**Дрогобицький державний педагогічний**
**університет імені Івана Франка**

## Руслан Хаць

# ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

## Тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей
014 «Середня освіта (Математика)», 111 «Математика»

**Дрогобич**
**2024**

**УДК 517.98(075.8)+517.968(075.8)**
**Х 28**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького
державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 2 від 29 лютого 2024 р.)

**Рецензенти:**

**Дільний Володимир Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”;

**Матурін Юрій Петрович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Відповідальний за випуск:**

**Війчук Тарас Іванович** – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Хаць Р.В.**
**Х 28** **Лінійні оператори та інтегральні рівняння:** тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання: навч. пос. Дрогобич: ДДПУ ім. Івана Франка, 2024. 156 с.

Навчальний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни „Лінійні оператори” для підготовки фахівців другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальностями 014 «Середня освіта (Математика)», 111 «Математика» галузей знань 01 «Освіта/Педагогіка» та 11 «Математика та статистика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Він містить лекційний матеріал, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи, поточного та підсумкового контролю.

Бібліографія 32 назви

# Зміст

## Основні позначення

1. $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел.
2. $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел.
3. $\mathbb{N}_0$ або $\mathbb{Z}_+$ – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4. $\overline{n;m}$ – множина всіх цілих чисел $x$, які задовольняють нерівність $n \le x \le m$.
5. $\mathbb{Q}$ – множина всіх раціональних чисел.
6. $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел.
7. $\overline{\mathbb{R}}$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “$-\infty$” і “$+\infty$”.
8. $\overline{\mathbb{R}}_0$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “$\infty$”.
9. $\mathbb{C}$ – множина всіх комплексних чисел.
10. $(a;b)$ – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел $x$, які задовольняють нерівність $a < x < b$.
11. $[a;b]$ – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел $x$, які задовольняють нерівність $a \le x \le b$.
12. $(a;b]$ – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел $x$, які задовольняють нерівність $a < x \le b$.
13. $[a;b)$ – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел $x$, які задовольняють нерівність $a \le x < b$.
14. $\mathbb{R}^n$ – простір всіх упорядкованих наборів $x = (x_1;...;x_n)$ з $n$ дійсних чисел $x_i$, $i \in \overline{1;n}$.
15. $\mathbb{C}^n$ – простір всіх упорядкованих наборів $z = (z_1;...;z_n)$ з $n$ комплексних чисел $z_i$, $i \in \overline{1;n}$.
16. $l_p$, $0 < p < +\infty$, – простір всіх послідовностей $(z_k)$ комплексних чисел таких, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|^p < +\infty$.
17. $l_\infty$ – простір всіх обмежених послідовностей $(z_k)$.

18. $C[a;b]$ – простір всіх функцій $f:[a;b]\to\mathbb{C}$, неперервних на $[a;b]$.
19. $C^{(n)}[a;b]$ – простір всіх функцій $f:[a;b]\to\mathbb{C}$, які мають на $[a;b]$ похідні до порядку $n\in\mathbb{Z}_+$, включно.
20. $L_p[a;b]$, $0<p<+\infty$, – простір всіх функцій $f:[a;b]\to\mathbb{C}$, вимірних на $[a;b]$, для яких $\int\limits_{[a;b]}|f(x)|^p\,dx<+\infty$.
21. $H$ – деякий функціональний простір.
22. $\langle\cdot\,;\,\cdot\rangle: H^2\to\mathbb{C}$ – скалярний добуток на векторному просторі $H$.
23. $\|\cdot\|: H\to[0;+\infty)$ – норма на векторному просторі $H$.
24. $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – $n\times n$-матриця.
25. $(H_1)^{(H_2)}$ – множина всіх операторів $A: H_1\to H_2$.
26. $D(A)$ – множина визначення лінійного оператора $A: H\to H$.
27. $E(A)$ – множина значень лінійного оператора $A: H\to H$.
28. $\mathcal{L}(H)$ – клас лінійних операторів $A: H\to H$, для яких $D(A)=H$.
29. $\|A\|=\sup\left\{\|A(x)\|/\|x\|: x\neq 0\right\}$ – норма лінійного оператора $A: H\to H$.
30. $A^0=I$ – тотожній оператор.
31. $A^{-1}$ – обернений оператор до оператора $A: H\to H$.
32. $\ker A$ – ядро оператора $A: H\to H$.
33. $A^*$ – спряжений оператор оператора $A: H\to H$.
34. $\sigma(A)$ – спектр оператора $A$.
35. $K(x;t)$ – ядро інтегрального оператора Фредгольма (Вольтерра).
36. $A(u)(x)=\int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt$, $-\infty<a<b<+\infty$, – інтегральний оператор Фредгольма.

37. $A(u)(x)=\int\limits_{a}^{x}K(x;t)u(t)dt$, $a\in\mathbb{R}$, – інтегральний оператор Вольтерра.

38. $\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx$ – оператор Фур’є в $L_2(\mathbb{R})$.

39. $\Delta(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

40. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}s^k A^k=I+\sum\limits_{k=1}^{\infty}s^k A^k$, $s\in\mathbb{C}$, – ряд Неймана оператора $A$.

41. $R_s=\left((I-sA)^{-1}-I\right)/s$, $s\in\mathbb{C}$, – резольвента Фредгольма оператора $A$.

42. $r_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, – резольвента оператора $A$.

43. ► – кінець доведення.

44. $:=$ – рівне за означенням.

# Передмова

Основним об'єктом вивчення у функціональному аналізі є лінійні оператори $A: H_1 \to H_2$, де $H_1$ і $H_2$ – метричні чи топологічні простори. Лінійні оператори застосовуються в алгебрі, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, математичній фізиці, гармонічному аналізі та інших дисциплінах. Тому кваліфікований математик обов'язково повинен оволодіти основними поняттями теорії лінійних операторів та інтегральних рівнянь.

В даному посібнику викладено основи теорії лінійних операторів та її застосування до розв'язування інтегральних рівнянь.

Він включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, поточного та підсумкового контролю, індивідуальні завдання та методичні рекомендації для їх виконання. Наведено опорні приклади із розв'язками за темами курсу.

Для студентів спеціальностей 014 «Середня освіта (Математика)» та 111 «Математика».

## 1. Означення оператора

Оператором (функцією, відображенням, однозначним оператором) з множини $H_1$ в множину $H_2$ називається така відповідність $A: H_1 \to H_2$, за якої кожному елементу $x \in H_1$ відповідає не більше одного елемента $y \in H_2$. Для того, щоб задати оператор $A: H_1 \to H_2$ досить деяким елементам множини $H_1$ поставити у відповідність один елемент множини $H_2$. Сукупність тих елементів множини $H_1$, яким відповідає хоч-би один елемент множини $H_2$, називається множиною або областю визначення оператора $A: H_1 \to H_2$ і позначається через $D(A)$. Сукупність тих елементів множини $H_2$, які відповідають хоч-би одному елементу множини $H_1$, називається множиною значень оператора $A: H_1 \to H_2$ і позначається через $E(A)$. Говорячи про оператор $A: H_1 \to H_2$ ми не припускаємо, що $D(A) = H_1$, тобто включення $D(A) \subset H_1$ може бути строгим. Два оператори $A: H_1 \to H_2$ і $\tilde{A}: H_1 \to H_2$ називаються рівними, якщо $D(\tilde{A}) = D(A)$ і $\left(\forall x \in D(A)\right): A(x) = \tilde{A}(x)$. Якщо $A(H_1) = H_2$, то кажуть, що оператор $A$ відображає множину $H_1$ на множину $H_2$. Якщо $H_1 = H_2 = H$, то кажуть, що оператор $A: H_1 \to H_2$ діє в $H$ або є оператором в $H$. Для позначення значення оператора $A: H_1 \to H_2$ в точці $x \in H_1$ разом з символом $A(x)$ використовують також позначення $Ax$ та інші. При цьому, якщо $H_2$ – множина деяких функцій, то через $A(x)(t)$ позначають значення функції $y = A(x)$ в точці $t$, тобто $A(x)(t) = y(t)$. Інколи пишуть $(Ax)(t)$ та $Ax(t)$ замість $A(x)(t)$. Множину всіх операторів $A: H_1 \to H_2$ позначають через $(H_1)^{(H_2)}$.

***Приклад 1.*** *Поставимо у відповідність кожній функції* $f_1$, *неперервній на* $[0;1]$, *функцію* $f_2(x) = \int\limits_0^x f_1(t)dt$. *Отримаємо деякий оператор* $A$.

***Приклад 2.*** *Кожна функція в* $\mathbb{R}$ *є оператором в* $\mathbb{R}$ *і, зокрема, ним є функція* $y = \sin x$.

***Приклад 3.*** *Відповідність* $A=\{(1;2);(3;5);(1;3)\}$ *не є оператором в* $\mathbb{R}$.

***Приклад 4.*** *Нехай А – оператор, який визначений формулою* $y(t)=\int_0^1 (t^2-t\sin\tau)x(\tau)d\tau$. *Це означає, що розглядається такий оператор* $A: H_1 \to H_2$, *для якого образом функції* $x:[0;1]\to\mathbb{R}$ *є така функція* $y:[0;1]\to\mathbb{R}$, *яка в точці* $t\in[0;1]$ *приймає значення* $y(t)=\int_0^1 (t^2-t\sin\tau)x(\tau)d\tau$. *Таким чином,* $A(x)(t)=\int_0^1 (t^2-t\sin\tau)x(\tau)d\tau$. *При цьому за* $H_1$ *можна взяти множину тих функцій* $x:[0;1]\to\mathbb{R}$, *для яких інтеграл* $\int_0^1 (t^2-t\sin\tau)x(\tau)d\tau$ *існує для кожного* $t\in[0;1]$ *або множину всіх функцій* $x:[0;1]\to\mathbb{R}$, *а за* $H_2$ *можна взяти множину всіх функцій* $x:[0;1]\to\mathbb{R}$. *Далі при розгляді конкретних операторів множини* $H_1$ *і* $H_2$, *як правило, вказуються.*

## 2. Лінійні оператори

Нехай $H$ – векторний простір. Оператор $A: H \to H$ називається лінійним, якщо для будь-яких чисел $c_1$, $c_2$ та будь-яких елементів $u_1 \in D(A)$ і $u_2 \in D(A)$ виконується

$$A(c_1u_1+c_2u_2)=c_1A(u_1)+c_2A(u_2)\,. \tag{1}$$

Іншими словами можна сказати, що оператор $A: H \to H$ називають лінійним, якщо він є: а) однорідним: $A(cu)=cA(u)$ для будь-якого числа $c$ та будь-якого $u\in D(A)$; б) адитивним: $A(u_1+u_2)=$ $=A(u_1)+A(u_2)$ для будь-яких $u_1\in D(A)$ і $u_2\in D(A)$.

З (1) випливає, що множина визначення $D(A)$ лінійного оператора $A: H\to H$ є векторним підпростором векторного простору $H$, нульовий елемент 0 простору $H$ належить множині визначення лінійного оператора $A: H\to H$ і $A(0)=A(0\cdot u)=0\cdot A(u)=0$ для кожного $u\in H$. Тому $A(0)=0$ для кожного лінійного оператора $A$. Множина значень $E(A)$ лінійного оператора $A: H_1 \to H_2$ також є векторним простором. Його розмірність називається рангом оператора $A: H \to H$.

Через $\mathcal{L}(H)$ позначаємо клас лінійних операторів $A: H \to H$, для яких $D(A) = H$. Саме такі оператори розглядатимемо далі. Ядром або нульовою множиною оператора $A: H \to H$ називається множина тих $x \in H$, для яких $A(x) = 0$ (тут $0$ – нульовий елемент простору $H$). Ядро оператора $A: H \to H$ позначається через $\ker A$ або через $Z(A)$. Розмірність ядра оператора називається дефектом цього оператора. Ядро оператора $A: H \to H$ є векторним підпростором простору $H$. Якщо $A: H \to H$ – лінійний оператор, то рівняння

$$A(u) = q \tag{2}$$

називається лінійним неоднорідним, а рівняння

$$A(u) = 0 \tag{3}$$

– лінійним однорідним. Множина розв’язків рівняння (3) співпадає з ядром оператора $A: H \to H$.

**Теорема 1.** *Якщо* $A: H \to H$ *– лінійний оператор, то множина розв’язків рівняння (2) складається із елементів* $u = u_{\bullet} + \tilde{u}$, *де* $u_{\bullet}$ *– будь-який розв’язок рівняння (3), а* $\tilde{u}$ *– один із розв’язків рівняння (2).*

**Доведення.** Нехай $\tilde{u}$ та $u$ – будь-які два розв’язки рівняння (2). Тоді елемент $u_{\bullet} = u - \tilde{u}$ є розв’язком рівняння (3). Крім цього, кожний елемент $u = u_{\bullet} + \tilde{u}$, де $u_{\bullet}$ – будь-який розв’язок рівняння (3), а $\tilde{u}$ – один з розв’язків рівняння (2), є розв’язком рівняння (2). ►

При розгляді конкретного оператора, заданого формулою $v = A(u)$, дуже важливим є питання про вибір простору $H$, оскільки властивості оператора $A: H \to H$ суттєво залежать від простору: як від запасу елементів, так і від метрики.

***Приклад 1.*** *Тотожній оператор, тобто такий оператор* $I: H \to H$, *для якого* $I(u) = u$ *для всіх* $u \in H$, *є лінійним.*

***Приклад 2.*** *В просторі* $\mathbb{R}$ *кожний лінійний оператор* $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *має вигляд* $A(x) = ax$, *де* $a$ *– стала. Навпаки, кожний оператор, заданий такою формулою є лінійним оператором в* $\mathbb{R}$.

*Ядро розглядуваного оператора складається з одного елемента, а саме числа* $x=0$*, якщо* $a\neq 0$.

**Приклад 3.** *Функція* $y=ax+b$*, де* $a$ *і* $b$ *– сталі, є лінійним оператором в* $\mathbb{R}$ *тоді і тільки тоді, коли* $b=0$. *Функцію* $y=ax+b$, *згідно з прийнятою в геометрії термінологією, природно називати афінною, а не лінійною як це часто буває.*

**Приклад 4.** *Оператор* $d:L_2(a;b)\to L_2(a;b)$*, визначений формулою* $d(y)=y'$*, є лінійним оператором в* $L_2[a;b]$. *Його ядро складається з сталих функцій.*

**Приклад 5.** *Оператор* $l:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$*, визначений формулою* $l(y)=a_2y''+a_1y'+a_0y$*, де* $a_j\in C[a;b]$*, є лінійним оператором в* $L_2[a;b]$. *При цьому,* $D(l)\neq L_2[a;b]$. *Цей оператор називають звичайним лінійним диференціальним оператором другого порядку або формальним звичайним лінійним диференціальним оператором другого порядку. Його ядро складається з тих функцій* $y$*, які є розв'язками рівняння* $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$.

**Приклад 6.** *Оператор Лапласа* $\Delta$*, визначений формулою*

$$\Delta(u)=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2},$$

*є лінійним оператором. Він є частковим випадком лінійного диференціального оператора другого порядку в частинних похідних. Так називають оператор* $L$*, визначений формулою*

$$L(u)=\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+d_1u,$$

*де* $a_{ij}$, $b_i$ *та* $d_1$ *– деякі функції і* $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in\mathbb{R}^n$.

**Приклад 7.** *Оператор* $A:L_2[0;2\pi]\to l_2$*, який кожному елементу* $f\in L_2[0;2\pi]$ *ставить у відповідність послідовність* $\left(c_k(f):k\in\mathbb{Z}\right)$ *за формулою* $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt$*, є лінійним. Його ядро складається тільки з нульового елемента, оскільки кожна функція* $f\in L_2[a;b]$ *єдиним чином розвивається в збіжний в*

$L_2[0;2\pi]$ *тригонометричний ряд Фур'є. Тому всі* $c_k(f)=0$ *тоді і тільки тоді, коли* $f=0$.

***Приклад 8.*** *Важливим класом лінійних операторів є інтегральний оператор Фредгольма, який функції* $u$ *ставить у відповідність функцію* $v=A(u)$ *за правилом* $v(x)=\int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt$ *та оператор* $T=I-A$, *тобто такий оператор, який функції* $u$ *ставить у відповідність функцію* $v=T(u)$ *за правилом* $v(x)=u(x)-\int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt$, *де* $K(x;t)$ – *деяка функція і* $I$ – *тотожній оператор. Властивості оператора Фредгольма залежать від властивостей функції* $K(x;t)$, *яка називається його ядром. Властивості цієї функції визначають і простір, в якому природно розглядати цей оператор.*

***Приклад 9.*** *Нехай* $H=\mathbb{C}^n$ *і* $\{e_k : k\in\overline{1;n}\}$ – *стандартний базис цього простору,* $A:H\to H$ – *лінійний оператор, а* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – $n\times n$*-матриця, елементи* $a_{ij}$ *якої знаходяться з розвинень* $A(e_j)=\sum\limits_{i=1}^n a_{ij}e_i$. *Якщо* $x=(x_1;...;x_n)\in H$, *то* $x=\sum\limits_{j=1}^n x_je_j$ *і*

$$A(x)=A\left(\sum_{j=1}^n x_je_j\right)=\sum_{j=1}^n x_jA(e_j)=\sum_{j=1}^n x_j\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)e_i.$$

*Отже, кожному лінійному операторові* $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *відповідає матриця* $\mathbf{A}=(a_{ij})$, *за допомогою якої знаходяться значення оператора згідно з останньою формулою. Ця* $n\times n$*-матриця* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *називається матрицею лінійного оператора* $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *в базисі* $\{e_k : k\in\overline{1;n}\}$. *При цьому,*

$$A(x)=\mathbf{Ax}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix},$$

*якщо* $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x=(x_1;...;x_n)\in\mathbb{C}^n$. *Навпаки, якщо* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – $n\times n$-*матриця, то, визначивши оператор* $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, *формулою* $A(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i$, *тобто формулою* $A(x)=\mathbf{Ax}$, *отримуємо лінійний оператор. Таким чином, клас лінійних операторів* $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *можна ототожнити з множиною* $n\times n$-*матриць. При цьому рівним матрицям відповідають рівні оператори і навпаки. Ядро такого оператора має розмірність* $n-r$, *де* $r$ – *ранг матриці* $\mathbf{A}$. *Отже, ядро такого оператора складається тільки з нульового елемента тоді і тільки тоді, коли однорідна система має тільки нульовий розв'язок, тобто коли* $r=n$.

***Приклад 10.*** *Нехай* $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ – *лінійний оператор, заданий матрицею* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *і* $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$. *Тоді* $A(x)=0$ *для тих і тільки тих* $x$, *які є розв'язками системи*

$$\begin{cases} x_1-2x_2=0, \\ -x_1+2x_2=0. \end{cases}.$$

*Оскільки визначник цієї системи дорівнює нулеві, то вона має ненульові розв'язки. При цьому її розв'язки мають вигляд* $x=\begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *де* $x_2\in\mathbb{C}$ – *довільне число. Отже,* $\ker A=\left\{\begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}: x_2\in\mathbb{C}\right\}$ – *одновимірний простір.*

## 3. Лінійні неперервні і обмежені оператори

Нехай $H$ – нормований простір. Оператор $A:H\to H$ називається неперервним у точці $x_0\in H$, якщо

$$(\forall\varepsilon>0)\big(\exists\delta(\varepsilon)>0\big)\big(\forall x:\|x-x_0\|<\delta\big):\|A(x-x_0)\|<\varepsilon.$$

Через $\mathcal{L}(H)$ позначаємо клас лінійних неперервних операторів $A:H\to H$, для яких $D(A)=H$.

**Теорема 1.** *Нехай* $H$ *– нормований простір. Якщо область визначення лінійного оператора* $A: H \to H$ *співпадає з* $H$ *і цей оператор є неперервним в точці* $0$*, то він є неперервним.*

Якщо $H$ – скінченновимірний простір, то кожний лінійний оператор $A: H \to H$ є неперервним. Для нескінченновимірних просторів це твердження не є справедливим (див. приклад 3).

***Приклад 1.*** *Тотожній оператор, тобто такий оператор* $I: H \to H$*, для якого* $I(x) = x$ *для кожного* $x \in H$*, є неперервним.*

Лінійний оператор $A: H \to H$ називається обмеженим на нормованому просторі $H$, якщо

$$(\exists c_1 > 0)(\forall x \in H): \|A(x)\| \le c_1 \|x\|.$$

**Теорема 2.** *Для того щоб лінійний оператор* $A: H \to H$ *в нормованому просторі* $H$ *був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.*

***Приклад 2.*** *Розглянемо оператор* $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$*, визначений формулою* $Ax(t) = tx(t)$*. Легко бачити, що цей оператор є лінійним. Оскільки*

$$\|Ax(t)\| = \left( \int_0^1 |tx(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} \le \left( \int_0^1 |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} = \|x(t)\|,$$

*то оператор* $A$ *є також обмеженим. Тому оператор* $A$ *є неперервним в просторі* $L_2[0;1]$.

***Приклад 3.*** *В просторі* $H$ *функцій, неперервно диференційовних на* $[0;\pi]$*, з нормою* $\|x\| = \left( \int_0^{\pi} |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}$*, розглянемо оператор диференціювання* $\mathrm{D}: x \to x'$*. Цей оператор є лінійним, що випливає з правил знаходження похідних. Нехай* $x_n = \sin nt$*. Тоді* $x_n' = \mathrm{D}(x_n) = n \cos nt$*,*

$$\|x_n\| = \left( \int_0^{\pi} \sin^2 nt dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2nt}{2} dt \right)^{1/2} = \sqrt{\pi / 2},$$

$$\|x_n'\| = n \left( \int_0^{\pi} \cos^2 nt dt \right)^{1/2} = n \left( \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2nt}{2} dt \right)^{1/2} = n\sqrt{\pi / 2}, \ \|\mathrm{D}(x_n)\| = n \|x_n\|.$$

*Тому цей оператор не є обмеженим на розглядуваному просторі* $H$ *і, отже, не є неперервним. Таким чином, якщо простір є нескінченновимірним, то не кожний лінійний оператор є неперервним.*

## 4. Норма лінійного неперервного оператора

Нормою лінійного неперервного оператора $A: H \to H$ на нормованому просторі $H$ називається число

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| / \|x\| : x \neq 0\}. \tag{1}$$

З означення випливає, що

$$(\forall x \in H) : \|A(x)\| \le \|A\| \|x\|. \tag{2}$$

Знаходження норми оператора є досить складною задачею.

**Теорема 1.** *Норма лінійного неперервного оператора* $A: H \to H$ *на нормованому просторі* $H$ *знаходиться за кожною з наступних формул:*

$$\|A\| = \min\{c_1 : (\forall x \in H) : \|A(x)\| \le c_1 \|x\|\}, \tag{3}$$

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| = 1\}, \tag{4}$$

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \le 1\}. \tag{5}$$

**Доведення**. Позначимо праві частини (3)–(5) через $m_1$, $m_2$ та $m_3$ відповідно. Із (2) випливає, $m_1 \le \|A\|$. Припустимо, що $m_1 < \|A\|$. Тоді $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| / \|x\| : x \neq 0\} \le \sup\{m_1 \|x\| / \|x\| : x \neq 0\} = m_1$, тобто $\|A\| \le m_1$. Суперечність. Тому $\|A\| = m_1$. Далі,

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| / \|x\| : x \neq 0\} = \sup\{A(x / \|x\|) : x \neq 0\} = \sup_{\|t\|=1} \|A(t)\| = m_2 .$$

Крім цього, міркуваннями від супротивного переконуємось, що $\|A\|$ збігається з найменшою сталою $c_1$ такою, що $(\forall x \in H) : \|A(x)\| \le c_1 \|x\|$. Крім цього,

$$m_3 = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \le 1\} = \sup\{\|A(x / \|x\|)\| : \|x\| \le 1\} = \{\|A(t)\| : \|t\| = 1\} = m_2$$

і теорему доведено. ▶

***Приклад 1.*** *Якщо* $I: H \to H$ *– тотожній оператор, то* $I(x) = x$, $\|I(x)\| = \|x\|$ *і* $\|I\| = 1$.

***Приклад 2.*** *Якщо* $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *– оператор, визначений формулою* $A(x)=ax$*, то* $\|A\|=|a|$.

***Приклад 3.*** *В просторі* $C[a;b]$ *функцій, неперервних на* $[a;b]$*, з нормою* $\|x\|=\sup\{|x(t)|:t\in[a;b]\}$ *розглянемо оператор* $A$ *множення на функцію* $d\in C[a;b]$*. Тоді* $|(Ax)(t)|=|d(t)||x(t)|$ *і* $\|A(x)\|\le\|d\|\|x\|$*. Тому цей оператор є обмеженим і* $\|A\|\le\|d\|$. Окрім цього, якщо $x(t)\equiv 1$, то $\|x\|=1$, $(Ax)(t)=d(t)$, $\|A(x)\|=\|d\|=\|d\|\|x\|$. Тому $\|A\|\ge\|d\|$. Отже, $\|A\|=\|d\|$.

***Приклад 4.*** *В просторі* $L_2(\mathbb{R})$ *розглянемо оператор зсуву* $A_\tau(x)(t)=x(t+\tau)$*, де* $\tau\in\mathbb{R}$*. Тоді*

$$\|A_\tau(x)\|=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t+\tau)|^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=\|x\|.$$

*Тому цей оператор є обмеженим і* $\|A_\tau\|=1$.

***Приклад 5.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$ *розглянемо оператор* $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*, заданий формулою* $A(x)=y$*, де* $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ *і* $y=\begin{pmatrix}2x_1\\3x_2\end{pmatrix}$.

*Тоді* $\|A(x)\|=\sqrt{4x_1^2+9x_2^2}\le 3\sqrt{x_1^2+x_2^2}=3\|x\|$. Тому $\|A\|\le 3$. *Якщо* $\tilde{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, *то* $\|\tilde{x}\|=1$ і $\|A(\tilde{x})\|=\sqrt{0+9}=3=3\|\tilde{x}\|$. *Тому* $\|A\|\ge 3$.*Отже,* $\|A\|=3$.

***Приклад 6.*** *Розглянемо оператор* $A:C[0;1]\to C[0;1]$*, визначений формулою* $A(u)(x)=\int_0^x xtu(t)dt$*. Тоді*

$$|A(u)(x)|\le\|u\|\int_0^x xtdt=x^3\|u\|/2\le\|u\|/2.$$

*Тому* $\|A\|\le 1/2$*. Якщо* $u=1$*, то* $|A(u)(x)|=\|u\|\int_0^x xtdt=x^3\|u\|/2$ *і* $\|A(u)\|=\|u\|/2$*. Тому* $\|A\|\ge 1/2$*. Отже,* $\|A\|=1/2$.

***Приклад 7.*** *В просторі* $\mathbb{C}^n_\infty$, *тобто у векторному просторі* $\mathbb{C}^n$ *з нормою* $\|z\| = \max\left\{|z_i| : i \in \overline{1;n}\right\}$, *розглянемо оператор* $A : \mathbb{C}^n_\infty \to \mathbb{C}^n_\infty$, *який в стандартному базисі цього простору має матрицю* $\mathbf{A} = (a_{ij})$. *Тоді* $\|A\| = l$, де

$$l := \max\left\{|a_{i1}| + ... + |a_{in}| : i \in \overline{1;n}\right\} = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : i \in \overline{1;n}\right\}.$$

*Справді,*

$$A(z) = \mathbf{Az} = \begin{pmatrix} a_{11}z_1 + ... + a_{1n}z_n \\ ..................... \\ a_{n1}z_1 + ... + a_{nn}z \end{pmatrix}$$

*і*

$$\|A(z)\| = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}z_1 + ... + a_{1n}z_n \\ ..................... \\ a_{n1}z_1 + ... + a_{nn}z \end{pmatrix}\right\| = \max\left\{|a_{i1}z_1 + ... + a_{in}z_n| : i \in \overline{1;n}\right\}$$

$$\leq \max\left\{\left(|a_{i1}||z_1| + ... + |a_{in}||z_n|\right) : i \in \overline{1;n}\right\}$$

$$\leq \|z\| \max\left\{|a_{i1}| + ... + |a_{in}| : i \in \overline{1;n}\right\} = \|z\| l.$$

Тому $\|A(z)\| / \|z\| \leq l$ і $\|A\| \leq l$. *Нехай*

$$\max\left\{|a_{i1}| + ... + |a_{in}| : i \in \overline{1;n}\right\} = |a_{k1}| + ... + |a_{kn}|,$$

*і* $\tilde{z} = (\tilde{z}_1; ...; \tilde{z}_n)$, *де*

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} \overline{a_{kj}} / |a_{kj}|, & a_{kj} \neq 0, \\ 0, & a_{kj} = 0. \end{cases}$$

*Тоді* $\|\tilde{z}\| = 1$ *і*

$$\|A(\tilde{z})\| = \max\left\{|a_{i1}\tilde{z}_1 + ... + a_{in}\tilde{z}_n| : i \in \overline{1;n}\right\} \geq |a_{k1}\tilde{z}_1 + ... + a_{kn}\tilde{z}_n|$$

$$= |a_{k1}| + ... + |a_{kn}| = l = \|\tilde{z}\| l.$$

*Тому* $\|A(\tilde{z})\| / \|\tilde{z}\| = l$ і $\|A\| \geq l$. Отже, $\|A\| = l$.

***Приклад 8.*** *В просторі* $\mathbb{C}^n_1$, *тобто у векторному просторі* $\mathbb{C}^n$ *з нормою* $\|z\| = |z_1| + ... + |z_n|$, *розглянемо оператор* $A : \mathbb{C}^n_1 \to \mathbb{C}^n_1$, *який в стандартному базисі цього простору має матрицю* $\mathbf{A} = (a_{ij})$*. Тоді* $\|A\| = L$, де $L = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{|a_{ij}| : j \in \overline{1;n}\right\}$*. Справді,*

$$A(z) = \mathbf{Az} = \begin{pmatrix} a_{11}z_1 + ... + a_{1n}z_n \\ .................... \\ a_{n1}z_1 + ... + a_{nn}z \end{pmatrix}$$

*і*

$$\|A(z)\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}z_1 + ... + a_{in}z_n| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}z_j| \le \sum_{i=1}^{n} \max\left\{|a_{ij}| : j \in \overline{1;n}\right\} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \max\left\{|a_{ij}| : j \in \overline{1;n}\right\}\left(|z_1| + ... + |z_n|\right) \le \|z\| \sum_{i=1}^{n} \max\left\{|a_{ij}| : j \in \overline{1;n}\right\}.$$

*Тому* $\|A(z)\| / \|z\| \le L$ *і* $\|A\| \le L$*. Нехай* $\max\left\{|a_{ij}| : j \in \overline{1;n}\right\} = |a_{ik}|$ *і* $\tilde{z} = (\tilde{z}_1;...;\tilde{z}_n)$*, де*

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \ne k. \end{cases}$$

Тоді $\|\tilde{z}\| = 1$, $L = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$ *і*

$$\|A(\tilde{z}\| = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}\tilde{z}_1 + ... + a_{in}\tilde{z}_n| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{z}_j\right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \|\tilde{z}\| \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \|\tilde{z}\| L.$$

Тому $\|A(\tilde{z})\| / \|\tilde{z}\| \ge L$ *і* $\|A\| \ge L$. Отже, $\|A\| = L$.

Якщо $H_1$ і $H_2$ – два нормовані простори з нормами $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ відповідно, то лінійний оператор $A: H_1 \to H_2$ називається обмеженим в $H$ , якщо

$$\left(\exists c_1\right)\left(\forall x \in H_1\right) : \|A(x)\|_2 \le c_1 \|x\|_1.$$

При цьому нормою оператора $A: H_1 \to H_2$ називається число

$$\|A\| = \sup\left\{\|A(x)\|_2 / \|x\|_1 : x \ne 0\right\}.$$

***Приклад 9.*** *Оператор* $A: L_2[0;2\pi] \to l_2$*, який кожному елементу* $f \in L_2[0;2\pi]$ *ставить у відповідність послідовність* $c(f) = \left(c_k(f) : k \in \mathbb{Z}\right)$ *за формулою*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt,$$

*є обмеженим і* $\|A\|=\sqrt{1/(2\pi)}$*, оскільки за рівністю Парсеваля* $\|A(f)\|=\|c(f)\|=\sqrt{1/(2\pi)}\,\|f\|$.

