти, скільки всього трицифрових чисел можна утворити з поданих чотирьох цифр, причому цифри повторюватися не можуть, треба знайти число розміщень без повторень з чотирьох цифр по три, тобто

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Відповідь: 24 числа.

Задача 2. *Скільки трицифрових чисел можна записати дев'ятьма цифрами від 1 до 9, якщо цифри в записі числа можуть повторюватись?*

Розв'язання: для утворення трицифрових чисел треба вибрати з поданих дев'яти цифр лише три, при чому вони можуть повторюватися. Щоб знайти, скільки таких чисел можна утворити, треба знайти число всіх розміщень з повтореннями з дев'яти по три, тобто

$$_9A_3 = 9^3 = 729.$$

Відповідь: 729 чисел.

Задача 3. *Скількома способами можна стати в стрій команді з 6 осіб?*

Розв'язання: з 6 осіб команди треба вишикувати стрій, тобто кількість людей та сама, лише вони будуть розміщені у різному порядку. Щоб знайти, скількома способами це можна зробити, треба знайти число перестановок з шести, тобто $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Відповідь: 720 способами.

Задача 4. *Між усіма перестановками цифр числа 23 164 знайти, скільки таких, які починаються цифрами 23?*

Розв'язання: перші дві цифри залишаються на місці, то переставляти можна інші три цифри. Щоб знайти, скільки всього буде чисел, які задовольняють умову задачі, треба знайти число перестановок з трьох цифр, тобто:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Відповідь: 6 чисел.

Задача 5. *Скільки чотирицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається лише один раз?*

Розв'язання: щоб знайти, скільки чотирицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра у записі числа зустрічається лише один раз, треба знайти число перестановок з чотирьох:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Відповідь: 24 числа.

Задача 6. *Учень хоче розмалювати карту чотирма фарбами. У нього є шість фарб. Скількома способами він може вибрати з них фарби для розмальовування карти?*

Розв'язання: щоб знайти, скількома способами учень може розмалювати карту чотирма фарбами з наявних шести фарб, треба знайти число комбінацій з шести по чотири:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$$

Відповідь: 15 способами.

Тематика лекцій

1. **Множини та їх види.** Поняття множини. Елемент множини. Порожня множина. Скінченні та нескінченні множини. Числові множини. Нескінченні числові множини. Числові проміжки, їх запис та зображення на координатній прямій.
2. **Способи задання множин.** Задання множини словесним способом, переліком елементів, за допомогою характеристичних властивостей, числовим проміжком, зображенням числового проміжка на координатній прямій.
3. **Відношення між множинами та їх зображення кругами Ейлера.** Підмножина. Невласні та власні підмножини. Загальна кількість підмножин заданої множини. Рівні множини. Універсальна множина. Спільні елементи двох множин. Круги Ейлера. Діаграми Ейлера–Венна. Відношення між множинами.
4. **Операції над множинами.** Перетин, об'єднання, різниця скінченних та нескінченних множин. Доповнення множини до універсальної множини. Доповнення підмножини до множини.
5. **Основні закони операцій над множинами та їх доведення.** Комутативні, асоціативні, дистрибутивні закони. Закони де Моргана. Зв'язок різниці множин з перетином і доповненням. Основні властивості різниці множин. Основні властивості доповнення. Використання основних законів операцій над множинами для спрощення виразів. Діаграми Ейлера-Венна для доведення рівностей.
6. **Декартовий добуток множин.** Упорядкована пара елементів та її компоненти. Поняття декартового добутку двох множин та його властивості. Координатна площина. Зображення декартового добутку двох числових множин та його зображення на координатній площині. Кортеж та його компоненти. Рівні кортежі. Декартовий добуток кількох множин.
7. **Елементи комбінаторики.** Правило суми для множин, які не перетинаються. Правило суми для множин, які перетинаються. Правило добутку для скінченних множин. Використання правила суми та правила добутку для розв'язування задач. Комбінаторні сполуки: розміщення без повторень, розміщення з повтореннями, перестановки, комбінації. Розв'язування комбінаторних задач.

Теми практичних занять

№ з/ п	Теми практичних занять
1.	Поняття множини. Елемент множини. Порожня множина. Скінченні та нескінченні множини. Числові множини. Нескінченні числові множини. Числові проміжки.
2.	Способи задання множин.
3.	Підмножина. Невласні та власні підмножини. Загальна кількість підмножин заданої множини. Рівні множини. Універсальна множина.
4.	Круги Ейлера. Діаграми Ейлера-Венна. Відношення між множинами.
5.	Операції над множинами.
6.	Основні закони операцій над множинами та їх використання. Побудова діаграм Ейлера-Венна для доведення рівностей.
7.	Декартовий добуток множин та його зображення на координатній площині.
8.	Правило суми. Правило добутку.
9.	Комбінаторні сполуки. Розв'язування комбінаторних задач.
10.	Контрольна робота

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

1. Множина та її елементи. Порожня множина.

Скінченні та нескінченні множини. Числові множини.

Нескінченні числові множини. Числові проміжки

1. Навести приклад рівняння, множина розв'язків якого:
 - а) має один елемент;
 - б) має два елементи;
 - в) не має жодного елемента;
 - г) має безліч елементів.
2. Навести чотири приклади скінченної множини.
3. Навести чотири приклади нескінченної множини.
4. Навести чотири приклади порожньої множини.
5. Навести чотири приклади числової множини.
6. Вказати кількість елементів множини A , якщо:
 - а) A – множина кольорів веселки;
 - б) A – множина гравців у партії тенісу;
 - в) A – множина сторін чотирикутника;
 - г) A – множина букв латинського алфавіту;
 - д) A – множина місяців року, які мають 31 день;
 - е) A – множина коренів рівняння $x^2 = 4$;
 - є) A – множина відрізків на площині;
 - ж) A – множина парних натуральних чисел;
 - з) A – множина голосних букв українського алфавіту;
 - и) A – множина натуральних чисел, які не перевищують 0.

