

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

*Леся Комарницька,
Юрій Матурін*

ПРАКТИКУМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Частина 1

Дрогобич
2024

УДК 512.64(076.5)

К 63

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 3 від 21 березня 2024 р.)

Рецензенти:

Дільний В.М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська Політехніка»;

Хаць Р.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск – Війчук Т.І., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Комарницька Леся, Матурін Юрій.

К 63 Практикум розв'язування задач з лінійної алгебри. Частина 1. Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2024. 94 с.

Посібник написано відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр», затвердженої науково-методичною радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 7 від 19.09.2023 р.). Посібник містить приклади розв'язування задач і вправ та завдання для самостійної роботи.

Розрахований на студентів педагогічних закладів вищої освіти, які вивчають курс «Лінійна алгебра», викладачів вищої математики.

Бібліографія 9 назв.

УДК 512.64(076.5)

Зміст

Вступ.....	5
Розділ I. МАТРИЦІ І ВИЗНАЧНИКИ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
Тема 1. Операції над матрицями та їх властивості.....	6
Завдання для самостійної роботи до теми 1	11
Тема 2. Перестановки, інверсії, транспозиції та підстановки. Визначники 2-го та 3-го порядків.....	12
Завдання для самостійної роботи до теми 2	16
Тема 3. Визначники n -го порядку та їх властивості. Мінори та алгебраїчні доповнення.....	16
Завдання для самостійної роботи до теми 3	23
Тема 4. Обчислення визначників n -го порядку	24
Завдання для самостійної роботи до теми 4	29
Тема 5. Визначник добутку матриць. Арифметичний n -вимірний векторний простір, його підпростори. Загальна та векторна форми запису системи лінійних рівнянь	30
Завдання для самостійної роботи до теми 5	34
Тема 6. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса	36
Завдання для самостійної роботи до теми 6	39
Тема 7. Обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень. Ранг і базис скінченної системи векторів.....	40
Завдання для самостійної роботи до теми 7	43
Тема 8. Критерії сумісності та визначеності системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь	44
Завдання для самостійної роботи до теми 8	47
Тема 9. Обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень та алгебраїчних доповнень. Обчислення рангу матриці методом окантування мінорів.....	49
Завдання для самостійної роботи до теми 9	53
Тема 10. Розв'язування матричних рівнянь і систем лінійних рівнянь у матричній формі. Правило Крамера	54
Завдання для самостійної роботи до теми 10	57
Розділ II. ЧИСЛОВІ ПОЛЯ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.....	59
Тема 11. Бінарні відношення	59
Завдання для самостійної роботи до теми 11	64
Тема 12. Алгебраїчні операції та алгебраїчні системи. Система натуральних чисел. Метод математичної індукції	65
Завдання для самостійної роботи до теми 12	70
Тема 13. Групи, кільця, поля та їх найпростіші властивості.....	71

Завдання для самостійної роботи до теми 13	75
Тема 14. Гомоморфізми та ізоморфізми груп, кілець та полів	75
Завдання для самостійної роботи до теми 14	78
Тема 15. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа	79
Завдання для самостійної роботи до теми 15	82
Тема 16. Геометрична інтерпретація комплексних чисел і операцій над ними. Тригонометрична форма комплексного числа.....	82
Завдання для самостійної роботи до теми 16	86
Тема 17. Добування кореня з комплексного числа. Двочленні рівняння	87
Завдання для самостійної роботи до теми 17	92
Література	93

ВСТУП

Цей посібник охоплює матеріал із тем «Матриці і визначники. Системи лінійних рівнянь. Числові поля. Поле комплексних чисел» курсу «Лінійна алгебра». Він побудований за принципом задачника-практикуму: кожна тема містить ряд типових задач з детальними розв'язаннями або вказівками та відповідями до них і завдання для самостійної роботи. Нумерацію більшості завдань, що використовується тут, взято із збірника [2], а також із збірників, які вказані в літературі.

Посібник призначений для студентів, які вивчають пропоновані теми в курсі «Лінійна алгебра». Він допоможе студентам у підготовці до практичних занять та самостійному вивченні даного матеріалу.

Розділ І. МАТРИЦІ І ВИЗНАЧНИКИ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

Тема 1. Операції над матрицями та їх властивості

№ 18.1 [2]. Обчислити: а) $-2A + B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} -2A + B &= -2 \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -10 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & -10 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

в) $2 \cos \alpha A - B + \sin \alpha C$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \alpha & \sec \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha A - B + \sin \alpha C &= 2 \cos \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \alpha & \sec \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \alpha & 2 \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin \alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Перемножити матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Матриця A має розмірність 3×1 , а матриця B має розмірність 2×3 , тому можливий лише добуток BA , причому матриця BA має розмірність 2×1 . Щоб отримати елементи її першого рядка, слід перший рядок матриці B помножити на стовпці матриці A , а стовпців матриці A є лише один:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

№ 18.2 [2]. Знайти добуток AB , якщо

$$\text{а) } A = (0, 1, 0, 0), \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A має розмірність 1×4 , а матриця B має розмірність 4×4 , тому матриця AB має розмірність 1×4 . Щоб отримати елементи її єдиного рядка, слід єдиний рядок матриці A помножити на кожний із стовпців матриці B :

$$\begin{aligned} AB &= (0, 1, 0, 0) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= (0 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 2, \quad 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1), \\ &\quad 0 \cdot (-7) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3, \quad 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4) = \\ &= (0, 1, 2, -1). \end{aligned}$$

№ 18.3 [2]. Знайти добутки AB і BA , якщо

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Матриця A має розмірність 2×4 , а матриця B має розмірність 4×2 , тому можливий і добуток AB , і добуток BA , причому матриця AB має розмірність 2×2 , а матриця BA розмірність 4×4 .

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Аналогічно,

$$BA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

№ 18.5 [2]. Знайти добуток $ABCD$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, B = (53, \quad 22, \quad -35), C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, D = (2, \quad -3, \quad -1).$$

Розв'язання.

$$ABCD = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} (53, \quad 22, \quad -35) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} (2, \quad -3, \quad -1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 53 & 22 & -35 \\ 318 & 132 & -210 \\ -106 & -44 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} (2, \quad -3, \quad -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} (2, \quad -3, \quad -1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 12 & -18 & -6 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 18.7 [2]. Обчислити: б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 4 \cdot 2^3 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}; \\ &\dots\dots\dots; \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

№ 803 [8]. Обчислити: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k$.

Розв'язання. Оскільки добуток двох діагональних матриць (однакового порядку) є діагональна матриця, діагональні елементи якої дорівнюють добутку відповідних діагональних елементів даних матриць, то

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

А тому

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

№ 18.6 [2]. Знайти $f(A)$, якщо: **а)** $f(x) = x^2 - x - 3$ і $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $f(A) = A^2 - A - 3 \cdot E$, де E – одинична матриця.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 13 \\ 9 & 8 & 13 \\ 12 & 8 & 15 \end{pmatrix};$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 16 & 5 & 13 \\ 9 & 8 & 13 \\ 12 & 8 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 10 \\ 6 & 8 & 11 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = A^2 - A - 3 \cdot E = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 10 \\ 6 & 8 & 11 \\ 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 10 \\ 6 & 5 & 11 \\ 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

№ 811 [8]. Як зміниться добуток AB матриць A і B , якщо:

а) переставити i -вий та j -вий рядки матриці A ?

Розв'язання. i -вий та j -вий рядки добутку поміняються місцями.

б) до i -го рядка додати j -вий, помножений на число c ?

Розв'язання. До i -го рядка добутку додається j -вий, помножений на число c .

№ 18.8 [2]. Знайти всі матриці, комутативні матриці: **а)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Якщо матриці A і B задовольняють умову $AB = BA$, то кажуть, що вони комутують. Матриця B має бути розмірності 2×2 .

Нехай $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix}; \\
 BA &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{pmatrix}; \\
 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 \\ x_3 + x_4 & x_4 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_1 + x_3 = x_3 + x_4 \\ x_2 + x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_4 \\ x_3 \in R. \end{cases} \\
 \text{Тому } B &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 \end{pmatrix} \text{ або, простіше, } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи до теми 1

№ 18.1 [2]. Обчислити $3A - 4B$, якщо

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ 18.2 [2]. Знайти добуток AB , якщо

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 36 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

№ 18.3 [2]. Знайти добутки AB і BA , якщо

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

№ 18.4 [2]. Знайти добуток $(AB)C$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 9 & -11 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 2 \\ 18 & -9 & 3 \\ 24 & -12 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

№ 18.6 [2]. Знайти $f(A)$, якщо

$$\text{б) } f(x) = x^2 - 5x + 6 \text{ і } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 18.7 [2]. Обчислити: г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

№ 18.9 [2]. Довести, що суми елементів, які стоять на головних діагоналях квадратних матриць AB і BA , однакові.

Тема 2. Перестановки, інверсії, транспозиції та підстановки. Визначники 2-го та 3-го порядків

№ 20.1 [2]. Знайти число інверсій у перестановці: а) 5,1,4,3,6,2.

Розв'язання. Інверсією називають таке розміщення двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть лівіше меншого.

5,1,4,3,6,2 – перестановка із 6 чисел.

Перед числом 2 стоїть чотири більших числа: 5,4,3,6.

Перед числом 6 більших чисел немає.

Перед числом 3 стоїть два більших числа: 5 і 4.

Перед числом 4 стоїть одне більше число: 5.

Перед числом 1 стоїть одне більше число: 5.

Отже, усіх інверсій $\epsilon 4+2+1+1=8$.

№ 127 [8]. Знайти число інверсій у перестановці:

$$1,3,5,7,\dots,2n-1,2,4,6,8,\dots,2n.$$

Розв'язання. $1,3,5,7,\dots,2n-1,2,4,6,8,\dots,2n$ – перестановка із $2n$ чисел. Спочатку записані n непарних чисел $1,3,5,7,\dots,2n-1$, а потім n парних чисел $2,4,6,8,\dots,2n$.

Непарні числа інверсій не утворюють.

Число 2 утворює $n-1$ інверсію з числами $3,5,7,\dots,2n-1$.

Число 4 утворює $n-2$ інверсії з числами $5,7,\dots,2n-1$.

.....

Число $2n-2$ утворює 1 інверсію з числом $2n-1$.

Число $2n$ інверсій не утворює.

Отже, усіх інверсій ϵ

$$1 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

№ 20.2 [2]. Скільки інверсій ϵ в перестановках букв **в, и, р, о, к** і **р, и, в, о, к**, якщо за вихідну перестановку вважати порядок розміщення букв у алфавіті?

Розв'язання. У перестановці букв **в, и, р, о, к** перед буквою **к** стоїть 2 букви, які розміщені в алфавіті після неї: **р, о**; перед буквою **о** стоїть 1 буква, яка розміщена в алфавіті після неї: **р**; перед буквами **р, и** немає букв, які розміщені в алфавіті після них. Отже, у перестановці букв **в, и, р, о, к** $\in 2+1=3$ інверсії.

Аналогічно, у перестановці букв **р, и, в, о, к** $\in 2+1+2+1=6$ інверсій.

№ 20.7 [2]. Записати найкоротшу послідовність транспозицій, за допомогою яких слово «**село**» перетвориться в слово «**осел**».

Розв'язання. село $\rightarrow$ сеол $\rightarrow$ соел $\rightarrow$ осел.

№ 153 [8]. Визначити парність підстановки і розкласти в добуток незалежних циклів: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Оскільки перший рядок підстановки – нормально упорядкована перестановка (0 інверсій), то парність підстановки визначається лише другим рядком. У другому рядку заданої підстановки є 16 інверсій. Отже, підстановка парна.

Розкладемо підстановку в добуток незалежних циклів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \\ = (182)(3)(467)(5).$$

№ 20.9 [2]. Визначити парність підстановки і розкласти в добуток незалежних циклів: **а)** $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. У першому рядку 10 інверсій, у другому 6 інверсій, разом 16 інверсій, підстановка парна.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1526)(34).$$

№ 163 [8]. Підстановку, задану у вигляді добутку циклів, записати двома рядками: $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$.

Розв'язання.

$$(1\ 5)(2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 169 [8]. Перемножити підстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 20.14 [2]. Знайти відображення φ^{-1} , обернене до підстановки:

$$\text{а) } \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. В оберненій підстановці φ^{-1} рядки міняються місцями; при цьому перший рядок упорядкуємо в порядку зростання:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ 20.15 [2]. Обчислити визначники 2-го порядку: **а)** $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 - 5 \cdot (-4) = -14 + 20 = 6.$$

в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ \log_5 4 & \log_3 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ \log_5 4 & \log_3 2 \end{vmatrix} = \log_2 3 \cdot \log_3 2 - \log_2 5 \cdot \log_5 4 = 1 - 2 = -1.$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ 2 & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & \sin \alpha \\ 2 & \cos \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha = \sin \alpha - 2 \sin \alpha = -\sin \alpha.$$

№ 20.16 [2]. Обчислити визначники 3-го порядку: **а)** $\begin{vmatrix} 25 & 16 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 25 & 16 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \cdot 4 \cdot 1 + 16 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 1 - 16 \cdot 5 \cdot 1 - 25 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= 100 + 48 + 45 - 36 - 80 - 75 = 2.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + (-2) \cdot (-6) \cdot 5 + 4 \cdot (-3) \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - (-2) \cdot (-3) \cdot 0 -$$

$$- 2 \cdot (-6) \cdot 1 = 0 + 60 - 12 - 60 - 0 + 12 = 0.$$

Цей результат можна було передбачити відразу, знаючи властивості визначників, оскільки в цьому визначнику перші два рядки пропорційні.

$$\text{д) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos \alpha & 1 + \cos 2\alpha & 1 \\ \operatorname{tg} \alpha & 2 \sin \alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos \alpha & 1 + \cos 2\alpha & 1 \\ \operatorname{tg} \alpha & 2 \sin \alpha & 1 \end{vmatrix} = \sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha -$$

$$- \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) - \cos \alpha \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha =$$

$$\begin{aligned}
&= \sin \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sin 2\alpha - \\
&\quad - \operatorname{tg} \alpha \cdot 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \\
&= 2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи до теми 2

№ 154 [8]. Визначити парність підстановки і розкласти в добуток незалежних циклів:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

№ 164 [8]. Підстановку, задану у вигляді добутку циклів, записати двома рядками: $(1\ 3)(2\ 5)(4)$.

№ 170 [8]. Перемножити підстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№ 20.1 [2]. Знайти число інверсій у перестановці: **б)** 3,7,5,2,8,1,4,6.

№ 20.9 [2]. Визначити парність підстановки і розкласти в добуток

незалежних циклів: **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

№ 20.15 [2]. Обчислити визначник 2-го порядку:

$$\text{г)} \begin{vmatrix} a+b & b \\ a-b & a \end{vmatrix}.$$

№ 20.16 [2]. Обчислити визначники 3-го порядку:

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 6 & -12 & -9 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Тема 3. Визначники n-го порядку та їх властивості. Мінори та алгебраїчні доповнення

Які з добутків є членами визначника деякого порядку? Знайти для таких добутків порядок визначника і знак члена.