## 5. Неперервність і норма інтегрального оператора Фредгольма

Оператор $A$, заданий формулою

$$A(u)(x)=\int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt, \tag{1}$$

називається інтегральним оператором Фредгольма, а функція $K$ – його ядром.

**Теорема 1.** *Якщо* $K$ *– неперервне ядро, тобто* $K\in C([a;b]\times[a;b])$*, то оператор Фредгольма* $A:C[a;b]\to C[a;b]$*, визначений рівністю (1), є неперервним в просторі* $C[a;b]$ *і*

$$\|A\|=\sup\left\{\int\limits_a^b |K(x;t)|dt : x\in[a;b]\right\}. \tag{2}$$

**Теорема 2.** *Якщо* $K$ *– полярне ядро, тобто* $K(x;t)=\dfrac{\tilde{K}(x;t)}{|x-t|^{\alpha}}$*, де* $\tilde{K}\in C([a;b]\times[a;b])$ *– неперервне ядро і* $\alpha<1$*, то оператор Фредгольма* $A:C[a;b]\to C[a;b]$*, визначений рівністю (1), є неперервним в просторі* $C[a;b]$ *і*

$$\|A\|\le\sup\left\{\int\limits_a^b |K(x;t)|dt : x\in[a;b]\right\}. \tag{3}$$

***Приклад 1.*** *Якщо* $A:C[0;1]\to C[0;1]$ *– інтегральний оператор Фредгольма з ядром* $K(x;t)=xt$*, то*

$$\|A\|=\max\left\{\int\limits_0^1 xtdt : x\in[0;1]\right\}=\frac{1}{2}.$$

**Теорема 3.** *Нехай* $K$ *– квадратично інтегровне ядро, тобто*

$$\|K\| = \left( \int_a^b \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dxdt \right)^{1/2} < +\infty . \qquad (4)$$

*Тоді оператор Фредгольма* $A : L_2[a;b] \to L_2[a;b]$, *визначений рівністю (1), є неперервним в просторі* $L_2[a;b]$ *і*

$$\|A\| \le \left( \int_a^b \int_a^b |K(x;t)|^2 dxdt \right)^{1/2} . \qquad (5)$$

**Доведення.** За теоремою Фубіні функція $\psi(t) = K(x;t)$ належить до $L_2[a;b]$ для майже всіх $x \in [a;b]$. Нехай $v = A(u)$. За нерівністю Шварца

$$|v(x)|^2 = \left| \int_a^b K(x;t)\, u(t)\, dt \right|^2 \le \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dt \int_a^b |u(t)|^2 \, dt = \|u\|^2 \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dt .$$

Тому

$$\int_a^b |v(x)|^2 dx \le \|u\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dxdt ,$$

тобто $v \in L_2[a;b]$ і

$$\|A(u)\|^2 \le \|u\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dxdt .$$

Отже, $\|A\| \le \|u\| \|K\|$ і тому оператор $A$ є обмеженим. ►

***Приклад 2.*** *Для оператора* $A(u)(x) = \int_0^1 xtu(t)dt$, *розглядуваного в просторі* $L_2[0;1]$, *маємо*

$$\|A\| \le \left( \int_0^1 \int_0^1 (xt)^2 dxdt \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} .$$

***Приклад 3.*** *Якщо* $K \in C([0;b] \times [0;b])$, *то оператор* $A : C[0;b] \to C[0;b]$ *Вольтерра, визначений формулою* $A(u)(x) = \int_0^x K(x;t)u(t)dt$, *є неперервним в просторі* $C[0;b]$ *і*

$$\|A\| \le \sup \left\{ \int_a^x |K(x;t)| dt : x \in [0;b] \right\} .$$

*Справді, за властивостями інтегралів, залежних від параметра*

$A(u)\in C[0;b]$, *якщо* $u\in C[0;b]$ *і*

$$|A(u)(x)|\le\|u\|\sup\left\{\int_a^x|K(x;t)|dt : x\in[0;b]\right\}.$$

## 6. Збіжність послідовності операторів. Принцип рівномірної обмеженості для операторів. Простір лінійних неперервних операторів

Нехай $H_1$ і $H_2$ – два лінійні топологічні простори. Послідовність операторів $A_n : H_1\to H_2$ називається збіжною до оператора $A: H_1\to H_2$, якщо

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists n^*(\varepsilon)\in\mathbb{N}\right)\left(\forall n\ge n^*(\varepsilon)\right):\|A_n-A\|<\varepsilon .$$

**Теорема 1 (Банаха-Штейнгауза).** *Якщо послідовність* $(A_n)$ *лінійних неперервних операторів* $A_n\in\mathcal{L}(H)$ *на банаховому просторі* $H$ *є поточково обмеженою, тобто*

$$\left(\forall x\in H\right)\left(\exists c_1\right)\left(\forall n\right):\|A_n(x)\|\le c_1, \tag{1}$$

*то ця послідовність рівномірно обмежена, тобто*

$$\left(\exists c_2\right)\left(\forall n\right):\|A_n\|\le c_2. \tag{2}$$

***Наслідок 1.*** *Послідовність* $(A_n)$ *лінійних неперервних операторів* $A_n\in\mathcal{L}(H)$ *на банаховому просторі* $H$ *є поточково обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона є рівномірно обмеженою.*

***Приклад 1.*** *Нехай* $A_n : L_2[0;2\pi]\to L_2[0;2\pi]$ – *оператор, визначений формулою* $A_n(f)(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k(f)e^{ikx}$, *де*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt .$$

*Тоді*

$$\|A_n(f)\|=\sqrt{\sum_{|k|\le n}|c_k|^2(f)}\le\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2(f)}=\|f\| .$$

*Таким чином, послідовність* $(A_n)$ *розглядуваних операторів є поточково обмеженою в* $L_2[0;2\pi]$. *Тому за теоремою Банаха-*

*Штейнгауза послідовність* $\left(\|A_n\|\right)$ *є обмеженою в* $\mathbb{R}$. *Це ж випливає з попередньої нерівності, бо*

$$\|A_n\| = \sup\left\{\|A_n(f)/\|f\|\|: f \neq 0\right\} \leq 1.$$

Сумою двох операторів $A_1 : H \to H$ і $A_2 : H \to H$ назвемо оператор $A = A_1 + A_2$, для якого $D(A) = D_1(A) \cap D_2(A)$ і образом кожного $x \in H$ є елемент $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$. Добутком оператора $A_1 : H \to H$ на число $c_1$ називається оператор $A: H \to H$, визначений рівністю $A(x) = c_1 A_1(x)$. Нульовим оператором називається такий оператор $O$, для якого $(\forall x \in D(O)) : O(x) = 0$. Через $\mathcal{L}(H)$ позначимо простір лінійних неперервних операторів $A: H \to H$, для яких $D(A) = H$ з нормою $\|A\| = \sup\{\|A(x)\|/\|x\| : x \neq 0\}$. Вимога $D(A) = H$ є істотною. Власне такі оператори вивчаються, якщо не вказано на інше, в цьому та в наступних трьох розділах.

**Теорема 2.** *Для кожного банахового простору* $H$ *простір* $\mathcal{L}(H)$ *є банаховим.*

**Доведення.** Нехай $(A_n)$ – фундаментальна в $\mathcal{L}(H)$ послідовність. Тоді

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists n^\bullet\right)\left(\forall n \geq n^\bullet\right) : \|A_n - A_m\| < \varepsilon. \tag{1}$$

З нерівності $\|A_n(x) - A_m(x)\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\|$ випливає, що для кожного $x \in H$ послідовність $(A_n(x))$ є фундаментальною в $H$. Тому завдяки повноті $H$ для кожного $x \in H$ існує границя $A(x) := \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$, якою визначається лінійний оператор $A: H \to H$. Послідовність $(A_n(x))$ є збіжною, а тому обмеженою. Отже, $\left(\forall x \in H\right)\left(\exists c_1\right)\left(\forall n\right) : \|A_n(x)\| \leq c_1$ і за теоремою Банаха-Штейнгауза оператор $A$ неперервний. Перейшовши в (1) до границі при $m \to \infty$, отримуємо

$$\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\exists n^\bullet\right)\left(\forall n \geq n^\bullet\right) : \|A_n - A\| < \varepsilon.$$

Тому послідовність $(A_n)$ збігається в $\mathcal{L}(H)$. Таким чином $\mathcal{L}(H)$ – повний простір. ►

Нехай $H$ – банахів простір. Збіжність послідовності $(A_n)$ операторів $A_n \in \mathcal{L}(H)$ за нормою простору $\mathcal{L}(H)$ інколи називають рівномірною збіжністю в $\mathcal{L}(H)$. Поточкову збіжність, тобто збіжність в $H$ послідовності $(A_n(x))$ для кожного $x \in H$ називають сильною збіжністю в $\mathcal{L}(H)$ послідовності $(A_n)$ операторів $A_n \in \mathcal{L}(H)$.

**Теорема 3.** *Нехай* $H$ *– банахів простір. Якщо послідовність* $(A_n)$ *збігається в* $\mathcal{L}(H)$, *то вона поточково збігається.*

**Доведення.** Це твердження випливає з нерівностей $\|A_n(x) - A(x)\| \le \|A_n - A\| \|x\|$. ▶

***Приклад 2.*** *Розглянемо послідовність* $(A_n)$ *операторів* $A_n : l_2 \to l_2$, *визначену рівністю* $A_n(x) = y(n)$, *де* $x = (x_1;...;x_n;...)$, $y(n) = (y_{2,n};...;y_{i,n};...)$, *причому* $y_{j,n} = x_j$, *якщо* $1 \le j \le n$, *і* $y_{j,n} = 0$, *якщо* $j > n$. *Тоді* $\|A_n(x) - x\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^2 \to 0$, $n \to \infty$. *Тому розглядувана послідовність операторів поточково збігається до одиничного оператора* $I(x) = x$. *Далі, візьмемо таке* $x(n) \in l_2$, *що* $\|x(n)\| = 1$ *і* $A_n(x(n)) = 0$. *Тоді* $\|(A_n - E)(x(n))\| = 1$. *Тому*

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|=1}\{\|(A_n - I)(x)\|\} \ge 1.$$

*Отже,* $(A_n)$ *є розбіжною послідовністю в* $\mathcal{L}(H)$. *Розглядуваний приклад показує, що твердження, обернене до теореми 2, не є правильним.* ▶

***Приклад 3.*** *Нехай* $A_n : L_2[0;2\pi] \to L_2[0;2\pi]$ *– оператор, визначений за формулою*

$$A_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx},$$

*де*

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

*Тоді*

$$\|I(f) - A_n(f)\| = \|f - A_n(f)\| = \sqrt{\sum_{|k| \ge n} |c_k|^2 (f)} \to 0.$$

*Таким чином, послідовність* $(A_n)$ *розглядуваних операторів поточково в* $L_2[0;2\pi]$ *збігається до тотожного оператора* $I : L_2[0;2\pi] \to L_2[0;2\pi]$.

## 7. Добуток операторів. Добуток інтегральних операторів

Добутком двох операторів $A : H \to H$ та $B : H \to H$ називається композиція цих операторів: $AB = A \circ B$, тобто оператор $C = AB : H \to H$, визначений формулою $C(x) = A(B(x))$. При цьому, $AB$ не обов'язково дорівнює $BA$. Оператори $A : H \to H$ та $B : H \to H$, для яких $AB = BA$ називаються комутуючими.

**Теорема 1.** *Добуток* $C = AB : H \to H$ *двох лінійних операторів* $A : H \to H$ *та* $B : H \to H$ *є лінійним оператором і* $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

**Доведення.** Справді,

$$C(c_1x_1 + c_2x_2) = A(B(c_1x_1 + c_2x_2)) = A(c_1B(x_1) + c_2B(x_2))$$
$$= c_1A(B(x_1)) + c_2A(B(x_2)) = c_1C(x_1) + c_2C(x_2) .$$

Крім цього, $\|A(B(x))\| \le \|A\|\|B(x)\| \le \|A\|\|B\|\|x\|$. ▶

***Приклад 1.*** *Якщо оператори* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *та* $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *визначені відповідно формулами* $A(x) = ax$ *і* $B(x) = bx$, *де* $a \in \mathbb{R}$ *і* $b \in \mathbb{R}$, *то їх добутком є оператор* $C = AB : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *визначений формулою* $C(x) = abx$.

***Приклад 2.*** *Операції над операторами подібні до операцій над матрицями. Нагадаємо ці поняття. Добутком матриці* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *на число* $c$ *називається матриця* $c\mathbf{A} = (ca_{ij})$. *Сумою двох матриць* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *та* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *однакового порядку називається матриця* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$. *Добутком* $n \times n$*-матриці* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *та* $n \times n$*-матриці* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ *називається* $n \times n$*-матриця* $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})$, *елементи якої знаходяться за формулами (*$i$*-тий рядок множиться на* $j$*-тий стовбець)*

$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}$. *Якщо* $H$ – $n$*-вимірний векторний простір і* $A : H \to H$ *та* $B : H \to H$ *– лінійні оператори, задані матрицями* $\mathbf{A}$ *та* $\mathbf{B}$*, відповідно, то матриця* $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})$ *є матрицею оператора* $C = AB : H \to H$.

**Теорема 2.** *Нехай* $Q = [a;b] \times [a;b]$, $K_1 : Q \to \mathbb{C}$ *і* $K_2 : Q \to \mathbb{C}$ *– функції, неперервні на* $Q$ *і*

$$K_3(x;t) = \int_a^b K_2(x;\tau) K_1(\tau;t) d\tau .$$

*Тоді добутком операторів* $A(u)(x) = \int_a^b K_2(x;t) u(t) dt$ *та* $B(u)(x) = \int_a^b K_1(x;t) u(t) dt$ *є оператор* $C = AB$*, визначений формулою*

$$C(u)(x) = \int_a^b K_3(x;t) u(t) dt .$$

**Доведення**. Функція $K_2(x;t)$ є неперервною на $Q$, що випливає з властивостей інтегралів залежних від параметру. Далі,

$$C(u)(x) = A(B(u))(x) = \int_a^b K_2(x;\tau) B(u)(\tau) d\tau$$

$$= \int_a^b K_2(x;\tau) \left( \int_a^b K_1(\tau;t) u(t) dt \right) d\tau = \int_a^b u(t) dt \left( \int_a^b K_2(x;\tau) K_1(\tau;t) \right) d\tau$$

$$= \int_a^b u(t) dt \left( \int_a^b K_2(x;\tau) K_1(\tau;t) d\tau \right) = \int_a^b K_3(x;t) u(t) dt . \blacktriangleright$$

***Наслідок 1.*** *Добуток інтегральних операторів Фредгольма з неперервним ядром є інтегральний оператор Фредгольма з неперервним ядром.*

***Приклад 3.*** *Нехай оператор* $B : C[0;1] \to C[0;1]$*, визначений рівністю* $B(u)(x) = \int_0^1 xtu(t) dt$*, а оператор* $A : C[0;1] \to C[0;1]$*, визначений рівністю* $A(u)(x) = \int_0^1 x^2 tu(t) dt$*. Тоді оператор* $C = AB$

*задається рівністю* $C(u)(x)=\frac{1}{3}\int_0^1 x^2 tu(t)dt$, *бо* $K_1(\tau;t)=\tau t$, $K_2(x;\tau)=x^2\tau$ *і*

$$K_3(x;t)=\int_0^1 K_2(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau=\int_0^1 x^2\tau\tau t d\tau=\int_0^1 x^2 t\tau^2 d\tau=\frac{x^2t}{3}.$$

**Теорема 3.** *Нехай* $Q=[a;b]\times[a;b]$, $K_2:Q\to\mathbb{C}$, $K_1:Q\to\mathbb{C}$ – *функції, неперервні на* $Q$ *і* $K_3(x;t)=\int_t^x K_2(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau$. *Тоді добутком операторів* $A(u)(x)=\int_a^x K_2(x;t)u(t)dt$ *та* $B(u)(x)=\int_a^x K_1(x;t)u(t)dt$ *є оператор* $C=AB$, *визначений формулою*

$$C(u)(x)=\int_a^x K_3(x;t)u(t)dt.$$

**Доведення**. Справді,

$$C(u)(x)=A(B(u))(x)=\int_a^x K_2(x;\tau)B(u)(\tau)d\tau=\int_a^x K_2(x;\tau)\left(\int_a^\tau K_1(\tau;t)u(t)dt\right)d\tau$$

$$=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K_2(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau\right)=\int_a^x K_3(x;t)u(t)dt.$$ ►

## 8. Обернений оператор

Нехай $H$ – деяка непорожня множина. Оператор $A:H\to H$ називається оборотним, якщо з рівності $A(x_1)=A(x_2)$ випливає, що $x_1=x_2$. Оператор $A^{-1}:H\to H$ називається оберненим оператором оператора $A:H\to H$, якщо $D(A^{-1})=E(A)$ і

$$\big(\forall x\in D(A)\big):A^{-1}\big(A(x)\big)=x, \qquad (1)$$

$$\big(\forall y\in D(A^{-1})\big):A\big(A^{-1}(y)\big)=y. \qquad (2)$$

Обернений оператор мають тільки оборотні оператори. Якщо $D(A^{-1})=E(A)$ і виконується (1), то оператор $A:H\to H$ є оборотним і виконується (2). Тому часто саме такий оператор називають оберненим. Оператор $A^{-1}: H \to H$, для якого виконується (2), називається правим оберненим оператором оператора $A: H \to H$. Правих обернених для оператора $A: H \to H$ може бути декілька. Якщо виконується (2), то не обов'язково виконується (1). Якщо ж оператор $A: H \to H$ є оборотним і виконується (2), то виконується і (1). У функціональному аналізі дуже важливим є питання про те, за яких умов $D(A^{-1}) = H$.

Якщо для оператора $A: H \to H$ існує оператор $A^{-1}: H \to H$ з властивістю (1), то для кожного $y \in H$ рівняння $A(x) = y$ має не більше одного розв'язку і для кожного $y \in E(A)$ це рівняння має єдиний розв'язок $x = A^{-1}(y)$.

Для кожного оператора $A: H \to H$ і кожного $y \in E(A)$ рівняння $A(x) = y$ має принаймні один розв'язок і ним є $x = A^{-1}(y)$, де $A^{-1}: H \to H$ – довільний правий обернений оператор .

**Теорема 1.** *Якщо* $H$ *– векторний простір і* $A: H \to H$ *– лінійний оборотний оператор, то обернений оператор* $A^{-1}: H \to H$ *також лінійний.*

**Доведення.** Множина $E(A)$ є векторним підпростором простору $H_1$. Справді, якщо $y_1 \in E(A)$ і $y_2 \in E(A)$, то $y_1 = A(x_1)$, $y_2 = A(x_2)$ і $A(c_1 x_1) + A(c_2 x_2) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \in E(A)$ для будь-яких сталих $c_1$ і $c_2$. Отже, $E(A)$ – підпростір. До того ж,

$$A^{-1}(c_1 y_1 + c_2 y_2) = A^{-1}\left(A(c_1 x_1 + c_2 x_2)\right)$$

$$= c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 A^{-1}(y_1) + c_2 A^{-1}(y_2)$$

для будь-яких числових сталих $c_1$ і $c_2$ та будь-яких $y_1 \in E(A)$ і $y_2 \in E(A)$. Отже, $A^{-1}$ – лінійний оператор. ►

***Приклад 1.*** *Якщо* $H = \mathbb{R}$ *і* $A(x) = x^2$, *то ця функція (оператор)* $A$ *не є оборотною і тому не має оберненої функції. Проте* $A_1^{-1}(A(x)) = x$, *якщо* $x \in [0; +\infty)$ *і* $A_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$. *Крім цього,* $A_1^{-1}(A(x)) = x$, *якщо* $x \in (-\infty; 0]$ *і* $A_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$. *Тому звуження функції* $A$ *на проміжок* $[0; +\infty)$ *має обернену функцію* $A_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ *і* *звуження функції* $A$ *на проміжок* $(-\infty;0]$ *має обернену функцію* $A_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$.

***Приклад 2.*** *Тотожній оператор, тобто такий оператор* $I: H \to H$, *для якого* $I(x) = x$ *для кожного* $x \in H$, *є оборотним і для нього* $I^{-1} = I$ *і* $D(I^{-1}) = H$.

***Приклад 3.*** *Якщо оператор* $A: H \to H$ *на векторному просторі* $H$ *є оборотним, то для кожного* $\lambda \in \mathbb{C}$ *оператор* $\lambda A$ *також є оборотним* $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$. *Якщо* $A: H \to H$ *такий оператор, що оператор* $I - \frac{1}{\lambda} A$ *має обернений, то оператор* $\lambda I - A$ *також має обернений і* $\left(\lambda I - A\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda} A\right)^{-1}$.

***Приклад 4.*** *Розглянемо оператор* $F: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, *визначений рівністю* $F(f) = \widehat{f}$, *де*

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx,$$

*тобто* $F$ *– це оператор Фур'є розглядуваний в* $L_2(\mathbb{R})$. *Цей оператор відображає* $L_2(\mathbb{R})$ *на* $L_2(\mathbb{R})$, *є оборотним і оберненим до нього є оператор* $F^{-1}: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, *визначений рівністю* $F^{-1}(\widehat{f}) = f$, *де*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y) e^{iyx} dy.$$

*В даному випадку* $D(A) = E(A) = D(A^{-1}) = E(A^{-1}) = H = L_2(\mathbb{R})$.

***Приклад 5.*** *Розглянемо в просторі* $l_2$ *оператор* $A$, *визначений рівністю* $A(x) = y$, *де* $x = (x_1; x_2; ...; x_n; ...)$, $y = (0; x_1; x_2; ...; x_n; ...)$. *Цей оператор є оборотним, але* $A(l_2) \neq l_2$. *Оберненим до нього є оператор* $A^{-1}$, *який задається рівністю* $A^{-1}(y) = x$, *визначений для тих* $y = (y_1; ...; y_n; ...)$, *для яких* $y_1 = 0$, *де* $x = (y_2; y_3; ...; y_n; ...)$.

***Приклад 6.*** *Розглянемо в просторі* $l_2$ *оператор* $B$, *визначений рівністю* $B(x)=y$, *де* $x=(x_1,..,x_n,...)$, $y=(x_2,x_3,...x_n,...)$. *Цей оператор не є оборотним, бо образами точок* $(1;0;...;0;...)$ *і* $(0;0;...;0;...)$ *є точка* $(0;0;...;0;...)$.

***Зауваження 1.*** *Для операторів* $A^{-1}$ *та* $B$, *розглянутих в прикладах 5 і 6,* $A^{-1}(y)=B(y)$ *для всіх* $y\in D(A^{-1})$. *Але* $A^{-1}\neq B$, *бо множина* $D(B)$ *є ширшою за* $D(A^{-1})$. *Крім цього, оператор* $A$ *є оборотним, а оператор* $B$ *не є таким. Цей приклад показує, що при розгляді конкретних операторів потрібно точно вказувати множину, на якій цей оператор розглядається, тобто множину визначення оператора.*

***Зауваження 2.*** *Поняття оберненого оператора подібне до поняття оберненої матриці. Нагадаємо це поняття.* $n\times n$-*матриця* $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n}^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{-1} & \cdots & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$ *зветься оберненою матрицею до* $n\times n$-*матриці* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *якщо* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$, *де* $\mathbf{I}$ – *одинична* $n\times n$-*матриця. Для того щоб* $n\times n$-*матриця* $\mathbf{A}$ *мала обернену матрицю* $\mathbf{A}^{-1}$, *необхідно і достатньо, щоб визначник* $\Delta$ *матриці* $\mathbf{A}$ *не дорівнював нулеві. При цьому, обернена матриця знаходиться за формулою*

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}/\Delta & \cdots & A_{n1}/\Delta \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n}/\Delta & \cdots & A_{nn}/\Delta \end{pmatrix},$$

*де* $A_{ij}$ – *алгебраїчне доповнення елемента* $a_{ij}$.

## 9. Степінь оператора. Алгебра лінійних операторів

Нормований простір $\mathcal{L}(H)$ можна розглядати як алгебру, якщо одиничним елементом назвати тотожній оператор, тобто такий оператор $I$, для якого $(\forall x\in H):I(x)=x$; оберненим елементом оператора $A$ називати його обернений оператор $A^{-1}$, добутком двох операторів $A: H \to H$ та $B: H \to H$ – їхню композицію: $AB = A \circ B$, тобто оператор $C = AB: H \to H$, визначений формулою $C(x) = A(B(x))$. За означенням $A^0 = I$ – тотожній оператор, $A^1 = A$, $A^2 = AA, \ldots$, $A^n = AA^{n-1}$, якщо $n > 1$. Якщо $\mathcal{L}(H)$ розглядається як алгебра, то обернений свій елемент мають ті і тільки ті оператори $A$, які є оборотними і для яких оператор $A^{-1}$ є неперервним на $H$, тобто коли $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

***Приклад 1.*** *Якщо оператор* $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *визначений формулою* $A(x) = ax$, *де* $a \in \mathbb{R}$, *то оператор* $A^2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *визначається формулою* $A^2(x) = a^2 x$.

***Приклад 2.*** *Якщо* $K \in C\big([a;b] \times [a;b]\big)$ *і* $A: C[a;b] \to C[a;b]$ – *інтегральний оператор, визначений формулою*

$$A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt,$$

*то для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$ *оператор* $A^n$ *є інтегральний оператор Фредгольма з неперервним ядром* $K_1 := K$, *якщо* $n = 1$ *і*

$$K_n(x;t) = \int_a^b K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau,$$

*якщо* $n > 1$, *тобто*

$$A^n(u)(x) = \int_a^b K_n(x;t)u(t)dt.$$

***Приклад 3.*** *Якщо оператор* $A: C[0;1] \to C[0;1]$, *визначений рівністю*

$$A(u)(x) = \int_0^1 xtu(t)dt,$$

*то*

$$K_1(x;t) = K(x;t) = xt,$$

$$K_2(x;t) = \int_0^1 K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau = \int_0^1 xt\tau^2 d\tau = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x;t) = \int_0^1 K(x;\tau)K_2(\tau;t)d\tau = \frac{1}{3}\int_0^1 xt\tau^2 d\tau = \frac{xt}{3^2},$$

$$K_n(x;t)=\int_0^1 K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau=\frac{1}{3^{n-2}}\int_0^1 xt\tau^2 d\tau=\frac{xt}{3^{n-1}}\,,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

$$A^n(u)(x)=\frac{1}{3^{n-1}}\int_a^b xtu(t)dt\,.$$

***Приклад 4.*** *Якщо* $K\in C\big([a;b]\times[a;b]\big)$ *і* $A:C[a;b]\to C[a;b]$ *– інтегральний оператор, визначений формулою*

$$A(u)(x)=\int_a^x K(x;t)u(t)dt\,.$$

*Тоді*

$$A^2(u)(x)=\int_a^x K(x;\tau)A(u)(\tau)d\tau=\int_a^x K(x;\tau)\left(\int_a^\tau K(\tau;t)u(t)dt\right)d\tau$$

$$=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K(x;\tau)K(\tau;t)d\tau\right)=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K(x;\tau)K(\tau;t)d\tau\right)$$

$$=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau\right)=\int_a^x K_2(x;t)u(t)dt\,,$$

$$A^n(u)(x)=\int_a^x K_n(x;t)u(t)dt\,,$$

*де* $K_1(x;t)=K(x;t)$,

$$K_2(x;\tau)=\int_t^x K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau\,,\ K_n(x;t)=\int_t^x K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau$$

*і*

$$A^n(u)(x)=\int_a^x K_n(x;t)u(t)dt\,.$$

***Приклад 5.*** *Нехай оператор* $B:C[0;1]\to C[0;1]$, *визначений рівністю*

$$A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt\,.$$

*Тоді* $K_1(\tau;t)=K(x;t)=1$, $K_2(x;t)=\int_t^x d\tau=x-t$,

$$K_3(x;t)=\int_t^x K(x;\tau)K_2(\tau;t)d\tau=\int_t^x(\tau-t)d\tau=\frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_n(x;t)=\int_t^x\frac{(\tau-t)^{n-2}}{(n-2)!}d\tau=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

*і*

$$A^n(u)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt.$$

## 10. Умови оборотності лінійного оператора. Неперервність оберненого оператора

Якщо $H$ – скінченновимірний простір, то кожний лінійний оператор $A:H\to H$ є визначеним на всьому просторі $H$ та неперервним і, якщо він є оборотним, то обернений оператор також є лінійним, визначеним на всьому просторі $H$ і неперервним. В нескінченновимірному просторі $H$ не кожний лінійний оператор $A:H\to H$ є неперервним, а якщо він є неперервним і оборотним, то його обернений оператор не обов'язково є визначеним на всьому просторі $H$ та неперервним. В цьому розділі та наступних розділах ця проблема досліджується досить детально.

**Теорема 1.** *Нехай $H$ – векторний простір. Для того щоб лінійний оператор $A:H\to H$ був оборотним, необхідно і достатньо, щоб $A(x)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=0$.*

**Доведення.** Нехай $A:H\to H$ оборотний оператор і $A(x)=0$, коли $x\neq 0$. Але $A(0)=0$. Маємо суперечність з означенням оборотного оператора. Нехай $A(x)=0$ тільки, коли $x=0$ і оператор $A:H\to H$ не є оборотним. Тоді для деяких різних $x_1$ і $x_2$ виконується $A(x_1)=A(x_2)$, тобто $A(x_1-x_2)=0$. Тому $x_1=x_2$. Суперечність. ▶

***Зауваження 1.*** *Якщо $\ker A=\{0\}$, то оператор $A:H\to H$ є оборотним, але обернений оператор не обов'язково є визначеним на $H$.*

***Приклад 1.*** *Розглянемо в просторі $l_2$ оператор $A$, визначений рівністю $A(x)=y$, де $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$ і $y=(0;x_1;x_2;...;x_n;...)$. Тоді $A(x)=0$ тільки тоді, коли*

$x=(0;0;...;0;...)$. *Цей оператор є оборотним, але* $A(l_2)\neq l_2$. *Оберненим до нього є оператор* $A^{-1}$, *який задається рівністю* $A^{-1}(y)=x$, *де* $x=(y_2;y_3;...;y_n;...)$. *Оператор* $A^{-1}$ *визначений для тих* $y=(y_1;...;y_n;...)$, *для яких* $y_1=0$.

Для застосувань важливо з'ясувати, коли оператор, обернений до оператора $A:H\to H$ є неперервним і є визначеним на $H$ .

**Теорема 2 (С. Банаха).** *Нехай* $H$ *– банахів простір і* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор, який є взаємно однозначним відображенням* $H$ *на* $H$ . *Тоді обернений оператор* $A^{-1}:H\to H$ *є неперервним.*

**Теорема 3.** *Нехай* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор і* $A(H)=H$ . *Тоді* $A^{-1}$ *існує і є неперервний тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\exists c_1>0\right)\left(\forall x\in H\right):\left\|A\left(x\right)\right\|\geq c_1\left\|x\right\|.$$

***Приклад 2.*** *Розглянемо оператор* $F:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, *визначений рівністю* $F(f)=\widehat{f}$ , *де* $\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx$, *тобто* $F$ *– це оператор Фур'є розглядуваний в* $L_2(\mathbb{R})$. *Цей оператор відображає* $L_2(\mathbb{R})$ *на* $L_2(\mathbb{R})$ *і є оборотним. Оскільки за рівністю Парсеваля* $\|F(f)\|=\|\widehat{f}\|=\|f\|$, *то* $\|F\|=1$ *і* $F:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ *– обмежений оператор. Тому обернений оператор* $F^{-1}:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, *який задається формулою* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{iyx}dx$, *також є обмеженим.*

## 11. Знаходження розв'язків рівнянь

Одним із основних завдань функціонального аналізу є дослідження рівнянь

$$T(u)=q\,, \tag{1}$$

де $T:H\to H$ – деякий оператор, а $H$ – деякий простір. В цьому зв'язку актуальними є наступні взаємно пов'язані питання.