Вказати серед цих множин скінченні і нескінченні множини.
7. Назвати чотири елементи з множини натуральних чисел.
8. Назвати чотири елементи з множини цілих чисел.
9. Назвати чотири елементи з множини раціональних чисел.
10. Назвати чотири елементи з множини ірраціональних чисел.

11. Назвати чотири елементи з множини дійсних чисел.

12. Серед наступних тверджень вказати правильні:

- а) $7 \in \mathbb{N}$; $-2 \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{I}$; $0,6 \in \mathbb{R}$; $\sqrt{13} \notin \mathbb{R}$;
 б) $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$; $8,5 \notin \mathbb{Z}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{13} \notin \mathbb{I}$; $-7\frac{1}{3} \notin \mathbb{R}$; $\sqrt{19} \notin \mathbb{R}$;
 в) $4,8 \in [3; +\infty)$; $5 \in (5; +\infty)$; $\sqrt{3} \in [1; 2]$; $4 \in [4; +\infty)$;
 г) $8 \in [-\frac{5}{6}; 3]$; $-\frac{1}{3} \in (-\infty; 0]$; $1,6 \in [1; 2]$; $11 \in [-3; 12)$.

13. Зобразити числові проміжки на числовій прямій:

- а) $[-2; 3]$;
 $(-\infty; 4]$;
 $(4; 10]$;
 $(5; +\infty)$.
 б) $[-8; 5]$;
 $(-\infty; -3]$;
 $(-5; 9]$;
 $(2; +\infty)$.

Вказати серед цих множин скінченні і нескінченні множини.

14. Зобразити на координатній прямій множину точок, координати яких:

- а) менше 3;
 більше 3;
 не менше 3;
 не більше 3.
 б) менше - 5;
 більше - 5;
 не менше - 5;
 не більше - 5.

15. Утворити множини з прізвищ студентів групи за першими їх буквами. Чи є серед цих множин порожні?

16. Утворити множини з імен студентів групи за першими їх буквами. Чи є серед цих множин порожні?

2. Способи задання множин

17. Записати переліком елементів:

- а) множину цифр запису числа 602160;
- б) множину букв у слові «математика»;
- в) множину двоцифрових чисел, які містять у записі цифру 7;
- г) множину двоцифрових чисел, запис яких закінчується цифрою 1;
- д) множину непарних чисел на проміжку $[5; 21]$;
- е) множину цілих чисел, модуль яких дорівнює 5;
- є) множину двоцифрових чисел, кратних 3 і менших 42;
- ж) множину місяців року, назва яких починається з букви «л».

18. Задати множини словесним способом:

- а) $A = \{3; 6; 9; 12; \dots\}$;
- б) $B = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10; 15\}$;
- в) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;
- г) $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

19. Перелічити елементи множин:

- а) $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$;
- б) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:2; x < 10\}$;
- в) $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 6 : x\}$;
- г) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 = 4\}$;
- д) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 5\}$;
- е) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\}$;
- є) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 8\}$.

Вказати, чи є вони скінченними.

20. Задати множини за допомогою характеристичних властивостей, якщо:

- а) A – множина натуральних дільників числа 20;

б) A – множина цілих чисел, квадрат яких дорівнює 25;

в) $A = \{3; 6; 9; 12; \dots\}$;

г) $B = \{-15; -10; -5; 0; 5; 10; 15\}$.

21.Зобразити множини на числовій прямій. Вказати, чи є вони скінченними.

а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 6\}$;

б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$;

в) $E = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 10\}$;

г) $F = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$.

22.Задати множини словесно. Вказати скінченні та нескінченні множини:

а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x : 3, x \leq 20\}$;

б) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x : 5\}$;

в) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 < x < 5\}$;

г) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -2\}$.

23.Задати множини усіма можливими способами:

а) A – множина натуральних чисел, менших 8;

б) A – множина цілих чисел, модуль яких менший 3;

в) A – множина дійсних чисел, більших за 4 і менших від 9;

г) A – множина натуральних чисел, більших за 4 і менших від 9.

3. Підмножина. Невласні та власні підмножини.

Загальна кількість підмножин заданої множини. Рівні множини.

Універсальна множина

24.Назвати кілька підмножин для множини:

а) паралелограмів;

б) цілих чисел;

в) трикутників;

г) кутів.

25.Серед наступних пар множин A і B вказати ті, одна з яких є підмножиною іншої множини:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------|
| а) A – множина квадратів, | B – множина трикутників; |
| б) A – множина квадратів, | B – множина прямокутників; |
| в) A – множина квадратів, | B – множина ромбів; |
| г) A – множина квадратів, | B – множина трапецій; |
| д) A – множина паралелограмів, | B – множина ромбів; |
| е) A – множина паралелограмів, | B – множина прямокутників; |
| є) A – множина паралелограмів, | B – множина квадратів; |
| ж) A – множина паралелограмів, | B – множина кругів. |

26. Серед наступних пар множин вказати ті, одна з яких є підмножиною іншої множини:

- а) A – множина обласних центрів України,
 $B = \{\text{Львів, Рівне, Вінниця, Чернівці, Одеса}\};$
- б) $A = \{\text{парта, писати, зелений, наполегливо}\},$
 B – множина іменників;
- в) $A = \{\text{чистий, чіткий, зелений, наполегливий}\},$
 B – множина прикметників;
- г) A – множина сіл Львівської області,
 B – множина сіл Дрогобицького району.

27. Чи правильно, що:

- а) $\{4; 5\} \subset \{4; 5; 6; 7\};$
- б) $\{4; 5\} \subset \{4; 5; \{6; 7\}\};$
- в) $\{4; 5\} \subset \{4; \{4; 5; 6\}; 7\};$
- г) $\{4; 5\} \subset \{\{4; 5\}; \{4; 6\}; 7\}.$

28. Скільки всіх підмножин має множина, яка містить:

- а) два елементи;
- б) три елементи;
- в) чотири елементи;
- г) п'ять елементів;
- д) шість елементів.