№ 188 [8]. $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}.$

Розв'язання. Порядок визначника 5. Підстановка індексів: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; у першому рядку 5 інверсій, у другому 4 інверсії, разом 9 інверсій. Знак члена « $-$ ».

№ 190 [8]. $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

Розв'язання. Підстановка індексів: $\begin{pmatrix} \underline{2} & 3 & 5 & 7 & \underline{2} & 4 & 6 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; цей добуток не є членом визначника, бо, як видно по перших індексах, з другого рядка матриці взято два елементи.

№ 198 [8]. Вибрати значення i та k так, щоб добуток $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ входив у визначник 7-го порядку зі знаком « $+$ ».

Розв'язання. Підстановка індексів:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & i & 5 & k & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ i & 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & k \end{pmatrix};$$

i та k можуть приймати значення 2 та 6. Якщо б $i=2, k=6$, то перестановка 2,4,1,7,5,3,6 мала б 7 інверсій. Тому $i=6, k=2$.

№ 21.6 [2]. Використовуючи тільки означення визначника, обчислити:

$$\text{в)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. За означенням, даний визначник має $4!=24$ члени. Проте деякі з них дорівнюють нулю. Відмінним від 0 елементом четвертого рядка є лише 4. Не дорівнюють нулю два добутки, в які входить 4, а саме: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ і $3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4$. Перший із них входить у визначник із знаком $+$. Знак другого добутку збігається зі знаком числа $(-1)^s$, де s – число інверсій у перестановці 2,1,3,4, що складена з номерів стовпців вибраних елементів, якщо номери рядків розміщено в порядку зростання, тобто $(-1)^1 = -1$. Отже,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = 24 + 36 = 60.$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання аналогічне до попереднього. Заданий визначник дорівнює 0.

Тут можна використати властивість визначника: 1-ий і 3-ій рядки пропорційні, тому визначник дорівнює 0.

№ 21.12 [2]. Не обчислюючи визначника, розв'язати рівняння:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & x & 4 \\ 4 & 9 & x^2 & 16 \\ 8 & -27 & x^3 & 64 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що задане рівняння є рівнянням 3-го степеня, тому воно має 3 корені.

Якщо $x = 2$, то 1 і 3 стовпці однакові, тому визначник дорівнює 0.

Якщо $x = -3$, то 2 і 3 стовпці однакові, тому визначник дорівнює 0.

Якщо $x = 4$, то 3 і 4 стовпці однакові, тому визначник дорівнює 0.

Отже, $x = 2$, $x = -3$, $x = 4$ – корені.

№ 21.13 [2]. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

$$\text{в)} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2p+3p}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b+c & c+a & a+b & 2 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

бо 2 і 4 рядки пропорційні.

$$д) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4! = 24.$$

Тут від кожного рядка відняли перший і використали властивість: визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів.

№ 22.1 [2]. Обчислити всі мінори другого порядку визначника

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} M_{1,2}^{1,2} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2, & M_{1,3}^{1,2} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & M_{2,3}^{1,2} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, \\ M_{1,2}^{1,3} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2, & M_{1,3}^{1,3} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2, & M_{2,3}^{1,3} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5, \\ M_{1,2}^{2,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8, & M_{1,3}^{2,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8, & M_{2,3}^{2,3} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12. \end{aligned}$$

Ці мінори можна записати, використавши інші, більш вживані позначення, а саме: через M_{ij} позначається мінор, який залишається при викресленні i -вого рядка і j -вого стовпця. Тобто:

$$\begin{aligned} M_{11} &= 12, M_{12} = 8, M_{13} = 8, \\ M_{21} &= -5, M_{22} = 2, M_{23} = -2, \\ M_{31} &= -3, M_{32} = -2, M_{33} = 2. \end{aligned}$$

№ 22.6 [2]. Обчислити алгебраїчні доповнення елементів:

а) 2-го рядка визначника $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ a & b & c \\ -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$

Розв'язання.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = -14.$$

Розкласти визначник за елементами 2 стовпця:

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix} = aA_{12} + bA_{22} + cA_{32} + dA_{42} = -a \begin{vmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} -$$

$$-c \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2a - 8b + c + 5d.$$

Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Використаємо властивість: якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший рядок (стовпець), помножений на деяке число, то визначник не зміниться. Використаємо це перетворення, щоб «зробити» додаткову кількість нулів в другому рядку (де вже є два нулі). Щоб «зробити» нулі в рядку, треба оперувати стовпцями і навпаки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{до } 2 \text{ ст.} + 4 \text{ ст.} \times 2, \\ \text{від } 3 \text{ ст.} - 4 \text{ ст.} \times 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{3 \text{ р.} - 1 \text{ р.}, \\ 3 \text{ р.} - 1 \text{ р.} \times 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \\
 = -1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

№ 22.8 [2]. Обчислити визначник: **а)**
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{до } 4 \text{ р.} + 2 \text{ р.} \times 2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 6 \\ -5 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 4 \\ -9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & 4 \\ -9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 \stackrel{\text{до } 1 \text{ ст.} + 3 \text{ ст.} \times 9}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 56 & -3 & 6 \\ 33 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 56 & -3 \\ 33 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (112 + 99) = 3 \cdot 211 = 633.$$

№ 426 [8]. Використовуючи теорему Лапласа, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Виберемо 2-ий і 3-ій рядки (з нулями). За теоремою Лапласа визначник дорівнює сумі попарних добутоків усіх можливих мінорів 2-го порядку, утворених з елементів цих рядків, на їх алгебраїчні доповнення.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+3)+(1+4)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = (-20) \cdot (-5) = 100.$$

№ 430 [8]. Використовуючи теорему Лапласа, обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Аналогічно виберемо 2-ий і 3-ій рядки і складемо суму попарних добутоків усіх можливих ненульових мінорів 2-го порядку, утворених з елементів цих рядків, на їх алгебраїчні доповнення.

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+3)+(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+3)+(1+5)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(2+3)+(3+5)} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 3

№ 21.1 [2]. Чи є добуток

$$\text{а) } a_{34}a_{12}a_{45}a_{23}a_{51}$$

членом визначника деякого порядку? Якщо так, то знайти порядок визначника і знак члена.

№ 21.2 [2]. Знайти такі i , j та k , щоб добуток

$$\text{а) } a_{i7}a_{63}a_{4j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

був членом відповідного визначника і входив до нього із знаком мінус.

№ 21.6 [2]. Використовуючи тільки означення визначника, обчислити:

$$\text{д) } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

№ 21.13 [2]. Користуючись властивостями визначників, обчислити:

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 3x_1 & 2x_1 & -x_1 & -4x_1 \\ 3x_2 & 2x_2 & -x_2 & -4x_2 \\ -2x_3 & -3x_3 & 3x_3 & 2x_3 \\ -2x_4 & -3x_4 & 3x_4 & 2x_4 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}.$$

№ 22.6 [2]. Обчислити алгебраїчні доповнення елементів 3-го стовпця визначника:

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 4 & 1 & a & -5 \\ 3 & 2 & b & 1 \\ 2 & -3 & c & 4 \\ -1 & 1 & d & 3 \end{vmatrix}.$$

№ 22.8 [2]. Обчислити визначники:

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 7 & -3 & 9 & 5 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\epsilon) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тема 4. Обчислення визначників n -го порядку

Розглянемо деякі методи обчислення визначників довільного порядку.

Метод зведення до трикутного вигляду

№ 279 [8]. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{до всіх рядків} \\ \text{додамо перший} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

№ 23.1 [2]. Обчислити визначник методом зведення до трикутного вигляду:

$$\text{б)} \begin{vmatrix} (1+a_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (1+a_2) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (1+a_3) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (1+a_n) \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} (1+a_1) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (1+a_2) & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (1+a_3) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (1+a_n) \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{від усіх} \\ \text{рядків} \\ \text{віднімемо} \\ \text{перший} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} \text{з 1-го стовпця винесемо } a_1, \dots, \\ \text{з n-го стовпця винесемо } a_n \end{matrix} = a_1 a_2 \dots a_n \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{до 1-го стовпця} \\ \text{додамо усі} \\ \text{решта} \end{matrix} = a_1 a_2 \dots a_n \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \dots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Метод виділення лінійних множників

Обчислити визначник методом виділення лінійних множників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Визначник Δ розглядається як многочлен від змінних x, y, z .

Якщо до 1-го стовпця додати всі інші, то побачимо, що Δ ділиться на $(x + y + z)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x & y & z \\ x+y+z & 0 & z & y \\ x+y+z & z & 0 & x \\ x+y+z & y & x & 0 \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо до 1-го стовпця додати 2-ий і відняти 3-ій і 4-ий, то побачимо, що Δ ділиться на $(x - y - z)$.

Якщо до 1-го стовпця додати 3-ій і відняти 2-ий і 4-ий, то побачимо, що Δ ділиться на $(y - x - z)$.

Якщо до 1-го стовпця додати 4-ий і відняти 2-ий і 3-ій, то побачимо, що Δ ділиться на $(z - x - y)$.

Ці лінійні множники взаємно прості, тому Δ ділиться на їх добуток. Оскільки цей добуток містить член z^4 з коефіцієнтом 1, і сам визначник містить той же член z^4 з коефіцієнтом 1, то

$$\begin{aligned} \Delta &= (x+y+z)(x-y-z)(y-x-z)(z-x-y) = \\ &= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2. \end{aligned}$$

№ 293 [8]. Обчислити визначник методом виділення лінійних множників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Δ є многочленом від x степеня 4. Якщо від 1-го рядка відняти 2-ий, то побачимо, що Δ ділиться на $x^2 - 1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = (x^2-1) \cdot \Delta_1.$$

Якщо від 3-го рядка відняти 4-ий, то побачимо, що Δ ділиться на $x^2 - 4$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = (x^2-4) \cdot \Delta_2.$$

Отже, $\Delta = (x^2-1)(x^2-4)$.

Метод рекурентних співвідношень

Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (\text{визначник Вандермонда}).$$

Розв'язання.

Від 2-го рядка віднімемо 1-ий, помножений на x_n ;

від 3-го рядка віднімемо 2-ий, помножений на x_n ; і т.д.;

від $(n-1)$ -го рядка віднімемо $(n-2)$ -ий, помножений на x_n ;

від n -го рядка віднімемо $(n-1)$ -ий, помножений на x_n ;

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 - x_n & x_2 - x_n & \dots & x_{n-1} - x_n & 0 \\ x_1^2 - x_1 x_n & x_2^2 - x_2 x_n & \dots & x_{n-1}^2 - x_{n-1} x_n & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} - x_1^{n-3} x_n & x_2^{n-2} - x_2^{n-3} x_n & \dots & x_{n-1}^{n-2} - x_{n-1}^{n-3} x_n & 0 \\ x_1^{n-1} - x_1^{n-2} x_n & x_2^{n-1} - x_2^{n-2} x_n & \dots & x_{n-1}^{n-1} - x_{n-1}^{n-2} x_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкриємо визначник за останнім стовпцем:

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= (-1)^{1+n} (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{1+n} (-1)^{n-1} (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) \cdot \Delta_{n-1} = \\
&= (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \Delta_{n-2} = \\
&= \dots = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \\
\text{Отже,} \quad \Delta_n &= \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j).
\end{aligned}$$

Метод зображення визначника у вигляді суми визначників

№ 307 [8]. Обчислити визначник методом зображення визначника у вигляді суми визначників:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-1 & 1-0 & 1-0 & 1-0 & \dots & 1-0 & 1-0 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
& \text{у першому визначнику від кожного стовпця віднімемо перший} \\
& = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1 & a_1 - x_1 & -x_1 & -x_1 & \dots & -x_1 & -x_1 \\ x_2 & 0 & a_2 - x_2 & -x_2 & \dots & -x_2 & -x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & a_3 - x_3 & \dots & -x_3 & -x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n - x_n \end{vmatrix} - \\
& \text{розкладемо за першим рядком} \\
& - a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 - x_1)(a_2 - x_2) \dots (a_n - x_n) - a_1 a_2 \dots a_n.
\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи до теми 4

№ 23.1 [2]. Обчислити визначник методом зведення до трикутної форми:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 4 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & (n+2) \end{vmatrix}.$$

№ 23.2 [2]. Обчислити визначник методом рекурентних співвідношень:

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

Вказівка: перший стовпчик помножити на x^{n-1} , другий на x^{n-2} , і т.д., тоді до останнього стовпця додати всі решта і розкласти за останнім стовпцем.

№ 23.3 [2]. Обчислити визначник:

$$\text{б)} \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

Вказівка: розкласти за останнім рядком.

№ 23.4 [2]. Обчислити визначник методом виділення лінійних множників:

$$\text{б)} \Delta_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Вказівка: всі стовпці додати до першого.

№ 23.6 [2]. Обчислити визначники:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & (2+x^2) & 2 & 4 \\ -5 & 1 & (5-y^2) & 7 \\ -5 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{ж)} \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} \alpha_1 & \operatorname{tg}^2 \alpha_1 & \dots & \operatorname{tg}^{n-1} \alpha_1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha_2 & \operatorname{tg}^2 \alpha_2 & \dots & \operatorname{tg}^{n-1} \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha_n & \operatorname{tg}^2 \alpha_n & \dots & \operatorname{tg}^{n-1} \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Тема 5. Визначник добутку матриць. Арифметичний n -вимірний векторний простір, його підпростори. Загальна та векторна форми запису системи лінійних рівнянь

№ 22.11 [2]. Обчислити добуток визначників:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & -9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Добуток визначників можна обчислювати двома способами: обчислити кожний з них і перемножити або за теоремою про визначник добутку матриць перемножити відповідні матриці і обчислити визначник отриманої матриці. Скористаємось другим способом:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & -9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 0 & 47 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -708.$$

№ 14.1 [2]. Знайти вектор $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 5, 7)$, $\vec{c} = (3, 7, 11)$.

Розв'язання. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1, 2, 3) + (2, 5, 7) - (3, 7, 11) = (0, 0, -1)$.

б) $\vec{a} = (5, -3, 2, 1, 10)$, $\vec{b} = (1, 8, 1, -4, 7) - (2, 1, 9, -3, 6)$, $\vec{c} = (1, 3, -5, 9, 11)$.

Розв'язання.

$$\vec{b} = (1, 8, 1, -4, 7) - (2, 1, 9, -3, 6) = (-1, 7, -8, -1, 1);$$

$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (5, -3, 2, 1, 10) + (-1, 7, -8, -1, 1) - (1, 3, -5, 9, 11) = (3, 1, -1, 9, 0).$$

№ 14.2 [2]. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо:

а) $\vec{x} = 3\vec{a}$, $\vec{a} = (0, 1, -\frac{1}{3})$.

Розв'язання. $\vec{x} = 3\vec{a} = 3 \cdot (0, 1, -\frac{1}{3}) = (0, 3, -1)$.

в) $-3\vec{a} - \vec{x} = 2\vec{b}$, $\vec{a} = (0, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, -3, 7)$.

Розв'язання. $\vec{x} = -3\vec{a} - 2\vec{b} = -3 \cdot (0, -2, 1) - 2 \cdot (1, -3, 7) =$
 $= (0, 6, -3) - (2, -6, 14) = (-2, 12, -17)$.