1. Для яких $q \in H$ рівняння (1) має розв'язок, тобто якою є множина значень оператора $T$ ?

2. За яких умов для кожного $q \in H$ рівняння (1) має розв'язок, тобто коли множина значень оператора $T$ співпадає $H$ ?

3. За яких умов для кожного $q \in H$ рівняння (1) має, не більше одного розв'язку, тобто коли оператор $T$ є оборотним?

4. За яких умов для кожного $q \in H$ рівняння (1) має єдиний розв'язок, тобто коли оператор $T$ є оборотним і обернений оператор $T^{-1} : H \to H$ є визначеним на $H$ ?

5. За яких умов для кожного $q \in H$ рівняння (1) має єдиний розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від $q$, тобто коли оператор $T$ є оборотним і обернений оператор $T^{-1} : H \to H$ є неперервним на $H$ ?

6. Як знайти обернений оператор $T^{-1} : H \to H$, якщо він існує?

7. Як знайти наближений розв'язок рівняння (1) і наскільки цей наближений розв'язок відрізняється від розв'язку?

8. В якому просторі $H$ природно розглядати рівняння (1) і що слід розуміти під розв'язком рівняння (1)?

Якщо для кожного $q \in H$ рівняння (1) має єдиний розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від $q$, тобто оператор $T$ є оборотним і обернений оператор $T^{-1} : H \to H$ є неперервним на $H$ , то рівняння (1) називаються коректно розв'язними. Прикладні задачі, які описуються коректно розв'язними рівняннями, називаються коректно поставленими задачами або коректними задачами. Коректно поставлені задачі відіграють важливу роль в різних розділах природознавства, оскільки дають можливість дослідити зміну явища з часом при незначних змінах початкових даних.

Теореми С. Банаха, Л. Броуера, Ю. Шаудера про нерухому точку та різні теореми про оператори, задані неявно, які ми тут не розглядаємо, дають певні методи розв'язування сформульованих задач для широкого класу операторів. Проте дати повні відповіді на поставлені вище питання в загальному випадку є недосяжним ідеалом. Далі розглядаємо поставлені питання для лінійних операторів. Але навіть для таких операторів в загальному випадку задовільні відповіді відомі за певних обмежень. В скінченновимірних просторах ці проблеми досить повно досліджені.

***Приклад 1.*** *В просторі* $\mathbb{C}$ *лінійне рівняння має вигляд* $ax=b$, *де* $a$ *та* $b$ *– числа. В даному випадку* $T(x)=ax$ *і такий оператор* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *є оборотним тоді і тільки тоді, коли* $a\neq 0$, *і тоді* $T^{-1}(x)=x/a$. *В цьому випадку для кожного* $q\in H$ *таке рівняння має єдиний розв'язок* $x=T^{-1}(q)=q/a$. *Якщо* $a=0$ *і* $q=0$, *то рівняння* $ax=q$ *має нескінченну кількість розв'язків (кожне* $x\in\mathbb{C}$ *є розв'язком). Якщо* $a=0$ *і* $q\neq 0$, *то рівняння* $ax=q$ *не має розв'язків.*

***Приклад 2.*** *Кожний лінійний оператор* $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ *задається* $n\times n$*-матрицею*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Відповідне рівняння* $T(u)=q$ *рівносильне рівнянню* $\mathbf{Tu}=\mathbf{q}$, *тобто системі*

$$\begin{cases} t_{11}u_1+...+t_{1n}u_n=q_1, \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ t_{n1}u_1+...+t_{nn}u_n=q_n. \end{cases}$$

*Тому рівняння* $T(u)=q$ *для кожного* $q\in\mathbb{C}^n$ *має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rang}T=n$.

***Зауваження 1.*** *Поширення основних фактів лінійної алгебри на довільні лінійні рівняння у нескінченновимірних векторних просторах і, зокрема, на нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} t_{11}u_1+...+t_{1n}u_n+...=q_1, \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ t_{m1}u_1+...+t_{mn}u_n+...=q_m, \\ ........................... \end{cases}$$

*з нескінченною кількістю невідомих та на рівняння Фредгольма і Вольтерра, є одним з основних завдань функціонального аналізу. З подальшого буде випливати, що аналоги попередніх тверджень для нескінченновимірних просторів справедливі далеко не для кожного лінійного неперервного оператора* $T: H \to H$. *Проте, якщо оператор* $T: H \to H$ *подається у вигляді* $T = I + A$, *де* $I: H \to H$ *– одиничний оператор, а оператор* $A: H \to H$ *задовольняє додаткові умови, то певні аналоги отримати можна.*

## 12. Рівняння Фредгольма і Вольтерра

Якщо $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ і $-\infty < a < b < +\infty$, то оператор $A$, заданий формулою

$$A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt \qquad (1)$$

називають інтегральним оператором Фредгольма або одновимірним інтегральним оператором Фредгольма. Таким чином, межі інтегрування в (1) є скінченними. Функцію $K:[a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ називають ядром оператора Фредгольма. Ядро $K:[a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ називають неперервним, якщо функція $K$ є неперервною на $[a;b]\times[a;b]$, тобто якщо $K \in C([a;b]\times[a;b])$. Ядро $K:[a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ називають квадратично інтегровним, якщо $K \in L_2([a;b]\times[a;b])$, тобто якщо

$$\|K\| = \left( \int_a^b \int_a^b |K(x;t)|^2 \, dxdt \right)^{1/2} < +\infty .$$

Ядро $K:[a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ називають симетричним, якщо

$$(\forall (x;t) \in [a;b]\times[a;b] \cap D(K)) : \overline{K(t;x)} = K(x;t) .$$

Ядро $K:[a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ називають ядром Гільберта-Шмідта, якщо воно є симетричним і квадратично інтегровним. Якщо $K(x;t) = \dfrac{\tilde{K}(x;t)}{|x-t|^{\alpha}}$, де $\tilde{K}$ – неперервне ядро і $\alpha < 1$, то ядро $K$ називається полярним. Число $\alpha$ називається степенем полярності. Ядро $K$ називається слабко полярним, якщо $K$ – полярне ядро і $\alpha < 1/2$.

Оператор $A$, заданий формулою

$$A(u)(x)=\int_a^x K(x;t)u(t)dt,\ a\in\mathbb{R},$$

називається інтегральним оператором Вольтерра, а функція $K$ – його ядром. Кожний оператор Вольтерра є і інтегральним оператором Фредгольма, оскільки

$$\int_a^x K(x;t)u(t)dt=\int_a^b K_1(x;t)u(t)dt,$$

де

$$K_1(x;t)=\begin{cases}K(x;t), a\le t\le x\le b,\\ 0, \qquad a\le x\le t\le b.\end{cases}$$

Проте, якщо ядро $K$ є неперервним, то ядро $K_1$ не обов'язково є неперервним. Тому оператори Вольтерра з неперервним ядром мають додаткові властивості в порівнянні з операторами Фредгольма.

***Приклад 1.*** *Кожне неперервне ядро є квадратично інтегровним.*

***Приклад 2.*** *Ядро* $K(x;t)=|x-t|$ *є неперервним і симетричним.*

***Приклад 3.*** *Ядро* $K(x;t)=x-it$ *є неперервним, але не є симетричним.*

Рівнянням Фредгольма другого роду називають рівняння

$$u(x)-s\int_a^b K(x;t)u(t)dt=q(x), \qquad (2)$$

де $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ – відома функція двох змінних, яка називається ядром рівняння (2), $q:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ – відома функція однієї змінної, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ – невідома функція і $s$ – деяке число, яке називають параметром. При розгляді рівнянь Фредгольма вважають, що $-\infty<a<b<+\infty$. Це припущення про скінченність проміжку інтегрування, яке далі всюди вважається виконаним, є дуже суттєвим для справедливості тих тверджень, про які йтиметься нижче (якщо проміжок інтегрування є нескінченним, то рівняння (2) відноситься до сингулярних інтегральних рівнянь, теорія яких є складнішою і не так добре розвинутою).

Нехай оператор $A$, визначений формулою (1), $T$ – оператор, визначений формулою

$$T(u)(x) = u(x) - s\int_a^b K(x;t)u(t)dt\,,$$

а $I$ – тотожній оператор, тобто такий оператор, для якого $I(u) = u$. Тоді $T = I - sA$ і рівняння (2) можна записати у вигляді $(I - sA)(u) = q$ ,тобто у вигляді $T(u) = q$.

Рівняння

$$u(x) - s\int_a^b K(x;t)u(t)dt = 0$$

називають однорідним рівнянням Фредгольма другого роду. Його можна записати у вигляді $(I - sA)(u) = 0$ або так: $T(u) = 0$.

Рівняння

$$\int_a^b K(x;t)u(t)dt = q(x)\,,$$

тобто рівняння $A(u) = q$, називають рівнянням Фредгольма першого роду, а рівняння

$$\int_a^b K(x;t)u(t)dt = 0\,,$$

тобто рівняння $A(u) = 0$, називається однорідним рівнянням Фредгольма першого роду.

Оператори $A$ та $T$ є лінійними. Тому рівняння Фредгольма першого та другого родів є лінійними.

Рівнянням Вольтерра другого роду називають рівняння

$$u(x) - s\int_a^x K(x;t)u(t)dt = q(x)\,,$$

де $K:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ – відома функція двох змінних, яка називається ядром рівняння, $q:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – відома функція, $u:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – невідома функція і $s$ – деяке число, яке називають параметром. Рівняння Вольтерра другого роду є частковим випадком рівняння Фредгольма. Тому все сказане вище стосовно рівняння Фредгольма стосується і рівняння Вольтерра. Разом з цим, рівняння Вольтерра має деякі специфічні властивості, на які вкажемо пізніше. Рівняння

$$\int_a^x K(x;t)u(t)dt = q(x)$$

називають рівнянням Вольтерра першого роду. Рівняння Фредгольма і Вольтерра є лінійними. Прикладом нелінійного інтегрального рівняння може служити рівняння

$$u(x) - \int_a^b K(x;t)\left|u(t)\right|^n dt = q(x) .$$

Теорія інтегральних рівнянь подібна до теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь і її можна розглядати як неперервний аналог останньої.

## 13. Рівняння Фредгольма і Вольтерра з виродженим ядром

Рівняння

$$u(x) - s\int_a^b K(x;t)u(t)dt = q(x)$$

називають рівнянням з виродженим ядром, якщо

$$K(x;t) \ = \ \sum_{i=1}^n p_i(x)\overline{g_i(t)}, \tag{1}$$

де $p_i : [a;b] \to \mathbb{C}$ і $g_i : [a;b] \to \mathbb{C}$ – відомі такі функції, неперервні на $[a;b]$, що кожна з систем $\{p_i : i \in \overline{1;n}\}$ та $\{q_i : i \in \overline{1;n}\}$ є лінійно незалежною на $[a;b]$. Знаходження розв’язків таких рівнянь можна звести до знаходження розв’язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$u(x) - \int_a^b K(x;t)u(t)dt = q(x) \tag{2}$$

з виродженим ядром (1). В даному випадку рівняння (2) запишеться у вигляді

$$u(x) - \sum_{i=1}^n \xi_i p_i(x) = q(x) , \tag{3}$$

де

$$\xi_i \ = \ \int_a^b u(t)\overline{g_i(t)}dt . \tag{4}$$

Тому кожна функція $u$ , яка є розв’язком рівняння (2) має вигляд

$$u(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j p_j(x) . \qquad (5)$$

Підставимо таку функцію в наше рівняння. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i(x) - \int_a^b \left( \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \overline{g_i(t)} \right) \left( q(t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j p_j(t) \right) dt = 0$$

і

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x) \left( \xi_i - \int_a^b \left( q(t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j p_j(t) \right) \overline{g_i(t)} dt \right) = 0 .$$

Прирівняємо коефіцієнти, які стоять біля $p_j(x)$, до нуля. Таким чином, для знаходження $\xi_j$ отримаємо систему

$$\xi_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \xi_i = \eta_i , \qquad (6)$$

де

$$\eta_i = \int_a^b q(t) \overline{g_i(t)} dt , \; a_{ij} = \int_a^b p_i(t) \overline{g_j(t)} dt .$$

Бачимо, що функція $u$ є розв'язком рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді (5) і $\xi = (\xi_1; ...; \xi_r)$ є розв'язком системи (6). На основі граничного переходу та властивостей алгебраїчних систем лінійних рівнянь звідси можна отримати значну частину тверджень про інтегральні рівняння, які наведемо в подальших пунктах.

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x) - \int_0^1 xtu(t) dt = x . \qquad (7)$$

*В даному випадку* $K(x;t) = p_1(x) \overline{g_1(t)}$, $p_1(x) = x$, $\overline{g_1(t)} = t$. *Рівняння (7) запишемо у вигляді* $u(x) - \xi_1 x = x$, *де* $\xi_1 = \int_0^1 tu(t) dt$ *– невідоме число. Тоді* $u(x) = \xi_1 x + x$. *Тому для знаходження* $\xi_1$ *отримуємо рівняння:* $\xi_1 x + x - \int_0^1 xt(\xi_1 t + t) dt = x$, $\xi_1 x - x \int_0^1 t^2 (\xi_1 + 1) dt = 0$, $\xi_1 - (\xi_1 + 1)/3 = 0$, $\xi_1 = 1/2$. *Отже,* $u(x) = 3x/2$ *– розв'язок рівняння*

*(7), в чому переконуємось також безпосередньою підстановкою и в рівняння (7):* $\frac{3}{2}x-\int_0^1\frac{3}{2}xt^2dt=x$.

***Приклад 2.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x)-\int_0^1(x+t)u(t)dt=x. \qquad (8)$$

*В даному випадку* $K(x;t)=p_1(x)\overline{g_1(t)}+p_2(x)\overline{g_2(t)}$, $p_1(x)=x$, $\overline{g_1(t)}=1$, $p_2(x)=1$, $\overline{g_2(t)}=t$. *Рівняння (8) запишемо у вигляді* $u(x)-\xi_1x-\xi_2=x$, *де* $\xi_1=\int_0^1u(t)dt$ *і* $\xi_2=\int_0^1tu(t)dt$ *– невідомі числа. Тоді* $u(x)=\xi_1x+\xi_2+x$. *Тому для знаходження* $\xi_1$ *та* $\xi_2$ *маємо рівняння*

$$\xi_1x+\xi_2+x-\int_0^1(x+t)(\xi_1t+\xi_2+t)dt=x,$$

$$\xi_1x+\xi_2-x\xi_1/2-x\xi_2-x/2-\xi_1/3-\xi_2/2-1/3=0.$$

*Прирівнюючи до нуля коефіцієнти, які стоять біля* $p_1(x)=x$ *та біля* $p_2(x)=1$, *отримуємо систему:*

$$\begin{cases}\xi_1/2-\xi_2=1/2,\\ \xi_2/2-\xi_1/3=1/3,\end{cases}$$

*розв'язавши яку знаходимо, що* $\xi_1=-7$ *і* $\xi_2=-4$. *Тому функція* $u(x)=-6x-4$ *є розв'язком нашого інтегрального рівняння, в чому переконуємось також безпосередньою підстановкою и в рівняння (8).*

***Приклад 3.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x)-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin t+t\right)u(t)dt=-\sin 2x.$$

*Тоді*

$$u(x)=-\sin 2x+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin t+t\right)u(t)dt$$

$$=-\sin 2x+\sin x\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin tu(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}tu(t)dt.$$

*Тому шукаємо розв'язок у вигляді* $u(x)=-\sin 2x+\xi_1\sin x+\xi_2$. *Тоді*

$$-\sin 2x+\xi_1\sin x+\xi_2-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin t+t\right)\left(-\sin 2t+\xi_1\sin t+\xi_2\right)dt=-\sin 2x.$$

*Звідси поступово отримуємо*

$$\xi_1\sin x+\xi_2-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin t+t\right)\left(-\sin 2t+\xi_1\sin t+\xi_2\right)dt=0,$$

$$\xi_1\sin x+\xi_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\sin x\sin t+t\right)\left(-\sin 2t+\xi_1\sin t+\xi_2\right)dt,$$

$$\xi_1\sin x+\xi_2$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{\sin x}{\pi}\sin t\sin 2t-t\sin 2t+\xi_1\frac{\sin x}{\pi}\sin^2 t+\xi_1 t\sin t+\xi_2\frac{\sin x}{\pi}\sin t+\xi_2 t\right)dt,$$

$$\xi_1\sin x+\xi_2=\xi_1\sin x+\pi+2\pi\xi_1,\ \xi_1=C,$$

$$\xi_2=\pi(1+2\xi_1)=\pi(1+2C).$$

*Отже,* $u(x)=-\sin 2x+C\sin x+\pi(1+2C)$ *– розв'язок рівняння.*

Згадані вище методи застосовні і до рівняння Вольтерра

$$u(x)-s\int_a^x K(x;t)u(t)dt=q(x).$$

Проте знаходження розв'язків останнього рівняння за допомогою формули

$$\left(\int_0^x K(x;t)u(t)dt\right)'=K(x;x)u(x)+\int_0^x K'_x(x;t)u(t)dt$$

часто можна звести до знаходження розв'язків диференціального рівняння та систем диференціальних рівнянь.

***Приклад 4.*** *Розглянемо рівняння* $\int_0^x u(t)(t-x+1)dt=x$. *Тоді* $u(x)-\int_0^x u(t)dt=1, u'(x)-u(x)=0$. *Функція* $u=ce^x$ *для кожної сталої* $c$ *є розв'язком нашого рівняння. Але з рівності* $u(x)-\int_0^x u(t)dt=1$ *випливає, що* $u(0)=1$. *Тому* $c=1$ *і* $u=e^x$ *– розв'язок нашого рівняння, в чому переконуємось перевіркою.*

***Приклад 5.*** *Розглянемо рівняння* $u(x)-\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt = x^2$.

*Тоді*

$$u'(x)+\int\limits_0^x u(t)dt = 2x\,,\ u''(x)+u(x)=2\,.$$

*Загальний розв'язок останнього рівняння задається формулою* $u(x)=c_1\cos x + c_2\sin x + 2$. *Оскільки* $u(0)=0$ *і* $u'(0)=0$, *то функція* $u(x)=-2\cos x+2$ *є розв'язком нашого інтегрального рівняння.*

## 14. Ряд Неймана. Спектральний радіус. Зображення оберненого оператора рядом

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} s^k A^k \qquad (1)$$

називають рядом Неймана оператора $A$. Тут $s\in\mathbb{C}$ – деяке число.

**Теорема 1**. *Якщо* $A\in\mathcal{L}(H)$, $s\in\mathbb{C}$ *і ряд (1) збігається в* $\mathcal{L}(H)$ *у точці* $s_0\neq 0$, *то він абсолютно збігається в топології простору* $\mathcal{L}(H)$ *для будь-якого* $s$, $|s|>|s_0|$.

Точна верхня межа $R$ тих $r$, що ряд (1) є збіжним в $\mathcal{L}(H)$, якщо $|s|\le r$, називається радіусом збіжності ряду (1) або спектральним радіусом оператора $A$. Якщо $R=0$, то ряд (1) є збіжним в $\mathcal{L}(H)$ тільки для $s=0$. Якщо $R=+\infty$, то ряд (1) є збіжним в $\mathcal{L}(H)$ для всіх $s\in\mathbb{C}$. Якщо ж $0<R<+\infty$, то ряд (1) абсолютно збігається в топології простору $\mathcal{L}(H)$, якщо $|s|<R$, і є розбіжним в $\mathcal{L}(H)$, якщо $|s|>R$.

**Теорема 2**. *Якщо* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор в банаховому просторі* $H$, *то радіус збіжності ряду (1) знаходиться за формулою* $R=1/\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\|A^k\|}$.

***Приклад 1.*** *Розглянемо оператор* $A:C[0;1]\to C[0;1]$, *визначений рівністю* $A(u)(x)=\int\limits_0^1 xtu(t)dt$. *Тоді*

$$A^k(u)(x)=\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtu(t)dt,\ \left\|A^k\right\|=\sup\left\{\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtdt : x\in[0;1]\right\}=\frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}.$$

*Тому ряд Неймана розглядуваного оператора збігається в* $\mathcal{L}(C[0;1])$*, якщо* $|s|<3$.

**Теорема 3.** *Нехай* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$ *і* $\|A\|=\eta<1$*. Тоді оператор* $I-A$ *має неперервний на* $H$ *обернений оператор,*

$$\left(I-A\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^k, \tag{2}$$

*і при цьому останній ряд збігається абсолютно в* $\mathcal{L}\left(H\right)$*, а ряд*

$$\left(I-A\right)^{-1}(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A^k(u)\right) \tag{3}$$

*збігається в* $H$ *для кожного* $u\in H$.

**Доведення.** Нехай $S_n=\sum_{k=0}^{n}A^k$ .Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}\|A\|^k\le\sum_{k=0}^{\infty}\eta^k<+\infty$$

і

$$\left\|S_{n+p}-S_n\right\|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\|A\|^k\le\sum_{k=n+1}^{n+p}\eta^k\le\frac{\eta^n}{1-\eta}<\varepsilon,\ n\ge n^{\bullet},$$

то ряд (2) є абсолютно збіжним в топології простору $\mathcal{L}(H)$, послідовність $(S_n)$ є фундаментальною в $\mathcal{L}(H)$, а тому і збіжною $\mathcal{L}(H)$. Тому оператор $S=\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ є лінійним неперервним оператором на $H$ . Залишилось показати, що $S\left(1-A\right)=\left(I-A\right)S=I$ . Спочатку зауважимо, що

$$\left\|\left(I-A\right)S_n-\left(I-A\right)S_n\right\|\le\|I-A\|\left\|S_v-S_n\right\|\to 0.$$

Крім цього, $\left\|\left(I-A\right)S_n-I\right\|=\left\|-A^{n+1}\right\|\to 0$. Тому $\left(I-A\right)S=I$ . Аналогічно, $S\left(I-A\right)=I$ . ▶

***Приклад 2.*** *Нехай* $K\in C\left([a;b]\times[a;b]\right)$,

$$\sup\left\{\int_a^b |K(x;t)|\,dt : x\in[a;b]\right\} = \eta < 1$$

*і* $A: C[a;b] \to C[a;b]$ – *інтегральний оператор, визначений формулою*

$$A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt\,.$$

*Тоді* $\|A\| = \eta < 1$. *Тому оператор* $(I - A)$ *має обернений. При цьому,* $\grave{A}^n(u)(x) = \int_a^b K_n(x;t)u(t)dt$, де $K_n(x;t) = \int_a^b K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau$. *Отже,*

$$(I-A)^{-1}(u)(x) = u(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k(u)(x) = u(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b K_k(x;t)u(t)dt\,.$$

***Приклад 3.*** *Розглянемо в просторі* $C[0;1]$ *оператор* $A(u)(x) = \int_0^1 xtu(t)dt$. *Тоді*

$$\|A\| = \sup\left\{\int_0^1 xtdt : x\in[0;1]\right\} = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Тому *оператор* $(I - A)$ *має обернений. При цьому,*

$$K_1(x;t) = K(x;t) = xt\,,$$

$$K_2(x;t) = \int_0^1 K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau = \int_0^1 xt\tau^2 d\tau = xt/3\,,$$

$$K_3(x;t) = \int_0^1 K(x;\tau)K_2(\tau;t)d\tau = \frac{1}{3}\int_0^1 xt\tau^2 d\tau = xt/3^2\,,$$

$$K_n(x;t) = \int_0^1 K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau = \frac{1}{3^{n-2}}\int_0^1 xt\tau^2 d\tau = xt/3^{n-1}\,,\ n\in\mathbb{N}\,,$$

$$A^k(u)(x) = \frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtu(t)dt\,.$$

*Отже,*

$$\left(I-A\right)^{-1}(u)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A^k(u)(x)=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtu(t)dt$$

$$=u(x)+\int_0^1 xtu(t)dt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}}=u(x)+\frac{3}{2}\int_0^1 xtu(t)dt\,.$$

***Приклад 4.*** *Нехай* $K\in C\left([a;b]\times[a;b]\right)$,

$$\sup\left\{\int_a^b\left|K(x;t)\right|dt : x\in[a;b]\right\}=\eta<1$$

*і* $A: C[a;b]\to C[a;b]$ *– інтегральний оператор, визначений формулою* $A(u)(x)=\int_a^x K(x;t)u(t)dt$. *Тоді* $\|A\|\le\eta<1$. *Тому оператор* $\left(I-A\right)$ *має обернений. При цьому,*

$$A^2(u)(x)=\int_a^x K(x;\tau)A(u)(\tau)d\tau=\int_0^x K(x;\tau)\left(\int_a^{\tau}K(\tau;t)u(t)dt\right)d\tau$$

$$=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K(x;\tau)K(\tau;t)d\tau\right)=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K(x;\tau)K(\tau;t)d\tau\right)$$

$$=\int_a^x u(t)dt\left(\int_t^x K_1(x;\tau)K(\tau;t)d\tau\right)=\int_a^x K_2(x;t)u(t)dt\,,$$

$$A^n(u)(x)=\int_a^x K_n(x;t)u(t)dt\,,$$

*де* $K_2(x;t)=\int_t^x K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau$, $K_n(x;t)=\int_t^x K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau$ *і* $K_1(x;t)=K(x;t)$. *Отже,*

$$\left(I-A\right)^{-1}(u)(x)=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^x K_k(x;t)u(t)dt\,.$$

***Приклад 5.*** *Нехай оператор* $A: C[0;1/2]\to C[0;1/2]$, *визначений рівністю* $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$. *Тоді* $\|A\|\le 1/2$,

$$K_1(\tau;t)=K(x;t)=1,\; K_2(x;t)=\int_t^x d\tau=x-t\,,$$

$$K_3(x;t)=\int_t^x K(x;\tau)K_1(\tau;t)d\tau=\int_t^x (x-\tau)d\tau=\frac{(x-t)^2}{2!}\ ,$$

$$K_n(x;t)=\int_t^x \frac{(\tau-t)^{n-2}}{(n-2)!}d\tau=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\ ,$$

$$A^n(u)(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt\,.$$

*Тому*

$$\left(I-A\right)^{-1}(u)(x)=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x K_k(x;t)u(t)dt=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}u(t)dt$$

$$=u(x)+\int_0^x u(t)dt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=u(x)+\int_0^x e^{x-t}u(t)dt\,.$$

**Наслідок 1.** *Нехай* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$ *і* $\|A\|=\eta<1$. *Тоді для кожного* $q\in H$ *рівняння* $u-A(u)=q$ *має єдиний розв'язок* $u$ *і*

$$u=\left(I-A\right)^{-1}(q)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A^k(q)\right)=q+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A^k(q)\right).$$

***Приклад 6.*** *Для кожної функції* $q\in C[0;1]$ *рівняння* $u(x)-\int_0^1 xtu(t)dt=q(x)$ *має єдиний розв'язок* $u\in C[0;1]$. *При цьому,*

$$u(x)=q(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtq(t)dt\ =q(x)+\frac{3}{2}\int_0^1 xtq(t)dt\ .$$

*Зокрема, якщо* $q(t)=t$, *то* $u(x)=x+\frac{3}{2}\int_0^1 xt^2dt=x+\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x$.

***Приклад 7.*** *Для кожної функції* $q\in C[0;1/2]$ *рівняння* $u(x)-\int_0^x u(t)dt=q(x)$ *має єдиний розв'язок* $u\in C[0;1/2]$. *При цьому,*

$u(x)=q(x)+\int_0^x e^{x-t}q(t)dt$. *Зокрема, якщо* $q(t)=1$, *то*

$$u(x)=1+\int_0^x e^{x-t}dt=1+e^x\int_0^x e^{-t}dt=1-e^x\left(e^{-x}-1\right)=e^x .$$

*Справді, якщо* $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$*, то*

$$A^n(u)(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt,$$

$$\left(I-A\right)^{-1}(u)(x)=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x K_k(x;t)u(t)dt=u(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}u(t)dt$$

$$=u(x)+\int_0^x u(t)dt\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}=u(x)+\int_0^x e^{x-t}u(t)dt.$$

*Окрім цього, наше рівняння можна записати у вигляді* $\left(I-A\right)u=q$.

*Тому* $u=\left(I-A\right)^{-1}q$ *і* $u(x)=q(x)+\int_0^x e^{x-t}q(t)dt$ *– розв'язок рівняння.*

## 15. Резольвента Фредгольма лінійного оператора

Нехай $H$ – банахів простір, $I:H\to H$ – тотожній оператор, $s\in\mathbb{C}$ і $A:H\to H$ – деякий оператор. Оператор $R_s=\left((I-sA)^{-1}-I\right)/s$ називають резольвентою Фредгольма оператора $A$.

**Теорема 1**. *Нехай* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$, $s\in\mathbb{C}$ *і* $|s|\|A\|<1$. *Тоді: а) оператор* $I-sA:H\to H$ *є оборотним; б) резольвента Фредгольма є лінійним неперервним оператором,* $R_s=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k-1}A^k$ *і останній ряд абсолютно збігається в топології простору* $\mathcal{L}(H)$*; в) для кожного* $q\in H$ *рівняння* $u-sA(u)=q$ *має в* $H$ *єдиний розв'язок* $u=q+sR_s(q)$.

**Доведення.** Справді, оскільки $|s|\|A\|<1$, то за теоремою С. Банаха оператор $I-sA:H\to H$ є оборотним,

$$R_s = \left((I-sA)^{-1}-I\right)/s = \left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k A^k - I\right)/s = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}A^k$$

і

$$u = (I-sA)^{-1}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k A^k(q) = q + \sum_{k=1}^{\infty} s^k A^k(q)$$

$$= q + s\sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}A^k(q) = q + sR_s(q)$$

– розв’язок рівняння $u - sA(u) = q$ . ▶

***Зауваження 1.*** *Термін “резольвента Фредгольма” не є загально прийнятим. Він вживається в основному стосовно інтегральних операторів як “резольвента ядра” або як “резольвента рівняння Фредгольма”. Цей термін слід відрізняти від терміну “резольвента оператора”, який зустрінеться згодом (остання задається рівністю* $r_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$ *).*

***Приклад 1****. Якщо* $K \in C\left([a;b]\times[a;b]\right)$ *і* $A: C[a;b] \to C[a;b]$ *– інтегральний оператор, визначений формулою* $A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt$*, то*

$$A^k(u)(x) = \int_a^b K_k(x;t)u(t)dt\,,$$

$$R_s(q)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}A^k(q)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}\int_a^b K_k(x;t)q(t)dt = \int_a^b \Phi(x;t;s)q(t)dt\,,$$

*де* $\Phi(x;t;s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}K_n(x;t)$, $K_1 := K$ *і* $K_n(x;t) = \int_a^b K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau$ , *якщо* $n > 1$.