29. Скільки невластних підмножин має множина, яка має:

- а) два елементи;
- б) три елементи;
- в) чотири елементи;
- г) п'ять елементів;
- д) шість елементів.

30. Скільки власних підмножин має множина, яка має:

- а) два елементи;
- б) три елементи;
- в) чотири елементи;
- г) п'ять елементів;
- д) шість елементів.

31. Чи існує множина, яка має:

- а) 128 підмножин;
- б) 64 підмножини;
- в) 34 підмножини;
- г) 18 підмножин.

32. Чи існує множина, яка має:

- д) 30 власних підмножин;
- е) 62 власні підмножини;
- є) 20 власних підмножин;
- ж) 36 власних підмножин.

33. Знайти всі підмножини множини $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Скільки всіх підмножин множини A ? Скільки всіх невластних підмножин множини A ? Скільки всіх власних підмножин множини A ?

34. Знайти всі підмножини множини $A = \{5; 7; 8\}$. Скільки всіх підмножин множини A ? Скільки всіх невластних підмножин множини A ? Скільки всіх власних підмножин множини A ?

35. Скільки елементів містить множина A , якщо з неї можна утворити:

- а) 64 підмножини;
- б) 128 підмножин;

в) 30 власних підмножин;

г) 62 власні підмножини?

36. Навести чотири приклади рівних множин.

37. Нехай задано множину A – множину цілих розв'язків рівняння $x^2 = 9$ і множину B – множину розв'язків рівняння $x + 1 = 4$. Яка з умов виконується:

а) $A \subset B$;

б) $B \subset A$;

в) $A = B$.

38. Нехай задано множину A – множину цілих розв'язків рівняння $|x| = 4$ і множину B – множину цілих розв'язків рівняння $x^2 - 16 = 0$. Яка з умов виконується:

а) $A \subset B$;

б) $B \subset A$;

в) $A = B$.

39. Задано множину $A = \{5; 10; 15; 25\}$. Записати дві множини, які рівні з множиною A .

40. Задано множину $B = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$. Записати три множини, які рівні з множиною A .

41. Серед наступних пар множин X та Y знайти рівні множини:

а) $X = \{2; 4; 6; 8\}$;

$Y = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:2; x < 9\}$;

б) X – множина чотирикутників, у яких всі сторони рівні;

Y – множина квадратів;

в) X – множина трикутників;

Y – множина плоских фігур, обмежених замкненою ламаною з трьох відрізків;

г) X – множина точок кола з центром в точці O і радіусом 1 см;

Y – множина точок, відстань яких до точки O дорівнює 3 см;

д) X – множина цілих чисел, квадрат яких дорівнює 25;

Y – множина цілих чисел, модуль яких дорівнює 5;

е) X – множина двоцифрових чисел, які кратні 3;

Y – множина двоцифрових чисел, сума цифр яких ділиться на 3;

є) $X = \{27; 8; 64\}$;

$Y = \{2^3; 3^3; 4^3\}$.

42. Чи рівні між собою множини A і B :

а) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, 7,6 \leq x \leq 10\}$;

$B = \{x | x \in \mathbb{Z}, 7\frac{1}{2} < x < 10,4\}$;

б) A – множина розв'язків рівняння $(x - 3)(x - 4) = 0$;

$B = \{x | x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 4\}$;

в) A – множина пір року;

B – множина кутів чотирикутника;

г) $A = \{7; 8; 9; 10; 11; 12\}$;

$B = \{x | x \in \mathbb{N}, 6 < x < 13\}$.

43. Назвати універсальні множини для таких множин:

а) A – множина двоцифрових чисел,

B – множина трицифрових чисел;

б) A – множина яблук,

B – множина груш,

C – множина слив;

в) A – множина іменників,

B – множина прикметників,

C – множина дієслів;

г) A – множина трикутників,

B – множина трапецій,

C – множина кіл;

д) A – множина прямокутних трикутників,

B – множина гострокутних трикутників,

C – множина тупокутних трикутників.

44. Нехай універсальною множиною є множина чотирикутників. Назвати її підмножини.
45. Нехай універсальною множиною є множина кутів. Назвати її підмножини.

4. Круги Ейлера. Діаграми Ейлера-Венна.

Відношення між множинами.

46. Встановити, чи мають спільні елементи множини A і B . Визначити відношення між ними і зобразити їх на діаграмі Ейлера-Венна:
- а) A – множина паралелограмів,
 B – множина ромбів;
 - б) A – множина паралелограмів,
 B – множина прямокутників;
 - в) A – множина прямокутників,
 B – множина трапецій;
 - г) A – множина паралелограмів,
 B – множина трапецій;
 - д) A – множина паралелограмів з прямим кутом,
 B – множина квадратів;
 - е) A – множина квадратів,
 B – множина ромбів з прямим кутом;
 - є) A – множина прямокутних трикутників,
 B – множина рівнобедрених трикутників;
 - ж) A – множина трикутників,
 B – рівносторонніх трикутників;
 - з) A – множина прямокутників з рівними сторонами,
 B – множина квадратів;
 - и) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\};$
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0\},$
 - і) A – множина двоцифрових чисел;
 B – множина двоцифрових чисел, запис яких закінчується цифрою 7.

47. Встановити, у якому відношенні перебувають множини між собою, і зобразити це на діаграмі Ейлера–Венна:

- а) $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:2\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:4\}$;
 б) $A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:4\}$, $A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:7\}$;
 в) $C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 7 \leq x \leq 10\}$, $C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 7 < x < 10\}$;
 г) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 9\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 4\}$;
 д) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}_0\}$;
 е) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 6\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 7\}$;
 є) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$.

48. Зобразити з допомогою діаграми Ейлера–Венна наступні пари множин:

- а) A – множина студентів університету;
 B – множина студентів одного з факультетів цього університету;
 б) A – множина квадратів;
 B – множина трикутників;
 в) A – множина прямокутних трикутників;
 B – множина рівнобедрених трикутників;
 г) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 = 36\}$;
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| = 6\}$.