г) $2\vec{x} + 3\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a} = (\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$, $\vec{b} = (\sin^3 \alpha, \frac{1}{4}, -\cos^3 \alpha)$.

Розв'язання.

$$\vec{x} = -\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b} = -\frac{3}{2}(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha) + 2(\sin^3 \alpha, \frac{1}{4}, -\cos^3 \alpha) =$$

$$= (-\frac{1}{2}\sin 3\alpha, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\cos 3\alpha).$$

Тут використано формули:

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

№ 29.4 [2]. З'ясувати, чи утворює векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ сукупність векторів площини, початок кожного з яких збігається з початком координат, а кінець міститься в першій або четвертій координатних чвертях.

Розв'язання. Сукупність таких векторів не утворює векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, оскільки в цій множині операція множення вектора на довільне дійсне число не визначена, а саме: добуток довільного ненульового вектора з цієї множини на довільне від'ємне число не належить до цієї множини.

№ 29.5 [2]. Перевірити, чи утворюють лінійні підпростори в арифметичному векторному просторі V_n такі системи векторів:

а) усі вектори, в яких перша і остання координати рівні між собою.

Розв'язання.

Перевіримо, чи виконуються дві умови критерію підпростору:

1. якщо $\vec{x}, \vec{y} \in L'$, то $\vec{x} + \vec{y} \in L'$;
2. якщо $\vec{x} \in L'$ і $\lambda \in P$, то $\lambda\vec{x} \in L'$,

де L' – підмножина векторів простору V_n , в яких перша і остання координати рівні між собою.

Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_1)$. Тоді

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1) + (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_1) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_{n-1} + y_{n-1}, x_1 + y_1) \in L',\end{aligned}$$

тобто перша умова критерію підпростору виконується.

Нехай $\lambda \in P$. Тоді

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_1) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n-1}, \lambda x_1) \in L',$$

тобто друга умова критерію підпростору теж виконується.

Отже, підмножина векторів простору V_n , в яких перша і остання координати рівні між собою, утворює лінійний підпростір в арифметичному векторному просторі V_n .

б) усі вектори, сума координат кожного з яких дорівнює 0.

Розв'язання.

Аналогічно перевіримо, чи виконуються дві умови критерію підпростору:

1. якщо $\vec{x}, \vec{y} \in L'$, то $\vec{x} + \vec{y} \in L'$;
2. якщо $\vec{x} \in L'$ і $\lambda \in P$, то $\lambda\vec{x} \in L'$,

де L' – підмножина векторів простору V_n , сума координат кожного з яких дорівнює 0.

Нехай $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in L'$, тобто $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$. Тоді

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in L',\end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned} & (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = \\ & = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (y_1 + y_2 + \dots + y_n) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

тобто перша умова критерію підпростору виконується.

Нехай $\lambda \in P$. Тоді

$$\lambda \vec{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in L',$$

оскільки

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots + \lambda x_n = \lambda \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

тобто друга умова критерію підпростору теж виконується.

Отже, підмножина векторів простору V_n , сума координат кожного з яких дорівнює 0, утворює лінійний підпростір в арифметичному векторному просторі V_n .

№ 14.4 [2]. Записати розширену матрицю даної системи рівнянь, її вектор-рядки, вектор-стовпці і вектор невідомих:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right),$$

вектор-рядки: $(3, 4, 0, 5, 0)$, $(4, 3, -1, 0, 1)$, $(5, -1, 0, -2, -2)$,

вектор-стовпці: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, вектор невідомих: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

№ 14.5 [2]. Записати у векторній формі систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

№ 14.6 [2]. Систему рівнянь

$$\text{а) } x_1(-3, 5, 0) - x_2(1, -2, 3) = \vec{0}$$

записано у векторній формі. Записати її в загальній формі.

Розв'язання. Загальна форма запису заданої системи:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 = 0, \\ -3x_2 = 0. \end{cases}$$

№ 14.3 [2]. З'ясувати, чи може бути вектор $\vec{x}$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, якщо:

$$\text{а) } \vec{x} = (-1, -4), \vec{a} = \vec{b} = (-2, -1), \vec{c} = (1, 1), \vec{d} = (0, 0).$$

Розв'язання. Вектор $\vec{x}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, що виконується рівність

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} + \lambda_4 \vec{d}.$$

Цю векторну рівність розглянемо як векторну форму запису системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -1, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -4. \end{cases}$$

і встановимо, чи має вона розв'язки. Помножимо друге рівняння на 2:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -1, \\ -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -8. \end{cases}$$

Від другого рівняння віднімемо перше:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = -1, \\ \lambda_3 = -7, \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 7 = -1, \\ \lambda_3 = -7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 6, \\ \lambda_3 = -7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3, \\ \lambda_3 = -7. \end{cases}$$

Одним із розв'язків системи є, наприклад,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -7.$$

Тому вектор $\vec{x}$ можна подати у вигляді такої лінійної комбінації:

$$\vec{x} = \vec{a} - 4\vec{b} - 7\vec{c} = -3\vec{a} - 7\vec{c}.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 5

№ 22.11 [2]. Обчислити добуток визначників:

$$\text{б)} \left| \begin{array}{cccc} -1 & -9 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & -6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 5 \end{array} \right|.$$

№ 14.2 [2]. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо:

б) $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{a} = (1, 2, 3, 0)$, $\vec{b} = (-2, 1, 5, -1)$, $\vec{c} = (\sqrt{2}, -1, 0, 1)$;

д) $\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{x} = 6\vec{c}$, де $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (\frac{1}{9}, \frac{11}{3}, -2)$, $\vec{c} = (1, \frac{2}{3}, -2)$.

№ 14.3 [2]. З'ясувати, чи може бути вектор $\vec{x}$ лінійною комбінацією векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, якщо:

б) $\vec{x} = (1, 1, -1)$, $\vec{a} = (2, 3, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$, $\vec{c} = \vec{d} = (0, 0, 0)$.

№ 14.4 [2]. Записати розширену матрицю даної системи рівнянь, її вектор-рядки, вектор-стовпці і вектор невідомих:

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

№ 14.5 [2]. Записати у векторній формі систему рівнянь:

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$$

№ 14.6 [2]. Систему рівнянь

б) $x_1(-2, 3) + x_2(1, -1) - 2x_3(1, 2) = (5, 4)$;

в) $x_1(1, 3, 0, 5) + x_2(1, 2, 1, 4) + x_3(1, 1, 2, 3) = (5, -4, 0, 2)$

записано у векторній формі. Записати її в загальній формі.

№ 29.5 [2]. Перевірити, чи утворюють лінійні підпростори в арифметичному векторному просторі V_n такі системи векторів:

г) усі вектори, в кожного з яких координати з парними номерами рівні між собою;

є) усі вектори, в кожного з яких усі координати рівні між собою;

к) усі вектори, в кожного з яких кожна координата, починаючи з другої, дорівнює квадрату попередньої.

Тема 6. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$\text{№ 570 [8].} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю цієї системи і елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -21 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отримали систему, яка є сумісною, визначеною, тобто має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4, \\ 6x_3 + 6x_4 = -7, \\ 2x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = \frac{1}{3}, \\ x_4 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(0; 2; \frac{1}{3}; -\frac{3}{2}\right)$.

№ 578 [8].
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю цієї системи і елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \\ & \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Система є сумісною, невизначеною, тобто має безліч розв'язків. Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 6 - 26x_3 + 17x_4, \\ x_2 = -1 + 7x_3 - 5x_4. \end{cases}$$

№ 580 [8].
$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю цієї системи і елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 & | & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & | & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & | & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & | & 7 \\ 2 & -1 & 0 & -5 & | & 6 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & | & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & | & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -12 \end{pmatrix}.$$

Дана система несумісна, тобто не має розв'язків.

№ 724 [8].
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для однорідної системи лінійних рівнянь випишемо не розширену матрицю, а основну, і елементарними перетвореннями рядків зведемо її до східчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Система має безліч розв'язків. Її загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

№ 14.7 [2]. З'ясувати, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів: **б)** $\vec{a}_1 = (1, -2, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 5, 7)$.

Розв'язання. Ця система векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не всі рівні нулю, такі, що

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}, \quad (*)$$

тобто коли система лінійних рівнянь (*) відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ має ненульові розв'язки. Запишемо систему (*) в загальній формі:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 10 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 35 & 55 \\ 0 & 35 & 56 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Система лінійних однорідних рівнянь має лише нульовий розв'язок, тому система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежна.

Завдання для самостійної роботи до теми 6

Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

№ 573 [8].

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 35, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 15x_5 = 70, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 35x_5 = 126, \\ x_1 + 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 + 70x_5 = 210. \end{cases}$$

№ 579 [8].

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

№ 581 [8].

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

№ 643 [8]. З'ясувати, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів:

$$\vec{a}_1 = (4, -5, 2, 6), \vec{a}_2 = (2, -2, 1, 3), \vec{a}_3 = (6, -3, 3, 9), \vec{a}_4 = (4, -1, 5, 6).$$

№ 725 [8]. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Тема 7. Обчислення рангу матриці за допомогою елементарних перетворень. Ранг і базис скінченної системи векторів

№ 15.1 [2]. Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Зведемо матрицю до східчастого вигляду. Немає значення, виконуються елементарні перетворення над рядками чи стовпцями матриці, – ранг матриці в обох випадках залишається незмінним. Однак при зведенні матриці до східчастого вигляду можна обмежитись тільки перетвореннями рядків, допускаючи перестановку стовпців.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 5 & -3 \\ 4 & -8 & -3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $\text{rang } A = 2$.

№ 15.2 [2]. Чому дорівнює ранг матриці при різних значеннях λ ?

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Зведемо матрицю до східчастого вигляду:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda \\ 0 & -1 & -5 & 10-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Якщо $\lambda = 3$, то $\text{rang } A = 2$; якщо $\lambda \neq 3$, то $\text{rang } A = 3$.

№ 15.4 [2]. Обчислити ранг системи векторів:

$$\text{а) } \vec{a}_1 = (1, 2, 3), \vec{a}_2 = (2, 3, 4), \vec{a}_3 = (3, 4, 5).$$

Розв'язання. Щоб обчислити ранг системи векторів, треба скласти матрицю, рядками якої є вектори цієї системи і за допомогою елементарних перетворень рядків звести цю матрицю до східчастого вигляду. Ранг системи векторів буде дорівнювати числу ненульових рядків у східчастій матриці, тобто рангу цієї матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rang } A = 2$, тому ранг даної системи векторів дорівнює 2.

№ 15.6 [2]. Знайти один із базисів системи векторів і виразити всі її вектори, що не входять до знайденого базису, через цей базис:

$$\text{в) } \vec{a}_1 = (6, 5, 1, -1), \vec{a}_2 = (4, 3, -1, 1), \vec{a}_3 = (2, 1, -3, 3), \vec{a}_4 = (1, 1, 1, -1).$$

Розв'язання. Складемо матрицю, рядками якої є дані вектори і виконаємо елементарні перетворення над рядками матриці:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_4 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_4 \\ \vec{a}_2 - 4\vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 - 2\vec{a}_4 \\ \vec{a}_1 - 6\vec{a}_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{a}_4 \\ \vec{a}_2 - 4\vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 - 2\vec{a}_4 - (\vec{a}_2 - 4\vec{a}_4) \\ \vec{a}_1 - 6\vec{a}_4 - (\vec{a}_2 - 4\vec{a}_4) \end{matrix}$$

Базис утворюють вектори $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ (ненульові рядки). Ранг системи векторів дорівнює 2. Два останні рядки – нульові, тобто

$$\vec{a}_3 - \vec{a}_2 + 2\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_3 = \vec{a}_2 - 2\vec{a}_4,$$

$$\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 2\vec{a}_4 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1 = \vec{a}_2 + 2\vec{a}_4,$$

тобто вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ ми виразили через базисні вектори $\vec{a}_2, \vec{a}_4$.

Аналогічно за базис можна взяти системи векторів $\{\vec{a}_1, \vec{a}_4\}, \{\vec{a}_3, \vec{a}_4\}$.

№ 15.7 [2]. Дано систему векторів:

$$\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4), \vec{a}_2 = (0, 2, 3, 4), \vec{a}_3 = (0, 0, 3, 4), \vec{a}_4 = (0, 0, 0, 4),$$

$$\vec{a}_5 = (5, 1, 4, 3), \vec{a}_6 = (7, 8, 1, 9), \vec{a}_7 = (5, 3, 5, 3).$$

Довести, що підсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ є базисом заданої системи векторів.

Розв'язання. Підсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ є базисом, якщо:

- 1) вона є лінійно незалежною;
- 2) через неї лінійно виражаються всі інші вектори (або, іншими словами, є максимальною: приєднання до неї ще одного вектора перетворює її в лінійно залежну систему).

Покажемо, що система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ лінійно незалежна. Складемо рівність

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_4 \vec{a}_4 = \vec{0}$$

і розпишемо її покомпонентно:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0, \\ \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Отже, система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ лінійно незалежна. Оскільки будь-які s n -вимірних векторів при $s > n$ лінійно залежні, то підсистема $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ є максимальною лінійно незалежною системою векторів.

№ 31.2 [2]. Дано вектори:

$$\text{а) } \vec{a}_1 = (1, 1, -1), \vec{a}_2 = (1, 2, 1), \vec{a}_3 = (3, 2, 1), \vec{x} = (1, 7, -1).$$

Довести, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис простору V_3 і знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, показується, що система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ є лінійно незалежною, тобто що ранг матриці, складеної з координат цих векторів, дорівнює 3.

Щоб знайти координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, треба знайти коефіцієнти розкладу $\vec{x} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array} \right).$$

Отже, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$, тобто $(3, 4, -2)$ – координати вектора $\vec{x}$ в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Завдання для самостійної роботи до теми 7

№ 15.1 [2]. Обчислити ранг матриць за допомогою елементарних перетворень:

$$\text{є) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{ж) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

№ 15.2 [2]. Чому дорівнює ранг матриці

$$\text{б) } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 & 5 \\ \lambda & \lambda & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

при різних значеннях λ ?

№ 15.4 [2]. Обчислити ранг системи векторів:

$$\text{б) } \vec{a}_1 = (1, 4, 7, 10), \vec{a}_2 = (2, 5, 8, 12), \vec{a}_3 = (3, 6, 9, 13).$$

№ 15.6 [2]. Знайти один із базисів системи векторів і виразити всі її вектори, що не входять до знайденого базису, через цей базис:

$$б) \vec{a}_1 = (4, 1, -2), \vec{a}_2 = (1, 0, 3), \vec{a}_3 = (2, 3, -5), \vec{a}_4 = (1, 1, 6).$$

№ 15.8 [2]. Дано систему векторів:

$$\vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{b}_2 = (0, 1, 0, 0), \vec{b}_3 = (0, 1, 1, 0), \vec{b}_4 = (0, 1, 1, 1), \\ \vec{b}_5 = (5, 6, 7, 8), \vec{b}_6 = (8, 7, 6, 5), \vec{b}_7 = (3, 3, 3, 3).$$

Довести, що підсистема $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ є базисом заданої системи векторів.