***Приклад 2.*** *Розглянемо оператор* $A: C[0;1] \to C[0;1]$ *визначений рівністю* $A(u)(x) = \int_0^1 xtu(t)dt$. *Тоді*

$$\|A\| = \sup\left\{\int_0^1 xtdt : x\in[0;1]\right\} = 1/2\,,\ A^n(u)(x) = \frac{1}{3^{n-1}}\int_0^1 xtu(t)dt\,.$$

*Тому* $\|sA\| < 1$*, якщо* $|s| < 2$*, і*

$$R_s(q)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k-1}\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtq(t)dt=\int_0^1 xtq(t)dt\sum_{k=1}^{\infty}s^{k-1}\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{3}{3-s}\int_0^1 xtq(t)dt\,.$$

## 16. Знаходження розв'язків рівнянь $u-A(u)=q$ методом послідовних наближень

**Теорема 1.** *Нехай* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$ *і* $\|A\|=\eta<1$. *Тоді для кожного* $q\in H$ *рівняння*

$$u-A(u)=q \qquad (1)$$

*має єдиний розв'язок* $u\in H$, *який можна знайти методом послідовних наближень за формулою*

$$u=\lim_{n\to\infty}u_n\,, \qquad (2)$$

*в якій* $u_0$ *– довільна точка простору* $H$ і $u_n=A(u_{n-1})+q$, $n\ge 1$. *При цьому* $\|u-u_n\|\le c_1\eta^n$.

**Доведення.** Нехай $B(u)=A(u)+q$. Тоді

$$\|B(x)-B(y)\|=\|A(x)-A(y)\|=\|A(x-y)\|\le\|A\|\|x-y\|\le\eta\|x-y\|\,.$$

Тому оператор $B$ є стискуючим. За теоремою С. Банаха він має єдину нерухому точку, тобто таку точку $u$, що $B(u)=u$ і цю точку $u$ можна знайти методом послідовних наближень. Рівняння $B(u)=u$ рівносильне рівнянню $u-A(u)=q$. Тому приходимо до твердження теореми. ►

Знаходження розв'язків рівняння (1) за формулою (2) називається методом послідовних наближень або методом ітерацій, а сама послідовність $(u_n)$ – ітераційною.

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x)-\int_0^1 xtu(t)dt=x\,. \qquad (3)$$

*Оператор* $A:C[0;1]\to C[0;1]$, *визначений рівністю*

$$A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt\,,$$

*є неперервним в* $C\left[0;1\right]$ *і* $\|A\|=\sup\left\{\int_0^1 xtdt : x\in[0;1]\right\}=1/2$. *Тому* *рівняння (3) має єдиний розв'язок. Нехай* $u_0 = 0$ *і*

$$u_k(x) = x + \int_0^1 xtu_{k-1}(t)dt\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

*Тоді*

$$u_1(x) = x + \int_0^1 xtu_0(t)dt = x\,,$$

$$u_2(x) = x + \int_0^1 xtu_1(t)dt = (1+1/3)x\,,$$

..........................................................................................

$$u_k(x) = x + \int_0^1 xtu_{k-1}(t)dt = (1+1/3+(1/3)^2+\ldots+(1/3)^{k-1})x\,.$$

*Тому функція*

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \lim_{k\to\infty}\Big((1+1/3+(1/3)^2+\ldots+(1/3)^{k-1})x\Big)$$

$$= x\sum_{i=0}^{\infty}(1/3)^i = 3x/2$$

*є розв'язком розглядуваного рівняння. При цьому*

$$\|u-u_n\| = \sup\{|u(x)-u_n(x)| : x\in[0;1]\} \le c_1(1/2)^n\,.$$

*Проте безпосередньо можна отримати кращу оцінку*

$$\|u-u_n\| = \sup\{|u(x)-u_n(x)| : x\in[0;1]\}$$

$$= \sup\left\{x\sum_{i=n}^{\infty}(1/3)^i : x\in[0;1]\right\} = 0{,}5(1/3)^{n-1}\,.$$

## 17. Знаходження розв'язків рівняння $u - sA(u) = q$ для неперервного оператора $A$

З теорем попередніх пунктів випливають наступні твердження.

**Теорема 1.** *Нехай* $A: H \to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$ *. Тоді для кожного* $s \in \mathbb{C}$*, для якого* $|s|\|A\| < 1$*, рівняння*

$$u - sA(u) = 0 \qquad (1)$$

*має в просторі* $H$ *тільки нульовий розв'язок.*

**Теорема 2.** *Нехай* $A: H \to H$ *– лінійний неперервний* *оператор на банаховому просторі* $H$ *. Тоді для кожного* $s \in \mathbb{C}$ *, для якого* $|s|\|A\| < 1$*, і кожного* $q \in H$ *рівняння*

$$u - sA(u) = q \tag{2}$$

*має в просторі* $H$ *єдиний розв'язок. Цей розв'язок* $u \in H$ *можна знайти методом послідовних наближень* $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ *, де* $u_n = sA(u_{n-1}) + q$ *і* $u_0$ *– довільна точка простору* $H$ *. Цей же розв'язок можна знайти за допомогою оберненого оператора у вигляді* $u = (I - sA)^{-1}(q)$*, за допомогою ряду Неймана у вигляді* $u = \sum_{k=0}^{\infty} s^k A^k(q)$*, за допомогою резольвенти Фредгольма у вигляді* $u = q + sR_s(q)$*, де*

$$R_s = \left((I - sA)^{-1} - I\right)/s = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} A^k$$

*– резольвента Фредгольма оператора* $A$*. При цьому останній ряд збігається в* $\mathcal{L}(H)$ *і* $\sum_{k=0}^{\infty} |s^k| \|A^k(q)\| < +\infty$ для кожного $q \in H$ .

Теореми 1 та 2 застосовні до різних типів рівнянь в різних просторах. Розглянемо, наприклад, рівняння Фредгольма другого роду

$$u(x) - s\int_a^b K(x;t)u(t)dt = q(x) \tag{3}$$

в просторі $H = C[a;b]$. В даному випадку оператор $A : C[a;b] \to C[a;b]$ задається рівністю $A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt$ .

**Теорема 3.** *Якщо* $K : [a;b]\times[a;b] \to \mathbb{C}$ *– неперервне ядро, тобто* $K \in C\big([a;b]\times[a;b]\big)$ і

$$\eta_1 = \max\left\{ \int_a^b |K(x;t)|dt : x \in [a;b] \right\}, \tag{4}$$

*то для кожного такого* $s \in \mathbb{C}$*, що* $\eta_1 |s| < 1$*, рівняння*

$$u(x) - s\int_a^b K(x;t)u(t)dt = 0 \tag{5}$$

*має єдиний розв'язок* $u = 0$ *в просторі* $C[a;b]$.

**Теорема 4.** *Якщо* $K:[a;b]\times[a;b]\to\mathbb{C}$ *– неперервне ядро, то для кожної функції* $q\in C[a;b]$ *і кожного такого* $s\in\mathbb{C}$, *що* $\eta_1|s|<1$, *в просторі* $C[a;b]$ *рівняння Фредгольма (3) має єдиний розв'язок і цей розв'язок* $u\in C[a;b]$ *можна знайти методом послідовних наближень:*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \tag{6}$$

*де* $u_0$ *– довільний елемент простору* $C[a;b]$ *і*

$$u_n(x) = s\int_a^b K(x;t)u_{n-1}(t)dt + q(x),\ n\ge 1. \tag{7}$$

*Цей же розв'язок можна подати за допомогою оберненого оператора у вигляді*

$$u(x) = (I - sA)^{-1}(q)(x), \tag{8}$$

*за допомогою ряду Неймана у вигляді*

$$u(x) = q(x) + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \int_a^b K_k(x;t)q(t)dt, \tag{9}$$

*за допомогою резольвенти Фредгольма у вигляді*

$$u(x) = q(x) + sR_s(q)(x), \tag{10}$$

*тобто у вигляді*

$$u(x) = q(x) + s\int_a^b \Phi(x;t;s)q(t)dt,$$

*де* $K_1(x;t) = K(x;t)$, $K_n(x;t) = \int_a^b K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)dt$, $n>1$,

$$R_s(q)(x) = q(x) + \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\int_a^b K_n(x;t)q(t)dt = q(x) + s\int_a^b \Phi(x;t;s)q(t)dt$$

*– резольвента Фредгольма оператора* $A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt$ *і*

$$\Phi(x;t;s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}K_n(x;t).$$

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x) - s\int_0^1 xtu(t)dt = x. \tag{11}$$

*Оператор* $A : C[0;1] \to C[0;1]$, *визначений рівністю*

$$A(u)(x) = \int_0^1 xtu(t)dt\,,$$

*є неперервним в* $C\big[0;1\big]$ *і* $\|A\| = \sup\left\{\int_0^1 xtdt : x \in [0;1]\right\} = 1/2$. *Тому рівняння (11) має єдиний розв'язок. Нехай* $u_0 = 0$ *і*

$$u_k(x) = x + s\int_0^1 xtu_{k-1}(t)dt\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$$

*Тоді*

$$u_1(x) = x + s\int_0^1 xtu_0(t)dt = x\,,$$

$$u_2(x) = x + s\int_0^1 xtu_1(t)dt = (1 + s/3)x\,,$$

$$u_3(x) = x + s\int_0^1 xtu_2(t)dt = x + s\int_0^1 xt(1 + s/3)tdt = x + \frac{sx}{3} + \frac{xs^2}{3^2} = x\left(1 + \frac{s}{3} + \frac{s^2}{3^2}\right),$$

……………………………………………………………………

$$u_k(x) = x + \int_0^1 xtu_{k-1}(t)dt = (1 + s/3 + (s/3)^2 + ... + (s/3)^{k-1})x\,.$$

*Тому функція*

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \lim_{k\to\infty}\Big((1 + s/3 + (s/3)^2 + ... + (s/3)^{k-1})x\Big)$$

$$= x\sum_{i=0}^{\infty}(s/3)^i = x\frac{1}{1-\frac{s}{3}} = x\frac{3}{3-s}$$

*є розв'язком розглядуваного рівняння. Окрім цього,*

$$A^k(u)(x) = \frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtu(t)dt\,,$$

$$R_s(q)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}\frac{1}{3^{k-1}}\int_0^1 xtq(t)dt = \int_0^1 xtq(t)dt\sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1}\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{3}{3-s}\int_0^1 xtq(t)dt\,.$$

*Тому*

$$u(x) = q(x) + sR_s(q)(x) = q(x) + \frac{3s}{3-s}\int_0^1 xtq(t)dt\,,$$

*звідки знову отримуємо розв'язок нашого рівняння*

$$u(x)=x+\frac{3s}{3-s}\int_0^1 xt^2dt=x+\frac{xs}{3-s}=\frac{3x}{3-s}.$$

*Ми знайшли розв'язок для* $s$, $|s|<2$. *Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція* $u(x)=\dfrac{3x}{3-s}$ *є розв'язком рівняння* $u(x)-s\int_0^1 xtu(t)dt=x$ *для кожного* $s\neq 3$. *Якщо* $s=3$, *то наше рівняння розв'язку не має. Справді, припустимо, що рівняння* $u(x)-3\int_0^1 xtu(t)dt=x$ *має розв'язок* $u\in C[0;1]$. *Тоді* $u(x)=x+3x\int_0^1 tu(t)dt$. *Отже,* $u(x)=c_0x$ *для деякої сталої* $c_0$. *Тоді* $c_0x=x+3c_0x\int_0^1 t^2dt$ *і* $c_0=1+c_0$, *що неможливо.*

***Приклад 2.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x)-\int_0^{1/2} u(t)dt=x.$$

*В даному випадку*

$$K(x;t)=1,\ q(x)=x,\ \int_0^{1/2}\left|K(x;t)\right|dt=\frac{1}{2}.$$

*Візьмемо* $u_0=1$. *Тоді*

$$u_1(x)=\int_0^{1/2} tdt+x=\frac{1}{2^3}+x,\ u_2(x)=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2^3}+t\right)dt+x=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+x,$$

$$u_n(x)=\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+x,\ u(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^3}+x\right)=x+\frac{1}{4}.$$

*Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція* $u=x+1/4$ *і справді є розв'язком нашого рівняння. Розв'яжемо наше рівняння іншим методом. Маємо*

$$K_1(x;t)=1,\ K_2(x;t)=\int_0^{1/2} dt=\frac{1}{2},K_3(x;t)=\frac{1}{2}\int_0^{1/2} dt=\frac{1}{2^2},$$

$$K_n(x;t)=\frac{1}{2^{n-1}},\ \Phi(x;t;1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2.$$

*Тому* $u(x)=x+\int\limits_0^{1/2}2tdt=x+1/4$ *– розв’язок нашого рівняння.*

***Приклад 3.*** *Розглянемо рівняння* $u(x)-s\int\limits_0^{2\pi}u(t)\sin x\sin tdt=x$. *Оператор* $A:C[0;2\pi]\to C[0;2\pi]$, *визначений рівністю* $A(u)(x)=\int\limits_0^{2\pi}u(t)\sin x\sin tdt$, *є неперервним в* $C[0;2\pi]$ *і*

$$\|A\|=\sup\left\{\int\limits_0^{2\pi}|\sin x\sin t|dt:x\in[0;2\pi]\right\}=4\sup\left\{|\sin x|\int\limits_0^{\pi/2}\sin tdt:x\in[0;2\pi]\right\}=4.$$

*Тому наше рівняння має єдиний розв’язок для кожного* $s\in\mathbb{C}$, *для якого* $|s|<1/4$. *При цьому,* $K_1(x;t)=K(x;t)=\sin x\sin t$,

$$K_2(x;t)=\int\limits_0^{2\pi}K(x;\tau)K_1(\tau;t)dt=\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin t\sin^2\tau d\tau=\pi\sin x\sin t,$$

$$K_3(x;t)=\int\limits_0^{1}K(x;\tau)K_2(\tau;t)dt=\pi\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin t\sin^2\tau d\tau=\pi^2\sin x\sin t,$$

……………………………………………………………………………

$$K_n(x;t)=\int\limits_0^{1}K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)dt$$

$$=\pi^{n-2}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin t\sin^2\tau d\tau=\pi^{n-1}\sin x\sin t,$$

$$A^n(u)(x)=\pi^{n-1}\int\limits_0^{2\pi}u(t)\sin x\sin tdt,\ n\in\mathbb{N},$$

$$R_s(q)(x)=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k-1}A^kq(x)=q(x)+\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\int\limits_a^bK_n(x;t)q(t)dt$$

$$=q(x)+\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\pi^{n-1}\int\limits_0^{2\pi}q(t)\sin x\sin tdt=q(x)+\int\limits_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\pi^{n-1}q(t)\sin x\sin tdt$$

$$=q(x)+\frac{1}{1-s\pi}\int\limits_0^{2\pi}q(t)\sin x\sin tdt.$$

*Тому функція*

$$u(x)=q(x)+sR_s(q)(x)=q(x)+\frac{s}{1-s\pi}\int_0^{2\pi}q(t)\sin x\sin tdt$$

*є розв'язком розглядуваного рівняння для кожного* $s\in\mathbb{C}$*, для якого* $|s|<1/\pi$*. Зокрема, якщо* $q(t)=t$*, то функція*

$$u(x)=x+\frac{s}{1-s\pi}\sin x\int_0^{2\pi}t\sin tdt=x-\frac{2\pi s}{1-s\pi}\sin x$$

*є розв'язком розглядуваного рівняння для кожного* $s\in\mathbb{C}$*, для якого* $|s|<1/\pi$*. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що насправді ця функція є розв'язком для кожного* $s\neq 1/\pi$*. Якщо* $s=1/\pi$*, то рівняння розв'язків не має. Справді, якщо деяка функція* $u\in C[0;2\pi]$ *є розв'язком, то*

$$u(x)=x+s\sin x\int_0^{2\pi}u(t)\sin tdt=x+s\alpha\sin x\,,$$

*де* $\alpha=\int_0^{2\pi}u(t)\sin tdt$ *– невідоме число, для знаходження якого отримуємо рівняння*

$$x+s\alpha\sin x-s\sin x\int_0^{2\pi}(t+s\alpha\sin t)\sin tdt=x\,.$$

*Таким чином,* $\alpha$ *повинно бути розв'язком рівняння* $s(\alpha+2\pi-\alpha s\pi)=0$*. Якщо* $s=1/\pi$*, то останнє рівняння коренів не має, а тому не має розв'язків і розглядуване інтегральне рівняння.*

## 18. Інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

Так називають рівняння

$$u(x)-s\int_a^x K(x;t)u(t)dt=q(x)\,. \qquad (1)$$

Це рівняння є частинним випадком рівняння Фредгольма другого роду, оскільки його можна записати у вигляді

$$u(x)-s\int_a^b K(x;t)u(t)dt=q(x)\,, \qquad (2)$$

якщо вважати, що $K(x;t)=0$, якщо $t\in[x;b]$. Тому до рівняння (1) можна застосовувати відповідні теореми, які є справедливі для рівняння (2). Проте, рівняння (1) має специфіку і для нього можна отримати загальніші теореми.

**Теорема 1**. *Якщо* $K \in C([a;b]\times[a;b])$, *то для кожної функції* $q \in C[a;b]$ *і кожного* $s \in \mathbb{C}$ *рівняння (1) має єдиний розв'язок в просторі* $C[a;b]$ *і цей розв'язок* $u \in C[a;b]$ *можна знайти методом послідовних наближень:*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x), \qquad (3)$$

*де* $u_0$ *– довільний елемент простору* $C[a;b]$ *і*

$$u_n(x) = s\int_a^x K(x;t)u_{n-1}(t)dt + q(x),\ n \geq 1. \qquad (4)$$

*Цей же розв'язок подати за допомогою оберненого оператора у вигляді*

$$u(x) = (I - sA)^{-1}(q)(x),$$

*за допомою ряду Неймана у вигляді*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k A^k(q)(x) = q(x) + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \int_a^x K_k(x;t)q(t)dt, \qquad (5)$$

*за допомою резольвенти Фредгольма оператора* $A$ *у вигляді*

$$u(x) = q(x) + sR_s(q)(x), \qquad (6)$$

*тобто у вигляді*

$$u(x) = q(x) + s\int_a^x \Phi(x;t;s)q(t)dt, \qquad (7)$$

*де*

$$K_1(x;t) = K(x;t),$$

$$K_n(x;t) = \int_t^x K(x;\tau)K_{n-1}(\tau;t)d\tau,\ n > 1,$$

$$R_s(q)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}A^n(q)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}\int_a^x K_n(x;t)q(t)dt = \int_a^x \Phi(x;t;s)q(t)dt,$$

*– резольвента Фредгольма оператора* $A(u)(x) = \int_0^x K(x;t)u(t)dt$ *(ядра* $K$ *інтегрального рівняння Вольтерра) і*

$$\Phi(x;t;s) = \sum_{n=1}^{\infty} s^{n-1}K_n(x;t).$$

**Доведення.** Справедливість теореми 1 для малих $s$ міститься у відповідній теоремі для рівняння Фредгольма. Доведемо теорему в загальному випадку. Спочатку зауважимо, що

$$u_1(x) = q(x) + s\int_a^x K(x;t)u_0(t)dt$$

і

$$\left|u_1(x) - u_0(x)\right| \le c_1,\ x \in [a;b],$$

для деякої сталої $c_1$. Далі,

$$u_2(x) = q(x) + s\int_0^x K(x;t)u_1(t)dt,$$

$$u_2(x) - u_1(x) = s\int_0^b K(x;t)(u_1(t) - u_0(t))dt,$$

$$\left|u_2(x) - u_1(x)\right| = \left|s\int_a^x K(x;t)\big(u_1(t) - u_0(t)\big)dt\right| \le c_1 Ms(x-a),\ x \in [a;b],$$

де $M = \max\left\{\left|K(x;t)\right| : a \le x \le b, a \le t \le b\right\}$. Аналогічно,

$$\left|u_3(x) - u_2(x)\right| = \left|s\int_a^x K(x;t)\big(u_2(t) - u_1(t)\big)dt\right| \le c_1\big(Ms(x-a)\big)^2,\ x \in [a;b],$$

……………………………………………………………………………………

$$\left|u_n(x) - u_{n-1}(x)\right| \le c_1 \frac{(Ms(x-a))^{n-1}}{(n-1)!},\ x \in [a;b],\ n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що послідовність $\left(u_n(x)\right)$ збігається в $C[a;b]$ до деякої функції $u \in C[a;b]$, яка є розв’язком рівняння (1). Крім цього, методом математичної індукції отримуємо, що

$$\left|K_1(x;t)\right| = \left|K(x;t)\right| \le M,$$

$$\left|K_2(x;t)\right| = \left|\int_t^x K(x;t)K_1(t;x)dt\right| \le M^2\left|x-t\right|, \ldots,\ \left|K_n(x;t)\right| \le M\frac{\left(M\left|x-t\right|\right)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$\left|s^n\int_0^b K_n(x;t)q(t)dt\right| \le M\left\|q\right\|\left|s\right|^n\frac{\left(M\left|x-t\right|\right)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Тому ряд (5) є рівномірно збіжним на множині $[a;b]\times[a;b]\times\left\{s \in \mathbb{C} : \left|s\right| \le r\right\}$ для кожного $r \in (0;+\infty)$. Завдяки цьому функція $u$, визначена рівністю (5), також є розв'язком рівняння (1). Доведемо єдиність. Припустимо протилежне, тобто, що існують принаймні два розв'язки рівняння (1). Нехай ними є функції $\tilde{u}$ та $\widehat{u}$. Тоді функція $u = \tilde{u} - \widehat{u}$ є розв'язком рівняння

$$u(x) = s\int_a^x K(x;t)u(t)dt .$$

Тому

$$u(x) = s^2\int_a^x K_2(x;t)u(t)dt ,..., \ u_n(x) = s^n\int_a^x K_n(x;t)u(t)dt .$$

Отже,

$$\left|u\left(x\right)\right| \le \left\|u\right\| \frac{\left(Ms(x-a)\right)^n}{n!}, \ x \in [0;b] .$$

Спрямувавши $n$ до $\infty$ отримуємо, що $u \equiv 0$ .

**Наслідок 1**. *Якщо* $K \in C([0;b]\times[0;b])$, *то для кожного* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *рівняння* $\int_0^x K(x;t)u(t)dt = \lambda u(x)$ *в просторі* $C[0;b]$ *має тільки нульовий розв'язок.*

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x) - \int_0^x u(t)dt = 1.$$

*Маємо* $u'(x) - u(x) = 0$, *звідки* $du/u = dx$, $u = ce^x$, *де* $c$ *– стала. Оскільки* $u(0) = 1$, *то* $c = 1$. *Тому* $u = e^x$ *– розв'язок нашого рівняння. Розв'яжемо це рівняння методом послідовних наближень. Нехай* $u_0 = 0$, $u_n(x) = \int_0^x u_{n-1}(t)dt + 1$, $n \ge 1$. *Тоді*

$$u_1(x) = 1, \ u_2(x) = 1 + x, \ u_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} ,..., \ u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

*і*

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

*– розв'язок нашого рівняння.*

*Розв'яжемо наше рівняння за допомогою резольвенти Фредгольма. Маємо*

$$K_1(x;t)=K(x;t)=1,\ K_2(x;t)=\int_t^x dt = x-t,\ K_3(x;t)=\int_t^x(\tau-t)d\tau=\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$K_4(x;t)=\int_t^x\frac{(\tau-t)^2}{2!}d\tau=\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……………………………………………………………………

$$K_n(x;t)=\int_t^x\frac{(\tau-t)^{n-2}}{(n-2)!}d\tau=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$R_s(q)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\int_0^x K_n(x;t)q(t)dt,$$

$$\Phi(x;t;s)=\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{s(x-t)}.$$

*Тому*

$$R_s(1)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\int_0^x K_n(x;t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}s^{n-1}\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^nx^n}{n!}}{s}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^nx^n}{n!}-1}{s}=\frac{e^{sx}-1}{s}.$$

*Отже,* $u(x)=R_1(1)(x)+1=1+e^x-1=e^x$ *– розв'язок нашого рівняння. При цьому,*

$$u(x)=1+\int_0^x\Phi(x;t;1)dt=1+\int_0^x e^{(x-t)}dt=1-e^{(x-t)}\Big|_0^x=e^x.$$

***Зауваження 1**. Якщо* $K\in L_2([0;b]\times[0;b])$, *то для кожної функції* $q\in L_2(a;b)$ *і кожного* $s\in\mathbb{C}$ *рівняння (1) має єдиний розв'язок в просторі* $L_2(a;b)$ *і цей розв'язок* $u\in L_2(a;b)$ *можна знайти тими ж методами, які вказані в теоремі 1.*

***Зауваження 2**. Рівняння Вольтерра має єдиний розв'язок у відповідних просторах, якщо виконуються певні умови (дивись теорему 1 та зауваження 1). В деяких просторах можуть існувати декілька розв'язків такого рівняння. Рівняння*

$u(x)-\int\limits_0^x t^{x-1}u(t)dt=0$ *має розв'язок* $u=0\in C[0;1]$ *в просторі* $C[0;1]$*, інших розв'язків воно не має. Проте функції* $u=c_1x^{x-1}$ *також є його розв'язками, але такі розв'язки не належать до* $C[0;1]$.

## 19. Зауваження про рівняння першого роду

Теорія рівнянь $A(u)=q$ в нескінченновимірних просторах є складною. Трохи докладніше про них скажемо пізніше. Проте, виділимо тут наступне переформулювання однієї з теорем попередніх пунктів.

**Теорема 1**. *Якщо* $A:H\to H$ *– лінійний неперервний оператор на банаховому просторі* $H$ *і* $\|A-I\|<1$*, то для кожного* $q\in H$ *рівняння* $A(u)=q$ *має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулою*

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}(I-A)^k(q).$$

**Доведення.** Справді, за зроблених припущеннях оператор $A=I-(I-A)$ є оборотним і має обернений оператор $A^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(I-A)^k$. Тому $u=A^{-1}(q)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(I-A)^k(q)$ – розв'язок рівняння $A(u)=q$. ▶

Рівнянням Вольтерра першого роду називають рівняння

$$\int_0^x K(x;t)u(t)dt=q(x). \qquad (1)$$

Якщо виконуються відповідні умови, то диференціюванням рівняння (1) зводиться до рівняння Вольтерра другого роду

$$K(x;x)u(x)+\int_0^x\frac{\partial K(x;t)}{\partial x}u(t)=q'(x). \qquad (2)$$

Використовуючи (2) інколи можна знайти розв'язки рівняння (1). Для вивчення рівняння (1) використовуються й інші методи.

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння* $\int\limits_0^x u(t)(t-x+1)dt=x$. *Тоді*

$u(x)-\int_0^x u(t)dt=1$, $u'(x)-u(x)=0$. *Тому* $u=e^x$ *– розв’язок рівняння.*

***Приклад 2.*** *Частковим випадком рівняння Вольтерра першого роду є рівняння Абеля*

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}u(t)dt=q(x)\,,\ \alpha\in(0;1)\,,\ q\in C[0;b]\,. \qquad (3)$$

*Якщо деяка функція* $u$ *є розв’язком останнього рівняння, то формально отримуємо (нижче в інтегралі зроблено заміну* $\tau=t+z(x-t)$*)*

$$\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}\left(\int_0^\tau \frac{1}{(\tau-t)^\alpha}u(t)dt\right)d\tau=\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}q(\tau)d\tau\,,$$

$$\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}q(\tau)d\tau=\int_0^x u(t)\left(\int_t^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}(\tau-t)^\alpha}d\tau\right)dt$$

$$=\int_0^x u(t)\left(\int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{1-\alpha}z^\alpha}dz\right)dt=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\int_0^x u(t)dt\,.$$

*Тому*

$$u(x)=\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau\right)'.$$

*Якщо* $q\in C^{(1)}[0;b]$*, то*

$$u(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}+\int_0^x \frac{1}{(x-\tau)^{1-\alpha}}q'(\tau)d\tau\right).$$

*Це формальний розв’язок рівняння (3). Для з’ясування при яких* $q$ *і в яких просторах існує розв’язок рівняння (3) потрібно докладніше дослідити оператор, визначений формулою (3). У випадку* $q(x)=x^p$ *розв’язки рівняння (3) можна виразити через елементарні функції.*

## 20. Власні значення і власні вектори лінійного оператора

Власним значенням лінійного оператора $A:H\to H$ на нормованому просторі $H$ називається таке число $\lambda$, при якому рівняння

$$A(u)=\lambda u \qquad (1)$$

має ненульовий розв'язок $u \in H$. Кожний ненульовий розв'язок рівняння (1) називається власним вектором оператора $A$, що відповідає власному значенню $\lambda$. Якщо $u$ – власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda$, то для будь-якого $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ вектор $cu$ також є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda$. Тому для кожного власного значення $\lambda$ власний вектор $u$ можна підібрати нормованим, тобто так, щоб $\|u\| = 1$. Власним числом оператора $A$ на нормованому просторі $H$ називається таке число $s \in \mathbb{C}$, при якому рівняння

$$u - sA(u) = 0 \tag{2}$$

має ненульовий розв'язок. Кожний ненульовий розв'язок рівняння (2) називається власним вектором оператора $A$, що відповідає власному числу $s$. Зрозуміло, що якщо $s$ – власне число оператора $A$, то $\lambda = 1/s$ є власним значенням цього оператора. У випадку, коли $H$ – функціональний простір, тобто елементами $H$ є функції, власні вектори називають власними функціями.

**Теорема 1.** *Якщо $H$ – скінченновимірний комплексний векторний простір, то кожний лінійний оператор $A: H \to H$ має принаймні одне власне значення $\lambda \in \mathbb{C}$ і власні значення знаходяться як розв'язки рівняння*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

*де $n \in \mathbb{N}$ – розмірність простору $H$, і $A = (a_{ij})$ – матриця оператора $A: H \to H$ в деякому базисі простору $H$.*

Ця теорема доводиться в курсі лінійної алгебри.