49. Визначити, у якому відношенні перебувають множини A і B :

- а) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:2\}$,
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:4\}$;
 б) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:6\}$,
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:3\}$;
 в) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 7,6 \leq x \leq 10\}$,
 $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 7\frac{1}{2} < x < 10,4\}$.

Зобразити це на діаграмі Ейлера–Венна.

50.Визначити, у якому відношенні перебувають нескінченні числові множини?

Зобразити це на діаграмі Ейлера–Венна.

51.Задана множина $A = \{21; 52; 409; 248; 30; 2091; 322; 22; 272; 142; 371; 14\}$.

Утворити з неї підмножини, які:

- а) містять одну цифру 2;
- б) містять дві цифри 2;
- в) не містять цифри 2;
- г) не містять цифри 0.

52.Задана множина $A = \{7; 12; 49; 124; 235; 4521; 554; 6321; 1478; 657; 102; 85\}$.

Утворити з неї підмножини, які складаються з:

- а) непарних чисел;
- б) парних чисел;
- в) двоцифрових чисел;
- г) трицифрових чисел.

5. Операції над множинами

53.Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; A'_B , B'_A , якщо:

- а) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 9\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{5, 7\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 1, 7, 5\}$.

- б) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{0, 2, 4, 6\}$,
 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 1\}$,
 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 1, 5\}$.

54.Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; A'_B , B'_A , A' , B' , якщо:

- а) $A = [-4; 5]$, $B = [0; 7]$,
 $A = (-\infty; 3)$, $B = (-\infty; 7)$,
 $A = (-2; 3]$, $B = [4; 6]$,

$$A = (-\infty; 2), \quad B = (0; +\infty).$$

$$\text{б) } A = [-5; 4], \quad B = [1; 6],$$

$$A = (-\infty; -3), \quad B = (-\infty; 2),$$

$$A = (0; 4], \quad B = [6; 9],$$

$$A = (-\infty; 1), \quad B = (3; +\infty).$$

55. Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; A'_B , B'_A :

$$\text{а) } A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}.$$

$$\text{б) } A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 12\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}.$$

56. Знайти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$:

а) A – множина прямокутників;

B – множина ромбів.

$$\text{б) } A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 10, x : 2\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 20, x : 3\}.$$

в) A – множина цифр запису числа 4 822 528;

B – множина цифр запису числа 5 283 824.

г) A – множина букв у слові «алгебра»;

B – множина букв у слові «геометрія».

$$\text{ж) } A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 7\}.$$

57. Нехай $A = \{2; 3; 4; 5; 7; 10\}$, $B = \{3; 5; 7; 9\}$, $C = \{4; 9; 11\}$. Скільки елементів містять наступні множини:

$$A \cup (B \cup C); \quad (C \cup B) \cap A; \quad (A \setminus B) \setminus C; \quad B \setminus (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C); \quad (A \cup B) \cap C; \quad (A \setminus C) \cup B; \quad (A \cup B) \setminus C.$$

58. Зобразити на числовій прямій $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; A'_B , B'_A , A' , B' :

$$\text{а) } A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq -2\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 8\}.$$

$$\text{б) } A = \left\{ x \mid x \in R, 0 < x < 3\frac{1}{2} \right\};$$

$$B = \{x \mid x \in R, -3 < x < 1\}.$$

$$\text{в) } A = \{x \mid x \in R, x \geq 6\};$$

$$B = \{x \mid x \in R, x \leq 2\}.$$

$$\text{г) } A = \{x \mid x \in R, -2 < x < 4\};$$

$$B = \{x \mid x \in R, x \geq 5\}.$$

$$\text{д) } A = \{x \mid x \in R, x < 10\};$$

$$B = \{x \mid x \in R, x \leq 7\}.$$

$$\text{е) } A = \{x \mid x \in R, x < 3\};$$

$$B = \{x \mid x \in R, x \leq -7\}.$$

59. Відомо, що $A = \{x \mid x \in R, -1 \leq x \leq 2\}$,

$$B = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 4\},$$

$$C = \{x \mid x \in R, -2 \leq x \leq 0\}.$$

Знайти:

$$\text{а) } (A \cup B) \cap C;$$

$$\text{б) } (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$\text{в) } A \cup B \cup C;$$

$$\text{г) } A \cap B \cap C;$$

$$\text{д) } A';$$

$$\text{е) } B';$$

$$\text{є) } C';$$

$$\text{ж) } (A \setminus B) \cap C;$$

$$\text{з) } (A \setminus C) \setminus B.$$

60. Знайти A' , якщо

$$\text{а) } A = (-\infty; 2);$$

$$A = [-5; 4],$$

$$A = (3; +\infty).$$

$$\text{б) } A = (-\infty; 4];$$

$$A = [-2; 7],$$

$$A = (5; +\infty).$$

61. Відомо, що $x \in A$. Чи це означає, що:

$$\text{а) } x \in A \cap B.$$

$$\text{б) } x \in A \cup B.$$

$$\text{в) } x \in A \setminus B.$$

$$\text{г) } x \in B \setminus A.$$

$$\text{д) } x \in A'.$$

$$\text{е) } x \in B'.$$

62. Відомо, що $x \in B$. Чи це означає, що:

$$\text{а) } x \in A \cap B.$$

$$\text{б) } x \in A \cup B.$$

$$\text{в) } x \in A \setminus B.$$

$$\text{г) } x \in B \setminus A.$$

$$\text{д) } x \in A'.$$

$$\text{е) } x \in B'.$$

63. Відомо, що $x \in A \cap B$. Чи це означає, що:

$$\text{а) } x \in A.$$

$$\text{б) } x \in B.$$

$$\text{в) } x \in A \cup B.$$

$$\text{г) } x \in A \setminus B.$$

$$\text{д) } x \in B \setminus A.$$

64. Відомо, що $x \in A \cup B$. Чи це означає, що:

$$\text{а) } x \in A.$$

- б) $x \in B$.
- в) $x \in A \cap B$.
- г) $x \in A \setminus B$.
- д) $x \in B \setminus A$.