Тема 8. Критерії сумісності та визначеності системи лінійних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

Дослідити на сумісність і визначеність системи лінійних рівнянь:

$$\text{№ 16.1 [2]. а)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо розширену матрицю цієї системи до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & -1 & 2 & | & 5 \\ 3 & -6 & 5 & | & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -9 \\ 0 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & -9 & 2 & | & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 3 & 1 & | & 9 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 9 & -2 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 9 & -2 & | & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & -5 & | & -15 \\ 0 & 0 & -20 & | & -60 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(B) = 3 = n$, тому система сумісна, визначена.

$$\text{б)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо розширену матрицю цієї системи до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = r(B) = 4$; $n = 5$; $r < n$, тому система сумісна, невизначена.

$$\text{в)} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо розширену матрицю цієї системи до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & | & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & | & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$r(A) = 3, r(B) = 4$, тому система несумісна.

№ 16.3 [2]. Дослідити і розв'язати систему лінійних рівнянь при відповідних значеннях λ :

в)
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо розширену матрицю цієї системи до східчастого вигляду.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 & 1 - \lambda \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 & 1 - \lambda \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda - 1)(\lambda + 2) & 1 - \lambda \end{array} \right). \end{aligned}$$

Якщо $\lambda = 1$, то східчаста матриця має вигляд: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. У цьому

випадку система сумісна, невизначена; її загальний розв'язок:

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3.$$

Якщо $\lambda = -2$, то східчаста матриця має вигляд: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$.

У цьому випадку система несумісна.

Якщо $\lambda \notin \{1; -2\}$, то система сумісна, визначена; її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda + 2}, \\ x_2 = \frac{1}{\lambda + 2}, \\ x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}. \end{cases}$$

№ 17.1 [2]. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Зведемо матрицю цієї системи до східчастого вигляду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 8x_4, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим значень $(1,0)$, $(0,1)$ і знайдемо відповідні значення основних невідомих:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	-1	1	0	0
8	-2	0	1	0

Фундаментальна система розв'язків:

$$\vec{b}_1 = (2, -1, 1, 0, 0), \vec{b}_2 = (8, -2, 0, 1, 0).$$

Загальний розв'язок системи:

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2,$$

де c_1, c_2 – деякі числа.

Завдання для самостійної роботи до теми 8

№ 16.1 [2]. Дослідити на сумісність і визначеність систему лінійних рівнянь:

$$\text{г)} \left\{ \begin{array}{l} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{array} \right.$$

№ 16.2 [2]. Дослідити систему лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок залежно від значення λ :

$$\text{в)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2. \end{array} \right.$$

№ 16.3 [2]. Дослідити і розв'язати систему лінійних рівнянь при відповідних значеннях λ :

$$\text{а)} \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 3)x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda - 1)x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 11x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 18x_4 = -18. \end{array} \right.$$

№ 17.1 [2]. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\text{г)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{array} \right. \quad \text{д)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{array} \right.$$

№ 17.9 [2]. Знайти загальний та один частинний розв'язки системи рівнянь:

$$\text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 + 2x_5 = -6. \end{array} \right.$$

Тема 9. Обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень та алгебраїчних доповнень. Обчислення рангу матриці методом окантування мінорів

Чи мають наступні матриці обернені?

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Квадратна матриця має обернену тоді і тільки тоді, коли вона неособлива, тобто коли її визначник відмінний від нуля. Ця матриця не є квадратною, тому обернена до неї не існує.

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Так, бо визначник цієї матриці дорівнює 1 (це трикутна матриця).

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Так, бо визначник цієї матриці дорівнює -8 (це трикутна матриця).

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Ні, бо визначник цієї матриці дорівнює 0 (визначник містить нульовий стовпчик).

д) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Ні, бо визначник цієї матриці дорівнює 0 (1-ий і 3-ій стовпці пропорційні).

$$\epsilon) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Так, бо визначник цієї матриці дорівнює -7.

При яких значеннях параметрів a, b для матриці A існує обернена?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці і накладемо умову $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-b \end{vmatrix} = (1-a)(1-b) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1, b \neq 1.$$

За допомогою елементарних перетворень обчислити матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} A|E &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow E|A^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

№ 19.1 [2]. Обчислити матрицю, обернену до матриці

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (за допомогою елементарних перетворень).

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & | & 1 & 0 \\ 3 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 3 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 0 & -1 & | & -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 3 \\ 0 & 1 & | & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отже, } \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \\ -\frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

№ 841 [8]. Обчислити матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ (за допомогою алгебраїчних доповнень).}$$

Розв'язання.

$|A| = -1$, обернена матриця A^{-1} існує. Обчислимо її за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = 8, \quad A_{12} = 5, \quad A_{13} = -1,$$

$$A_{21} = -29, \quad A_{22} = -18, \quad A_{23} = 3,$$

$$A_{31} = 11, \quad A_{32} = 7, \quad A_{33} = -1.$$

$$\text{Отже, } A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 8 & -29 & 11 \\ 5 & -18 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 838 [8]. Обчислити матрицю, обернену до даної: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\text{Розв'язання. } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Виведену формулу обчислення оберненої матриці для матриці другого порядку студентам слід запам'ятати.

№ 837 [8]. Обчислити матрицю, обернену до даної: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\text{Розв'язання. } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити матрицю, обернену до даної: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$|A| = -8, \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 10 & -2 & 0 \\ -12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№ 608 [8]. Обчислити ранг матриці методом окантування мінорів:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Рангом матриці називають найвищий порядок відмінних від нуля мінорів. Одним із відмінних від нуля мінорів 2-го порядку є мінор

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0.$$

Його окантовують мінори 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Всі вони рівні нулю, тому ранг матриці дорівнює 2.

Завдання для самостійної роботи до теми 9

№ 19.1 [2]. За допомогою елементарних перетворень обчислити матрицю, обернену до матриці:

$$\text{б)} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

№ 24.1 [2]. За допомогою алгебраїчних доповнень обчислити матрицю, обернену до матриці:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

№ 22.9 [2]. Обчислити ранг матриці методом окантування мінорів:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 13 & 10 \\ 2 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тема 10. Розв'язування матричних рівнянь і систем лінійних рівнянь у матричній формі. Правило Крамера

№ 19.2 [2]. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком рівняння $A\vec{x} = \vec{b}$ є вектор $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Знайдемо A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Отже, $\vec{x} = (1; -2; 3)$.

Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & | & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & | & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & | & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 34 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -27 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 34 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -24 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & -27 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 34 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} 0 & -24 & -2 \\ -1 & -27 & -2 \\ 1 & 34 & 2 \end{pmatrix}.$

№ 19.3 [2]. Розв'язати матричне рівняння:

$$\text{б) } X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Рівняння не має розв'язку, бо матриця $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ особлива.

Розв'язати матричне рівняння:

$$X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. 1 спосіб.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \quad X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2 спосіб.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -22 \\ -43 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7, \\ 2x - y + z = 9, \\ x - 4y + 2z = 11. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -25;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 1 \\ 11 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -75; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & 1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 25; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & -4 & 11 \end{vmatrix} = -50;$$

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 3, \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2. \end{cases}$$

№ 24.3 [2]. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = -5; \Delta_1 = -75; \Delta_2 = -59; \Delta_3 = 92;$

$$x_1 = 15, \quad x_2 = \frac{59}{5}, \quad x_3 = -\frac{92}{5}.$$

При яких значеннях a система однорідних рівнянь

$$\begin{cases} ax + y + z = 0, \\ x + ay + z = 0, \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

має ненульові розв'язки?

Розв'язання. Система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими має ненульові розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1)^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = -2, a = 1.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 10

№ 19.2 [2]. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\text{б)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

№ 19.3 [2]. Розв'язати матричне рівняння:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\text{д)} X \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2.$$

№ 19.4 [2]. Обчислити $f(A)$, якщо:

$$\text{б)} (x + E_3)f(x) = x^2 - x + 2 \quad \text{і} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Вказівка. E_3 – одинична матриця 3-го порядку).

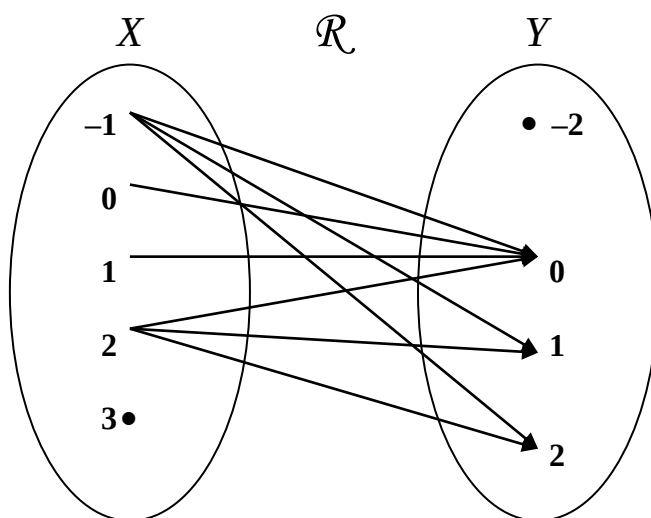
№ 24.3 [2]. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера:

$$\text{б)} \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розділ II. ЧИСЛОВІ ПОЛЯ. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Тема 11. Бінарні відношення

Завдання 1. Відношення (або відповідність) між множинами X і Y задано за допомогою графа:

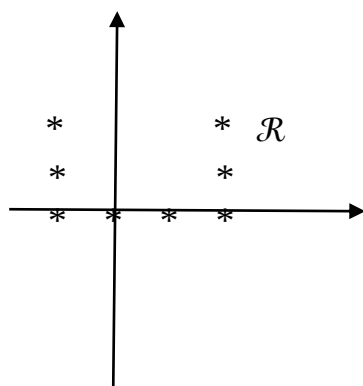


1. Вкажіть область (або множину) відправлення, область прибуття, область визначення і множину значень відповідності $\mathcal{R}$.
2. Перерахуйте пари чисел, які належать графіку даної відповідності.
3. Побудуйте графік $\mathcal{R}$ в прямокутній системі координат.
4. Побудуйте графік відповідності $\mathcal{R}^{-1}$, оберненої до даної.
5. Запишіть множину пар, що належать графіку відповідності $\overline{\mathcal{R}}$, протилежної до даної і побудуйте графік відповідності $\overline{\mathcal{R}}$.

Розв'язання.

1. $X = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ – множина відправлення,
 $Y = \{-2, 0, 1, 2\}$ – множина прибуття,
 $\text{Dom } \mathcal{R} = \{-1, 0, 1, 2\}$ – область визначення,
 $\text{Im } \mathcal{R} = \{0, 1, 2\}$ – множина значень.
2. Кожна пара чисел, що належить графіку, з'єднана на графі стрілкою:
 $\mathcal{R} = \{(-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$

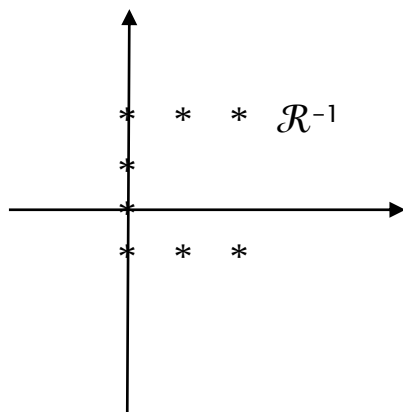
3.



4. Щоб отримати $\mathcal{R}^{-1}$, слід поміняти місцями абсцису і ординату кожної пари відношення $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(0, -1), (1, -1), (2, -1), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}.$$

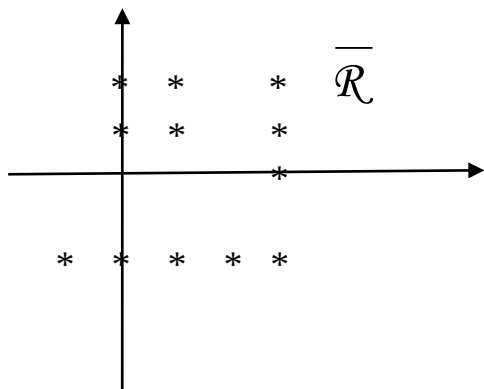
Графіки відношень $\mathcal{R}$ і $\mathcal{R}^{-1}$ симетричні відносно прямої $y = x$.



5. Знайдемо декартовий добуток множин X і Y і викреслимо всі пари, які належать графіку $\mathcal{R}$, отримаємо множину пар, що складають протилежне відношення $\overline{\mathcal{R}}$.

$$X \times Y = \{(-1, -2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, -2), (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, -2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}.$$

$$\overline{\mathcal{R}} = \{(-1, -2), (0, -2), (0, 1), (0, 2), (1, -2), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (3, -2), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}.$$



Завдання 2. Побудуйте граф і графік відношення « $\geq$ », заданого на множині $\{0,1,2\}$.

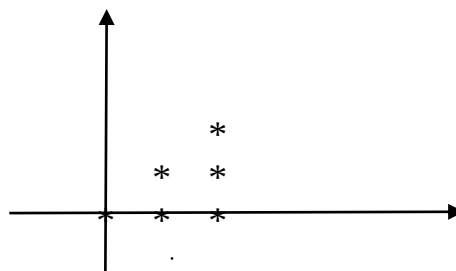
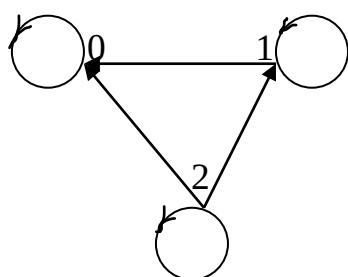
Розв'язання.

Перелічимо всі пари чисел, які знаходяться в заданому відношенні:

$$\{(0,0), (1,1), (2,2), (1,0), (2,0), (2,1)\}.$$

Це відношення рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, зв'язне, тобто це відношення нестрогого лінійного порядку.

Граф і графік заданого відношення зображені на малюнку:



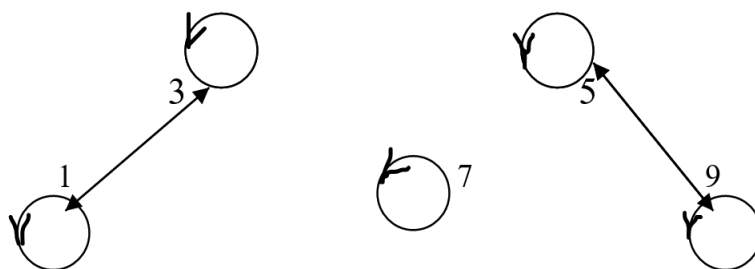
Завдання 3. На множині $X = \{1,3,5,7,9\}$ задано відношення

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (3,3), (5,5), (7,7), (9,9), (1,3), (3,1), (5,9), (9,5)\}.$$

Доведіть, що $\mathcal{R}$ – відношення еквівалентності і запишіть класи еквівалентності.

Розв'язання.

Побудуємо граф $\mathcal{R}$.



З графу видно, що це відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне, тому воно є відношенням еквівалентності.