***Приклад 1.*** *Нехай $H = l_2$ і $A: H \to H$ – оператор, визначений рівністю (оператор правого зсуву) $A(u) = w$, де $u = (u_1; u_2; \dots)$ і $w = (0, u_1; u_2; \dots)$. Тоді $A$ не має власних значень. Справді, припустимо, що існують $\lambda \in \mathbb{C}$ та $u \in H \setminus \{0\}$ такі, що $A(u) = \lambda u$. Тоді $(0, u_1; u_2; \dots) = (\lambda u_1; \lambda u_2; \dots)$, $\lambda u_1 = 0$, $\lambda u_2 = u_1$, $\lambda u_3 = u_2, \dots$, звідки отримуємо, що $u_1 = u_2 = \dots = 0$, тобто $u = 0$. Суперечність.*

***Приклад 2.*** *Нехай* $H = C[0;1]$ *і* $A : H \to H$ *оператор, визначений рівністю* $A(u)(t) = tu(t)$. *Тоді цей оператор не має власних значень. Справді, припустимо, що існує* $\lambda \in \mathbb{C}$ *та* $u \in H \setminus \{0\}$ *такі, що* $A(u) = \lambda u$, *тобто* $tu(t) = \lambda u(t)$. *Тоді* $(t - \lambda)u(t) = 0$ *для всіх* $t$. *Оскільки* $u$ *– неперервна функція, то останнє можливо тільки у випадку* $u = 0$. *Суперечність.*

***Приклад 3.*** *В просторі* $H = C[0;2\pi]$ *розглянемо оператор* $A : H \to H$ *визначений рівністю*

$$A(u)(x) = \int_0^{2\pi} u(t) \sin x \cos t dt .$$

*Цей оператор має єдине власне значення* $\lambda = 0$. *Справді, припустимо, що існують* $\lambda \in \mathbb{C}$ *та* $u \in C[0;2\pi]$ *такі, що* $A(u) = \lambda u$. *Тоді*

$$\lambda u(x) = \int_0^{2\pi} u(t) \sin x \cos t dt .$$

*тобто* $\lambda u(x) = c_0 \sin x$, *де*

$$c_0 = \int_0^{2\pi} u(t) \cos t dt .$$

*Підберемо функцію* $u$ *так, щоб*

$$\int_0^{2\pi} u(t) \cos t dt = 0 . \qquad (3)$$

*Наприклад, можна взяти* $u(t) \equiv 1$. *Тоді* $A(u) = 0u$. *Отже, всі відмінні від тотожнього нуля функції* $u \in C[0;2\pi]$, *які задовольняють умову (3), є власними функціями, які відповідають власному значенню* $\lambda = 0$. *Інших власних значень цей оператор не має. Справді, власні функції мають вигляд* $u(x) = \frac{c_0}{\lambda} \sin x$, *де* $c_0$ *– стала. При цьому,*

$$c_0 \sin x = \frac{c_0}{2\lambda} \sin x \int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 0 ,$$

*тобто* $c_0 = 0$. *Отже,* $u(t) \equiv 0$. *Суперечність.*

***Приклад 4.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$, *елементи, якого позначаємо символами* $x = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *розглянемо оператор* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *який в базисі, утвореного векторами* $e_1 = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *та* $e_2 = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *має матрицю* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Тоді* $A(x) = \mathbf{Ax}$. *Число* $\lambda$ *є власним значенням, якщо існує такий ненульовий вектор* $e = \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, *що* $A(\mathbf{e}) = \lambda I(\mathbf{e})$, *тобто* $\mathbf{Ae} = \lambda \mathbf{e}$. *Для знаходження* $\lambda$ *та координат вектора* $e = \mathbf{e}$ *маємо систему*

$$\begin{cases} (2-\lambda)\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0, \\ 0\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулеві:*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

*Таким чином,* $\lambda_1 = 2$ *і* $\lambda_2 = 1$ *– власні значення. Власному значенню* $\lambda_1 = 2$ *відповідає власний вектор* $e_1 = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *а власному значенню* $\lambda_2 = 1$ *– власний вектор* $e_2 = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

***Приклад 5.*** *Розглянемо інтегральний оператор* $A : L_2(0;1) \to L_2(0;1)$ *Фредгольма, визначений формулою* $A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt$ *з виродженим ядром* $K(x;t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x)\overline{g_i(t)}$. *Знаходження відмінних від нуля власних значень і власних функцій такого оператора можна звести до знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Справді,* $\int_a^b K(x;t)e(t)dt = \lambda e(x)$

*тоді і тільки тоді, коли* $\lambda e(x)-\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_i p_i(x)=0$, *де* $\xi_i=\int\limits_a^b e(t)\overline{g_i(t)}dt$. *Отже, власні значення і власні функції задовольняють рівність* $\lambda e(x)-\sum\limits_{i=1}^{r}\xi_i p_i(x)=0$, *де* $\xi_i$ *– деякі числа. Тоді*

$$\sum_{i=1}^{r}\xi_i p_i(x)-\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{r}p_i(x)\overline{g_i(t)}\right)\left(\sum_{j=1}^{r}\xi_j p_j(t)/\lambda\right)dt=0$$

*і*

$$\sum_{i=1}^{r}p_i(x)\left(\lambda\xi_i-\int_a^b\left(\sum_{j=1}^{r}\xi_j p_j(t)\right)\overline{g_i(t)}dt\right)=0.$$

*Прирівняємо коефіцієнти, які стоять біля* $p_j(x)$, *до нуля. Таким чином, для знаходження* $\xi_j$ *отримаємо систему*

$$-\lambda\xi_j+\sum_{i=1}^{r}a_{ij}\xi_i=\ 0,\ j\in\overline{1;n},$$

*де* $a_{ij}=\int\limits_a^b p_i(t)\overline{g_j(t)}dt$. *Остання система має ненульовий роз’язок тоді й тільки тоді, коли*

$$\delta(\lambda):=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

*Бачимо, що власні значення співпадають з нулями визначника* $\delta(\lambda)$.

**Приклад 6.** *Розглянемо оператор* $A:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$, *визначений формулою* $A(u)(x)=\int\limits_0^1 xtu(t)dt$. *Власні функції такого оператора задовольняють рівняння* $\lambda e(x)=x\int\limits_0^1 te(t)dt$, *тобто* $\lambda e(x)=\xi_1 x$, *де* $\xi_1$ *– довільне число. Тому*

$$\lambda\xi_1 x=\int_0^1 xt\xi_1 tdt\ ,\ \lambda\xi_1 x=x\xi_1/3\,.$$

*Бачимо, що* $\lambda_1 = 1/3$ *є власним значенням і* $e(x) = x$ *– відповідна власна функція. Число* $\lambda = 0$ *також є власним значенням. Відповідними йому власними функціями є всі ті ненульові функції* $e \in L_2[0;1]$, *для яких* $\int\limits_0^1 te(t)dt = 0$. *Наприклад, такою є функція*

$$e(t) = \begin{cases} -t + \dfrac{1}{24}, \quad t \in [0;1/2], \\ \dfrac{1}{8}t, t \in [1/2;1]. \end{cases}$$

**Приклад 7.** *Розглянемо оператор* $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (x+t)u(t)dt$. *В даному випадку* $K(x;t) = p_1(x)\overline{g_1(t)} + p_2(x)\overline{g_2(t)}$, $p_1(x) = x$, $\overline{g_1(t)} = 1$, $p_2(x) = 1$, $\overline{g_2(t)} = t$. *Власні функції такого оператора задовольняють рівняння*

$$\int\limits_0^1 (x+t)e(t)dt = \lambda e(x).$$

*Тому* $\lambda e(x) = \xi_1 x + \xi_2$, *де* $\xi_1 = \int\limits_0^1 e(t)dt$ *і* $\xi_2 = \int\limits_0^1 te(t)dt$. *З рівності* $A(e)(x) = \lambda e(x)$ *отримуємо, що*

$$\lambda(\xi_1 x + \xi_2) = \int\limits_0^1 (x+t)(\xi_1 t + \xi_2)dt,$$

*тобто* $\lambda(\xi_1 x + \xi_2) = x(\xi_2 + \xi_1/2) + (\xi_2/2 + \xi_1/3)$. *Прирівнюючи коефіцієнти, які стоять біля однакових степенів* $x$, *отримуємо систему*

$$\begin{cases} -\lambda\xi_1 + \xi_1/2 + \xi_2 = 0, \\ \xi_1/3 - \lambda\xi_2 + \xi_2/2 = 0. \end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1 \\ 1/3 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

*Тому* $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ *і* $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ *– ненульові власні значення, а* $e_1(x) = (x - 1/\sqrt{3})\frac{\xi}{\lambda_1}$ *і* $e_2(x) = (x + 1/\sqrt{3})\frac{\xi'}{\lambda_2}$ *– їм відповідні власні функції, де* $\xi$ *і* $\xi'$ *– довільні числа, відмінні від нуля. Число* $\lambda = 0$ *також є власним значення цього оператора і відповідними йому власними функціями є всі ті ненульові функції* $e \in L_2[0;1]$, *які задовольняють умови* $\int_0^1 te(t)dt = 0$ *і* $\int_0^1 e(t)dt = 0$.

***Приклад 8.*** *Розглянемо оператор Вольтерра* $A(u)(x) = \int_0^x K(x;t)u(t)dt$, *з неперервним ядром. Оскільки для кожного* $s \in \mathbb{C}$ і *кожного* $q \in \mathbb{C}[0;b]$ *рівняння* $u(x) - s\int_0^x K(x;t)u(t)dt = q(x)$ *має в просторі* $\mathbb{C}[0;b]$ *єдиний розв'язок, то інтегральний оператор Вольтерра, розглядуваний в просторі* $C[0;b]$, *не має власних значень.*

***Приклад 9.*** *Розглянемо оператор*

$$A(u)(x) = \int_0^1 K(x;t)u(t)dt,\ K(x;t) = \begin{cases} (t-1)x, 0 \le t \le x, \\ t(x-1), x \le t \le 1. \end{cases}$$

*В даному випадку*

$$A(u)(x) = \int_0^x K(x;t)u(t)dt + \int_x^1 K(x;t)u(t)dt = \int_0^x x(t-1)u(t)dt + \int_x^1 (x-1)tu(t)dt\ .$$

*Тоді* $K'_x(x;x-) = x - 1$, $K'_x(x;x+) = x$ *і розв'язки рівняння* $\int_0^1 K(x;t)e(t)dt = \lambda e(x)$ *є також розв'язками рівнянь*

$$\int_0^x K'_x(x;t)e(t)dt + \int_x^1 K'_x(x;t)e(t)dt = \lambda e'(x),$$

$$\left(K'_x(x;x-) - K'_x(x;x+)\right)e(x) + \int_0^x K''_{x^2}(x;t)e(t)dt + \int_x^1 K''_{x^2}(x;t)e(t)dt = \lambda e''(x).$$

*Таким чином,* $-e(x) = \lambda e''(x)$. *Бачимо, що число* $\lambda = 0$ *не є власним значенням оператора* $A$. *Якщо* $\lambda \neq 0$, *то останнє рівняння можна* *переписати у вигляді* $e''(x)+se(x)=0$, *де* $s=1/\lambda$. *Загальний розв'язок останнього рівняння має вигляд* $e(x)=c_1\cos(x\sqrt{s})+c_2\sin(x\sqrt{s})$. *Але*

$$\int_0^1 K(0;t)e(t)dt=\int_0^1 K(1;t)e(t)dt=0 .$$

*Тому власні функції повинні задовольняти початкові умови* $e(0)=e(1)=0$. *Отже, для знаходження сталих* $c_1$ *та* $c_2$ *маємо систему*

$$\begin{cases} c_1=0, \\ c_1\cos\sqrt{s}+c_2\sin\sqrt{s}=0. \end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок, якщо* $c_2\sin\sqrt{s}=0$. *Тому* $\sqrt{s}=k\pi$, $s=k^2\pi^2$, $k\in\mathbb{N}$ *і*

$$e(x)=c\sin(\pi kx).$$

*Таким чином,* $\lambda_k=1/(k^2\pi^2)$ *– власні значення і* $e_k(x)=c_k\sin(\pi kx)$ *– відповідні власні функції, де* $k\in\mathbb{N}$ *і* $c_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

***Зауваження 1.*** *Припустимо, що деякий неперервний оператор* $A:H\to H$ *в гільбертовому просторі* $H$ *має таку послідовність власних векторів* $(e_k)$, *які відповідають послідовності* $(\lambda_k)$ *його власних значень, що кожен елемент* $q\in H$ *розвивається у збіжний в* $H$ *ряд* $q=\sum_k q_k e_k$. *Тоді розв'язок рівняння* $Au=q$ *можна шукати у вигляді ряду* $u=\sum_k u_k e_k$ *з невідомими коефіцієнтами* $u_k$. *Тоді*

$$Au=\sum_k u_k Ae_k=\sum_k u_k\lambda_k e_k .$$

*Отже, на підставі рівності*

$$\sum_k u_k\lambda_k e_k=\sum_k q_k e_k$$

*приходимо до висновку* $u=\sum_k \frac{q_k}{\lambda_k}e_k$ *– розв'язок рівняння* $Au=q$.

*Вже це вказує на важливість дослідження властивостей власних векторів операторів. Такі проблеми досліджуються в спектральній теорії лінійних операторів. Це дуже важливий розділ функціонального аналізу, елементів якого торкнемося в наступних пунктах.*

## 21. Кореневі і приєднані вектори. Кратність власного значення і власного вектора

Нехай $A:H\to H$ – деякий лінійний оператор в гільбертовому просторі $H$, $A^0=I$, $A^1=A,\dots,A^n=A(A^{n-1})$ для $n>1$. Кореневим елементом оператора $A$, що відповідає числу $\lambda\in\mathbb{C}$, називається такий ненульовий елемент $e\in D(A)$, що для деякого $n\in\mathbb{N}$ виконується

$$(A-\lambda I)^n(e)=0, \tag{1}$$

тобто $T_\lambda^n(e)=0$, де $T_\lambda=A-\lambda I$. При цьому найменше число $n_\lambda=n$, для якого виконується (1), називається висотою кореневого елемента $e$. Кореневі елементи висоти $n=1$ є власними значеннями оператора $A$.

**Теорема 1.** *Для того щоб лінійний оператор $A:H\to H$ мав кореневий елемент, що відповідає числу $\lambda$, необхідно і достатньо, щоб число $\lambda$ було власним значенням оператора $A$.*

**Доведення.** Нехай число $\lambda$ є власним значенням оператора. Тоді власний вектор, що відповідає $\lambda$ є і кореневим вектором цього оператора. Навпаки, якщо $e$ – кореневий вектор висоти $n>1$, то елемент $\varphi=(A-\lambda I)^{(n-1)}(e)$ є власним вектором, бо $\varphi\neq 0$ і $(A-\lambda I)(\varphi)=(A-\lambda I)^{(n)}(e)=0$.

Елемент $e_k\neq 0$ називається приєднаним елементом порядку $k$ до власного вектора $e_0$, що відповідає власному значенню $\lambda$, якщо існують такі ненульові елементи $e_1$, $e_2,\dots,$ $e_k$, із множини визначення оператора $A$, що

$$A(e_0)=\lambda e_0,\ A(e_1)=\lambda e_1+e_0,\dots,\ A(e_k)=\lambda e_k+e_{k-1}. \tag{2}$$

Власний вектор називається приєднаним вектором порядку $0$.

**Теорема 2.** *Для того щоб елемент $e_k$ був приєднаним елементом порядку $k\geq 1$ лінійного оператора $A:H\to H$,* *необхідно і достатньо, щоб він був кореневим вектором цього оператора висоти* $k+1$.

**Доведення.** Нехай $e_k$ – приєднаний вектор висоти $k$. Тоді

$$(A-\lambda I)^{k+1}(e_k)=(A-\lambda I)^k(A(e_k)+\lambda e_k)=(A-\lambda I)^k(e_{k-1})$$

$$=(A-\lambda I)^{k-1}(A(e_{k-1})-\lambda e_{k-1})=(A-\lambda I)^{k-1}(e_{k-2})=...=(A-\lambda I)(e_0)=0$$

і

$$(A-\lambda I)^k(e_k)=(A-\lambda I)(e_1)=A(e_1)-\lambda e_1=e_0\neq 0\,.$$

Тому $e_k$ – кореневий елемент висоти $k$. Навпаки, якщо $e_k$ – кореневий елемент висоти $k+1$, то $e_0=(A-\lambda I)^k(e_k)$ є власним вектором. Нехай $e_i=(A-\lambda I)^{k-i}(e_k)$. Тоді

$$e_{k-1}=(A-\lambda I)e_k=A(e_k)-\lambda e_k\,,$$

$$e_{k-2}=(A-\lambda I)^2e_k=(A-\lambda I)e_{k-1}=A(e_{k-1})-\lambda e_{k-1}\,,$$

..............................................................

$$e_1=(A-\lambda I)^{k-1}(e_k)=(A-\lambda I)e_2=Ae_2-\lambda e_2\,,$$

$$e_0=(A-\lambda I)^k(e_k)=(A-\lambda I)(e_1)=Ae_1-\lambda e_1\,,$$

тобто $e_k$ є приєднаним вектором висоти $k+1$. ▶

**Наслідок 1.** *Якщо* $e_k$ *– кореневий вектор висоти* $k\in\mathbb{N}$ *оператора* $A:H\to H$*, то* $e_1=(A-\lambda I)^{k-1}(e_k)$ *– його власний вектор.*

**Наслідок 2.** *Якщо* $e_m$ *– приєднаний вектор порядку* $m\in\mathbb{N}$ *оператора* $A:H\to H$*, то кожний вектор* $e_k$ *в ланцюзі (2) є приєднаним вектором порядку* $k$.

***Зауваження 1.*** *Якщо* $H$ *– скінченновимірний векторний простір і* $n\in\mathbb{N}$ *– його розмірність, то за теоремою Жордана для кожного лінійного оператора* $A:H\to H$ *існує базис в* $H$ *з його власних і приєднаних векторів.*

***Приклад 1.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$*, елементи якого позначаємо символами* $x:=\mathbf{x}:=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ *розглянемо оператор* $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*, який в базисі, утвореного векторами* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *та* $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$*, має матрицю*

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Тоді*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Число* $\lambda$ *є власним значенням, якщо існує такий ненульовий вектор* $e := \mathbf{e} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, *що* $A(e) = \lambda e$, *тобто* $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. *Для знаходження власного вектора маємо систему*

$$\begin{cases} \alpha_2 = \lambda \alpha_1, \\ 0 = \lambda \alpha_2. \end{cases}$$

*Таким чином,* $\lambda = 0$ *– єдине власне значення і* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *– відповідний власний вектор. За теоремою Жордана існує приєднаний вектор* $e_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, *який є лінійно незалежним з* $e_1$. *Для знаходження приєднаного вектора маємо рівняння*

$$A(e_2) = \lambda e_2 + e_1, \ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} \beta_2 = \lambda \beta_1 + 1, \\ 0 = \lambda \beta_2 + 0. \end{cases}$$

*Тому* $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *– шуканий приєднаний вектор.*

Розмірність замикання лінійної оболонки власних елементів, що відповідають власному значенню $\lambda$, називається геометричною кратністю власного значення $\lambda$ оператора $A: H \to H$. Розмірність замикання лінійної оболонки всіх кореневих елементів, що відповідають власному значенню $\lambda$, називається алгебраїчною кратністю власного значення $\lambda$. Зрозуміло, що геометрична кратність не перевищує алгебраїчної. Розмірність замикання лінійної оболонки всіх приєднаних елементів (включаючи і сам елемент) до власного елемента $e_0$ називається розмірністю власного елемента $e_0$. Якщо $H$ – скінченновимірний простір, то геометрична кратність власного значення $\lambda$ – це кількість всіх власних і приєднаних векторів, які відповідають $\lambda$, алгебраїчна кратність – це кількість всіх власних векторів, які відповідають $\lambda$, а кратність власного вектора $e_\lambda$ – це кількість його приєднаних векторів (власний вектор $e_\lambda$ вважається приєднаним).

***Приклад 2.*** *Для оператора $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, розглянутого в прикладі 1 попереднього пункту, геометрична кратність власного значення $\lambda = 0$ дорівнює двом, алгебраїчна – одиниці, кратність власного вектора $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ дорівнює двом.*

## 22. Спектр і резольвента лінійного оператора. Непорожність спектра лінійного неперервного оператора

Нехай $H$ – банахів простір, $I:H \to H$ – тотожній оператор. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ називається регулярним числом лінійного неперервного оператора $A:H \to H$ на банаховому просторі $H$, якщо оператор $A-\lambda I$ є взаємно однозначним відображенням $H$ на $H$. Отже, оператор $A-\lambda I$ має обернений, який також є взаємно однозначним і, завдяки теоремі С. Банаха, неперервним відображенням $H$ на $H$. Отже, число $\lambda \in \mathbb{C}$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли $r_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Оператор

$$r_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

називається резольвентою оператора $A$. Сукупність усіх інших $\lambda$ називається спектром оператора $A$ і позначається через $\sigma(A)$. Якщо $\lambda$ – регулярне значення оператора $A$, то для кожного $b \in H$ рівняння $\lambda u - A(u) = q$ має єдиний розв'язок $u = -r_\lambda(q)$.

**Теорема 1**. *Нехай $A:H \to H$ – лінійний неперервний оператор на банаховому просторі $H$, $\lambda \in \mathbb{C}$ і $|\lambda| > \|A\|$. Тоді: а) оператор $A-\lambda I:H \to H$ є оборотним, б) резольвента $r_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}:H \to H$ є лінійним неперервним оператором, в) $r_\lambda = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$ і цей ряд збігається в $\mathcal{L}(H)$ та абсолютно збігається в топології простору $\mathcal{L}(H)$, г) для кожного $q \in H$ рівняння $\lambda u - A(u) = q$ має в $H$ єдиний розв'язок $u = -r_\lambda(q)$.*

**Доведення.** Справді, оскільки $\|A/\lambda\|<1$, то за теоремою С. Банаха оператор $I - A/\lambda$ є оборотним,

$$r_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

*і останній ряд збігається* $\mathcal{L}(H)$. ▶

***Зауваження 1.*** *Вище ми вказали спосіб знаходження резольвенти оператора для тих* $\lambda \in \mathbb{C}$, *для яких* $|\lambda| > \|A\|$. *В подальшому для деякого класу операторів (компактних та самоспряжених) вкажемо спосіб знаходження резольвенти і для інших* $\lambda \in \mathbb{C}$.

***Зауваження 2.*** *Між резольвентою Фредгольма та резольвентою лінійного оператора є взаємозв'язок:* $R_s = \lambda(\lambda r_\lambda - I)$, $r_\lambda = s(I + sR_s)$, $\lambda = 1/s$.

**Теорема 2.** *Кожне власне значення оператора* $A : H \to H$ *належать спектру оператора* $A$.

**Доведення.** Справді, якщо $\lambda$ – власне значення, то рівняння $A(u) - \lambda u = 0$ крім нульового розв'язку має ще ненульовий розв'язок, який є власним вектором, що відповідає власному значенню $\lambda$. Отже, оператор $A - \lambda I$ не є оборотним. Тому $\lambda$ належить спектру. ▶

**Теорема 3.** *Якщо* $H$ *– скінченновимірний простір, то* $\lambda$ *належить спектру тоді і тільки тоді, коли* $\lambda$ *є власним значенням.*

**Доведення.** Справді, у скінченновимірному просторі кожний лінійний оператор є неперервним. Крім цього, у скінченновимірному просторі лінійний оператор є взаємно однозначним відображенням $H$ на $H$ тоді і тільки тоді, коли його ядро складається тільки з нульового елемента. Ядро оператора $A - \lambda I$ містить ненульові елементи тоді і тільки тоді, коли $\lambda$ є власним значенням. ▶

Якщо $H$ – нескінченновимірний простір, то спектру оператора $A$ належать і ті точки $\lambda$, для яких оператор $A - \lambda I$ не є оборотним або не відображає $H$ на $H$.

***Приклад 1.*** *У просторі* $H = C[0;1]$ *розглянемо оператор множення на незалежну змінну, тобто оператор* $A$, *визначений* *формулою* $A(u)(t)=tu(t)$. *Цей оператор є неперервним. Крім цього, оператор* $A-\lambda I$ *є оборотним, бо*

$$(A-\lambda I)(u)(t)=tu(t)-\lambda u(t)=(t-\lambda)u(t),$$

*і з рівності* $(A-\lambda I)(u)(t)=0$, *тобто із висловлень* $\big(\forall t\in[0;1]\big)$: $(t-\lambda)u(t)=0$ *і* $u\in C[0;1]$ *випливає, що* $u=0$. *Кожну функцію* $u\in C[0;1]$ *розглядуваний оператор відображає у функцію, яка в точці* $t=\lambda$ *приймає значення* $0$. *Тому для кожного* $\lambda\in[0;1]$ *цей оператор не відображає* $C[0;1]$ *на* $C[0;1]$. *Отже, кожне* $\lambda\in[0;1]$ *належить спектру оператора. Кожне* $\lambda\notin[0;1]$ *є регулярним, бо для кожного* $\lambda\notin[0;1]$ *і кожного* $v\in C[0;1]$ *рівняння* $(t-\lambda)u(t)=v(t)$ *має єдиний розв'язок* $u(t)=\dfrac{1}{t-\lambda}v(t)$ *і резольвента* $r_\lambda(v)(t)=\dfrac{1}{t-\lambda}v(t)$ *є оператором множення на неперервну функцію* $a(t)=1/(t-\lambda)$, *а такий оператор є неперервним в* $C[0;1]$. *Разом з цим, розглядуваний оператор* $A$ *не має власних значень, бо рівність* $tu(t)=\lambda u(t)$ *для деякого* $\lambda\in\mathbb{C}$, *деякої функції* $u\in C[0;1]$ *і всіх* $t\in[0;1]$ *можлива тільки у випадку* $u=0$.

***Приклад 2.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$, *елементи якого позначаємо символами* $x=\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, *розглянемо оператор* $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, *який в базисі, утвореного векторами* $e_1=\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *та* $e_2=\mathbf{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, *має матрицю* $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$. *Тоді* $A(x)=\mathbf{Ax}$. *Число* $\lambda$ *є власним значенням, якщо існує такий ненульовий вектор* $e=\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$, *що* $A(e)=\lambda I(e)$, *тобто* $\mathbf{Ae}=\lambda\mathbf{e}$. *Для знаходження* $\lambda$ *та координат вектора* $\mathbf{e}$ *маємо систему*

$$\begin{cases}(2-\lambda)\alpha_1+0\alpha_2=0,\\ 0\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2=0.\end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок, якщо*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

*Таким чином,* $\lambda_1 = 2$ *і* $\lambda_2 = 1$ *– власні значення. Власному значенню* $\lambda_1 = 2$ *відповідає власний вектор* $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, а власному значенню* $\lambda_2 = 1$ *– власний вектор* $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Таким чином, спектр оператора* $A$ *– це множина* $\{1;2\}$.

Якщо $H$ – скінченновимірний векторний простір, то кожний лінійний оператор $A: H \to H$ має принаймні одне власне значення і, отже, спектр такого оператора непорожній. В нескінченновимірному нормованому просторі не кожний лінійний неперервний оператор має власний вектор. Проте має місце наступне твердження.

**Теорема 4.** *Спектр кожного лінійного неперервного оператора* $A: H \to H$ *в гільбертовому просторі* $H$ *є непорожньою множиною.*

**Теорема 5.** *Множина регулярних точок неперервного оператора* $A: H \to H$ *є відкритою.*

**Наслідок 1.** *Спектр кожного лінійного неперервного оператора* $A: H \to H$ *в банаховому просторі* $H$ *є замкненою в* $\mathbb{C}$ *множиною.*

**Теорема 6.** *Спектр кожного лінійного неперервного оператора* $A: H \to H$ *в банаховому просторі* $H$ *лежить в крузі* $\overline{U(0;\|A\|)} \subset \mathbb{C}$.

## 23. Компактні оператори. Компактність інтегрального оператора Фредгольма

Оператор $A: H \to H$ називається компактним або цілком неперервним, якщо для нього образом кожної обмеженої множини є відносно компактна множина.

**Теорема 1.** *Нехай* $H$ *– нормований простір. Тоді кожний компактний оператор* $A: H \to H$ *є обмеженим.*

**Доведення.** Справді, такий оператор переводить одиничну кулю у відносно компактну множину, а остання є обмеженою множиною. ►

**Теорема 2.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір,* $A: H \to H$ *– лінійний оператор. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

*1) оператор* $A$ *є компактним;*

*2) для кожної обмеженої множини* $E \subset H$ *множина* $A(E)$ *є відносно компактною в* $H$ *;*

*3) для кожної слабко відносно компактної множини* $E \subset H$ *множина* $A(E)$ *є відносно компактною множиною в* $H$ *;*

*4) для кожної слабко збіжної в* $H$ *послідовності* $(x_k)$ *послідовність* $\left(A(x_k)\right)$ *збігається в* $H$ *;*

*5) для кожної обмеженої в* $H$ *послідовності* $(x_k)$*, послідовність* $\left(A(x_k)\right)$ *містить збіжну в* $H$ *підпослідовність.*

***Приклад 1.*** *Якщо* $H$ *– скінченновимірний евклідів простір, то кожний лінійний оператор* $A: H \to H$ *є компактним, бо такий оператор є неперервним, переводить обмежену множину в обмежену, а кожна обмежена множина в скінченновимірному просторі є відносно компактною.*

***Приклад 2.*** *Якщо* $H$ *– нескінченновимірний нормований простір, то тотожній оператор* $I: H \to H$*, будучи лінійним і неперервним, не є компактним, бо такий оператор переводить одиничну кулю в себе, а одинична куля в нескінченновимірному просторі не є відносно компактною множиною.*

Вкажемо достатні умови компактності інтегрального оператора $A: C[a;b] \to C[a;b]$ Фредгольма, визначеного формулою

$$A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt\,. \tag{1}$$

**Теорема 3.** *Якщо* $K$ *– неперервне ядро, тобто* $K \in C\left([a;b] \times [a;b]\right)$*, то оператор Фредгольма* $A: C[a;b] \to C[a;b]$*, визначений рівністю (1), є компактним в просторі* $C[a;b]$.

***Приклад 3.*** *Оператор* $A: C[0;1] \to C[0;1]$, *визначений формулою* $A(u)(x) = \int\limits_0^1 \frac{\sin(x-t)}{x-t} u(t)dt$, *є компактним в просторі* $C[0;1]$, *оскільки функція*

$$K(x;t) = \begin{cases} \frac{\sin(x-t)}{x-t}, & x \neq t, \\ 1, & x = t, \end{cases}$$

*є неперервною на прямокутнику* $[0;1] \times [0;1]$.

**Теорема 4.** *Нехай* $K$ *– квадратично інтегровне ядро, тобто*

$$\|K\| := \left( \int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x;t)|^2 \, dxdt \right)^{1/2} < +\infty .$$

*Тоді оператор Фредгольма* $A: L_2[a;b] \to L_2[a;b]$, *визначений рівністю(1), є компактним в просторі* $L_2[a;b]$.

***Приклад 4.*** *Оператор* $A: L_2[0;1] \to L_2[0;1]$, *визначений формулою* $A(u)(x) = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{t}} u(t)dt$, *є компактним в просторі* $L_2[0;1]$.

## 24. Спряжений оператор оператора, визначеного на всьому просторі

Нехай $H$ – гільбертовий простір із скалярним добутком $\langle \cdot;\cdot \rangle$. Оператор $A^*: H \to H$ називається спряженим оператором оператора $A: H \to H$, якщо для всіх $x \in H$ і всіх $y \in H$ виконується $\langle A(x); y \rangle = \langle x; A^*(y) \rangle$.

**Теорема 1.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір. Тоді кожний оператор* $A \in \mathcal{L}(H)$ *має єдиний спряжений оператор* $A^* \in \mathcal{L}(H)$ *і* $\|A^*\| = \|A\|$.

**Теорема 2 (Шаудера).** *Спряжений оператор компактного оператора* $A: H \to H$ *в гільбертовому просторі* $H$, *є компактним оператором.*

***Приклад 1.*** *В просторі* $L_2[a;b]$ *розглянемо оператор*

$A: L_2[a;b] \to L_2[a;b]$ *множення на функцію* $a \in C[a;b]$, *тобто оператор, визначений формулою* $A(x)(t) = a(t)x(t)$. *Тоді його спряженим є оператор* $A^*(y)(t) = \overline{a(t)}y(t)$ *множення на комплексно спряжену функцію* $\bar{a}$, *бо*

$$\langle A(x); y\rangle = \int_a^b a(t)x(t)\overline{y(t)}dt = \int_a^b x(t)\overline{\overline{a(t)}y(t)}dt = \langle x; A^*(y)\rangle .$$

**Приклад 2.** *В просторі* $L_2(\mathbb{R})$ *розглянемо оператор* $A_\tau : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ *зсуву на* $\tau$, *тобто оператор, визначений формулою* $A_\tau(x)(t) = x(t-\tau)$. *Тоді його спряженим є оператор, визначений формулою* $A_\tau^*(y)(t) = y(t+\tau)$, *бо*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_\tau(x)(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t+\tau)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{A_\tau^*(y)(t)}dt .$$

**Приклад 3.** *Нехай*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– *матриця оператора* $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *в деякому базисі. Тоді матрицею спряженого оператора* $A^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *в цьому ж базисі є спряжена матриця*

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ . & . & . \\ \overline{a_{1n}} & . & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

*бо*

$$\langle A(x); y\rangle = \langle \mathbf{Ax}; \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\overline{y_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{y_i}\right)x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} y_i}\right) = \langle \mathbf{x}; \mathbf{A}^*\mathbf{y}\rangle .$$

*Отже, для оператора* $A^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *з матрицею* $\mathbf{A}^*$ *виконується* $\langle A(x); y\rangle = \langle x; A^*(y)\rangle$. *Тому такий оператор є спряженим оператором оператора* $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

**Приклад 4.** *Якщо* $H$ *– гільбертів простір і* $I: H \to H$ *– тотожній оператор, то* $I^* = I$ *, бо* $\langle I(x); y\rangle = \langle x; y\rangle = \langle x; I(y)\rangle$.