65. Відомо, що $x \in A \setminus B$. Чи це означає, що:

- а) $x \in A$.
- б) $x \in B$.
- в) $x \in A \cup B$.
- г) $x \in A \cap B$.
- д) $x \in B \setminus A$.
- е) $x \in A'$.
- є) $x \in B'$.

66. Відомо, що $x \in A'$. Чи це означає, що:

- а) $x \in A$.
- б) $x \in B$.
- в) $x \in A \cup B$.
- г) $x \in A \cap B$.
- д) $x \in B \setminus A$.
- е) $x \in A \setminus B$.
- є) $x \in B'$.

67. Відомо, що $x \in B'$. Чи це означає, що:

- а) $x \in A$.
- б) $x \in B$.
- в) $x \in A \cup B$.
- г) $x \in A \cap B$.
- д) $x \in B \setminus A$.
- е) $x \in A \setminus B$.

є) $x \in A'$.

68. Побудуйте два трикутники так, щоб їх перетином була геометрична фігура:

- а) трикутник,
- б) відрізок,
- в) точка,
- г) багатокутник.

69. Скільки точок може бути в перетині двох геометричних фігур на площині:

- а) двох прямих;
- б) двох кіл;
- в) прямої і кола.

6. Основні закони операцій над множинами та їх використання.

Побудова діаграм Ейлера-Венна для доведення рівностей

70. Спростити вирази:

- а) $A \cap (A \cup B)$;
- б) $(A \cap B) \cap (B' \cap A)$;
- в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
- г) $(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B')$.

71. Довести істинність або хибність рівності за допомогою діаграми Ейлера – Венна:

- а) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
- б) $(A \cap B') \cap (B \setminus A) = A \setminus B$;
- в) $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$;
- г) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

72. Довести істинність або хибність рівності за допомогою діаграми Ейлера – Венна:

- а) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$;
- б) $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$.
- в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

$$\text{г) } A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C.$$

73. Довести істинність або хибність рівності двома способами:

$$\text{а) } (A \setminus B)' = A' \cup (A \cap B)';$$

$$\text{б) } (A \cap B)' \cap C = A \cup (B' \cap C);$$

$$\text{в) } A' \cup (B \cup C') = (A \cap B)' \cap (A \cap C)';$$

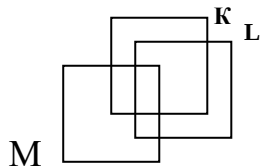
$$\text{г) } (A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A \cap B)'.$$

74. Довести за допомогою кругів Ейлера, що для будь-яких множин A, B, C таких що $B \subset A, C \subset A$, істинними є такі рівності:

$$\text{а) } A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

$$\text{б) } A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

75. Три множини K, L і M зображені трьома квадратами, які мають спільні частини. Заштрихувати області, які зображають такі множини (для кожного випадку зробити окремий рисунок):



$$L \cap M$$

$$M \cap K \cap L$$

$$M \setminus K$$

$$K \cap L$$

$$M \cup K \cap L$$

$$K \setminus L$$

$$K \cap M$$

$$M \cap (K \cup L)$$

$$L \setminus M$$

7. Декартовий добуток множин та його зображення на координатній площині

76. Відомо, що $X \times Y = \{(-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$. Назвати елементи множин X і Y .

77. Відомо, що $X \times Y = \{(4, 0), (4, 3), (5, 0), (5, 3), (7, 0), (7, 3)\}$. Назвати елементи множин X і Y .

78. Задані множини $X = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $Y = \{0, 4, 6, 8\}$. В якому з наступних випадків істинне твердження $A \subset X \times Y$:

$$\text{а) } A = \{(1, 4)(2, 4)(3, 4)(5, 4)\};$$

$$\text{б) } A = \{(2, 0)(2, 6)(0, 6)(4, 4)\};$$

$$\text{в) } A = \{(3, 4)(4, 3)(5, 4)(3, 6)\}.$$

79. Дано множини $A = \{3, 5, 7\}$; $B = \{6, 8, 9\}$; $C = \{0, 1\}$. Чи істинною є рівність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

80. Дано множини $A = \{3, 5, 7, 8, 9\}$; $B = \{8, 9\}$; $C = \{0, 1, 2\}$. Чи істинною є рівність $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

81. Множина A має 7 елементів. Скільки елементів має множина B , якщо декартовий добуток $A \times B$ має:

а) 42 елементи,

б) 7 елементів,

в) жодного елемента.

82. Зобразити декартовий добуток множин A і B на координатній площині, якщо:

$$\text{а) } A = \{x | x \in R, x \geq -2\}; \quad B = \{x | x \in R, x \leq 8\}.$$

$$A = \{x | x \in R, 0 < x < 3\}; \quad B = \{x | x \in R, -4 < x < 1\}.$$

$$A = \{x | x \in N, -2 < x < 4\}; \quad B = \{x | x \in Z, -6 < x < 3\}.$$

$$A = \{x | x \in R, -2 < x < 4\}; \quad B = \{x | x \in R, x \geq -1\}.$$

$$A = \{x | x \in R, x \leq 6\}; \quad B = \{x | x \in N, x \leq 4\}.$$

$$A = \{x | x \in R, 0 < x < 3\}; \quad B = R.$$

$$A = R; \quad B = \{x | x \in R, x < 7\}.$$

$$A = \{x | x \in N, x < 4\}; \quad B = R.$$

$$A = \{x | x \in R, -2 < x < 5\}; \quad B = \{x | x \in N, x \leq 3\}.$$

$$A = R; \quad B = (-\infty; +\infty).$$

$$\text{б) } A = \{x | x \in R, x \geq 4\}; \quad B = \{x | x \in R, x \geq 8\}.$$

$$A = \{x | x \in R, -3 < x < 2\}; \quad B = \{x | x \in R, 3 < x < 5\}.$$

$$A = \{x | x \in Z, -5 < x < 4\}; \quad B = \{x | x \in N, 2 < x < 8\}.$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -2\};$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 < x < 7\}.$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\};$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}.$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, -4 < x < 8\};$$

$$B = \mathbb{R}.$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x < -3\};$$