По графу визначаються класи еквівалентності. Їх три:

$$\{1,3\}, \{5,9\}, \{7\}.$$

$$\text{Фактор-множина: } X|_R = \{\{1,3\}, \{5,9\}, \{7\}\}.$$

Завдання 4. Дано множину $X = \{x | x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 13\}$. Розбийте елементи цієї множини на класи так, щоб в один клас ввійшли числа, що мають одну і ту ж остачу при діленні на 3. Скільки вийде класів? По якому відношенню проведено це розбиття? Які властивості має це відношення?

Розв'язання.

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}.$$

Множина X розбивається на 3 класи або на 3 підмножини, які попарно не перетинаються: $\{3,6,9,12\}$, $\{1,4,7,10,13\}$, $\{2,5,8,11\}$. Тому дане відношення є відношенням еквівалентності і має властивості рефлексивності, симетричності і транзитивності.

Завдання 5. На множині відрізків задані відношення «коротший» і «коротший у 3 рази». За допомогою якого з них можна впорядкувати множину відрізків?

Розв'язання.

Відношення порядку – це відношення, що має властивості транзитивності і антисиметричності.

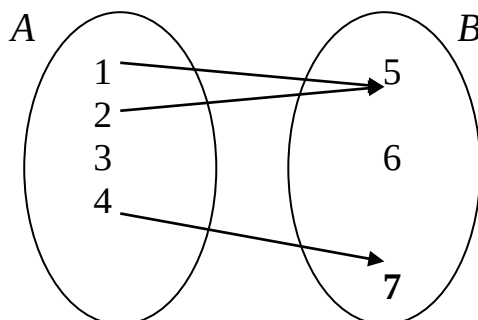
Відношення «коротший» транзитивне і антисиметричне, тому це є відношення порядку.

Відношення «коротший у 3 рази» антисиметричне, але не транзитивне, тому це відношення не є відношенням порядку і не упорядковує множину відрізків.

Завдання 6. Відношення між елементами множин A і B задані за допомогою графів. Які з них є функціями? Вкажіть для функцій область визначення і множину значень.

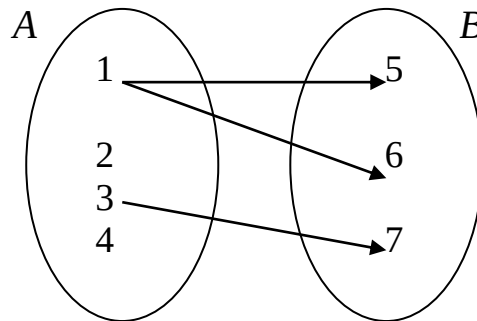
Розв'язання.

а)



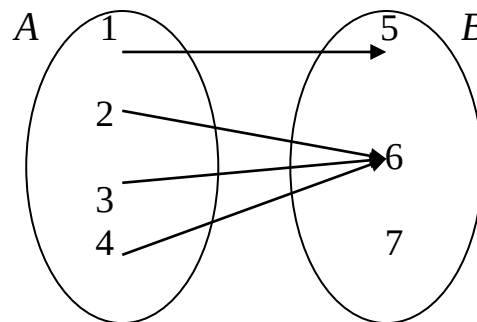
Відношення є функцією з областю визначення $\{1,2,4\}$ і множиною значень $\{5,7\}$.

б)



Відношення не є функцією.

в)

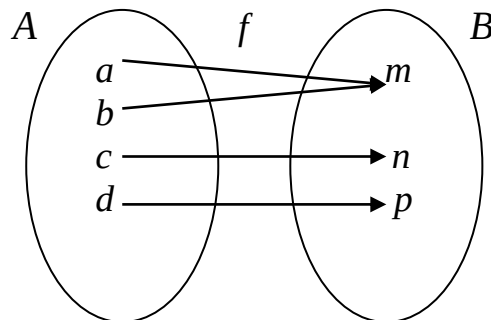


Відношення є функцією з областю визначення A і множиною значень $\{5,6\}$.

Завдання 7. Дано графи відображень множини A в множину B . Яке з них є бієктивним (взаємно однозначним)?

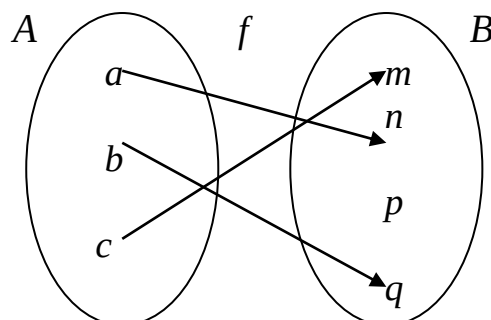
Розв'язання.

а)

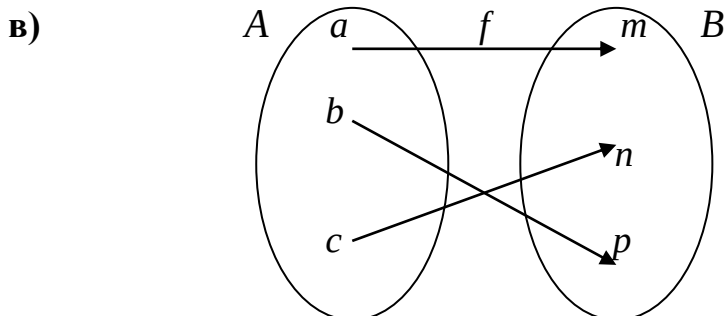


Відображення f сюр'єктивне, не ін'єктивне.

б)

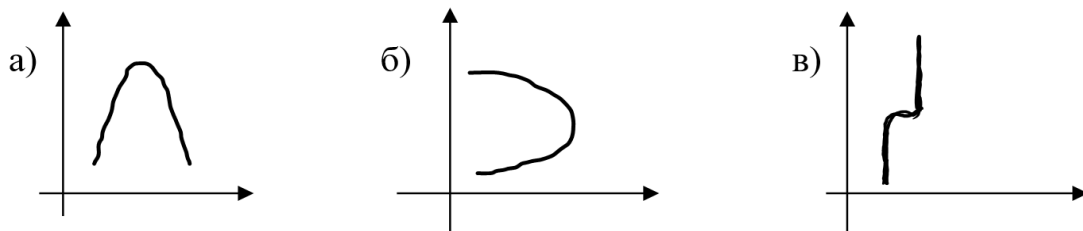


Відображення f ін'єктивне, не сюр'єктивне.



Відображення f ін'єктивне, сюр'єктивне, а тому бієктивне.

Завдання 8. Які з кривих є графіками функцій?



Розв'язання.

Графік а) є графіком функції, графіки б), в) не є графіками функцій.

Завдання 9. Для функції $y = 2x + 5$ знайдіть обернену.

Розв'язання.

Для функції існує обернена, оскільки задана функція бієктивна. Щоб знайти функцію, обернену до даної, треба розв'язати рівняння $y = f(x)$

відносно x та поміняти місцями x і y . Обернена функція: $y = \frac{x-5}{2}$.

Завдання для самостійної роботи до теми 11

№ 1. Дано множину $X = \{2, 3, 4, 5\}$. Перелічіть всі елементи декартового добутку $X \times X$ і выпишіть ті підмножини цього декартового добутку, які задають відношення а) «менше», б) «більше», в) «дорівнює».

№ 2. Побудуйте графік відношення $y > 3x - 2$, заданого на множині X , якщо: а) $X = \mathbb{R}$; б) $X = \mathbb{Z}$.

№ 3. Запишіть класи еквівалентності, що визначаються відношенням R , заданим на множині $X = \{a, b, c, p\}$, якщо:

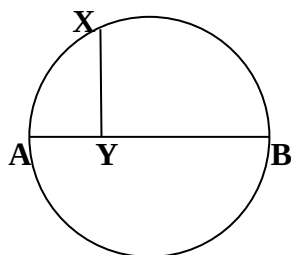
а) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, c), (c, a)\}$;

б) $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (a, b), (b, a), (c, p), (p, c)\}$.

№ 4. На множині $X = \{a, b, c, p\}$ задано відношення M . Чи є воно відношенням порядку, якщо:

- а) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p), (b, c), (p, b)\}$;
- б) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (a, b), (b, c), (a, c)\}$;
- в) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p)\}$?

№ 5. Кожній точці X кола відповідає така точка Y діаметра, що $XY \perp AB$. Чи задано при цьому відображення кола на діаметр? Чи є воно взаємно однозначним?



№ 6. Знайдіть множину значень функції $y = 4 - x^2$, якщо областю її визначення є множина X :

- а) $X = \mathbb{R}$; б) $X = (-\infty; 0]$; в) $X = [-2; 2]$.

№ 7. Знайдіть область визначення функції:

- а) $f(x) = 5x - 2$; б) $f(x) = \frac{7}{x}$; в) $f(x) = \frac{5}{x-3}$; г) $f(x) = \frac{3x^2}{(x+1)(x-2)}$.

Тема 12. Алгебраїчні операції та алгебраїчні системи. Система натуральних чисел. Метод математичної індукції

Завдання 1. Встановити, чи є додавання і множення алгебраїчними бінарними операціями в множині $X = \{0, 1\}$.

Розв'язання.

Будь-яка бінарна операція в множині X є, очевидно, деяке відображення $\varphi : X \times X \rightarrow X$.

Утворимо декартовий добуток: $X \times X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Кожній парі з $X \times X$ операція додавання ставить у відповідність елементи $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=2$ відповідно. Оскільки $2 \notin X$, то додавання не є бінарною операцією в множині X ; це є часткова алгебраїчна операція в X , тобто відображення деякої підмножини $X \times X$ в X . Легко бачити, що множення є бінарною операцією в множині X .

Завдання 2. а) Дано множину $M = \{a, b, c\}$. Скласти множину X всіх її підмножин і з'ясувати, чи є об'єднання $\cup$ і перетин $\cap$ алгебраїчними операціями на множині X .

Розв'язання.

$$X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Об'єднання і перетин є алгебраїчними операціями на множині X .

б) Вказати нейтральні елементи для цих операцій. Чи має операція віднімання підмножин множини X нейтральний елемент?

Розв'язання.

$\emptyset$ – нейтральний елемент відносно $\cup$, $\{a, b, c\}$ – нейтральний елемент відносно $\cap$.

Операція віднімання підмножин множини X має нейтральний елемент, якщо існує така підмножина Y , що $\forall A \in X \quad A \setminus Y = Y \setminus A = A$. Такої підмножини не існує, тому операція віднімання підмножин множини X не має нейтрального елемента. Існує лише правий нейтральний елемент – $\emptyset$, бо справджується лише рівність $A \setminus Y = A$, де $Y = \emptyset$.

в) Який з елементів множини X має симетричний елемент відносно об'єднання $\cup$; перетину $\cap$?

Розв'язання.

$\emptyset$ – симетричний сам собі елемент відносно $\cup$,
 $\{a, b, c\}$ – симетричний сам собі елемент відносно $\cap$.

Завдання 3. Чи є операція піднесення до степеня натуральних чисел а) комутативною; б) асоціативною; в) дистрибутивною справа і зліва відносно множення?

Розв'язання.

а) Ні, бо $m^n \neq n^m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

б) Ні, бо $(m^n)^k \neq m^{(n^k)} \quad \forall m, n, k \in \mathbb{N}$, наприклад $(2^1)^3 \neq 2^{(1^3)}$.

в) Є дистрибутивною справа, бо $(ab)^c = a^c b^c$ і не є дистрибутивною зліва, бо $a^{bc} \neq a^b a^c$.

Завдання 4. Вказати нейтральний елемент для операції піднесення до степеня натуральних чисел.

Розв'язання.

η – нейтральний елемент, якщо $a^\eta = \eta^a = a$. Такого елемента не існує. Існує лише правий нейтральний елемент 1, бо виконується лише рівність $a^\eta = a$ при $\eta = 1$.

№ 8.3 [2]. Скласти таблицю Келі для операції $\oplus$, заданої у множині $\{0,1,2,3,4,5\}$ правилом: $a \oplus b$ є остача від ділення $a + b$ на 6.

Розв'язання.

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

№ 8.5 [2]. Як найпростіше перевірити комутативність бінарної операції в скінченній множині, заданої таблицею Келі?

Розв'язання.

Таблиця повинна бути симетричною відносно діагоналі, що виходить з лівого верхнього кута.

№ 8.6 [2]. Як перевірити наявність елементів, нейтрального і симетричного до даного елемента, для бінарної операції, заданої в скінченній множині таблицею Келі?

Розв'язання.

Якщо η – нейтральний елемент, то його рядок повинен збігатися з першим рядком таблиці Келі, а його стовпець – з першим стовпцем.

Елемент b буде симетричним елементу a , якщо в його рядку є нейтральний елемент η , тобто $ab = \eta$, причому $ba = \eta$.

№ 8.12 [2]. Нехай у множині $\mathbb{R}^2$ задано операції

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b)(c,d) = (ac+bd, ad+bc).$$

Елементи цієї алгебри називають **п о д в і й н и м и ч и с л а м и**. Довести, що операція множення комутативна, асоціативна і дистрибутивна відносно додавання.

Розв'язання.

Комутативність: $(a,b)(c,d) = (ac+bd, ad+bc),$

$$(c,d)(a,b) = (ca+db, cb+da),$$

$$(ac+bd, ad+bc) = (ca+db, cb+da).$$

Отже, $(a,b)(c,d) = (c,d)(a,b).$

Асоціативність: $((a,b)(c,d))(m,n) = (ac+bd, ad+bc)(m,n) =$
 $= (acm + bdm + adn + bcn, acn + bdn + adm + bcm),$

$$(a, b)((c, d)(m, n)) = (a, b)(cm + dn, cn + dm) = \\ = (acm + adn + bcn + bdm, acn + adm + bcm + bdn).$$

Отже, $((a, b)(c, d))(m, n) = (a, b)((c, d)(m, n))$.

Аналогічно доводиться дистрибутивність відносно множення:

$$((a, b) + (c, d))(m, n) = (a, b)(m, n) + (c, d)(m, n).$$

№ 7.12 [2]. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

$$\text{а) } 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Розв'язання.

Доведемо це твердження, використовуючи основну форму принципу математичної індукції.

1. При $n = 1$ рівність правильна: $1 = 1$.
2. Припустимо, що рівність правильна при $n = k$, тобто

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

3. Доведемо, що рівність правильна при $n = k + 1$, тобто

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \\ &= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Завдання 5. Довести, що $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} : 19$.

Розв'язання.

Доведемо це твердження, використовуючи основну форму принципу математичної індукції.

1. При $n = 1$ твердження правильне: $19 : 19$.
2. Припустимо, що твердження правильне при $n = k$, тобто

$$5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} : 19.$$

3. Доведемо, що твердження правильне при $n = k + 1$, тобто

$$5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} : 19.$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^{3(k+1)-2} + 3^{3(k+1)-1} &= 5 \cdot 2^{3k+3-2} + 3^{3k+3-1} = 5 \cdot 2^{3k-2} \cdot 2^3 + 3^{3k-1} \cdot 3^3 = \\ &= 5 \cdot 2^{3k-2} \cdot 8 + 3^{3k-1} \cdot 27 = 8 \cdot (5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}. \end{aligned}$$

Вираз у дужках ділиться на 19 за припущенням, другий доданок має множник 19, тому вся сума ділиться на 19, що й потрібно було довести.