**Приклад 5.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір і* $A \in \mathcal{L}(H)$*. Тоді* $A^{**} = A$*, бо* $\left\langle A^*(x); y\right\rangle = \left\langle x; A^{**}(y)\right\rangle$ *для всіх* $x \in H$ *і всіх* $y \in H$.

**Приклад 6.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір,* $A \in \mathcal{L}(H)$ *і* $B \in \mathcal{L}(H)$. *Тоді* $(A+B)^* = A^* + B^*$*, оскільки* $\langle A(x); y\rangle = \left\langle x; A^*(y)\right\rangle$, $\langle B(x); y\rangle = \left\langle x; B^*(y)\right\rangle$ *і*

$$\langle A(x); y\rangle + \langle B(x); y\rangle = \left\langle x; A^*(y)\right\rangle + \left\langle x; B^*(y)\right\rangle .$$

*Тому* $\langle (A+B)(x); y\rangle = \left\langle x; (A+B)^*(y)\right\rangle$.

**Приклад 7.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір і оператор* $T \in \mathcal{L}(H)$ *подається у вигляді* $T = I - A$*, де* $A \in \mathcal{L}(H)$*. Тоді* $T^* = I - A^*$.

**Приклад 8.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір,* $A \in \mathcal{L}(H)$ *і* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Тоді* $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$*, бо*

$$\langle (\lambda A)(x); y\rangle = \langle A(\lambda x); y\rangle = \left\langle \lambda x; A^*(y)\right\rangle = \left\langle x; \overline{\lambda} A^*(y)\right\rangle .$$

**Приклад 9.** *Нехай* $H$ *– гільбертів простір,* $A \in \mathcal{L}(H)$ *і* $B \in \mathcal{L}(H)$. *Тоді* $(AB)^* = B^* A^*$*, бо*

$$\langle (AB)(x); y\rangle = \langle A(B(x)); y\rangle = \left\langle B(x); A^*(y)\right\rangle = \left\langle x; B^*(A^*(y))\right\rangle .$$

**Приклад 10.** *Якщо* $H$ *– гільбертів простір,* $A \in \mathcal{L}(H)$ *і* $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$*, то* $A^{*^{-1}} \in \mathcal{L}(H)$ *і* $\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^{-1}$*. Справді, якщо* $A^*(y_1) = A^*(y_2)$, $y_1 = A(x_1)$ *і* $y_2 = A(x_2)$*, то* $0 = \left\langle x; A^*\left(y_1 - y_2\right)\right\rangle = \left\langle A(x); A(x_1) - A(x_2)\right\rangle = \left\langle y; A(x_1) - A(x_2)\right\rangle$ *для довільного* $y \in H$*, де* $x = A^{-1}(y)$. *Тому* $A(x_1) = A(x_2)$ *і* $y_1 = y_2$*. Отже, спряжений оператор є оборотним і тому за теоремою С. Банаха* $A^{*^{-1}} \in \mathcal{L}(H)$*. Крім цього, якщо* $u = A^{-1}(x)$ *і* $v = A^{-1}(y)$*, то*

$$\left\langle x; \left(A^{-1}\right)^*(y)\right\rangle = \left\langle A^{-1}(x); y\right\rangle = \langle u; A(v)\rangle$$

$$=\left\langle A^*(A^{-1}(x));v\right\rangle=\left\langle A^{-1}(x);A(v)\right\rangle=\left\langle A^{-1}(x);y\right\rangle,$$

*тобто* $\left(A^{-1}\right)^*=\left(A^*\right)^{-1}$.

***Приклад 11.*** *В просторі* $L_2(\mathbb{R})$ *розглянемо оператор Фур'є* $F:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, *визначений формулою*

$$F(f)(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx.$$

*Тоді спряженим є оператор, визначений формулою*

$$F^*(f)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{iyx}dy,$$

*тобто* $F^*=F^{-1}$, *де* $F^{-1}$ *– обернений оператор Фур'є. Справді,*

$$\left\langle F(f);\varphi\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx\right)\overline{\varphi(y)}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\varphi(y)}e^{-iyx}dy\right)f(x)dx=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{iyx}dy\right)}f(x)dx$$

$$=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{iyx}dy\right)dx}=\left\langle f;F^*(\varphi)\right\rangle.$$

## 25. Спряжений оператор в просторі $L_2[a;b]$ інтегрального оператора Фредгольма

**Теорема 1.** *Нехай* $K:[a;b]\times[a;b]\to\mathbb{C}$ *– квадратично інтегровне ядро, тобто*

$$\|K\|:=\left(\int_a^b\int_a^b|K(x;t)|^2\,dxdt\right)^{1/2}<+\infty.$$

*Тоді спряженим в просторі* $L_2[a;b]$ *оператором оператора Фредгольма* $A:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$, *визначеного рівністю*

$$A(u)(x)=\int_a^b K(x;t)u(t)dt,$$

*є інтегральний оператор* $A^*:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$ *Фредгольма, визначений формулою*

$$A^*(v)(x)=\int_a^b \overline{K(t;x)}v(t)dt,$$

*тобто інтегральний оператор Фредгольма, породжений спряженим ядром:* $K^*(x;t)=\overline{K(t;x)}$.

**Доведення.** Справді, за нерівністю Шварца

$$\int_a^b\left(\int_a^b|K(x;t)||u(t)|dt\right)|\overline{v(x)}|dx\le\left(\int_a^b\left(\int_a^b|K(x;t)||u(t)|dt\right)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b|\overline{v(x)}|^2dx\right)^{1/2}$$

$$\le\left(\int_a^b\left(\int_a^b|K(x;t)|^2dt\int_a^b|u(t)|^2dt\right)dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b|\overline{v(x)}|^2dx\right)^{1/2}=\|K\|\|u\|\|v\|.$$

Тому за теоремою про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу на гільбертовому просторі та теоремою Фубіні

$$\langle A(u);v\rangle=\int_a^b\left(\int_a^b K(x;t)u(t)dt\right)\overline{v(x)}dt=\int_a^b\left(\int_a^b K(x;t)\overline{v(x)}dx\right)u(t)dt$$

$$=\int_a^b u(t)\overline{\left(\int_a^b\overline{K(x;t)}v(x)dx\right)}dt=\int_a^b u(t)\overline{A^*(v)(t)}dt=\langle u;A^*(v)\rangle$$

для всіх $u\in L_2[a;b]$ і всіх $v\in L_2[a;b]$. Звідси випливає потрібне. ►

***Приклад 1.*** *Спряжений оператор* $A^*:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$ *оператора Фредгольма* $A:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$, *визначеного рівністю* $A(u)(x)=\int_0^1(2x+t)u(t)dt$, *задається формулою*

$$A^*(u)(x)=\int_0^1(x+2t)u(t)dt.$$

***Приклад 2.*** *Спряжений оператор* $A^*:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$ *оператора Фредгольма* $A:L_2[0;1]\to L_2[0;1]$, *визначеного рівністю* $A(u)(x)=\int_0^1(2x+it)u(t)dt$, *задається формулою*

$$A^*(u)(x)=\int_0^1(-ix+2t)u(t)dt.$$

***Приклад 3.*** *Нехай* $K$ *– квадратично інтегровне або полярне ядро,* $T:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$ *– оператор, визначений формулою*

$T(u)(x)=u(x)-\int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt$, *тобто* $T=I-A$, *де* $A$ *– інтегральний оператор Фредгольма. Тоді спряженим є оператор* $T^*:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$, *визначений формулою*

$$T^*(u)(x)=u(x)-\int\limits_a^b \overline{K(t;x)}u(t)dt\,.$$

***Приклад 4.*** *Нехай* $K\in C\big([a;b]\times[a;b]\big)$. *Тоді спряжений в* $L_2[a;b]$ *оператор оператора Вольтерра* $A:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$, *визначеного рівністю* $A(u)(x)=\int\limits_a^x K(x;t)u(t)dt$, *задається формулою*

$$A^*(u)(x)=\int\limits_x^b \overline{K(t;x)}u(t)dt\,.$$

*Справді,*

$$\big\langle A(u);v\big\rangle=\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x K(x;t)u(t)dt\right)\overline{v(x)}dt=\int\limits_a^b\left(\int\limits_t^b K(x;t)\overline{v(x)}dx\right)u(t)dt$$

$$=\int\limits_a^b u(t)\overline{\left(\int\limits_t^b \overline{K(x;t)}v(x)dx\right)}dt=\int\limits_a^b u(t)\overline{A^*(v)(t)}dt=\big\langle u;A^*(v)\big\rangle$$

*для всіх* $u\in L_2[a;b]$ *і всіх* $v\in L_2[a;b]$. *Звідси випливає потрібне.*

## 26. Теореми Фредгольма

**Теорема 1 (перша теорема Фредгольма).** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний оператор в гільбертовому просторі* $H$. *Тоді рівняння*

$$u-A(u)=q \qquad (1)$$

*має розв'язок в просторі* $H$ *для тих і тільки тих* $q\in H$, *які є ортогональні кожному розв'язку з простору* $H$ *рівняння*

$$\tilde{u}-A^*(\tilde{u})=0\,, \qquad (2)$$

*тобто* $\langle q;\tilde{u}\rangle=0$ *для кожного розв'язку* $\tilde{u}\in H$ *рівняння (2).*

**Теорема 2 (друга теорема Фредгольма).** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний оператор в гільбертовому просторі* $H$. *Тоді для кожного* $q\in H$ *рівняння (1) має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння*

$$u - A(u) = 0 \qquad (3)$$

*має тільки нульовий розв'язок в просторі* $H$ *.*

**Теорема 2" (альтернатива Фредгольма).** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний оператор в гільбертовому просторі* $H$ *. Тоді для будь-якого* $q \in H$ *рівняння (1) має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *або рівняння (2) має ненульовий розв'язок в просторі* $H$ *.*

**Теорема 3 (третя теорема Фредгольма).** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний оператор в гільбертовому просторі* $H$ *. Тоді рівняння (3) та*

$$\tilde{u} - A^*(\tilde{u}) = 0 \qquad (4)$$

*мають в просторі* $H$ *однакову і при цьому скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма (неоднорідне та однорідне):

$$u(x) - \int_a^b K(x;t)u(t)dt = q(x)\,, \qquad (1_ф)$$

$$u(x) - \int_a^b K(x;t)u(t)dt = 0\,, \qquad (2_ф)$$

і відповідні спряжені рівняння

$$v(t) - \int_a^b \overline{K(x;t)}v(x)dx = g(t)\,, \qquad (3_ф)$$

$$v(t) - \int_a^b \overline{K(x;t)}v(x)dx = 0\,. \qquad (4_ф)$$

Нехай

$$A(u)(x) = \int_a^b K(x;t)u(t)dt\,,\ A^*(v)(x) = \int_a^b \overline{K(x;t)}v(x)dx\,. \qquad (5_ф)$$

**Наслідок 1 (перша теорема Фредгольма для інтегральних рівнянь Фредгольма).** *Нехай* $K:[a;b]\times[a;b]\to\mathbb{C}$ *– квадратично інтегровне або полярне ядро. Тоді рівняння (1ф) має в просторі* $L_2[a;b]$ *розв'язок* $u$ *для тих і тільки тих* $q \in L_2[a;b]$*, які є ортогональні кожному розв'язку* $v$ *з простору* $L_2[a;b]$ *спряженого однорідного рівняння* (4$_ф$)*:*

$$\int_a^b q(x)\overline{v(x)}dx = 0, \qquad (6_ф)$$

*тобто множина значень оператора* $T = I - A$ *складається з тих* $q \in L_2[a;b]$*, які задовольняють умову (6*$_ф$*).*

**Наслідок 2 (друга теорема Фредгольма).** *Нехай* $K : [a;b] \times [a;b] \to \mathbb{C}$ *– квадратично інтегровне або полярне ядро. Тоді для кожного* $q \in L_2[a;b]$ *рівняння (1*$_ф$*) має єдиний розв'язок в просторі* $L_2[a;b]$ *тоді і тільки тоді, коли рівняння (2*$_ф$*) має тільки нульовий розв'язок.*

**Наслідок 2" (альтернатива Фредгольма).** *Нехай* $K : [a;b] \times [a;b] \to \mathbb{C}$ *– квадратично інтегровне або полярне ядро. Тоді або для кожної функції* $q \in L_2[a;b]$ *рівняння (1*$_ф$*) має єдиний розв'язок в просторі* $L_2[a;b]$ *або однорідне рівняння (2*$_ф$*) має в* $L_2[a;b]$ *ненульові розв'язки.*

**Наслідок 3 (третя теорема Фредгольма).** *Нехай* $K : [a;b] \times [a;b] \to \mathbb{C}$ *– квадратично інтегровне ядро. Тоді рівняння (2*$_ф$*) і (4*$_ф$*) мають в просторі* $L_2[a;b]$ *однакову скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x) - s_1 \int_0^1 (x+t)u(t)dt = q(x),$$

*де*

$$s_1 = 1/\lambda_1 \text{ і } \lambda_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

*Число* $\lambda_1$ *є власним значенням оператора* $A(u)(x) = \int_0^1 (x+t)u(t)dt$*, якому відповідає власна функція*

$$e_1(x) = \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\xi_1}{\lambda_1}.$$

*Множина розв'язків рівняння*

$$u(x) - s_1 \int_0^1 (x+t)u(t)dt = 0$$

*має вигляд* $u(x) = (x - 1/\sqrt{3})s_1\xi_1$, *де* $\xi_1 \in \mathbb{C}$. *Тому розглядуване рівняння має розв'язок в просторі* $L_2[0;1]$ *для тих і тільки тих* $q \in L_2[0;1]$, *які задовольняють умову*

$$\xi_1 s_1 \int_0^1 q(x)\overline{(x - 1/\sqrt{3})}dx = 0 .$$

***Приклад 2.*** *Кожний лінійний оператор* $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *задається* $n \times n$*-матрицею*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Відповідне рівняння* $T(u) = q$ *рівносильне рівнянню* $\mathbf{Tu} = \mathbf{q}$, *тобто системі*

$$\begin{cases} t_{11}u_1 + \ldots + t_{1n}u_n = q_1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ t_{n1}u_1 + \ldots + t_{nn}u_n = q_n. \end{cases} \qquad (5)$$

*Спряжений оператор* $T^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *задається спряженою матрицею*

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} \overline{t}_{11} & \cdots & \overline{t}_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{t}_{1n} & \cdots & \overline{t}_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Разом з системою (5) розглянемо системи*

$$\begin{cases} \overline{t}_{11}\tilde{u}_1 + \ldots + \overline{t}_{n1}\tilde{u}_n = g_1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ \overline{t}_{1n}\tilde{u}_1 + \ldots + \overline{t}_{nn}\tilde{u}_n = g_n. \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} t_{11}u_1 + \ldots + t_{1n}u_n = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ t_{n1}u_1 + \ldots + t_{nn}u_n = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \overline{t}_{11}\tilde{u}_1 + \ldots + \overline{t}_{n1}\tilde{u}_n = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ \overline{t}_{1n}\tilde{u}_1 + \ldots + \overline{t}_{nn}\tilde{u}_n = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

*Теореми Фредгольма є аналогом наступних тверджень про* *скінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь: а) система (5) має розв'язок для тих і тільки тих*

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

*які є ортогональні (*$\sum_{i=1}^{n} q_i \overline{\tilde{u}_i} = 0$*) кожному розв'язку*

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \dots \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

*системи (8); б) для кожного* $q \in \mathbb{C}^n$ *система (5) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли система (7) має тільки нульовий розв'язок; в) системи (7) та (8) мають однакову скінченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

***Приклад 3**. Нехай* $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *– оператор, заданий в деякому базисі матрицею*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Тоді спряжений оператор* $T^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *задається спряженою матрицею*

$$\mathbf{T}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Рівняння (1) і (2) рівносильні відповідно системам*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = q_1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = q_2, \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = q_3, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

*Ранг матриці* **T** *дорівнює двом і третє рівняння останньої системи рівносильне другому. Тому знаходимо розв'язки системи (10) наступним чином:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = -2x_3, \end{cases} \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$$

*Отже,*

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

*– простір розв'язків системи (10), тобто простір розв'язків рівняння* $T^*(\tilde{u}) = 0$. *Цей простір є двовимірним, бо* $r_{\mathbf{T}} = 2$. *Вектори*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ і } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*утворюють ортонормований базис в ньому. Тому система (9) має розв'язок для тих* $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, *які мають вигляд* $q = c_3 e_3$, *де* $c_3 \in \mathbb{C}$ *і* $e_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix}$ *– вектор, ортогональний кожному з векторів* $e_1$ *та* $e_2$.

*Для знаходження чисел* $\alpha_{3j}$ *маємо систему*

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_{31}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\alpha_{32}}{\sqrt{2}} = 0, \\ \dfrac{\alpha_{33}}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

*Тому*

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ і } \left\{ q = \begin{pmatrix} \tilde{c}_3 \\ -\tilde{c}_3 \\ 0 \end{pmatrix} : \tilde{c}_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

*– множина тих $q \in \mathbb{C}^3$, для яких рівняння $T(x)=q$ має розв'язок.*

**Теорема 4**. *Нехай $A: H \to H$ – компактний оператор в гільбертовому просторі $H$. Тоді: а) його спектр є скінченною або зліченною підмножиною круга $\overline{U(0;\|A\|)}$, граничною точкою якої може бути хіба-що точка $0$; б) точка $0$ належить спектру; в) всі відмінні від нуля точки спектра є власними значеннями скінченної кратності.*

## 27. Самоспряжені оператори, визначені на всьому просторі

Нехай $H$ – гільбертовий простір. Обмежений оператор $A: H \to H$ називається самоспряженим, якщо $A^* = A$, тобто якщо $\langle A(x); y\rangle = \langle x; A(y)\rangle$ для всіх $x \in H$ і $y \in H$.

**Теорема 1.** *Нехай $H$ – гільбертовий простір. Тоді кожний оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ єдиним чином подається у вигляді $A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$, де $\operatorname{Re} A$ і $\operatorname{Im} A$ – самоспряжені оператори.*

**Теорема 2.** *Нехай $H$ – гільбертовий простір. Тоді наступні умови є еквівалентними: 1) оператор $A: H \to H$ є самоспряженим; 2) $\langle A(x); y\rangle = \langle x; A(y)\rangle$ для всіх $x$ і $y$ з $H$; 3) $\langle A(x); x\rangle \in \mathbb{R}$ для всіх $x \in H$.*

**Теорема 3.** *Нехай $K \in L_2([a;b]\times[a;b])$. Тоді інтегральний оператор $A: L_2[a;b] \to L_2[a;b]$ Фредгольма, визначений рівністю $A(u)(x) = \int\limits_a^b K(x;t)u(t)dt$, є самоспряженим в просторі $L_2[a;b]$, якщо для майже всіх $(x;t) \in [a;b]\times[a;b]$ виконується $K(x;t) = \overline{K(t;x)}$.*

***Приклад 1.*** *Оператор $A$, визначений формулою $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (x+t)u(t)dt$, є самоспряженим в просторі $L_2[0;1]$.*

***Приклад 2.*** *Оператор $A$, визначений формулою*

$$A(u)(x) = \int\limits_0^1 ((2+i)x + (2-i)t)u(t)dt,$$

*є самоспряженим в просторі $L_2[0;1]$.*

***Приклад 3.*** *Оператор $A$, визначений формулою*

$$A(u)(x)=\int_0^1 e^{i(x-t)}u(t)dt,$$

*є самоспряженим в просторі* $L_2[0;1]$.

***Приклад 4.*** *Оператор Фур'є* $F:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, *визначений формулою*

$$F(u)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}u(t)dt,$$

*не є самоспряженим в просторі* $L_2(\mathbb{R})$.

***Приклад 5.*** *Оператор* $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, *заданий в деякому базисі матрицею*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

*є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли* $t_{ij}=\overline{t_{ji}}$ *для всіх* $i\in\overline{1;n}$ *та всіх* $j\in\overline{1;n}$.

***Приклад 6.*** *Оператор* $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, *заданий в деякому базисі матрицею*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & -1 & 2i \\ 1+i & -2i & 2 \end{pmatrix},$$

*є самоспряженим в просторі* $\mathbb{C}^3$.

***Приклад 7.*** *Оператор* $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, *заданий в деякому базисі матрицею*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1-i & i & -1+2i \\ 1+i & 1-2i & -1 \end{pmatrix},$$

*не є самоспряженим в просторі* $\mathbb{C}^3$.

***Приклад 8.*** *Інтегральний оператор Вольтерра* $A(u)(x)=\int_0^x K(x;t)u(t)dt$ *з неперервним ядром може бути самоспряженим в просторі* $L_2[a;b]$ *тільки у випадку, коли*

$K(x;t)=0$ *для всіх* $(x;t)\in[a;b]\times[a;b]$.

***Приклад 9.*** *В просторі* $L_2[a;b]$ *розглянемо оператор* $A:L_2[a;b]\to L_2[a;b]$ *множення на функцію* $a\in C[a;b]$, *тобто оператор, визначений формулою* $A(x)(t)=a(t)x(t)$. *Тоді його спряженим є оператор* $A^*(y)(t)=\overline{a(t)}y(t)$. *Отже, цей оператор є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{Im}a(t)=0$ *для всіх* $t\in[a;b]$.

## 28. Власні вектори і власні значення самоспряженого оператора. Спектр компактного самоспряженого оператора і повнота послідовності його власних векторів в гільбертовому просторі

**Теорема 1.** *Кожний компактний самоспряжений оператор* $A:H\to H$ *в гільбертовому просторі* $H$ *має принаймні одне власне значення і серед його власних значень існує таке* $\lambda$, *що* $|\lambda|=\|A\|$.

**Теорема 2.** *Нехай* $A:H\to H$ *– самоспряжений оператор в евклідовому просторі* $H$. *Тоді всі його власні значення дійсні.*

**Доведення.** Нехай $e$ – власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda$. Тоді $A(e)=\lambda e$ і

$$\lambda\langle e;e\rangle=\langle A(e);e\rangle=\langle e;A(e)\rangle=\langle e;\lambda e\rangle=\langle \lambda e;e\rangle=\bar{\lambda}\langle e;e\rangle.$$

Отже, $\lambda=\bar{\lambda}$. Тому $\lambda\in\mathbb{R}$. ▶

**Теорема 3.** *Нехай* $A:H\to H$ *– самоспряжений оператор в евклідовому просторі* $H$. *Тоді власні вектори, які відповідають різним власним значенням, ортогональні.*

**Доведення.** Нехай $A(e_1)=\lambda_1e_1$ і $A(e_2)=\lambda_2e_2$ і $\lambda_1\neq\lambda_2$. Тоді

$$\lambda_1\langle e_1;e_2\rangle=\langle A(e_1);e_2\rangle=\langle e_1;A(e_2)\rangle=\langle e_1;\lambda_2e_2\rangle=\lambda_2\langle e_1;e_2\rangle.$$

Оскільки $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $\langle e_1;e_2\rangle=0$. ▶

**Теорема 4.** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$. *Тоді: а) його спектр є скінченною або зліченною підмножиною проміжка* $[m;M]$, *граничною точкою якої може бути хіба-що точка* $0$, *де* $m=\inf\{<A(u);u>:\|u\|=1\}$ *і* $M=\sup\{<A(u);u>:\|u\|=1\}$; *б) точка* $\lambda=0$ *та принаймні одна з точок* $\lambda=m$ *і* $\lambda=M$ *належать* *спектру; в) всі відмінні від нуля точки спектра є власними значеннями скінченної кратності; г) точка* $\lambda = 0$ *є власним значенням тоді і тільки тоді, коли оператор* $A: H \to H$ *є необоротним.*

**Теорема 5 (Гільберта-Шмідта).** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$*. Тоді існуть послідовність* $(\lambda_k : k \in \Omega)$ *ненульових власних значень і* $(e_k : k \in \Omega)$ *– ортонормована послідовність його власних векторів, які відповідають ненульовим власним значенням такі, що для кожного вектора* $u \in H$ *знайдеться вектор* $\tilde{u}_0 \in \ker A$*, для якого*

$$u = \tilde{u}_0 + \sum_{k \in \Omega} c_k e_k \qquad (1)$$

*і*

$$A(u) = \sum_{k \in \Omega} c_k \lambda_k e_k \ ,$$

*де* $c_k = \langle u; e_k \rangle$*. При цьому, останній ряд збігається в* $H$ *і*

$$\sup\left\{ \left\| A(u) - A\left( \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right) \right\| / \|u\| : u \neq 0 \right\} \to 0 \, . \qquad (2)$$

**Теорема 6 (Гільберта-Шмідта).** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$ *. Тоді в* $H$ *існує ортонормований базис* $(e_k : k \in \tilde{\Omega})$ *з власних векторів оператора* $A$*, які відповідають послідовності* $(\lambda_k : k \in \tilde{\Omega})$ *його власних значень.*

**Наслідок 1.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$ *. Тоді в підпросторі* $A(H) \subset H$ *існує ортонормований базис* $\{e_k : k \in \Omega\}$ *з власних векторів оператора* $A$*, які відповідають ненульовим його власним значенням* $\lambda_k$*.*

**Наслідок 2.** *Якщо* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$ *і* $\{e_k : k \in \Omega\}$ *– ортонормована послідовність власних векторів оператора* $A$*, які відповідають ненульовим власним значення цього оператора, то кожний вектор* $q$ *з множини значень оператора* $A$ *подається у* *вигляді* $q=\sum_{k\in\Omega}q_k e_k$ *і цей ряд збігається в* $H$*, де* $q_k=\langle q;e_k\rangle=c_k\lambda_k=\langle A(u);e_k\rangle$, $c_k=\langle u;e_k\rangle$ *і* $u\in D(A)$ *такий вектор, для якого* $q=A(u)$.

***Зауваження 1.*** *Якщо* $A$ *– деякий лінійний неперервний оператор,* $\{e_k:k\in\Omega\}$ *– деяка множина власних векторів* $e_k$*, які відповідають власним значення* $\lambda_k$*, то розв'язки рівняння* $u-A(u)=q$*, для тих* $q$*, які подаються у вигляді* $q=\sum_k q_k e_k$*, можна шукати у вигляді* $u=\sum_k u_k e_k$*. Тоді*

$$\sum_k u_k e_k-A\left(\sum_k u_k e_k\right)=\sum_k q_k e_k\ ,\ \sum_k u_k e_k-\sum_k u_k\lambda_k e_k=\sum_k q_k e_k\ ,$$

$$\sum_k u_k(1-\lambda_k)e_k=\sum_k q_k e_k\ ,$$

*і, прирівнявши коефіцієнти, які стоять біля* $e_k$*, знайдемо* $u_k$ *і розв'язок* $u$ *рівняння* $u-A(u)=q$*. Теорема Гільберта-Шмідта дає можливість обгрунтувати описаний метод розв'язування рівнянь для певного класу операторів. Різні варіанти відповідних тверджень наведені нижче.*

## 29. Знаходження розв'язків рівняння $u-A(u)=q$ для компактного самоспряженого оператора в гільбертовому просторі

**Теорема 1.** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$*, для якого рівняння* $u-A(u)=0$ *має тільки нульовий розв'язок, тобто* $\lambda=1$ *не є власним значенням оператора* $A$*. Тоді для кожного* $q\in H$ *рівняння* $u-A(u)=q$ *має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *і ним є*

$$u=q+\sum_k\frac{q_k\lambda_k}{1-\lambda_k}e_k\ , \qquad (1)$$

*де* $(e_k)$ *– ортонормована послідовність власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$*, які відповідають його ненульовим власним значенням* $\lambda_k$*. При цьому ряд (1) збігається в просторі* $H$ *і*

$q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Доведення.** Згідно з теоремами Фредгольма для кожного $q \in H$ рівняння $u - A(u) = q$ має єдиний розв'язок в просторі $H$. За теоремою Гільберта-Шмідта для кожного $q \in H$ вектор $A(q)$ подається у вигляді $A(q) = \sum_k q_k \lambda_k e_k$, де $q_k = \langle q; e_k \rangle$. Оскільки $\sum_k |q_k|^2 < +\infty$, $\lambda_k \neq 1$ і граничною точкою послідовності $(\lambda_k)$ може бути хіба-що точка $0$, то

$$\sum_k \left| \frac{q_k}{1-\lambda_k} \right|^2 < +\infty .$$

Тому ряд (1) збігається в $H$ і

$$u - A(u) = q + \sum_k \frac{q_k \lambda_k}{1-\lambda_k} e_k - A\left( q + \sum_k \frac{q_k \lambda_k}{1-\lambda_k} e_k \right)$$

$$= q + \sum_k \frac{q_k \lambda_k}{1-\lambda_k} e_k - A(q) - \sum_k \frac{q_k \lambda_k}{1-\lambda_k} \lambda_k e_k$$

$$= q + \sum_k q_k \lambda_k e_k - A(q) = q + 0 = q \text{ . } \blacktriangleright$$

**Теорема 1'.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$*, для якого рівняння* $u - A(u) = 0$ *має тільки нульовий розв'язок, тобто* $\lambda = 1$ *не є власним значенням оператора* $A$*. Тоді для кожного* $q \in H$ *рівняння* $u - A(u) = q$ *має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *і ним є*

$$u = \sum_k \frac{q_k}{1-\lambda_k} e_k \text{ ,} \qquad (2)$$

*де* $(e_k)$ *– ортонормований базис простору* $H$ *з власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$*, які відповідають його власним значенням* $\lambda_k$*. При цьому ряд (2) збігається в просторі* $H$ *і* $q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Доведення.** Згідно з теоремами Фредгольма для кожного $q \in H$ рівняння $u - A(u) = q$ має єдиний розв'язок в просторі $H$. За теоремою Гільберта-Шмідта кожний елемент $q \in H$ подається у вигляді $q=\sum_k q_k e_k$, де $q_k=\langle q;e_k\rangle$. Оскільки $\sum_k |q_k|^2<+\infty$, $\lambda_k\neq 1$ і граничною точкою послідовності $(\lambda_k)$ може бути хіба-що точка $0$, то $\sum_k \left|\frac{q_k}{1-\lambda_k}\right|^2<+\infty$. Тому ряд (2) збігається в $H$ і

$$u-A(u)=\sum_k \frac{q_k}{1-\lambda_k}e_k - A\left(\sum_k \frac{q_k}{1-\lambda_k}e_k\right)=\sum_k \frac{q_k}{1-\lambda_k}e_k-\sum_k \frac{q_k}{1-\lambda_k}\lambda_k e_k$$

$$=\sum_k \frac{(1-\lambda_k)q_k}{1-\lambda_k}e_k=\sum_k q_k e_k=q\,.\ ▶$$

**Теорема 2.** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$, $\lambda=1$ *є власним значенням оператора* $A$ *і при цьому* $\lambda=1$ *відповідає рівно* $r$ *лінійно незалежних векторів* $e_k$, $k\in\overline{\nu;\nu+r-1}$. *Тоді рівняння* $u-A(u)=q$ *має в просторі* $H$ *розв'язок для тих і тільки тих* $q\in H$, *для яких*

$$\langle q;e_k\rangle=0\,,\ k\in\overline{\nu;\nu+r-1},$$

*і для кожного такого* $q$ *одним із розв'язків є*

$$\tilde u=q+\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}\frac{q_k\lambda_k}{1-\lambda_k}e_k\,,$$

*а кожний інший розв'язок* $u$ *з простору* $H$ *подається у вигляді* $u=\hat u+\tilde u$, *де* $\hat u$ *– довільний розв'язок рівняння* $u-A(u)=0$, *тобто* $\hat u=c_\nu e_\nu+...+c_{\nu+r-1}e_{\nu+r-1}$, *де* $(e_k)$ *– ортонормована послідовність власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$, *які відповідають його ненульовим власним значенням* $\lambda_k$, $c_i$ *– довільні числа і* $q_k=\langle q;e_k\rangle$.