$$B = \mathbb{R}.$$

$$A = \mathbb{R};$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}.$$

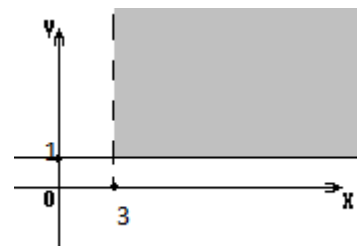
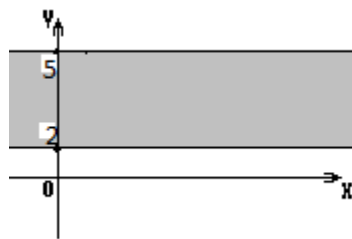
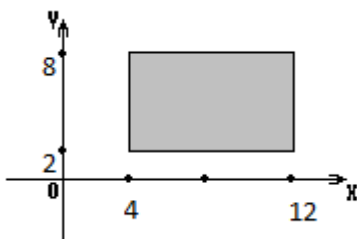
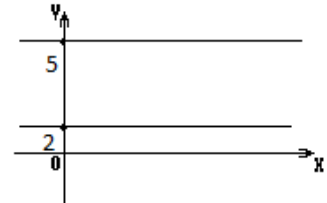
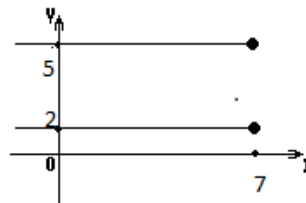
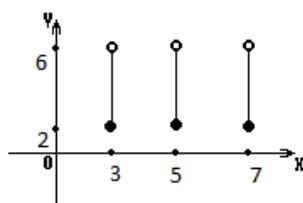
$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 4\};$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, -6 < x < 3\}.$$

$$A = (-\infty; +\infty);$$

$$B = \mathbb{R}.$$

83. На рисунках зображено декартові добутки $X \times Y$. Назвати елементи множин X та Y .



8. Правило суми. Правило добутку

84. На тарілці лежать 8 яблук і 7 груш. Скількома способами можна вибрати з них один фрукт?

85. На столі лежать 10 ручок і 6 фломастерів. Скількома способами можна вибрати з них один навчальний прилад?

86. У вазі 10 нарцисів, 8 конвалій і 9 пролісків. Скількома способами можна вибрати з них одну квітку?

87. У кошику 10 огірків, 18 помідорів і 9 цибулин. Скількома способами можна вибрати з них один овоч?

- 88.** Із 100 студентів 85 вивчають англійську мову, 45 – німецьку. Скільки студентів вивчає обидві мови?
- 89.** У класі 35 учнів. З них 20 беруть участь у роботі математичного гуртка, 11 – в роботі гуртка художнього читання, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів класу беруть участь в роботі цих двох гуртків? Скільки учнів є членами тільки математичного гуртка?
- 90.** Із 40 учнів 32 займаються у математичному гуртку, 21 – в історичному гуртку, а 15 – в обох гуртках. Скільки учнів займаються хоча б в одному з цих гуртків? Скільки учнів не займаються в жодному з цих гуртків?
- 91.** У класі 40 учнів. З них 26 учнів грають у баскетбол, 25 – займаються плаванням, 27 – займаються лижами, причому одночасно плаванням і баскетболом займаються 15 учнів, плаванням і лижами – 18, баскетболом і лижами – 16. Один учень звільнений від занять фізкультурою. Скільки учнів займаються цими видами спорту одночасно? Скільки учнів займається тільки баскетболом?
- 92.** Із 100 студентів англійську мову вивчають 28, німецьку – 30, іспанську – 42, англійську і німецьку – 8, англійську та іспанську – 10, німецьку та іспанську – 5. Всі три мови вивчають 3 студенти. Скільки студентів вивчає хоча б одну мову? Скільки студентів не вивчає жодну з цих мов?
- 93.** Анкети 200 студентів дали такі результати про знання іноземної мови: англійську знають 56, німецьку – 60 і французьку – 84, англійську і німецьку – 16, англійську і французьку – 20, німецьку і французьку – 10, всі три мови – 6. Скільки знає принаймні одну з них? Скільки опитаних студентів не знають жодної з цих мов?
- 94.** Набір складається з ручки і блокнота. Скільки різних наборів можна скласти з 9 ручок і 6 блокнотів?
- 95.** Набір складається з конверта і марки. Скільки різних комплектів можна скласти з 11 конвертів і 9 марок?
- 96.** У бібліотеці є в наявності 11 різних книг Франка, 10 різних книг Лесі Українки, 6 різних книг Шевченка. Скількома способами студент може

вибрати три книжки так, щоб серед них були по одній книжці кожного із авторів?

97. На вершину гори веде 8 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і повернутися назад?

98. Скільки існує трицифрових чисел, які діляться на 5?

99. Скільки існує парних трицифрових чисел?

9. Комбінаторні сполуки. Розв'язування комбінаторних задач

100. Знайти:

а) A_5^2 ; A_5^{-2} ; P_5 ; C_4^2 .

б) A_7^3 ; A_6^{-3} ; P_4 ; C_5^3 .

101. Спростити вираз:

а) $\frac{14!}{12!}$;

б) $\frac{16!}{18!}$;

в) $\frac{(k-2)!}{k!}$;

г) $\frac{(p+1)!}{(p-2)!}$;

д) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$;

е) $\frac{16!}{12! \cdot 6!}$

є) $P_{m-n} \cdot A_n^m : P_{n+1}$;

ж) $A_{10}^n \cdot P_{10-n} : 9!$.