№ 7.15 [2]. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується нерівність:

$$г) \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1.$$

Розв'язання.

Доведемо це твердження, використовуючи основну форму принципу математичної індукції.

1. При $n = 1$ нерівність правильна: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

2. Припустимо, що нерівність правильна при $n = k$, тобто

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1. \quad (*)$$

3. Доведемо, що рівність правильна при $n = k + 1$, тобто

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} > 1.$$

До обидвох частин правильної нерівності (*) додамо вираз

$$\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+4} &> 1 + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = \\ &= 1 + \frac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}. \end{aligned}$$

Оскільки права частина останньої нерівності більша за 1, то й ліва її частина більша за 1, що й треба було довести.

№ 7.6 [2]. Довести, що коли річ коштує більш як 7 коп., то за неї можна розрахуватися монетами вартістю по 3 і 5 коп.

Розв'язання.

Доведемо це твердження, використовуючи узагальнення основної форми принципу математичної індукції. Нехай n – вартість речі.

1. При $n = 8$ твердження правильне.

2. Припустимо, що твердження правильне при $n = k$, $k \geq 8$, тобто що за річ вартістю k копійок можна розрахуватися монетами вартістю по 3 і 5 коп.

3. Доведемо, що твердження правильне при $n = k + 1$, тобто що за річ вартістю $k + 1$ коп. також можна розрахуватися монетами вартістю по 3 і 5 коп.

Якщо за рік вартістю k копійок розраховувались лише монетами вартістю по 3 коп., то щоб розрахуватись за рік вартістю $k + 1$ коп., можна три монети по 3 коп. замінити двома монетами по 5 коп.

Якщо за рік вартістю k копійок розраховувались лише монетами вартістю по 5 коп., то щоб розрахуватись за рік вартістю $k + 1$ коп., можна одну монету по 5 коп. замінити двома монетами по 3 коп.

Якщо за рік вартістю k копійок розраховувались і монетами вартістю по 3 коп., і монетами вартістю по 5 коп., то щоб розрахуватись за рік вартістю $k + 1$ коп., можна використати один із наведених вище способів.

Завдання для самостійної роботи до теми 12

1. Чи є комутативною і асоціативною на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ бінарна операція $*$, якщо $a * b = (a + b)^2$?

2. На множині $\mathbb{R}$ задано операцію: $a * b = b$. Чи має множина $\mathbb{R}$ нейтральний елемент відносно цієї операції? Чи є ця операція асоціативною?

№ 8.7 [2]. У множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ визначено операцію:

а) $n * m = l$, де $l \in \text{НСД чисел } n \text{ і } m$;

б) $n \circ m = l$, де $l \in \text{НСК чисел } n \text{ і } m$.

Довести, що задана операція має властивості комутативності і асоціативності. Чи існує нейтральний елемент відносно цієї операції?

№ 8.11 [2]. Нехай у множині $\mathbb{R}^2$ задано операції

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc).$$

Елементи цієї алгебри називають д у а л ь н и м и ч и с л а м и. Довести, що операція множення комутативна, асоціативна і дистрибутивна відносно додавання.

№ 7.12 [2]. Довести, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність:

б) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$;

в) $\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = -\frac{2n+1}{2n-1}$;

д) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;

е) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$.

№ 7.13 [2]. Довести, що для будь-якого цілого $n \geq 0$ число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133.

№ 7.15 [2]. Довести, що при будь-якому натуральному n виконується нерівність:

$$\text{в) } \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}.$$

Довести методом математичної індукції:

$$1) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$2) 5^{n+1} - 4n - 5 \vdots 16.$$

Тема 13. Групи, кільця, поля та їх найпростіші властивості

№ 8.9 [2]. Нехай у множині $\mathbb{Z}^2$ задано операцію

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Довести, що задана алгебра є абелевою групою.

Розв'язання.

Покажемо, що виконуються чотири аксіоми абелевої групи.

1. Покажемо, що операція додавання пар асоціативна, тобто

$$\begin{aligned} \forall (a, b), (c, d), (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad & ((a, b) + (c, d)) + (m, n) = (a, b) + ((c, d) + (m, n)). \\ ((a, b) + (c, d)) + (m, n) &= (a + c, b + d) + (m, n) = ((a + c) + m, (b + d) + n) = \\ &= (a + (c + m), b + (d + n)) = (a, b) + (c + m, d + n) = \\ &= (a, b) + ((c, d) + (m, n)). \end{aligned}$$

2. Нехай $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ – нейтральний елемент відносно додавання, тоді

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a, b) + (x, y) = (x, y) + (a, b) = (a, b),$$

$$\text{тобто} \quad (a + x, b + y) = (x + a, y + b) = (a, b),$$

$$\text{звідки} \quad a + x = x + a = a \quad \text{і} \quad b + y = y + b = b.$$

Отже, $x = 0$ і $y = 0$. Таким чином, пара $(0, 0)$ – нейтральний елемент відносно додавання.

3. Нехай $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2$ – елемент, симетричний елементу (a, b) відносно додавання, тоді $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a, b) + (a_1, b_1) = (a_1, b_1) + (a, b) = (0, 0),$

$$\text{тобто} \quad (a + a_1, b + b_1) = (a_1 + a, b_1 + b) = (0, 0),$$

$$\text{звідки} \quad a + a_1 = a_1 + a = 0 \quad \text{і} \quad b + b_1 = b_1 + b = 0.$$

Отже, $a_1 = -a$ і $b_1 = -b$. Таким чином, пара $(-a, -b)$ – елемент, симетричний елементу (a, b) відносно додавання.

4. Доведемо, що операція додавання комутативна, тобто

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b).$$

Маємо: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b)$.

№ 8.15 [2]. Довести, що множина всіх цілих чисел, які діляться на 3, є абелевою групою відносно додавання.

Розв'язання.

Покажемо, що множина $M = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}$ є абелевою групою відносно додавання, тобто що виконуються чотири аксіоми абелевої групи.

1. Асоціативність: $(3k + 3n) + 3m = 3k + (3n + 3m)$.
2. Нейтральний елемент $0 \in M$ ($0 = 3 \cdot 0$).
3. До елемента $3k$ симетричним є елемент $-3k = 3 \cdot (-k)$.
4. Комутативність: $3k + 3n = 3n + 3k$.

№ 8.25 [2]. У множині $\mathbb{R}^2$ задано операцію

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - 2bd, ad + bc).$$

Довести, що множина $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ є групою відносно операції $\otimes$.

Розв'язання.

1. Покажемо, що операція $\otimes$ асоціативна, тобто $\forall (a, b), (c, d), (m, n) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} ((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (m, n) &= (a, b) \otimes ((c, d) \otimes (m, n)). \\ ((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (m, n) &= (ac - 2bd, ad + bc) \otimes (m, n) = \\ &= (acm - 2bdm - 2adn - 2bcn, acn - 2bdn + adm + bcm); \\ (a, b) \otimes ((c, d) \otimes (m, n)) &= (a, b) \otimes (cm - 2dn, cn + dm) = \\ &= (acm - 2adn - 2bcn - 2bdm, acn + adm + bcm - 2bdn). \end{aligned}$$

2. Нехай $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – нейтральний елемент, тоді

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (a, b) \otimes (x, y) = (x, y) \otimes (a, b) = (a, b),$$

тобто $(ax - 2by, ay + bx) = (xa - 2yb, xb + ya) = (a, b),$

звідки
$$\begin{cases} ax - 2by = a, \\ bx + ay = b. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + 2b^2 \neq 0,$$

бо, за умовою, a і b одночасно в нуль не перетворюються.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & -2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + 2b^2; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0; x = 1, y = 0.$$

Таким чином, пара $(1, 0)$ – нейтральний елемент.

3. Нехай $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ – елемент, симетричний елементу (a, b) відносно операції $\otimes$, тоді $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$(a, b) \otimes (a_1, b_1) = (a_1, b_1) \otimes (a, b) = (1, 0),$$

тобто $(aa_1 - 2bb_1, ab_1 + ba_1) = (a_1a - 2b_1b, a_1b + b_1a) = (1, 0),$

звідки
$$\begin{cases} aa_1 - 2bb_1 = 1, \\ ba_1 + ab_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + 2b^2 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b; a_1 = \frac{a}{a^2 + 2b^2}, b_1 = -\frac{b}{a^2 + 2b^2}.$$

Таким чином, пара $\left(\frac{a}{a^2 + 2b^2}, -\frac{b}{a^2 + 2b^2}\right)$ – симетричний елемент до пари (a, b) .

Отже, множина $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ є групою відносно операції $\otimes$.

№ 9.1 [2]. Довести, що множина всіх цілих чисел, які діляться на 5, є кільцем.

Розв'язання.

Як і у № 8.15, можна показати, що множина $M = \{5k | k \in \mathbb{Z}\}$ є абелевою групою відносно додавання. Крім того, операція множення є асоціативною:

$$(5k \cdot 5n) \cdot 5m = 5k \cdot (5n \cdot 5m)$$

і дистрибутивною справа і зліва відносно додавання:

$$(5k + 5n) \cdot 5m = 5k \cdot 5m + 5n \cdot 5m, \quad 5m \cdot (5k + 5n) = 5m \cdot 5k + 5m \cdot 5n,$$

тому множина всіх цілих чисел, які діляться на 5, є кільцем.

№ 9.8 [2]. Чи є полем множина всіх чисел виду:

$$\text{а) } a + b^3\sqrt{3}; \quad \text{б) } a + b^3\sqrt{3} + c^3\sqrt{9}, \text{ де } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Розв'язання.

а) Перевіримо, чи задано операції додавання і множення у множині

$$M = \{a + b^3\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

$$(a + b^3\sqrt{3}) + (c + d^3\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)^3\sqrt{3} \in M;$$

$$(a + b^3\sqrt{3}) \cdot (c + d^3\sqrt{3}) = ac + (ad + bc)^3\sqrt{3} + bd^3\sqrt{9} \notin M.$$

Отже, операцію додавання задано, а операцію множення не задано, тому дана множина поле не утворює.

б) Аналогічно, як і в пункті а), можна показати, що в множині

$$M_1 = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

задано операції додавання і множення. Крім того, можна показати, що у множині M_1 виконуються всі аксіоми поля. Перевіримо, наприклад, чи для елемента $a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$ існує обернений, тобто чи елемент $\frac{1}{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}}$ належить даній множині M_1 .

Скористаємось тотожністю:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}} &= \frac{1}{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{a^2 + b^2\sqrt[3]{9} + 3c^2\sqrt[3]{3} - ab\sqrt[3]{3} - ac\sqrt[3]{9} - 3bc}{a^2 + b^2\sqrt[3]{9} + 3c^2\sqrt[3]{3} - ab\sqrt[3]{3} - ac\sqrt[3]{9} - 3bc} = \\ &= \frac{(a^2 - 3bc) + (3c^2 - ab)\sqrt[3]{3} + (b^2 - ac)\sqrt[3]{9}}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc} = \\ &= \frac{a^2 - 3bc}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc} + \frac{3c^2 - ab}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc}\sqrt[3]{3} + \\ &\quad + \frac{b^2 - ac}{a^3 + 3b^3 + 9c^3 - 9abc}\sqrt[3]{9} \in M_1. \end{aligned}$$

Отже, дана множина є полем.

№ 9.10 [2]. Довести, що множина $\mathbb{Q}^2$ з операціями, означеними рівностями $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$, є полем.

Розв'язання.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що виконуються усі аксіоми поля. Зокрема, нейтральним елементом відносно множення є пара $(1, 0)$, пара $\left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)$ є парою, оберненою до пари (a, b) .

(Примітка: $a^2 - 2b^2 \neq 0$, бо a і b раціональні числа).

№ 9.12 [2]. Нехай у множині $\mathbb{R}^2$ задано операції

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b)(c, d) &= (ac, ad + bc). \end{aligned}$$

Елементи цієї алгебри називають д у а л ь н и м и ч и с л а м и (див. № 8.11 [2]). Чи є полем множина всіх дуальних чисел?

Розв'язання.

Ні, бо якщо $a = 0, b \neq 0$, а (x, y) – нейтральний елемент відносно множення, то

$$(0, b) \cdot (x, y) = (0, b) \Rightarrow (0, bx) = (0, b),$$

звідки $x = 1$, а y може бути довільним. Тобто нейтрального елемента не існує.

Завдання для самостійної роботи до теми 13

№ 8.10 [2]. У множині всіх пар (a, b) раціональних чисел, де $a \neq 0$, операція множення визначається рівністю

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d).$$

Довести, що задана алгебра є групою.

№ 8.14 [2]. Довести, що множина всіх цілих степенів числа 2 є мультиплікативною групою.

№ 8.16 [2]. Довести, що множина всіх векторів площини є абелевою групою відносно операції додавання.

№ 9.2 [2]. Чи є кільцем множина всіх цілих степенів числа 3?

№ 9.9 [2]. Довести, що множина всіх дійсних чисел виду $a + b\sqrt{p}$, де $a, b \in \mathbb{Q}$ і p – фіксоване просте число, є полем.

№ 9.11 [2]. Нехай у множині $\mathbb{R}^3$ задано операції

$$\begin{aligned}(a, b, c) + (a_1, b_1, c_1) &= (a + a_1, b + b_1, c + c_1), \\ (a, b, c) \cdot (a_1, b_1, c_1) &= (aa_1 - bb_1, ab_1 + ba_1, ac_1 + ca_1).\end{aligned}$$

Чи є тоді полем множина $\mathbb{R}^3$?

Тема 14. Гомоморфізми та ізоморфізми груп, кільця та полів

№ 8.19 [2]. Довести, що адитивна група $\mathbb{Z}$ ізоморфна мультиплікативній групі G всіх цілих степенів числа 2.

Розв'язання. Задамо відображення множини $\mathbb{Z}$ на множину G наступним чином: $f(k) = 2^k$. Воно є бієктивним, причому

$$f(m + n) = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = f(m)f(n)$$

для всіх $m, n \in \mathbb{Z}$. Це означає, що відображення f є ізоморфізмом і адитивна група $\mathbb{Z}$ ізоморфна мультиплікативній групі G всіх цілих степенів числа 2.

№ 8.22 [2]. Задати ізоморфізм адитивної групи $\mathbb{Z}$ в алгебру $\mathbb{Z}^2$ з операцією

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Розв'язання. Задамо відображення множини $\mathbb{Z}$ в множину $\mathbb{Z}^2$ наступним чином: $f(k) = (k, 0)$. Це відображення є ін'єктивним, причому

$$f(m+n) = (m+n, 0) = (m, 0) + (n, 0) = f(m) + f(n)$$

для всіх $m, n \in \mathbb{Z}$. Це означає, що відображення f є ізоморфізмом адитивної групи $\mathbb{Z}$ в алгебру $\mathbb{Z}^2$.

№ 8.24 [2]. Задати гомоморфізм мультиплікативної алгебри $\mathbb{Z}$ на мультиплікативну алгебру всіх невід'ємних цілих чисел.