**Доведення.** Справді, оскільки

$$\tilde u-A(\tilde u)=q+\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}\frac{q_k\lambda_k}{1-\lambda_k}e_k-A\left(q+\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}\frac{q_k\lambda_k}{1-\lambda_k}e_k\right)$$

$$=q+\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}\frac{q_k\lambda_k}{1-\lambda_k}e_k-\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}q_k\lambda_k e_k-\sum_{k\notin\overline{\nu;\nu+r-1}}\frac{q_k\lambda_k^2}{1-\lambda_k}e_k$$

$$= q + \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} \frac{q_k(1-\lambda_k)\lambda_k}{1-\lambda_k} e_k - \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} q_k \lambda_k e_k = q,$$

тобто $\tilde{u}$ є розв'язком розглядуваного рівняння. Інші твердження теореми є наслідком теорем Фредгольма та властивостей лінійних рівнянь. ▶

**Теорема 2'.** *Нехай $A : H \to H$ – компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $H$, $\lambda = 1$ є власним значенням оператора $A$, причому $\lambda_1$ відповідає рівно $r$ лінійно незалежних векторів $e_k$, $k \in \overline{\nu;\nu+r-1}$. Тоді рівняння $u - A(u) = q$ має в просторі $H$ розв'язок для тих і тільки тих $q \in H$, для яких $\langle q; e_k \rangle = 0$, $k \in \overline{\nu;\nu+r-1}$, і для кожного такого $q$ одним із розв'язків є*

$$\tilde{u} = \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} \frac{q_k}{1-\lambda_k} e_k,$$

*а кожний інший розв'язок $u$ з простору $H$ подається у вигляді $u = \hat{u} + \tilde{u}$, де $\hat{u}$ – довільний розв'язок $u - A(u) = 0$, тобто $\hat{u} = c_\nu e_\nu + \ldots + c_{\nu+r-1} e_{\nu+r-1}$, $(e_k)$ – ортонормований базис простору $H$ з власних векторів $e_k$ оператора $A$, які відповідають його власним значенням $\lambda_k$, $c_i$ – довільні числа і $q_k = \langle q; e_k \rangle$.*

**Доведення.** Справді,

$$\tilde{u} - A(\tilde{u}) = \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} \frac{q_k}{1-\lambda_k} e_k - \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} \lambda_k \frac{q_k}{1-\lambda_k} e_k$$

$$= \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} \frac{q_k(1-\lambda_k)}{1-\lambda_k} e_k = \sum_{k \notin \overline{\nu;\nu+r-1}} q_k e_k = q.$$

тобто $\tilde{u}$ є розв'язком розглядуваного рівняння. Інші твердження теореми є наслідком теорем Фредгольма та властивостей лінійних рівнянь. ▶

***Приклад 1.*** *Розглянемо рівняння*

$$u(x) - \int_{-1}^{1} (1 + xt) u(t) dt = q(x). \tag{3}$$

*В даному випадку ядро* $K(x;t)=1+xt$ *є симетричним і* $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^{1}(1+xt)u(t)dt$. *Власні функції такого оператора задовольняють рівняння* $\lambda e(x)=\xi_1 x+\xi_2$. *Рівняння* $A(e)(x)=\lambda e(x)$ *запишемо у вигляді*

$$\lambda(\xi_1 x+\xi_2)=\int\limits_{-1}^{1}(1+xt)(\xi_1 t+\xi_2)dt,$$

*тобто* $\lambda(\xi_1 x+\xi_2)=x\cdot 2\xi_1/3+2\xi_2$. *Прирівнюючи коефіцієнти, які стоять біля однакових степенів* $x$, *отримуємо систему*

$$\begin{cases}-\lambda\xi_1+\xi_1\cdot 2/3=0,\\ \quad 2\xi_2-\lambda\xi_2=0,\end{cases}$$

*і знаходимо власні значення* $\lambda_1=2$ *та* $\lambda_2=2/3$. *Функції* $\tilde{e}_1(x)=1$ *та* $\tilde{e}_2(x)=x$ *є відповідними власними функціями. При цьому,*

$$\|\tilde{e}_1\|=\left(\int\limits_{-1}^{1}1dx\right)^{1/2}=\sqrt{2},\ \|\tilde{e}_2\|=\left(\int\limits_{-1}^{1}x^2dx\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

*Тому* $e_1(x)=\tilde{e}_1(x)/\|\tilde{e}_1\|=1/\sqrt{2}$ *і* $e_2(x)=\tilde{e}_2(x)/\|e_2\|=x\sqrt{3/2}$ *– відповідні нормовані власні функції. Оскільки* $\lambda=1$ *не є власним значенням, то рівняння* $u(x)-\int\limits_{-1}^{1}(1+xt)u(t)dt=0$ *має тільки нульовий розв'язок, а рівняння (3) для кожної функції* $q\in L_2[-1;1]$ *має в просторі* $L_2[-1;1]$ *єдиний розв'язок і ним є функція*

$$u(x)=q(x)+\frac{\lambda_1 q_1}{1-\lambda_1}e_1(x)+\frac{\lambda_2 q_2}{1-\lambda_2}e_2(x)=q(x)-\sqrt{2}q_1+\sqrt{6}q_2 x,$$

*де*

$$q_1=\int\limits_{-1}^{1}q(x)\overline{e_1(x)}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}q(x)dx,\ q_2=\int\limits_{-1}^{1}q(x)\overline{e_2(x)}dx=\sqrt{3/2}\int\limits_{-1}^{1}xq(x)dx.$$

*Зокрема, якщо* $q(x)=x^2$, *то* $u(x)=x^2-\dfrac{2}{3}$ *– відповідний розв'язок.*

**Теорема 3.** *Нехай* $A:H\to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$ *і число* $\lambda=1/s$ *не є власним значенням оператора* $A$. *Тоді для кожного* $q\in H$ *рівняння* $u-sA(u)=q$ *має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *і ним є*

$$u = q + \sum_k \frac{s\lambda_k}{1 - s\lambda_k} q_k e_k \ ,$$

*де* $(e_k)$ *– ортонормована послідовність із власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$*, які відповідають його ненульовим власним значенням* $\lambda_k$ *і* $q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Доведення.** Згідно з теоремами Фредгольма для кожного $q \in H$ рівняння $u - sA(u) = q$ має єдиний розв'язок в просторі $H$. За теоремою Гільберта-Шмідта для кожного $q \in H$ вектор $A(q)$ подається у вигляді $A(q) = \sum\limits_k q_k \lambda_k e_k$, де $q_k = \langle q; e_k \rangle$. Оскільки $\sum\limits_k |q_k|^2 < +\infty$, $\lambda_k \neq 1$ і граничною точкою послідовності $(\lambda_k)$ може бути хіба-що точка $0$, то $\sum\limits_k |q_k/(1 - \lambda_k)|^2 < +\infty$. Тому ряд (1) збігається в $H$ і

$$u - sA(u) = q + \sum_k \frac{sq_k\lambda_k}{1 - s\lambda_k} e_k - sA\left( q + \sum_k \frac{sq_k\lambda_k}{1 - s\lambda_k} e_k \right)$$

$$= q + \sum_k \frac{sq_k\lambda_k}{1 - s\lambda_k} e_k - sA(q) - \sum_k \frac{s^2 q_k\lambda_k}{1 - s\lambda_k} \lambda_k e_k$$

$$= q + s\sum_k q_k\lambda_k e_k - sA(q) = q + 0 = q \ . \ \blacktriangleright$$

**Теорема 3'.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$ *і число* $\lambda = 1/s$ *не є власним значенням оператора* $A$*. Тоді для кожного* $q \in H$ *рівняння* $u - sA(u) = q$ *має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *і ним є*

$$u = \sum_k \frac{q_k}{1 - s\lambda_k} e_k \ ,$$

*де* $(e_k)$ *– ортонормований базис простору* $H$ *з власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$*, які відповідають його власним значенням* $\lambda_k$ *і* $q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Доведення.** Згідно з теоремами Фредгольма для кожного $q \in H$ рівняння $u - A(u) = q$ має єдиний розв'язок в просторі $H$. За теоремою Гільберта-Шмідта кожний елемент $q \in H$ подається у вигляді $q = \sum_k q_k e_k$ , де $q_k = \langle q; e_k \rangle$. Оскільки $\sum_k |q_k|^2 < +\infty$ , $\lambda_k \neq 1$ і граничною точкою послідовності $(\lambda_k)$ може бути хіба-що точка $0$, то $\sum_k \left| \frac{q_k}{1-\lambda_k} \right|^2 < +\infty$. Тому ряд (1) збігається в $H$ і

$$u - sA(u) = \sum_k \frac{q_k}{1-s\lambda_k} e_k - sA\left( \sum_k \frac{q_k}{1-s\lambda_k} e_k \right) = \sum_k \frac{q_k}{1-s\lambda_k} e_k - \sum_k \frac{q_k s}{1-\lambda_k} \lambda_k e_k$$

$$= \sum_k \frac{(1-s\lambda_k) q_k}{1-s\lambda_k} e_k = \sum_k q_k e_k = q . \blacktriangleright$$

**Теорема 4.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі* $H$ *і число* $\lambda_\nu = 1/s$ *є власним числом оператора* $A$*, причому* $H$ *відповідає точно* $r$ *лінійно незалежних власних векторів* $e_k$, $k \in \overline{\nu; \nu + r - 1}$*, оператора* $A$. *Тоді рівняння* $u - sA(u) = q$ *має в просторі* $H$ *розв'язок для тих і тільки тих* $q \in H$ *, для яких* $\langle q; e_k \rangle = 0$, $k \in \overline{\nu; \nu + r - 1}$*, і для кожного такого* $q \in H$ *одним із розв'язків є*

$$\tilde{u} = q + \sum_{k \notin \overline{\nu; \nu + r - 1}} \frac{s\lambda_k}{1-s\lambda_k} q_k e_k ,$$

*а кожний інший розв'язок* $u$ *із простору* $H$ *подається у вигляді* $u = \widehat{u} + \tilde{u}$, *де* $\widehat{u}$ *– довільний розв'язок рівняння* $u - sA(u) = 0$, *тобто* $\widehat{u} = c_\nu e_\nu + \ldots + c_{\nu+r-1} e_{\nu+r-1}$, $(e_k)$ *– ортонормована послідовність власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$*, які відповідають його ненульовим власним значенням* $\lambda_k$, $c_i$ *– довільні числа і* $q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Теорема 4'.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$ *і число* $s = s_\nu = 1/\lambda_\nu$ *є власним числом оператора* $A$, *причому* $H$ *відповідає точно* $r$ *лінійно незалежних власних векторів* $e_k$, $k \in \overline{\nu; \nu + r - 1}$*, оператора* $A$. *Тоді рівняння* $u - sA(u) = q$ *має в просторі* $H$ *розв'язок для тих і тільки тих* $q \in H$ *, для яких*

$\langle q;e_k \rangle = 0$, $k \in \overline{v;v+r-1}$, *і для кожного такого* $q \in H$ *одним із розв'язків є*

$$\tilde{u} = \sum_{k \notin \overline{v;v+r-1}} \frac{q_k}{1 - s\lambda_k} e_k ,$$

*а кожний інший розв'язок* $u$ *з простору* $H$ *подається у вигляді* $u = \widehat{u} + \tilde{u}$, *де* $\widehat{u}$ *– довільний розв'язок рівняння* $u - sA(u) = 0$, *тобто* $\widehat{u} = c_v e_v + \ldots + c_{v+r-1} e_{v+r-1}$, $(e_k)$ *– ортонормований базис простору* $H$ *із власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$, *які відповідають його власним значенням* $\lambda_k$, $c_i$ *– довільні числа і* $q_k = \langle q;e_k \rangle$.

**Теорема 5.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$ *і число* $\lambda$ *не є власним значенням оператора* $A$. *Тоді для кожного* $q \in H$ *рівняння* $\lambda u - A(u) = q$ *має єдиний розв'язок в просторі* $H$ *і ним є*

$$u = \sum_k \frac{q_k}{\lambda - \lambda_k} e_k ,$$

*де* $(e_k)$ *– ортонормований базис простору* $H$ *із власних векторів* $e_k$ *оператора* $A$, *які відповідають його власним значенням* $\lambda_k$ *і* $q_k = \langle q;e_k \rangle$.

**Доведення** цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1. ►

**Теорема 6.** *Нехай* $A: H \to H$ *– компактний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі* $H$, $\lambda = \lambda_v$ *є власним значенням оператора* $A$, *причому* $\lambda_v$ *відповідає рівно* $r$ *лінійно незалежних векторів* $e_k$, $k \in \overline{v;v+r-1}$. *Тоді рівняння* $\lambda u - A(u) = q$ *має в просторі* $H$ *розв'язок для тих і тільки тих* $q \in H$, *для яких*

$$\langle q;e_k \rangle = 0,\ k \in \overline{v;v+r-1},$$

*і для кожного такого* $q \in H$ *одним із розв'язків є*

$$\tilde{u} = \sum_{k \notin \overline{v;v+r-1}} \frac{q_k}{\lambda - \lambda_k} e_k ,$$

*а кожний інший розв'язок* $u$ *із простору* $H$ *подається у вигляді* $u = \widehat{u} + \tilde{u}$, *де* $\widehat{u}$ *– довільний розв'язок рівняння* $\lambda u - A(u) = 0$, $(e_k)$ *– ортонормований базис простору* $H$ *із власних векторів* $e_k$

*оператора* $A$*, які відповідають його власним значенням* $\lambda_k$ *і* $q_k = \langle q; e_k \rangle$.

**Доведення** цієї теореми аналогічне доведенню теореми 2. ►

***Приклад 2.*** *Кожний лінійний самоспряжений оператор* $T:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *задається симетричною* $n\times n$*-матрицею, тобто такою матрицею*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

*для якої* $t_{ij} = \overline{t_{ji}}$ *для всіх* $i \in \overline{1;n}$ *та всіх* $j \in \overline{1;n}$. *Рівняння* $T(u) = q$ *і* $T(u) = 0$ *рівносильні відповідно рівнянням* $\mathbf{Tu} = \mathbf{q}$ *і* $\mathbf{Tu} = \mathbf{0}$*, тобто системам*

$$\begin{cases} t_{11}u_1 + ... + t_{1n}u_n = q_1, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ t_{n1}u_1 + ... + t_{nn}u_n = q_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} t_{11}u_1 + ... + t_{1n}u_n = 0, \\ \quad . \qquad . \qquad . \\ t_{n1}u_1 + ... + t_{nn}u_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

*Теореми 1′ та 2′ є узагальненням відповідних теорем із курсу лінійної алгебри про розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричними матрицями.*

***Приклад 3.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$*, елементи, якого позначаємо символами* $x = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *розглянемо оператор* $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, який в деякому базисі має матрицю* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Число* $\lambda$ *є власним значенням, якщо існує такий ненульовий вектор* $e = \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$*, що* $T(\mathbf{e}) = \lambda I(\mathbf{e})$*, тобто* $\mathbf{Te} = \lambda\mathbf{e}$. *Для знаходження* $\lambda$ *та координат вектора* $e = \mathbf{e}$ *маємо систему*

$$\begin{cases}(2-\lambda)\alpha_1+0\alpha_2=0,\\ 2\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2=0.\end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулеві:*

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

*Таким чином,* $\lambda_1=2$ *і* $\lambda_2=1$ *– власні значення. Власному значенню* $\lambda_1=2$ *відповідає власний вектор* $e_1=\mathbf{e_1}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$*, а власному значенню* $\lambda_2=1$ *– власний вектор* $e_2=\mathbf{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$*. Число* $\lambda=0$ *не є власним значенням. Тому для кожного* $q=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ *рівняння* $T(u)=q$ *має єдиний розв'язок*

$$u=\frac{q_1}{\lambda_1}e_1+\frac{q_2}{\lambda_2}e_2=\frac{q_1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{q_2}{1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1/2\\q_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1/2\\q_1+q_2\end{pmatrix}.$$

***Приклад 4.*** *В просторі* $\mathbb{R}^2$*, елементи, якого позначаємо символами* $x=\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ *розглянемо оператор* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$*, який в деякому базисі має матрицю* $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$*. Ця матриця є симетричною. Число* $\lambda$ *є власним значенням, якщо існує такий ненульовий вектор* $e=\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$*, що* $T(\mathbf{e})=\lambda I(\mathbf{e})$*, тобто* $\mathbf{Te}=\lambda\mathbf{e}$*.*

*Для знаходження* $\lambda$ *та координат вектора* $e=\mathbf{e}$ *маємо систему*

$$\begin{cases}(3-\lambda)\alpha_1+0\alpha_2=0,\\ 0\alpha_1-\lambda\alpha_2=0.\end{cases}$$

*Ця система має ненульовий розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулеві:*

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0.$$

*Таким чином,* $\lambda_1 = 0$ *і* $\lambda_2 = 3$ *– власні значення. Власному значенню* $\lambda_1 = 0$ *відповідає власний вектор* $e_1 = \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*, а власному значенню* $\lambda_2 = 3$ *– власний вектор* $e_2 = \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Число* $\lambda = 0$ *є власним значенням. Тому рівняння* $T(u) = b$ *має розв'язок для тих і тільки тих* $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$*, які задовольняють умову* $\langle b; e_1 \rangle = 0$*, тобто для яких* $b_2 = 0$*, і для таких* $b$ *одним із розв'язків є*

$$\tilde{u} = \frac{b_2}{\lambda_2} e_2 = \frac{b_2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 / 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*а кожний інший розв'язок* $u$ *має вигляд*

$$u = c_1 e_1 + \tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 / 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 / 3 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

*Зрозуміло, що в даному випадку до аналогічного висновку можна прийти не користуючись попередніми теоремами.*

## 30. Поняття про необмежені оператори

Ми розглядали обмежені оператори $A: H \to H$ в гільбертовому просторі $H$ . Ряд фактів, розглянутих вище можна поширити на необмежені оператори $A: H \to H$ , область визначення яких є всюди щільною в $H$ . Такі оператори зустрічаються при дослідженні багатьох прикладних задач і їхня теорія є значно складнішою. До таких операторів належать, зокрема, диференціальні оператори.

***Приклад 1.*** *Нехай* $a_2 : [\alpha; \beta] \to \mathbb{C}$, $a_1 : [\alpha; \beta] \to \mathbb{C}$ *і* $a_0 : [\alpha; \beta] \to \mathbb{C}$ *– деякі функції, неперервні на проміжку* $[\alpha; \beta]$ *і* $l_0(y) = a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$. *Нехай, далі* $A: L_2(\alpha; \beta) \to L_2(\alpha; \beta)$ *– оператор, область визначення* $D(A)$ *якого складається з тих функцій* $y : [\alpha; \beta] \to \mathbb{C}$*, які мають на проміжку* $[\alpha; \beta]$ *неперервну похідну,*

$$y(\alpha) = 0, \; y(\beta) = 0 \; , \qquad (1)$$

*і* $A(y)=l_0(y)$ *для всіх* $y\in D(A)$. *Умови (1) називаються крайовими. При цьому,* $D(A)\neq H$ .

Крайові умови можуть бути й іншими. Наприклад,

$$\begin{cases} d_{11}y(\alpha)+d_{12}y'(\alpha)+d_{13}y(\beta)+d_{14}y'(\beta)=0, \\ d_{21}y(\alpha)+d_{22}y'(\alpha)+d_{23}y(\beta)+d_{24}y'(\beta)=0, \end{cases} \tag{2}$$

де $d_{ij}$ – деякі числа.

***Приклад 2.*** *Нехай* $l_0(y)=-y''$. *Розглянемо крайові умови* $y(0)=y(l)=0$. *Тоді власними значеннями є* $\lambda_k=(k\pi/l)^2$, *де* $k\in\mathbb{N}$. *Цим власним значенням відповідають власні функції*

$$e_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\ .$$

***Приклад 3.*** *Нехай* $l_0(y)=-y''$. *Розглянемо крайові умови* $y'(0)=y'(l)=0$. *Тоді* $\lambda_k=(k\pi/l)^2$, *де* $k\in\mathbb{Z}_+$, *– власні значення, а* $e_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}$ *– відповідні власні функції оператора* $A(y)=l_0(y)$.

***Приклад 4.*** *Нехай* $l_0(y)=-y''$. *Розглянемо крайові умови* $y(0)=y'(l)=0$. *Тоді* $\lambda_k=\left(\frac{\pi}{2l}\left(2k+1\right)\right)^2$, *де* $k\in\mathbb{Z}$ *– власні значення, а* $e_k(x)=\sqrt{\frac{\pi}{l}}\sin\frac{\pi}{2l}\left(2k+1\right)x$ *– відповідні власні функції відповідного оператора* $A(y)=l_0(y)$.

***Приклад 5.*** *Нехай* $l_0(y)=-y''$. *Розглянемо крайову умову* $y(0)=0$. *Тоді власними значеннями відповідного оператора* $A(y)=l_0(y)$ *є всі комплексні числа* $\lambda\neq 0$, *яким відповідають власні функції* $e_\lambda(x)=\sin\sqrt{\lambda}x$.

## 31. Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення лінійного оператора.
2. Сформулюйте означення ядра лінійного оператора.
3. Сформулюйте означення рангу лінійного оператора.
4. Сформулюйте означення дефекту лінійного оператора.

5. Сформулюйте означення неперервного оператора.
6. Запишіть формули для знаходження норми лінійного неперервного оператора.
7. Сформулюйте означення збіжності послідовності операторів.
8. Сформулюйте принцип рівномірної обмеженості для операторів.
9. Сформулюйте означення оборотного оператора.
10. Сформулюйте означення оберненого оператора.
11. Сформулюйте і доведіть теорему С. Банаха про неперервність оберненого оператора.
12. Сформулюйте і доведіть теорему про зображення оберненого оператора рядом.
13. Сформулюйте і доведіть теорему про знаходження розв'язків інтегрального рівняння методом послідовних наближень.
14. Сформулюйте означення власного значення і власного вектора лінійного оператора.
15. Сформулюйте означення приєднаного і кореневого вектора лінійного оператора.
16. Сформулюйте означення спряженого оператора.
17. Сформулюйте означення самоспряженого оператора.
18. Сформулюйте означення алгебраїчної кратності власного значення лінійного оператора.
19. Сформулюйте означення геометричної кратності власного значення лінійного оператора.
20. Сформулюйте означення ряду Неймана.
21. Сформулюйте теореми про знаходження розв'язків інтегрального рівняння $u - sA(u) = q$ для неперервного оператора $A$.
22. Наведіть приклад нелінійного оператора в просторі $C[0;1]$.
23. Наведіть приклад лінійного необоротного оператора.
24. Наведіть приклад самоспряженого оператора в просторі $\mathbb{C}^2$.
25. Наведіть приклад самоспряженого оператора в просторі $L_2(0;1)$.
26. Сформулюйте означення резольventi лінійного оператора.
27. Сформулюйте означення добутку двох операторів.
28. Сформулюйте теореми Фредгольма.
29. Сформулюйте означення степеня лінійного оператора.

30. Наведіть приклад оператора, який не має власних значень.
31. Сформулюйте означення інтегрального оператора Фредгольма.
32. Сформулюйте означення інтегрального оператора Вольтерра.
33. Сформулюйте означення квадратично інтегрованого ядра інтегрального оператора Фредгольма.
34. Сформулюйте означення полярного ядра інтегрального оператора Фредгольма.
35. Опишіть метод розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерра з виродженим ядром.
36. Сформулюйте означення регулярного значення лінійного оператора.
37. Сформулюйте означення резольвенти Фредгольма лінійного оператора.
38. Сформулюйте означення компактного оператора.
39. Вкажіть достатні умови компактності інтегрального оператора Фредгольма в просторі $C[a;b]$.
40. За яких умов інтегральний оператор Фредгольма є компактним в просторі $L_2(a;b)$?
41. За яких умов інтегральний оператор Фредгольма є самоспряженим в просторі $L_2(a;b)$?
42. Запишіть формулу для знаходження спряженого оператора оператора Фредгольма.
43. Сформулюйте властивості спектра самоспряженого оператора.
44. Сформулюйте теорему Гільберта-Шмідта.
45. Сформулюйте теореми про знаходження розв'язків рівняння $u - A(u) = q$ для компактного самоспряженого оператора в гільбертовому просторі.

## 32. Вправи і задачі

### 1. Дослідіть оператор $A: H \to H$ на лінійність і неперервність

1. $A(u)(x) = u'^2(x)$, $H = C^{(1)}[0;1]$.

2. $A(u)(x) = u'(x^2)$, $H = C^{(1)}[0;1]$.

3. $A(u)(x) = x^2 u''(x)$, $H = C^{(2)}[0;1]$.

4. $A(x)=(2x_1;2x_2;...;2x_n)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, $H=\mathbb{R}^n$.

5. $A(x)=(x_2;x_1)$, $x=(x_1;x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$.

6. $A(x)=(x_1^2;x_2)$, $x=(x_1;x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$.

7. $A(u)(x)=xu(x)$, $H=C[0;1]$.

8. $A(u)(x)=xu^{3/2}(x)$, $H=C[0;1]$.

9. $A(u)(x)=xu(x^2)$, $H=C[0;1]$.

10. $A(u)(x)=\sqrt{x}u(x)$, $H=C[0;1]$.

11. $A(u)(x)=xu(\sqrt{x})$, $H=C[0;1]$.

12. $A(u)(x)=e^x u(x)$, $H=L_2[0;1]$.

13. $A(u)(x)=e^x u(e^x)$, $H=L_2[0;1]$.

14. $A(u)(x)=e^{u(x)}$, $H=L_2[0;1]$.

15. $A(u)(x)=u''(x)+u'(x)$, $H=L_2[0;1]$.

16. $A(u)(x)=\int\limits_0^{2\pi}(t^2+x)u(t)dt$, $H=C[0;2\pi]$.

17. $A(u)(x)=\int\limits_0^{2\pi}(x^2+t)u(t)dt$, $H=C[0;2\pi]$.

18. $A(u)(x)=\int\limits_0^{2\pi}xu^2(t)dt$, $H=C[0;2\pi]$.

19. $A(u)(x) = \int\limits_0^{2\pi} xe^{u(t)}dt$ ,  $H = C[0;2\pi]$ .

20. $A(u)(x) = u'(x) + u(x^2)$ ,  $H = C[0;1]$ .

21. $A(u)(x) = u'(x) + u^2(x)$ ,  $H = L_2[0;1]$ .

22. $A(u)(x) = \int\limits_1^2 e^{x-t}u(t)dt$ ,  $H = C[1;2]$ .

23. $A(u)(x) = |u(x)|$,  $H = L_2[1;2]$ .

24. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 \frac{1 - e^{t-x}}{\sqrt{|t - x|}} u(t)dt$ ,  $H = C[0;1]$ .

25. $A(x) = 2x$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

26. $A(x) = 2x + 1$,  $H = \mathbb{R}$ .

27. $A(x) = e^x$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

28. $A(u)(x) = u'(x)$ ,  $H = C^{(1)}[0;1]$ .

29. $A(x) = (0; x_1; x_2;...)$ ,  $x = (x_1; x_2;...)$ ,  $H = l_2$ .

30. $A(x) = (x_1 + x_2; 0; x_3 + x_4; 0; x_5 + x_6; 0;...)$ ,  $x = (x_1; x_2;...)$ ,  $H = l_2$ .

31. $A(u)(x) = x^2u(x)$ ,  $H = C[0;1]$ .

32. $A(u)(x) = \sqrt{x}u(x)$ ,  $H = L_2[0;1]$ .

33. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 e^{3x-2t}u(t)dt$ ,  $H = C[0;1]$ .

34. $A(u)(x)=\int_0^1(1+t-x)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

## 2. Знайдіть норму оператора $A:H\to H$

1. $A(u)(x)=xu(x)$, $H=C[0;1]$.

2. $A(u)(x)=\int_0^x t^2u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

3. $A(u)(x)=\int_0^{\pi/2} u(t)\cos^3 tdt$, $H=C[0;\pi/2]$.

4. $A(u)(x)=\int_0^{\pi/2} u(t)\sin^3 tdt$, $H=C[0;\pi/2]$.

5. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)x\,\mathrm{arctg}\,tdt$, $H=C[0;1]$.

6. $A(u)(x)=\int_0^1 x\arcsin tu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

7. $A(u)(x)=u(-x)$, $H=L_2[-3;3]$.

8. $A(u)(x)=2xu(x)$, $H=C[0;1]$.

9. $A(u)(x)=u(e^x)$, $H=C[0;+\infty)$.

10. $A(u)(x)=u(x)\sin x$, $H=C[0;2\pi]$.

11. $A(u)(x)=\int_0^1(x+t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

12. $A(u)(x)=\int_0^1 e^xu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

13. $A(u)(x)=\int_0^1(2x+t\,\mathrm{arctg}\,t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

14. $A(u)(x)=\int_0^1 xe^{t^2}tu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

15. $A(u)(x)=\int_0^1 2^{t-x}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

16. $A(u)(x)=\int_0^1 \left(x+t\arcsin t\right)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

17. $A(u)(x)=\int_0^1 e^{t-x}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

18. $A(u)(x)=\int_0^1 (2x\sin^2\pi t+t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

19. $A(u)(x)=\int_0^1 (2x^2\sin^3\pi t+t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

20. $A(x)=(2x_1;5x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$, $x=(x_1;x_2)$.

21. $A(x)=(-x_1;4x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$, $x=(x_1;x_2)$.

22. $A(x)=(x_1;5x_2;2x_3)$, $H=\mathbb{R}^3$, $x=(x_1;x_2;x_3)$.

23. $A(x)=(0;-2x_2;4x_2)$, $H=\mathbb{R}^3$, $x=(x_1;x_2;x_3)$.

24. $A(x)=(x_2;2x_2;5x_3)$, $H=\mathbb{R}^3$, $x=(x_1;x_2;x_3)$.

25. $A(x)=(x_2;5x_1;-3x_1)$, $H=\mathbb{R}^3$, $x=(x_1;x_2;x_3)$.

26. $A(u)(x)=e^xu(x)$, $H=C[0;2]$.

27. $A(u)(x)=u(-x)$, $H=L_2(-\infty;+\infty)$.

28. $A(x)=(2x_1;2x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$.

29. $A(x)=-2x$, $H=\mathbb{R}$.

30. $A(x)=(0;x_1;x_2;...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

31. $A(x)=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

32. $A(x)=(2x_1-x_2;2x_2;3x_3;x_4;x_5;x_6;...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

33. $A(x)=(x_1+x_2;x_2+x_3;x_3+x_4;x_4;x_5;x_6;...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

34. $A(x)=(0;0;0;x_4;x_5;...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

35. $A(x)=(x_1;x_2/2;...;x_n/2^{n-1};...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

36. $A(x)=(2x_1;-3x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$, $x=(x_1;x_2)$.

37. $A(x)=(-2x_1;-4x_2)$, $H=\mathbb{R}^2$, $x=(x_1;x_2)$.

38. $A(u)(x)=(x^2+x)u(x)$, $H=C[0;1]$.

39. $A(u)(x)=xu(x)$, $H=L_2[0;1]$.

40. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 u(t)(2x+1)\operatorname{arcctg} t\,dt$, $H=C[0;1]$.

41. $A(u)(x)=\int\limits_0^x u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

42. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (x+te^t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

43. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (x+t\sin\pi t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

44. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 e^{3x-2t}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

45. $A(x)=(x_1+x_2;0;x_3+x_4;0;x_5+x_6;0...)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...)$.