102. Розв'язати рівняння:

а) $3 \cdot C_x^2 = 45$;

$$\text{б) } A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2};$$

$$\text{в) } A_{x-1}^2 = 20;$$

$$\text{г) } A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101;$$

$$\text{д) } A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48;$$

$$\text{е) } 55 \cdot A_{x+1}^2 = 12 \cdot C_{x+3}^{x-1}.$$

- 103.** Скільки трицифрових чисел можна записати цифрами, взятими з поданих п'яти цифр, якщо у кожному числі жодна цифра не повторюється?
- 104.** Скільки чотирицифрових чисел можна записати цифрами, взятими з поданих шести цифр, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз?
- 105.** У кімнаті 5 лампочок. Скількома різними способами можна освітити кімнату?
- 106.** Скількома способами можна скласти список з 25 учнів?
- 107.** Скількома способами учень може вибрати 3 кольорові олівці із 7 олівців різного кольору?
- 108.** Скількома способами можна оббити 5 різних диванів, якщо є 10 видів оббивки?
- 109.** Танцювальний гурток відвідують 10 юнаків і 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати 4 пари для танцю?
- 110.** Скількома способами можна вибрати 6 пар для танцю, якщо є 10 дівчат і 8 хлопців?
- 111.** Із 10 слів чоловічого роду, 7 слів жіночого і 18 середнього роду треба вибрати по одному слову кожного роду. Скількома способами це можна зробити?
- 112.** Із 15 іменників, 5 дієслів і 10 прикметників треба вибрати по одному слову для побудови речення. Скількома способами це можна зробити?
- 113.** Скільки букетів з трьох тюльпанів можна скласти з 15 тюльпанів?

114. Скількома способами взяти чотири олівці з коробки, у якій є 20 різнокольорових олівців?
115. Скільки можна утворити п'ятизначних чисел з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожен з них використати лише один раз?
116. Скільки можна утворити тризначних чисел з цифр 2, 3, 7, якщо кожен з них використати лише один раз?
117. Скількома способами читач може вибрати 5 книжок із 7?
118. Скількома способами можна вибрати 5 учнів із 10 на математичну олімпіаду?
119. У футбольній команді з 11 гравців і треба обрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?
120. Скількома способами серед 10 спортсменів, які беруть участь у змаганнях з бігу, можуть розподілитися 3 призові місця?
121. Скількома способами можна скласти двоколірний прапор, якщо є тканина п'яти різних кольорів?
122. Скільки існує трицифрових чисел, які діляться на 5?
123. Для преміювання трьох студентів купили 12 книжок. Скільки можливих способів розподілу премій?
124. У класі 15 дівчат та 14 хлопців. Скількома способами можна вибрати чергових з 4 хлопців та 2 дівчат?
125. Скількома способами можна створити 7 букетів, маючи 18 гвоздик?
126. На колі розміщено 15 точок. Скільки можна утворити трикутників, вершини яких знаходяться у цих точках?
127. У турнірі бере участь 14 шахісток. Кожна з них провела партію із кожною суперницею. Скільки у цьому турнірі зіграно партій?

Методичні рекомендації щодо написання контрольної роботи

Для виконання контрольної роботи розділу «Елементи теорії множин та комбінаторики» студент повинен:

знати основні поняття: множина; елемент множини; числові множини; круги Ейлера; діаграми Ейлера–Венна; перетин, об'єднання, різниця, доповнення множин; декартовий добуток множин; розміщення, перестановки, факторіал, комбінації.

вміти:

- задавати множину різними способами;
- встановлювати відношення між множинами;
- формулювати означення та властивості перетину, об'єднання, різниці, доповнення множин та декартового добутку множин;
- знаходити операції над скінченими та нескінченими множинами;
- будувати діаграми Ейлера-Венна;
- зображати декартовий добуток множин на координатній площині;
- розкривати зміст правила суми і правила добутку;
- розрізняти та обчислювати різні види комбінаторних сполук;
- розв'язувати комбінаторні задачі за допомогою правила добутку та правила суми;
- використовувати комбінаторні сполуки під час розв'язування задач та рівнянь.

Контрольна робота містить 7 практичних завдань, які оцінюються

50 балами:

1 завдання – 4 бали;

5 завдання – 8 бали;

2 завдання – 4 бали;

6 завдання – 8 бали;

3 завдання – 8 бали;

7 завдання – 10 балів.

4 завдання – 8 бали;

Типовий варіант контрольної роботи

Розділ 1. Елементи теорії множин та комбінаторики

Варіант - 35

1. Задати різними способами множину A , яка складається з натуральних чисел, кратних 2, що не перевищують 16.

2. Визначити, у якому відношенні перебувають множини:

$X = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x:2\}$ і $Y = \{y \mid y \in \mathbb{N}, y:4\}$. Зобразити множини за допомогою кругів Ейлера.

3. Знайти $A \cap B$, $A \cup B$, A/B , A' , якщо задано множини:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -9\},$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}.$$

4. Довести тотожність $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ двома способами.

5. Зообразити на координатній площині декартовий добуток множин

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -2\}, \quad Y = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y < 5\}.$$

6. У класі 35 учнів. З них 20 відвідують математичний гурток, 11 – фізичний гурток, 10 не беруть участі в цих гуртках. Скільки учнів відвідують обидва гуртки? Скільки учнів відвідують тільки математичний гурток? Скільки учнів відвідують тільки фізичний гурток?

7. Розв'язати рівняння:

$$A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2}$$

Перелік питань для самоконтролю та підготовки до екзамену

1. Поняття множини. Елемент множини. Порожня множина.
2. Скінчені та нескінченні множини.
3. Числові множини. Нескінченні числові множини.
4. Числова (координатна) пряма. Числові проміжки, їх запис та зображення на координатній прямій.
5. Задання множини словесним способом.
6. Задання множини переліком елементів.
7. Задання множини за допомогою характеристичних властивостей.
8. Підмножина. Невласні та власні підмножини. Загальна кількість підмножин заданої множини.
9. Рівні множини. Універсальна множина.
10. Спільні елементи двох множин. Круги Ейлера. Діаграми Ейлера-Венна.
11. Відношення між множинами, їх зображення з допомогою кругів Ейлера.
12. Перетин двох і більше множин. Зображення перетину множин з допомогою кругів Ейлера.
13. Об'єднання двох і більше множин. Зображення об'єднання множин з допомогою кругів Ейлера.
14. Різниця двох множин. Зображення різниці двох множин за допомогою кругів Ейлера.
15. Доповнення множини до універсальної множини. Доповнення підмножини до множини. Зображення доповнень з допомогою кругів Ейлера.
16. Комутативні, асоціативні закони для перетину та об'єднання множин.
17. Закони де Моргана для перетину та об'єднання множин.
18. Дистрибутивні закони, які пов'язують операції перетину і об'єднання множин.
19. Зв'язок різниці множин з перетином і доповненням.
20. Основні властивості різниці множин.