Розв'язання. Задамо відображення множини $\mathbb{Z}$ на множину $\mathbb{N}_0$ наступним чином: $f(k) = |k|$. Оскільки

$$f(m \cdot n) = |m \cdot n| = |m| \cdot |n| = f(m) \cdot f(n)$$

для всіх $m, n \in \mathbb{Z}$, то це означає, що відображення f є гомоморфізмом мультиплікативної алгебри $\mathbb{Z}$ на мультиплікативну алгебру всіх невід'ємних цілих чисел.

№ 9.15 [2]. Чи є ізоморфізмом поля $P_1 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ на поле $P_2 = \{c + d\sqrt{5} \mid c, d \in \mathbb{Q}\}$ відображення f , що задається співвідношенням $f(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{5}$?

Розв'язання. Перевіримо, чи виконуються дві умови гомоморфізму:

$$\forall x, y \in P_1 \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

$$\forall x, y \in P_1 \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

тобто

$$f((a + b\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f(a + b\sqrt{2}) + f(a_1 + b_1\sqrt{2}),$$

$$f((a + b\sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f(a + b\sqrt{2}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{2}).$$

$$f((a + b\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f((a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{2}) =$$

$$= (a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{5};$$

$$f(a + b\sqrt{2}) + f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5}) =$$

$$= (a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{5}.$$

$$\text{Отже, } f((a + b\sqrt{2}) + (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f(a + b\sqrt{2}) + f(a_1 + b_1\sqrt{2}).$$

$$f((a + b\sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2})) = f((aa_1 + 2bb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{2}) =$$

$$= (aa_1 + 2bb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{5};$$

$$f(a + b\sqrt{2}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{2}) = (a + b\sqrt{5}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{5}) =$$

$$= (aa_1 + 5bb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{5}.$$

$$\text{Отже, } f((a + b\sqrt{2}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{2})) \neq f(a + b\sqrt{2}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{2}).$$

Таким чином, відображення f , що задається співвідношенням $f(a + b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{5}$, не є ізоморфізмом поля P_1 на поле P_2 .

№ 9.22 [2]. Довести, що відображення f поля всіх дійсних чисел виду $a + b\sqrt{5}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) в себе, при якому $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$ є ізоморфізмом.

Розв'язання. Очевидно, дане відображення є бієктивним. Перевіримо, чи виконуються дві умови гомоморфізму:

$$\forall x, y \in P \quad f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$\forall x, y \in P \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

тобто

$$f((a + b\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f(a + b\sqrt{5}) + f(a_1 + b_1\sqrt{5}),$$

$$f((a + b\sqrt{5}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f(a + b\sqrt{5}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{5}).$$

$$f((a + b\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f((a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{5}) =$$

$$= (a + a_1) - (b + b_1)\sqrt{5};$$

$$f(a + b\sqrt{5}) + f(a_1 + b_1\sqrt{5}) = (a - b\sqrt{5}) + (a_1 - b_1\sqrt{5}) =$$

$$= (a + a_1) - (b + b_1)\sqrt{5}.$$

$$\text{Отже, } f((a + b\sqrt{5}) + (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f(a + b\sqrt{5}) + f(a_1 + b_1\sqrt{5}).$$

$$f((a + b\sqrt{5}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f((aa_1 + 5bb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{5}) =$$

$$= (aa_1 + 5bb_1) - (ab_1 + ba_1)\sqrt{5};$$

$$f(a + b\sqrt{5}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{5}) = (a - b\sqrt{5}) \cdot (a_1 - b_1\sqrt{5}) =$$

$$= (aa_1 + 5bb_1) - (ab_1 + ba_1)\sqrt{5}.$$

$$\text{Отже, } f((a + b\sqrt{5}) \cdot (a_1 + b_1\sqrt{5})) = f(a + b\sqrt{5}) \cdot f(a_1 + b_1\sqrt{5}).$$

Таким чином, відображення f поля всіх дійсних чисел виду $a + b\sqrt{5}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) в себе, при якому $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$, є ізоморфізмом.

№ 9.23 [2]. Які ізоморфізми поля всіх дійсних чисел виду $a + b\sqrt{5}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) в себе задовольняють умову $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$?

Розв'язання. Нехай f – шуканий ізоморфізм. Тоді

$f(a + b\sqrt{5}) = f(a) + f(b\sqrt{5}) = f(a) + f(b) \cdot f(\sqrt{5}) = a + b \cdot f(\sqrt{5})$,
оскільки $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$. Знайдемо $f(\sqrt{5})$.

$$5 = f(5) = f(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = f(\sqrt{5}) \cdot f(\sqrt{5}),$$

звідки $f(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5}$. Отже, шуканими ізоморфізмами є ізоморфізми

$$f_1(a + b\sqrt{5}) = a + b\sqrt{5} \quad \text{і} \quad f_2(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}.$$

Завдання. Довести, що множина цілих чисел і множина цілих парних чисел не ізоморфні відносно множення.

Нехай f – деяке бієктивне відображення $\mathbb{Z}$ на $2\mathbb{Z}$, причому
 $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Припустимо, що $f(1) = a \in 2\mathbb{Z}$, тоді
 $a = f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a$,

звідки $a = 0$ або $a = 1$. Але a – число парне, тому $a = 0$, тобто $f(1) = 0$.

Знайдемо $f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) \cdot f(1) = f(2) \cdot 0 = 0$, тобто $f(2) = 0$.
Отже, отримали, що $f(1) = f(2)$, а це суперечить бієктивності f . Тому задані множини не ізоморфні відносно множення.

Завдання для самостійної роботи до теми 14

№ 8.18 [2]. Довести, що адитивна група $\mathbb{Z}$ ізоморфна адитивній групі G всіх цілих чисел, кратних 3.

№ 8.20 [2]. Довести, що алгебра натуральних чисел $\mathbb{N}$ з операцією додавання ізоморфна адитивній алгебрі всіх парних додатних чисел.

№ 8.23 [2]. Задати гомоморфізм адитивної групи $\mathbb{Z}$ на мультиплікативну групу $\{-1, 1\}$.

№ 9.16 [2]. Чи є ізоморфізмом кільця всіх парних чисел на кільце всіх чисел, кратних 5, відображення f , що задається співвідношенням
 $f(2k) = 5k, k \in \mathbb{Z}$?

№ 9.25 [2]. Знайти всі ізоморфізми числового поля $P = \{x - y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ в себе, при яких $\forall x \in \mathbb{Q} \quad f(x) = x$.

Тема 15. Поле комплексних чисел. Алгебраїчна форма комплексного числа

Завдання 1. Обчислити: $(1-3i) + (-2+i)$, $(1-3i) - (-2+i)$,
 $(1-3i) \cdot (-2+i)$, $(1-3i) : (-2+i)$.

Розв'язання.

$$(1-3i) + (-2+i) = (1+(-2)) + (-3+1)i = -1-2i,$$

$$(1-3i) - (-2+i) = (1-(-2)) + (-3-1)i = 3-4i,$$

$$(1-3i) \cdot (-2+i) = -2+6i+i-3i^2 = -2+6i+i+3 = 1+7i,$$

$$\frac{1-3i}{-2+i} = \frac{(1-3i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-2+6i-i+3i^2}{(-2)^2+1^2} = \frac{-2+6i-i-3}{5} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i.$$

№ 3 [7]. Обчислити i^n , де n – ціле число.

Розв'язання.

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
i^n	...	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	...

$$\text{Отже, } i^n = \begin{cases} 1, n = 4k, \\ i, n = 4k + 1, \\ -1, n = 4k + 2, \\ -i, n = 4k + 3, \end{cases} \quad k - \text{ціле число.}$$

Завдання 2. Обчислити: i^{2024} , $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$,
 $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$,
 $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{-i}$, $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$.

Розв'язання. $i^{2024} = 1$, $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = i - 1 - i + 1 + i = i$,

$$i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54} = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1,$$

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \frac{1}{-i} = i, \quad \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} = i - i = 0.$$

Завдання 3. Назвати числа, спряжені і протилежні до даних:

$$2-i, 3+i, -2-i, i, -i, -3+i, 3, -5.$$

Розв'язання.

Число	$2-i$	$3+i$	$-2-i$	i	$-i$	$-3+i$	3	-5
Спряжене	$2+i$	$3-i$	$-2+i$	$-i$	i	$-3-i$	3	-5
Протилежне	$-2+i$	$-3-i$	$2+i$	$-i$	i	$3-i$	-3	5

№ 1 [7]. Знайти x і y , вважаючи їх дійсними:

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

Розв'язання. $x + 2ix + 3y - 5iy = 1 - 3i$; $(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i$;

$$\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 2x - 5y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{11}, \\ y = \frac{5}{11}. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти x і y , вважаючи їх дійсними:

$$9 + 2ix + 4iy = 10i + 5x - 6y.$$

Розв'язання. $9 + (2x + 4y)i = (5x - 6y) + 10i$;

$$\begin{cases} 5x - 6y = 9, \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases}$$

№ 5 [7]. Обчислити: **а)** $(1 + 2i)^6$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } (1 + 2i)^6 &= ((1 + 2i)^2)^3 = (-3 + 4i)^3 = \\ &= (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 \cdot 4i + 3 \cdot (-3) \cdot (4i)^2 + (4i)^3 = \\ &= -27 + 108i + 144 - 64i = 117 + 44i. \end{aligned}$$

Завдання 5. Знайти x , якщо відомо, що $(1 - 2ix)^3 + 11$ – суто уявне число.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } (1 - 2ix)^3 + 11 &= 1 - 3 \cdot 2ix + 3 \cdot (2ix)^2 - (2ix)^3 + 11 = \\ &= 1 - 6ix - 12x^2 + 8x^3i + 11 = (12 - 12x^2) + (8x^3 - 6x)i. \\ 12 - 12x^2 &= 0 \Rightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

№ 7 [7]. Виконати зазначені дії: **а)** $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{(1 + i \operatorname{tg} \alpha)^2}{(1 - i \operatorname{tg} \alpha)(1 + i \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha + 2i \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} i = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

№ 8 [7]. Обчислити $\frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$, де n – ціле додатне число.

Розв'язання.

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \cdot (1-i)^2 = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^n \cdot (1-i)^2 = i^n \cdot (-2i) = -2i^{n+1}.$$

Завдання 6. Розв'язати систему рівнянь у полі комплексних чисел:

$$\begin{cases} ix - 2y = -i, \\ (1+i)x - 2iy = 3+i. \end{cases}$$

Розв'язання. Використаємо формули Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} i & -2 \\ 1+i & -2i \end{vmatrix} = -2i^2 + 2(1+i) = 2 + 2 + 2i = 4 + 2i;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -i & -2 \\ 3+i & -2i \end{vmatrix} = 2i^2 + 2(3+i) = -2 + 6 + 2i = 4 + 2i;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} i & -i \\ 1+i & 3+i \end{vmatrix} = i(3+i) + i(1+i) = 3i - 1 + i - 1 = -2 + 4i;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = i.$$

№ 10.8 [2]. Розв'язати рівняння: а) $\bar{z} = 5 - z$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, тоді $x - iy = 5 - (x + iy)$;

$x - iy = (5 - x) - iy$, звідки

$$\begin{cases} x = 5 - x, \\ -y = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,5, \\ y \in R. \end{cases}$$

Отже, $z = 2,5 + yi$, y – довільне дійсне число.

в) $z^2 + \bar{z} = 1$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$, тоді $(x + iy)^2 + x - iy = 1$;

$x^2 - y^2 + 2xyi + x - iy = 1$, звідки

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x = 1, \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 1, \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x^2 + x = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y^2 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{cases} \quad \text{Отже, } z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Завдання 7. Розв'язати рівняння: $x^2 - 3x + 4 = 0$.

Розв'язання. $D = -7$; $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Завдання 8. Розкласти на комплексні множники:

$$m^2 + n^2, x^2 + 1, a + 2.$$

Розв'язання. $m^2 + n^2 = m^2 - i^2 n^2 = (m - in)(m + in)$;

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$
;

$$a + 2 = (\sqrt{a})^2 - i^2 (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{a} - i\sqrt{2})(\sqrt{a} + i\sqrt{2}).$$

Завдання для самостійної роботи до теми 15

№ 10.1 [2]. Знайти дійсну і уявну частини комплексних чисел:

а) $(2 - 3i)^4 + (2 + 3i)^4$; б) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$; в) $\left(\frac{i^7 + 2}{1 + i^{11}}\right)^2$;

г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1980}$; д) $\frac{(1+2i)^3 - (1+3i)^2}{(3-i)^3 + (1+5i)^2}$.

№ 10.2 [2]. Обчислити: а) $(az^2 + bz)(bz^2 + az)$, якщо $z = -1 - i\sqrt{3}$.

№ 10.5 [2]. Знайти необхідну і достатню умови того, щоб число $\frac{z+2}{z-1}$ було дійсним.

№ 10.8 [2]. Розв'язати рівняння: б) $\bar{z} = -3z - 1 + 2i$; д) $z^2 - 2z\bar{z} - 3 = 3i$.

№ 10.12 [2]. Розв'язати рівняння: а) $z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$; $|z| + z + 1 = i$.

Тема 16. Геометрична інтерпретація комплексних чисел і операцій над ними. Тригонометрична форма комплексного числа

Завдання 1. Яке число зображає точка, симетрична даній відносно:

1) дійсної осі; 2) початку координат; 3) уявної осі?

Розв'язання.

1) спряжене; 2) протилежне; 3) протилежне до спряженого.

Завдання 2. Знайти модуль, головне значення аргументу та записати в тригонометричній формі числа:

1) $z = 3$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -3i$; 5) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 6) $z = -\sqrt{3} + i$.

Розв'язання.

Зауважимо, що перед тим, як записати число в тригонометричній формі, слід зобразити його відповідним радіус-вектором в комплексній площині.

- 1) $z = 3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$; 2) $z = -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$;
 3) $z = 3i = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; 4) $z = -3i = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$;
 5) $z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$; 6) $z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$.

№ 11.10 [2]. Записати в тригонометричній формі числа:

в) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; **е)** $\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ$; **д)** $(\sqrt{12} - 2i)4i^{13}$.

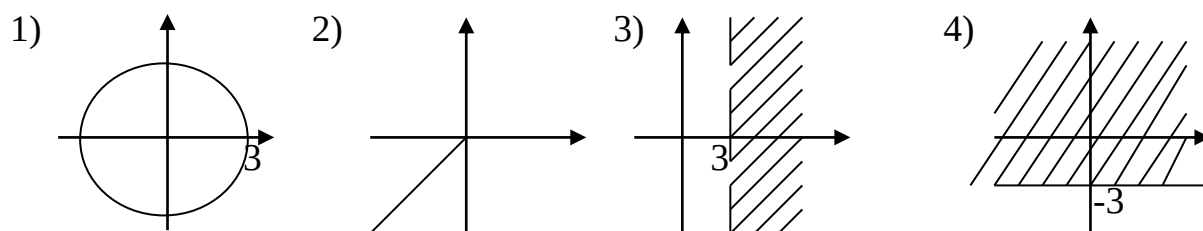
Розв'язання.