21. Основні властивості доповнення.
22. Упорядкована пара елементів та її компоненти. Декартовий добуток двох множин.
23. Властивості декартового добутку множин. Координатна площина.
24. Зображення декартового добутку двох скінченних числових множин на координатній площині.
25. Зображення декартового добутку двох нескінченних числових множин на координатній площині.
26. Зображення декартового добутку скінченної та нескінченної числових множин на координатній площині.
27. Кортеж та його компоненти. Рівні кортежі.
28. Декартовий добуток кількох множин.
29. Правило суми для двох множин, які не перетинаються.
30. Правило суми для трьох множин, які не перетинаються.
31. Правило суми для кількох множин, які не перетинаються.
32. Правило суми для двох множин, які перетинаються.
33. Правило суми для трьох множин, які перетинаються.
34. Правило добутку для двох множин.
35. Правило добутку для трьох множин.
36. Правило добутку для кількох множин.
37. Розміщення без повторень.
38. Розміщення з повтореннями.
39. Перестановки.
40. Комбінації.

Список використаної літератури

1. Гладунський В. Вища математика й елементи логіки: означення, формули, приклади: Навчальний посібник / В. Гладунський. – М-во освіти і науки України, Науково-методичний центр вищої освіти, НБУ, ЛБІ. – Львів: Афіша, 2005. – 494 с.
2. Затула Н.І. Математика: Навчальний посібник для педвузів / Н.І.Затула, А.М.Зуб, Г.І.Коберник, А.Ф.Нещадим. – К.: Кондор, 2006. – 560 с.
3. Коберник Г.І. Математика. Практикум. Ч.І.: навч. посібник для студентів спеціальності «Початкова освіта»/ Г.І. Коберник, Г.М. Чирва. – Умань: ФОП Жовтий О.О., 2013. – 193 с.
4. Романишин Р.Я. Множини, відповідності і відношення. Математичні твердження та їх структура (Метод. рекомендації для студентів спеціальності «Початкове навчання» / Р.Я.Романишин. – Івано-Франківськ: Видавець Кушнір Г.М., 2010. – 36 с.
5. Сілков В.В. Математика. Курс лекцій. Ч.ІІ. Методичні вказівки до вивчення курсу математики. Для студентів спец. № 8.010102 «Початкова освіта», № 8.010101 «Дошкільна освіта» / В.В.Сілков. – Рівне: РДГУ, 2008. – 104 с.

Предметний покажчик**А**

Абсциса 26

Асоціативні закони 21

В

Відношення включення 14, 15

Відношення між множинами 15

Відношення перетину 14, 15

Відношення рівності 14, 15

Вісь абсцис 26

Вісь ординат 26

Власні підмножини 11

Властивості декартового добутку множин 25

Д

Декартовий добуток двох множин 25

Декартовий добуток кількох множин 30

Дистрибутивні закони 21

Діаграми Ейлера-Венна 14

Довжина кортежу 30

Доповнення множини до універсальної множини 18

Доповнення підмножини до множини 18

Е

Елемент множини 6

З

Загальна кількість підмножин множини 11

Задання множини за допомогою характеристичних властивостей	9
Задання множини переліком елементів	9
Задання множини числовим проміжком	9
Закони де Моргана	21
Закони про доповнення множин	21
Закони про різницю множин	21
Закони операцій над множинами	21
Зображення декартового добутку двох числових множин	26

К

Комбінаторика	31
Комбінаторні сполуки	38
Комбінації	41
Компоненти кортежу	30
Компоненти упорядкованої пари	25
Комутативні закони	21
Координата точки	26
Координатні кути (чверті)	26
Координатна площа	26
Кортеж	30
Круги Ейлера	14

М

Множина	6
Множина дійсних чисел	7
Множина ірраціональних чисел	7
Множина натуральних чисел	7
Множина раціональних чисел	7
Множина цілих чисел	7
Множини, які не перетинаються	14

Н

Невласні підмножини 11

Нескінченна множина 7

Нескінченні числові множини 7

Неозначуване поняття 6

О

Об'єднання множин 17

Ордината 26

П

Перелік елементів 9

Перестановки 40

Перетин множин 17

Підмножина 11

Порожня множина 6

Початок відліку на координатній площині 26

Правило добутку для двох множин 36

Правило добутку для кількох множин 36

Правило добутку для трьох множин 36

Правило суми для двох множин, які не перетинаються 31

Правило суми для двох множин, які перетинаються 32

Правило суми для кількох множин, які не перетинаються 32

Правило суми для трьох множин, які не перетинаються 31

Правило суми для трьох множин, які перетинаються 32

Р

Рівні кортежі 30

Рівні множини 11

Різниця множин 18

Розміщення без повторень 38

Розміщення з повтореннями 39

С

Скінченна множина 7

Словесний спосіб задання множини 9

Спільні елементи множин 14

Способи задання множини 9

У

Універсальна множина 11

Упорядкована пара елементів 21

Ф

Факторіал 40

Х

Характеристична властивість 9

Ч

Числова множина 7

Числова пряма 8

Числові проміжки 8, 9

Для нотаток

Для нотаток

Електронне навчально-методичне видання

Білецька Л.С., Стасів Н.І.

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ПОЧАТКОВОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ**

Розділ 1

Елементи теорії множин та комбінаторики

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Редактор
Ірина Невмержицька
Коректор
Ірина Артимко

Здано до набору 04.04.2024 р. Гарнітура Times Ум. друк. арк. 5,00.
Зам. 24.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої ДК № 5140 від 01.07.2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І. Франка, 24. К. 203