- в)** $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$;
е) $\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ = \cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ) = \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ$;
д) $(\sqrt{12} - 2i)4i^{13} = (\sqrt{12} - 2i)4i = 8 + 8\sqrt{3}i = 16\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

Завдання 3. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z , які задовольняють умови:

- 1) $|z| = 3$; 2) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; 3) $\operatorname{Re} z > 3$; 4) $\operatorname{Im} z \geq -3$.

Розв'язання.

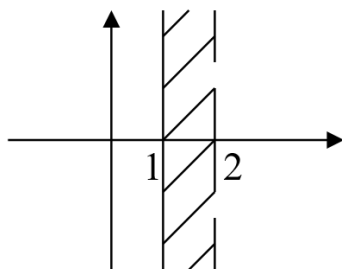


№ 11.1 [2]. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z , які задовольняють умови:

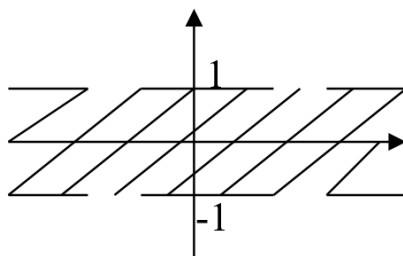
- а)** $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$; **б)** $|\operatorname{Im} z| < 1$; **в)** $1 < |z| \leq 3$;
г) $|z - i| \leq 1$; **з)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} > 1$.

Розв'язання.

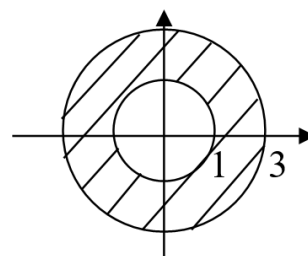
а) $1 \leq \operatorname{Re} z < 2$;



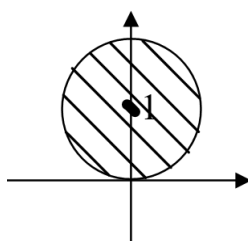
б) $|\operatorname{Im} z| < 1$;



в) $1 \leq |z| \leq 3$;



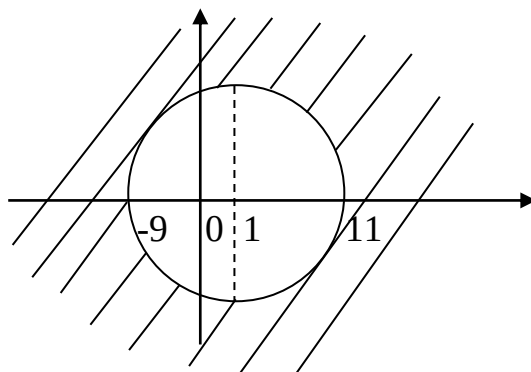
г) $|z - i| \leq 1$;



з) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2} \geq 1$.

Введемо заміну $|z-1| = x$; отримаємо систему:

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+4}{3x-2} \leq \frac{1}{2}, \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 10, \text{ тобто } |z-1| \geq 10.$$



№ 11.11 [2]. Обчислити:

а) $\frac{2(-\sqrt{3}+i)(-\cos \alpha - i \sin \alpha)}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}$; в) $(-2 + i\sqrt{12})^{1980}$.

Розв'язання.

а) $\frac{2(-\sqrt{3}+i)(-\cos \alpha - i \sin \alpha)}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{2(\sqrt{3}-i)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\sqrt{2} - \sqrt{2}i} =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \cdot 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) (\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} = \\
&= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \alpha \right) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad (-2 + i\sqrt{12})^{1980} &= \left(4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right)^{1980} = \\
&= 4^{1980} (\cos 1320\pi + i \sin 1320\pi) = 4^{1980} (\cos 0 + i \sin 0) = 4^{1980}.
\end{aligned}$$

Завдання 4. Обчислити: $(\cos 5 + i \sin 5)(\cos 2 + i \sin 2); (\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)^{-12}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
&(\cos 5 + i \sin 5)(\cos 2 + i \sin 2) = (\cos 7 + i \sin 7); \\
&(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)^{-12} = \cos(35^\circ \cdot (-12)) + i \sin(35^\circ \cdot (-12)) = \\
&= \cos(-420^\circ) + i \sin(-420^\circ) = \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ) = \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ = \\
&= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

№ 11.14 [2]. а) Довести, що $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^{3k} = 1$ для всіх цілих чисел k .

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right)^{3k} = \left(\frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{2 \left(\cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right)} \right)^{3k} = \\
&= \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi \right) \right)^{3k} = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{3k} = \\
&= \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k = 1.
\end{aligned}$$

Завдання 5. Розв'язати рівняння: $|z| + z = 2 + i$.

Розв'язання. Нехай $z = x + iy$; тоді $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Підставимо в рівняння: $\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i$. Звідси

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 2 - x, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, $z = \frac{3}{4} + i$.

Завдання для самостійної роботи до теми 16

№ 11.1 [2]. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа z , які задовольняють умови:

е) $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$; є) $|z| = \left| z + \frac{3}{i} \right|$ та $|z| \leq 2$; ж) $\log_{\frac{1}{2}} |z - 2| > \log_{\frac{1}{2}} |z|$;

к) $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2$; л) $|z + 2i| \leq |z - 1|$; $\left(\frac{1}{2} \right)^{|z+3i|-3} > 1$.

№ 11.3 [2]. У яких межах змінюється аргумент комплексних чисел z , які задовольняють умову: б) $|z - 3| < 1$?

№ 11.5 [2]. Розв'язати рівняння: б) $z|z| - 2z + i = 0$.

№ 11.10 [2]. Записати в тригонометричній формі числа:

г) $(-3 + i\sqrt{27})(1 + i)^4$; є) $-\cos \alpha + i \sin \alpha$; ж) $-1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$;

з) $\sin \alpha + i \cos \alpha$.

№ 11.11 [2]. Обчислити:

б) $\frac{(\cos \theta - i \sin \theta)(\operatorname{ctg} \beta + i)(-\cos \alpha + i \sin \alpha)}{1 - i \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}$;

г) $(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$, де $n \in \mathbb{Z}$;

д) $\frac{(\operatorname{tg} 30^\circ - i)^{15}}{(-1 + i)^{2000}} (-\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ)$.

№ 11.14 [2]. Довести, що

б) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right)^{6k} = 1$ для всіх цілих чисел k .

Обчислити:

1) $(\sqrt{12} - 2i)^{42}$; 2) $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$.

Тема 17. Добування кореня з комплексного числа. Двочленні рівняння

№ 15 [7]. Обчислити: **d)** $\sqrt{-15+8i}$.

Розв'язання. Скористаємось формулами:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), \quad b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), \quad b < 0.$$

Тоді $\sqrt{-15+8i} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{225+64}-15}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{225+64}+15}{2}} \right) = \pm(1+4i).$

№ 12.1 [2]. Знайти корені: **б)** $\sqrt[6]{64}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64(\cos 0 + i \sin 0)} = 2 \left(\cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

$$w_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2;$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3};$$

$$w_3 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2;$$

$$w_4 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3};$$

$$w_5 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Отже, якщо $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ і n – парне, то серед коренів $\sqrt[n]{a}$ дійсних є два. Комплексні корені попарно спряжені.

Розглянемо тепер випадок $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ і n – парне.

Завдання 1. Знайти корінь $\sqrt[6]{-64}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i;$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + i) = 2i;$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i;$$

$$w_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} - i;$$

$$w_4 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i) = -2i;$$

$$w_5 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i.$$

Отже, якщо $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ і n – парне, то серед коренів $\sqrt[n]{a}$ дійсних немає. Всі значення кореня попарно спряжені.

Розглянемо випадок $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ і n – непарне.

Завдання 2. Знайти корінь $\sqrt[3]{8}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i \sin 0)} = 2 \left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2;$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3};$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Отже, серед значень коренів дійсним є тільки одне.

Розглянемо випадок $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$ і n – непарне.

Завдання 3. Знайти корінь $\sqrt[3]{-8}$.

Розв'язання.

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$w_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2;$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Отже, серед значень коренів дійсним також є тільки одне.

Розглянемо тепер добування кореня з комплексного числа.

Завдання 4. Знайти корінь $\sqrt[3]{-2 + 2i}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-2 + 2i} &= \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)} = \\ &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i;$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$\begin{aligned} w_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \right). \end{aligned}$$

Дійсних значень кореня немає.

№ 12.1 [2]. Знайти корені: д) $\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{\frac{-2i}{1-i\sqrt{3}}} &= \sqrt[5]{\frac{-2i(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}} = \sqrt[5]{\frac{2\sqrt{3}-2i}{4}} = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}-i}{2}} = \\ &= \sqrt[5]{\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi k}{5}\right) = \\ &= \cos\left(\frac{11\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{30} + \frac{2\pi k}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

№ 12.18 [2]. Знаючи, що $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ є одним із значень $\sqrt[4]{z}$, знайти всі значення $\sqrt[4]{z}$.

Розв'язання. Всі значення $\sqrt[4]{z}$ можна знайти, помноживши задане значення на корені 4-го степеня з одиниці, тобто на числа $1, i, -1, -i$. Отримаємо наступні значення:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

№ 12.11 [2]. в) Знайти суму всіх коренів n -го степеня з одиниці.

Розв'язання. Потрібно знайти $S = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1}$.

$$\varepsilon_0 = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = \varepsilon_1^2;$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = \varepsilon_1^3;$$

.....

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \varepsilon_1^{n-1}.$$

$$\text{Отже, } S = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1} = 1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon_1} = 0, \text{ бо } \varepsilon_1^n = 1.$$

Тут використано формулу суми геометричної прогресії:

$$S_n = \begin{cases} b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \\ b_1 n, & q = 1. \end{cases}$$

№ 12.12 [2]. Обчислити суму:

$$\text{а) } 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1},$$

якщо ε є одним з коренів n -го степеня з одиниці.

Розв'язання.

Позначимо цю суму через S і помножимо її на $1 - \varepsilon$.

$$\begin{aligned} S(1 - \varepsilon) &= (1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1})(1 - \varepsilon) = \\ &= 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1} - \varepsilon - 2\varepsilon^2 - 3\varepsilon^3 - \dots - n\varepsilon^n = \\ &= 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} - n\varepsilon^n = \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} - n \cdot 1 = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon} - n = -n, \text{ якщо } \varepsilon \neq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } S = -\frac{n}{1 - \varepsilon}, \text{ де } \varepsilon \neq 1.$$

$$\text{Якщо } \varepsilon = 1, \text{ то } S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

№ 12.20 [2]. Розв'язати двочленні рівняння:

$$\text{д) } (z - 2 + i)^3 = \sqrt{12} + 2i; \quad \text{е) } (z - i)^4 = 1 - 2i.$$

Розв'язання. д) Рівняння має вигляд $x^3 = q$, звідки $x = \sqrt[3]{q}$.

$$\begin{aligned} x = z - 2 + i &= \sqrt[3]{\sqrt{12} + 2i} = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Одним із значень цього кореня є $x_0 = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right)$, тоді інші

значення знаходимо за формулою

$$x_k = x_0 \cdot \varepsilon_k = x_0 \cdot \varepsilon_1^k, \quad k = 0, 1, 2,$$

де $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ – первісний корінь 3-го степеня з одиниці. Отже,

$$x_k = z_k - 2 + i = \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right) \cdot \varepsilon_1^k,$$

звідки

$$z_k = 2 - i + \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18} \right) \cdot \varepsilon_1^k, \quad k = 0, 1, 2, \quad \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

е) Рівняння має вигляд $x^4 = q$, звідки $x = \sqrt[4]{q}$.

$$x = z - i = \sqrt[4]{1 - 2i} = \sqrt[4]{\sqrt{5}(\cos(2\pi - \arctg 2) + i \sin(2\pi - \arctg 2))} = \\ = \sqrt[8]{5} \left(\cos \frac{2\pi - \arctg 2 + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi - \arctg 2 + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Одним із значень цього кореня є

$$x_0 = \sqrt[8]{5} \left(\cos \frac{2\pi - \arctg 2}{4} + i \sin \frac{2\pi - \arctg 2}{4} \right),$$

тоді інші значення знаходимо за формулою

$$x_k = x_0 \cdot \varepsilon_k = x_0 \cdot \varepsilon_1^k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

де $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i$ – первісний корінь 4-го степеня з одиниці.

Отже,

$$x_k = z_k - i = \sqrt[8]{5} \left(\cos \frac{2\pi - \arctg 2}{4} + i \sin \frac{2\pi - \arctg 2}{4} \right) \cdot \varepsilon_1^k,$$

звідки

$$z_k = i + \sqrt[8]{5} \left(\cos \frac{2\pi - \arctg 2}{4} + i \sin \frac{2\pi - \arctg 2}{4} \right) \cdot \varepsilon_1^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad \varepsilon_1 = i.$$

Завдання для самостійної роботи до теми 17

№ 12.1 [2]. Знайти корені: а) $\sqrt[3]{2-i}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{8} + \frac{i \sin 60^\circ}{4}}$; є) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{-\sqrt{3}+i}}$.

№ 12.12 [2]. Обчислити суму: б) $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \dots + n^2 \varepsilon^{n-1}$, якщо ε є одним з коренів n -го степеня з одиниці.

Вказівка. Домножити цю суму два рази на $1 - \varepsilon$.

№ 12.19 [2]. Знаючи, що $2+i$ є одним із значень $\sqrt[6]{z}$, знайти всі значення $\sqrt[6]{z}$.

№ 12.20 [2]. Розв'язати двочленні рівняння:

а) $z^2 = i$; б) $z^5 = -1$; в) $z^6 - 1 = 0$; г) $z^8 = 1 + i$.

№ 15 [7]. Обчислити: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt{-8i}$; в) $\sqrt{3-4i}$; г) $\sqrt{-11+60i}$.

Обчислити: 1) $\sqrt{9-i\sqrt{19}}$; 2) $\sqrt[7]{\frac{(1+i)^2(\sqrt{3}+i)}{i-1}}$.

Література

1. Завало С.Т., Костарчук В.М., Хацет Б.І. Алгебра і теорія чисел : в 2 х ч. Київ : «Вища школа», 1974. Ч. 1. 464 с.
2. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч. 1. Київ : «Вища школа», 1983. 232 с.
3. Комарницька Л. Лінійна алгебра : тексти лекцій. Частина 1. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2012. 126 с.
4. Комарницька Л. Лінійна алгебра : методичні матеріали до самостійної роботи. Частина 1. Дрогобич : РВВ ДДПУ імені Івана Франка, 2013. 61 с.
5. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Вища алгебра : підручник для вищих навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2008. 182 с.
6. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Векторна алгебра : підручник для вищих навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2008. 164 с.
7. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри. Київ : «Вища школа», 1971. 316 с.
8. Проскуряков І.В. Збірник завдань з лінійної алгебри. Москва : «Наука», 1974. 384 с.
9. Авдєєва Т.В., Шраменко В.М. Лінійна алгебра в задачах та прикладах <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16845>

Електронне навчально-методичне видання

ПРАКТИКУМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Частина 1

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Редактор
Ірина Невмержицька
Технічний редактор
Ірина Артимко

Здано до набору 15.03.2024 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 5,81. Зам. 30.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01. 07. 2016 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к. 203.