**3. Дослідіть на збіжність послідовність операторів** $A_n:H\to H$

1. $A_n(x)=(x_{2n+1};x_{2n+2};...)$, $H=l_1$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

2. $A_n(x)=\left(e^{-n}x_1;e^{-n}x_2;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

3. $A_n(x)=\left(\sqrt[n]{n}x_1;\sqrt[n]{n}x_2;...;\sqrt[n]{n}x_n;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

4. $A_n(x)=\left(\frac{x_1}{\sqrt[n]{n}};\frac{x_2}{\sqrt[n]{n}};\frac{x_3}{\sqrt[n]{n}};...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

5. $A_n(x)=\left(x_1;x_2;...;x_n;0;0;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

6. $A_n(x)=\left(x_n;x_{n-1};x_2;...;x_1;0;0;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

7. $A_n(x)=\left(\frac{x_1}{n};\frac{x_2}{n-1};...;\frac{x_n}{1};0;0;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

8. $A_n(x)=\left(\frac{x_n}{2n};\frac{x_{n+1}}{2n+1};...;\frac{x_{2n}}{3n};0;0;...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

9. $A_n(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k;0;0;...\right)$, $H=l_1$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

10. $A_n(x)=\left(\frac{x_1}{3^n};\frac{x_2}{3^n};\frac{x_3}{3^n};...\right)$, $H=l_2$, $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$.

11. $A_nu(x)=\int_0^1\sqrt{(x-t)^2+\frac{1}{n}}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

12. $A_nu(x)=\int_0^1 x^n u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

13. $A_nu(x)=\int_0^1(x^n+t^n)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

14. $A_nu(x)=\int_0^1\frac{(x+t)^n}{3}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

15. $A_nu(x)=\int_0^1\left(\frac{x+t}{3}\right)^n u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

16. $A_nu(x)=x\int_0^1\sin^n\left(\frac{\pi}{2}t\right)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

17. $A_nu(x)=x\int_0^1 u\left(\sin^n\frac{\pi}{2}t\right)dt$, $H=C[0;1]$.

18. $A_n u(t) = (t^n - t^{n+1})u(t)$, $H = C[0;1]$.

19. $A_n u(t) = e^{-nt}u(t)$, $H = C[0;1]$.

20. $A_n u(t) = \sin^n t \cdot u(t)$, $H = C[0;\pi / 2]$.

21. $A_n u(t) = (t^{20n} - t^{10n})u(t)$, $H = C[0;1]$.

22. $A_n u(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+nt}u(t)$, $H = C[0;1]$.

23. $A_n u(t) = u\left(t^{1+1/n}\right)$, $H = C[0;1]$.

24. $A_n u(t) = \sin\dfrac{t}{n} \cdot u(t)$, $H = C[0;1]$.

25. $A_n u(t) = \begin{cases} u(t-n), & t \ge n, \\ 0, & t < n, \end{cases}$ $H = L_2(-\infty;+\infty)$.

26. $A_n u(t) = e^{-(t-n)^2}u(t)$, $H = L_2(-\infty;+\infty)$.

27. $A_n u(t) = \left|t^2 - t\right|^n u(t)$, $H = C[0;1]$.

28. $A_n u(t) = \left(1-t^2\right)^n u(t)$, $H = C[-1;1]$.

29. $A_n u(t) = \mathrm{arctg}(nt) \cdot u(t)$, $H = C[0;1]$.

30. $A_n u(t) = t^n u(t)$, $H = L_2[0;1]$.

**4. Знайдіть значення в точці** $u$ **добутку** $C = AB : H \to H$ **операторів** $A : H \to H$ **та** $B : H \to H$**, заданих формулою або своїми матрицями**

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2i & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}.$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}.$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}i & 1\\ 0 & -i\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2i & i\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}.$

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & i\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2i & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}.$

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -i\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & -2i\\ i & 1\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}.$

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3i & 1\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^2,\ u=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}.$

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & i\\ 0 & 1 & i\\ 2i & 0 & 0\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^3,\ u=\begin{pmatrix}0\\ -i\\ 1\end{pmatrix}.$

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & i & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -i\\ 0 & -1 & i\\ 2i & 0 & 0\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^3,\ u=\begin{pmatrix}0\\ i\\ 1\end{pmatrix}.$

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & i\\ 0 & 1 & i\\ 2i & 0 & 0\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^3,\ u=\begin{pmatrix}i\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ i & 1 & 1\\ 0 & i & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & i\\ 0 & 1 & i\\ 2i & 0 & 0\end{pmatrix},\ H=\mathbb{C}^3,\ u=\begin{pmatrix}0\\ i\\ -1\end{pmatrix}.$

11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ i & 1 & 1\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}$.

12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -i\end{pmatrix}$.

13. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & i & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix}-i\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

14. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)x\sin t dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 tu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=it$.

15. $A(u)(x)=\int_0^1 x^2tu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xt^2u(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=i-t$.

16. $A(u)(x)=\int_0^1 tu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=t$.

17. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 (2x+t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=i+t$.

18. $A(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 u(t)x\sin t dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=it$.

19. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)x\cos t dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=-2it$.

20. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)t\cos x dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=-t$.

21. $A(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 u(t)t\sin x dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=2t$.

22. $A(u)(x)=\int_0^1 xe^t u(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=t$.

23. $A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xe^t u(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=1+it$.

24. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)te^x dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=t$.

25. $A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 u(t)te^x dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=1-it$.

26. $A(u)(x)=\int_0^1 xt^2u(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 x^2tu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=-t$.

27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&i\\ i&0&0\\ 0&i&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\ -i&i&1\\ -1&0&0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix}0\\ 1+i\\ -i\end{pmatrix}$.

28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\ i&1&0\\ 0&-i&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ -i&-1&0\\ 0&i&0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix}0\\ 2i\\ -1\end{pmatrix}$.

29. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\ 1&i\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2i&1\\ 0&1\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix}i\\ -2\end{pmatrix}$.

30. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\ 1&i\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2i&-i\\ 0&1\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix}-i\\ -1\end{pmatrix}$.

31. $A(u)(x)=\int_0^1 xe^t u(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 e^x u(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=t$.

32. $A(u)(x)=\int_0^1 e^x tu(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 xu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=-it$.

33. $A(u)(x)=\int_0^1 xt^2u(t)dt$, $B(u)(x)=\int_0^1 x^2tu(t)dt$, $H=C[0;1]$, $u(t)=i+t$.

**5. Дослідіть оператор $A:H \to H$ (зокрема, оператор, заданий матрицею $\mathbf{A}$) на оборотність, опишіть його ядро і з’ясуйте, чи оператор $A^{-1}$, якщо такий існує, визначений на $H$**

1. $A(u)(x) = xu(x)$, $H = C[0;1]$.

2. $A(u)(x) = x + u(x)$, $H = C[0;1]$.

3. $A(u)(x) = \int\limits_0^{2\pi} xu(t)dt$, $H = C[0;2\pi]$.

4. $A(u)(x) = \int\limits_0^{x} u(t)dt$, $H = C[0;1]$.

5. $A(u)(x) = u'(x)$, $H = L_2[0;1]$.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -i & 1 & 1 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^3$.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -i & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^3$.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^3$.

9. $A(x) = (2x_1; 2x_2)$, $x = (x_1; x_2)$, $H = \mathbb{R}^2$.

10. $A(x) = (0; x_1; x_2; ...)$, $x = (x_1; x_2; ...)$, $H = l_2$.

11. $A(x) = (x_2; x_3; ...)$, $x = (x_1; x_2; ...)$, $H = l_2$.

12. $A(x)=(x_1+x_2;x_2;x_2;x_3;x_4;...)$, $x=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$.

13. $A(x)=(x_1;x_2/2;x_3/3;...)$, $x=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$.

14. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-i & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$.

15. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2i & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$.

16. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & i\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$.

17. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$.

18. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -i & i & 0\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$.

19. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & 1 & i\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$.

20. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & i & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$.

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ -i & -i & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$.

22. $A(x)=2x$, $H=\mathbb{R}$.

23. $A(u)(x)=x^2u(x)$, $H=C[0;1]$.

24. $A(u)(x)=(x^2+x)u(x)$, $H=C[0;1]$.

25. $A(u)(x)=\dfrac{1}{x^2+1}u(x)$, $H=L_2[-\infty;+\infty]$.

26. $A(u)(x)=\int\limits_0^{2\pi}\cos xu(t)dt$, $H=C[0;2\pi]$.

27. $A(u)(x)=\int\limits_0^{4\pi}\sin xu(t)dt$, $H=L_2[0;4\pi]$.

28. $A(x)=(x_1+x_2;x_1-x_2;x_3;x_4;...)$, $x=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$.

29. $A(x)=(x_2-x_1;x_2+x_3;2x_2-x_1;x_4;x_5;...)$, $x=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$.

30. $A(u)(x)=u(x)-u(0)$, $H=C[0;1]$.

31. $A(u)(x)=u'(x)-u(0)$, $H=C[0;1]$.

32. $A(u)(x)=(1-x)u(x)$, $H=C[0;1]$.

33. $A(u)(x)=u(x)\cos x$, $H=C[0;1]$.

34. $A(u)(x)=u(x)+2\int\limits_0^1 x^2t^3u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

35. $A(u)(x)=u(x)+\int\limits_0^1 x^4tu(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

36. $A(x)=(x_1+x_2;3x_1-x_2;4x_3-x_1;x_4;x_5;...)$, $x=(x_1;x_2;...)$, $H=l_2$.

37. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 x^2(t-2)u(t)dt+(3+x)u(x)$, $H=L_2[0;1]$.

## 6. Зведіть задачі Коші до інтегральних рівнянь

1. $u'''(x)+xu''(x)+(x^2-x)u(x)=xe^x+1$, $u(0)=u'(0)=1$, $u''(0)=0$.

2. $u''(x)+u(x)=0$, $u(0)=0,\ u'(0)=1$.

3. $u'''(x)-3u''(x)-6u'(x)+8u(x)=0$, $u(0)=u'(0)=u''(0)=1$.

4. $u''(x)+u(x)=\cos x$, $u(0)=0,\ u'(0)=1$.

5. $u''(x)+(1-x)u'(x)+(x+3)u(x)=4(x-5)$, $u(0)=1,\ u'(0)=-2$.

6. $u'''(x)-u''(x)+xu'(x)+\sin x\cdot u(x)=2\cos x$, $u(0)=1$, $u'(0)=2$, $u''(0)=0$.

## 7. Розв'яжіть в просторі $H$ інтегральні рівняння Фредгольма з виродженими ядрами

1. $u(x)-\int_0^1(x^2+t)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1]$.
2. $u(x)-\int_0^1(t+x^2)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1]$.
3. $u(x)-\int_0^1(t-x^2)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1]$.
4. $u(x)-\int_0^1(x^2-t)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1]$.
5. $u(x)-\int_0^1(t-tx)u(t)dt=x, \ H=C[0;1]$.
6. $u(x)-2\int_0^1(x+tx^2)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1]$.
7. $u(x)-2\int_0^1(t-xt^2)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1]$.
8. $u(x)-\int_0^1(t^2-x^2t)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1]$.

9. $u(x)-\int_0^1 (t^2+x^2t)u(t)dt = x^2, \quad H=C[0;1].$

10. $u(x)-\int_0^1 (t^2+xt)u(t)dt = x, \quad H=C[0;1].$

11. $u(x)-\int_0^\pi (t+\sin x)u(t)dt = 1, \ H=C[0;\pi].$

12. $u(x)-\int_0^\pi (\sin t+x)u(t)dt = 1, \quad H=C[0;\pi].$

13. $u(x)-3\int_0^1 (xt-1/3)u(t)dt = 6x^2+1, \quad H=C[0;1].$

14. $u(x)-3\int_0^1 (xt+1/3)u(t)dt = 6x^2+1, \quad H=C[0;1].$

15. $u(x)-\int_0^1 (xt^2-1)u(t)dt = 1, \quad H=C[0;1].$

16. $u(x)-\int_0^1 (xt^2+1)u(t)dt = x, \quad H=C[0;1].$

17. $u(x)-\int_0^1 (t^2x^2-1)u(t)dt = 1, \quad H=C[0;1].$

18. $u(x)-\int_0^1 (t^3-x^2)u(t)dt = 1, \quad H=C[0;1].$

19. $u(x)-\int_0^1 (t^3+x^2)u(t)dt = x, \quad H=C[0;1].$

20. $u(x)-\int_0^1 (t^2x^2+1)u(t)dt = x, \quad H=C[0;1].$

21. $u(x)-\int_0^\pi u(t)(t+\cos x)dt = 1, \quad H=C[0;\pi].$

22. $u(x)-\int_0^\pi u(t)(\cos t+x)dt = 1, \quad H=C[0;\pi].$

23. $u(x)-4\int_0^1 (t^2+x^2)u(t)dt = x^2, \quad H=C[0;1].$

24. $u(x)-4\int\limits_0^1(t^2-x^2)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1].$

25. $u(x)-\int\limits_0^1(t^3+x)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1].$

26. $u(x)-\int\limits_0^1(t+x^3)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1].$

27. $u(x)-\int\limits_0^1(t^3-x)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1].$

28. $u(x)-\int\limits_0^1(t-x^3)u(t)dt=x, \quad H=C[0;1].$

29. $u(x)-\int\limits_0^1\sqrt{xt}u(t)dt=5x, \quad H=C[0;1].$

30. $u(x)-\int\limits_0^1(1+xt+x^2t^2)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1].$

31. $u(x)-\int\limits_0^1(3x+2t)u(t)dt=8x^2-5x, \quad H=C[0;1].$

32. $u(x)-\int\limits_0^1(t+xt^2)u(t)dt=1, \quad H=C[0;1].$

33. $u(x)-\int\limits_0^{\pi}\operatorname{tg}x\cos t u(t)dt=\cos x, \quad H=C[0;\pi].$

**8. Скориставшись формулою**

$$\left(\int\limits_0^x K(x;t)u(t)dt\right)'=K(x;x)u(x)+\int\limits_0^x K'_x(x;t)u(t)dt,$$

**знайдіть диференціальне рівняння, розв’язком якого є розв’язок рівняння Вольтерра**

1. $u(x)-\int\limits_0^x(t-x)u(t)dt=x.$

2. $u(x)-\int\limits_0^x(t+x)u(t)dt=1.$

3. $u(x)-\int\limits_0^x u(t)dt=e^{-x}.$

4. $u(x)-\int_0^x u(t)dt=-x-1$.

5. $u(x)-\int_0^x (t^2-x^2)u(t)dt=x$.

6. $u(x)-\int_0^x (t^2+x^2)u(t)dt=1$.

7. $u(x)-\int_0^x xu(t)dt=1$.

8. $u(x)-\int_0^x (t^3+x)u(t)dt=x$.

9. $u(x)-\int_0^x (t+x^3)u(t)dt=1$.

10. $u(x)-\int_0^x (t^3-x)u(t)dt=x$.

11. $u(x)-\int_0^x (t-x^3)u(t)dt=1$.

12. $u(x)-\int_0^x (2+x)u(t)dt=x$.

13. $u(x)-\int_0^x (2+t)u(t)dt=x$.

14. $u(x)-\int_0^x (2-x)u(t)dt=x$.

15. $u(x)-\int_0^x (2-t)u(t)dt=x$.

16. $u(x)-\int_0^x (1-2xt)u(t)dt=x$.

17. $u(x)-\int_0^x (1+tx)u(t)dt=x$.

18. $u(x)-\int_0^x (1-x^2t)u(t)dt=x$.

19. $u(x)-\int_0^x (t^2+x^2)u(t)dt = x$ .

20. $u(x)-\int_0^x (1-xt^2)u(t)dt = x$ .

21. $u(x)-\int_0^x \left(x-t\right)u(t)dt = e^x$ .

22. $u(x)-\int_0^x (x^2-t^2)u(t)dt = 2x-1$ .

23. $u(x)-\int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}u(t)dt = 1+x^2$ .

24. $u(x)-\int_0^x \left(2+\cos x\right)u(t)dt = \cos x$ .

25. $u(x)-\int_0^x \left(2+\sin x\right)u(t)dt = e^x$ .

26. $u(x)-\int_0^x xu(t)dt = -2x^2-2$ .

27. $u(x)-\int_0^x (t+x)u(t)dt = -2x$ .

28. $u(x)-\int_0^x (x-t)^2u(t)dt = x$ .

29. $u(x)-\int_0^x (x-t)u(t)dt = x^2$ .

**9. Розв’яжіть інтегральне рівняння Вольтерра, звівши його до диференціального рівняння**

1. $u(x) = x^2 + \int_0^x \left(x-t\right)u(t)dt$ .

2. $u(x) = 1+\int_0^x (t-x)u(t)dt$ .

3. $u(x) = 1+\int_0^x u(t)dt$ .

4. $u(x)=x+4\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$ .

5. $u(x)=e^x+\int\limits_0^x \frac{t}{t+1}u(t)dt$ .

6. $u(x)=e^x+\int\limits_0^x u(t)dt$ .

7. $u(x)=x^2+2+\int\limits_0^x tu(t)dt$ .

8. $u(x)=2\operatorname{sh} x+\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$ .

9. $u(x)=x+4\int\limits_0^x \sin(x-t)u(t)dt$ .

10. $u(x)=\sin x+\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$ .

11. $u(x)=e^{-x}\cos x-\int\limits_0^x \cos x e^{t-x}u(t)dt$ .

12. $u(x)=4e^x-\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$ .

13. $u(x)=3x+1+\int\limits_0^x (3x-3t)u(t)dt$ .

14. $u(x)=x^2+2x-\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$ .

15. $u(x)=1+\int\limits_0^x \left((x-t)^2-(x-t)\right)u(t)dt$ .

16. $u(x)=\int\limits_0^x (2x-2t+1)u(t)dt+x^2+x$ .

17. $u(x)=\int\limits_0^x (x+2t-1)u(t)dt+x^2-x$ .

18. $u(x)=\int\limits_0^x (x-t)^2u(t)dt+x^4$ .

19. $u(x)=\int_0^x \sin(x-t)u(t)dt+\sin x$.

20. $u(x)=\int_0^x \cos(x-t)u(t)dt+\cos x$.

21. $u(x)=\int_0^x \left(e^{x-t}-1\right)u(t)dt+e^x-x$.

22. $u(x)=\int_0^x \left(e^{x-t}+1\right)u(t)dt+e^x$.

23. $u(x)=\int_0^x \left(x-t\right)^3 u(t)dt+x^3$.

24. $u(x)=\int_0^x \left(\cos(x-t)-1\right)u(t)dt+\sin x$.

25. $u(x)=2+\int_0^x \left(\sin(x-t)+1\right)u(t)dt$.

26. $u(x)=2+\int_0^x \left(\cos(x-t)+1\right)u(t)dt$.

27. $u(x)=x^2+\int_0^x \left(x-t\right)u(t)dt$.

28. $u(x)=-2\cos x+2\int_0^x \left(t-x\right)u(t)dt$.

29. $u(x)=\sin x+\int_0^x \sin\left(x-t\right)u(t)dt$.

30. $u(x)=2\operatorname{sh} x+1-\int_0^x \left(x-t\right)u(t)dt$.

**10. Розв’яжіть в просторі $H=C[0;1]$ інтегральне рівняння Вольтерра методом послідовних наближень, вибираючи вказане нульове наближення $u_0(x)$**

1. $u(x)=x^2+\int_0^x (x-t)u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

2. $u(x)=1-\int_0^x (x-t)u(t)dt$, $u_0(x)=1$.

3. $u(x)=1+\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$, $u_0(x)=1$.

4. $u(x)=1+\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

5. $u(x)=1-\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

6. $u(x)=x^2+\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=1$.

7. $u(x)=x+1-\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=1$.

8. $u(x)=x+1+\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=x+1$.

9. $u(x)=1+\int\limits_0^x tu(t)dt$, $u_0(x)=1$.

10. $u(x)=\frac{x^2}{2}+x+\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

11. $u(x)=1-x^2+x\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=1-x^2$.

12. $u(x)=1+\int\limits_0^x xu(t)dt$, $u_0(x)=1$.

13. $u(x)=x+\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

14. $u(x)=1-\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$, $u_0(x)=1$.

15. $u(x)=1+\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

16. $u(x)=-x-1-\int\limits_0^x u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

17. $u(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt$, $u_0(x)=0$.

18. $u(x)=2^x+\int\limits_0^x 2^{x-t}u(t)dt, \quad u_0(x)=1.$

19. $u(x)=2-\int\limits_0^x u(t)dt, \quad u_0(x)=0.$

20. $u(x)=x+\int\limits_0^x tu(t)dt, \quad u_0(x)=0.$

21. $u(x)=1+x^2\int\limits_0^x u(t)dt, \quad u_0(x)=1.$

22. $u(x)=1-\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u_0(x)=1.$

23. $u(x)=\operatorname{arctg} x+\int\limits_0^x \frac{u(t)}{1+t^2}dt, \quad u_0(x)=0.$

24. $u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int\limits_0^x txu(t)dt, \quad u_0(x)=0.$

25. $u(x)=2x+2-\int\limits_0^x u(t)dt, \quad u_0(x)=1.$

26. $u(x)=x+1+\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u_0(x)=1.$

27. $u(x)=1+x^2-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}u(t)dt, \quad u_0(x)=0.$

28. $u(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u_0(x)=x.$

29. $u(x)=1+x^\alpha\int\limits_0^x u(t)dt, \quad \alpha\in\mathbb{N}, \quad u_0(x)=1.$

30. $u(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int\limits_0^x u(t)dt, \quad u_0(x)=\frac{x^2}{2}+x.$

**11. Для оператора $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданого матрицею A в стандартному базисі простору $\mathbb{R}^2$, знайдіть матриці операторів $A^0$, $A^1$, $A^2$, $A^3$, $A^{-1}$ в цьому ж базисі**

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$

**12. Для оператора $A:H\to H$ знайдіть оператори $A^0$, $A^1$, $A^2$, $A^3$. При можливості знайдіть також оператор $(I-A)^{-1}:H\to H$**

1. $A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

2. $A(u)(x)=\int_0^x (t-x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

3. $A(u)(x)=\int_0^1 (t+x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

4. $Au(x)=\frac{1}{2}\int_0^\pi u(t)\sin xdt$, $H=C[0;\pi]$.

5. $Au(x)=\frac{1}{2}\int_0^\pi u(t)\cos xdt$, $H=C[0;\pi]$.

**13. Вибираючи $u_0$ для інтегрального рівняння Фредгольма, методом послідовних наближень знайдіть $u_1$, $u_2$, $u_3$ та (при можливості) розв’язок рівняння в просторі $H$**

1. $u(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xtu(t)dt=1$, $H=C[0;1]$, $u_0=1$.

2. $u(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 tu(t)dt=1$, $H=C[0;1]$, $u_0=0$.

3. $u(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xtu(t)dt=x$, $H=C[0;1]$, $u_0=x$.

4. $u(x)-\int\limits_{0}^{1/2} tu(t)dt = x$, $H = C[0;1/2]$, $u_0 = 1$.

5. $u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} xtu(t)dt = -1$, $H = C[0;1]$, $u_0 = -1$.

6. $u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} tu(t)dt = 1$, $H = C[0;1]$, $u_0 = x$.

7. $u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} xu(t)dt = x$, $H = C[0;1]$, $u_0 = x$.

8. $u(x)-\int\limits_{0}^{1/2} tu(t)dt = x$, $H = C[0;1/2]$, $u_0 = x$.

9. $u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} (t+x)u(t)dt = x$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

10. $u(x)-\int\limits_{0}^{1} (t+x)u(t)dt = 1$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

11. $u(x)-\int\limits_{0}^{1} u(t)dt = 2$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

12. $u(x)+\int\limits_{0}^{1/5} u(t)dt = 3$, $H = C[0;1/5]$, $u_0 = 0$.

13. $u(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} u(t)\sin x dt$, $H = C[0;\pi]$, $u_0 = 0$.

14. $u(x)-\frac{1}{42}\int\limits_{0}^{10} xu(t)dt = 1$, $H = C[0;10]$, $u_0 = 0$.

15. $u(x)-\int\limits_{0}^{1} xtu(t)dt = 6x^2+1$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

16. $u(x)-0,3\int\limits_{0}^{1} u(t)dt = -x$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

17. $u(x)-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} u(t)dt = x$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

18. $u(x)-0,4\int\limits_{0}^{1} u(t)dt = x-0,5$, $H = C[0;1]$, $u_0 = 0$.

19. $u(x)-0{,}5\int_0^1 xtu(t)dt=1,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

20. $u(x)-0{,}5\int_0^1 tu(t)dt=2,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

21. $u(x)-\int_0^1 xtu(t)dt=x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

22. $u(x)-\int_0^{1/2} tu(t)dt=x,\quad H=C[0;1/2],\quad u_0=0.$

23. $u(x)-0{,}5\int_0^1 (t+x)u(t)dt=x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

24. $u(x)-\int_0^1 u(t)dt=x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=1.$

25. $u(x)-0{,}5\int_0^1 e^{x-t}u(t)dt=e^x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

26. $u(x)-3\int_0^1 (xt-0{,}3)u(t)dt=6x^2+1,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

27. $u(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xtu(t)dt=\frac{5}{6}x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

28. $u(x)+\pi\int_0^1 (1-x)\sin(2\pi t)u(t)dt=\frac{1}{2}(1-x),\ H=C[0;1],\ u_0=\frac{1}{2}(1-x).$

29. $u(x)+\frac{1}{2}\int_0^1 u(t)dt=x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

30. $u(x)+\int_0^1 xtu(t)dt=2x,\quad H=C[0;1],\quad u_0=0.$

**14. Для оператора $A:H\to H$ знайдіть оператори $A^0$, $A^1$, $A^2$, $A^3$. При можливості знайдіть також оператор $(I-A)^{-1}:H\to H$, резольвенту Фредгольма та розв'язок інтегрального рівняння**

1. $u(x)-s\int_0^1 xtu(t)dt=1,\quad A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt,\quad H=C[0;1].$

2. $u(x)-s\int_0^1 tu(t)dt=1,\quad A(u)(x)=\int_0^1 tu(t)dt,\quad H=C[0;1].$

3. $u(x)-s\int\limits_0^1 xtu(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1 xtu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

4. $u(x)-s\int\limits_0^{1/2} tu(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^{1/2} tu(t)dt$, $H=C[0;1/2]$.

5. $u(x)-s\int\limits_0^1 (t+x)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (t+x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

6. $u(x)-s\int\limits_0^1 (t+2x)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

7. $u(x)-s\int\limits_0^1 (t-x)u(t)dt=1$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x (t-x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

8. $u(x)-s\int\limits_0^x u(t)dt=1$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

9. $u(x)-s\int\limits_0^1 (t+xt^2)u(t)dt=1$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (t+xt^2)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

10. $u(x)-s\int\limits_0^{10} tu(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int\limits_0^{10} tu(t)dt$, $H=C[0;10]$.

11. $u(x)-s\int\limits_0^{10} xu(t)dt=\sin x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^{10} xu(t)dt$, $H=C[0;10]$.

12. $u(x)-s\int\limits_0^{10} xtu(t)dt=e^x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^{10} xtu(t)dt$, $H=C[0;10]$.

13. $u(x)-s\int\limits_0^2 tu(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int\limits_0^2 tu(t)dt$, $H=C[0;2]$.

14. $u(x)-s\int\limits_0^1 e^{x+t}u(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1 e^{x+t}u(t)dt$, $H=C[0;2]$.

15. $u(x)-s\int\limits_{-1}^1 xe^t u(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^1 xe^t u(t)dt$, $H=C[-1;1]$.

16. $u(x)-s\int\limits_{-1}^0 (1+x)(1+t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^0 (1+x)(1+t)u(t)dt$,
$H=C[-1;0]$.

17. $u(x)-s\int\limits_0^1 (x-t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (x-t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

18. $u(x)-s\int_0^1(2x-t)u(t)dt=2$, $A(u)(x)=\int_0^1(2x-t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

19. $u(x)-s\int_0^1(x+3t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1(x+3t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

20. $u(x)-s\int_0^1(3x+t)u(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int_0^1(3x+t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

21. $u(x)-s\int_0^1(3x+2t)u(t)dt=x^2$, $A(u)(x)=\int_0^1(3x+2t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

22. $u(x)-s\int_0^1(3x-t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1(3x-t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

23. $u(x)-s\int_0^1(x-3t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1(x-3t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

24. $u(x)-s\int_0^1(2x-3t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1(2x-3t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

25. $u(x)-s\int_0^1(3x-2t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1(3x-2t)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

26. $u(x)-s\int_0^1 u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

27. $u(x)-s\int_0^{1/2} u(t)dt=x-1/2$, $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)dt$, $H=C[0;1/2]$.

28. $u(x)-s\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin t)u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(x+\sin t)u(t)dt$,
$H=C[-\pi;\pi]$.

29. $u(x)-s\int_0^1 t^2u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1 t^2u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

30. $u(x)-s\int_0^1 x^2u(t)dt=x$, $A(u)(x)=\int_0^1 x^2u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

31. $u(x)-s\int_0^x u(t)dt=-2x^2-2$, $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

32. $u(x)-s\int\limits_0^1(x^2t-xt^2)u(t)dt=1$, $A(u)(x)=\int\limits_0^1(x^2t-xt^2)u(t)dt$,

$H=C[0;1]$.

33. $u(x)-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos t u(t)dt=\cos x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos t u(t)dt$,

$H=C[0;\pi/2]$.

34. $u(x)-2\int\limits_{-1}^1 x^2t^2u(t)dt=e^x$, $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^1 x^2t^2u(t)dt$, $H=C[-1;1]$.

35. $u(x)-\int\limits_0^x\frac{1+t^2}{1+x^2}u(t)dt=\frac{1}{1+x^2}$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x\frac{1+t^2}{1+x^2}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

36. $u(x)-\int\limits_0^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}u(t)dt=\operatorname{ch}x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

37. $u(x)-\int\limits_{-1}^0(1+x)(1-t)u(t)dt=\pi\cos(\pi x)$, $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^0(1+x)(1-t)u(t)dt$,

$H=C[-1;0]$.

38. $u(x)-2\int\limits_0^x e^{x^2-t^2}u(t)dt=e^{x^2+2x}$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x e^{x^2-t^2}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

39. $u(x)-\int\limits_0^x\frac{2+\cos x}{2+\cos t}u(t)dt=e^x\sin x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x\frac{2+\cos x}{2+\cos t}u(t)dt$,

$H=C[0;\pi]$.

40. $u(x)-\int\limits_0^x 4^{x-t}u(t)dt=x4^x$, $A(u)(x)=\int\limits_0^x 4^{x-t}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

**15. Для оператора $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, заданого в стандартному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матрицею A знайдіть: а) алгебраїчну та геометричну кратності кожного власного значення; б) нормовані ($\|e\|=1$) власні і приєднані вектори; в) кратність кожного нормованого власного вектора**

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

17. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

18. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

21. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}.$

22. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

23. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

24. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}.$

25. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}.$

26. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$

27. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$

28. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$

29. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$

30. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

**16. Для інтегрального оператора Фредгольма $A: H \to H$, заданого формулою, знайти всі ті $\alpha \in \mathbb{C}$, для яких: а) цей оператор має два ненульові власні значення; б) має одне ненульове власне значення, геометрична кратність якого дорівнює двом; в) має одне власне значення, геометрична кратність якого дорівнює одиниці**

1. $A(u)(x)=\int_0^1 (x+\alpha t)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

2. $A(u)(x)=\int_0^1 (\alpha x+t)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

**17. Знайдіть власні значення і власні функції (вектори) оператора $A: H \to H$**

1. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

2. $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

3. $A(u)(x)=\int_0^1 xtu(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

4. $A(u)(x)=\int_0^{2\pi} u(t)\sin x \sin t dt$, $H=C[0;2\pi]$.

5. $A(u)(x)=\int_0^1 (x+t)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

6. $A(u)(x)=\int_0^1 (x-t)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

7. $A(u)(x)=\int_0^1 (3x-2)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

8. $A(u)(x)=\int_0^1 \left(t\sqrt{x}-x\sqrt{t}\right)u(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

9. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (x^2+t^2)u(t)dt\,,\quad H=L_2[0;1]\,.$

10. $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^1 (1+xt)u(t)dt\,,\quad H=L_2[-1;1]\,.$

11. $A(u)(x)=\int\limits_{-1}^1 (xt+x^2t^2)u(t)dt\,,\quad H=L_2[-1;1]\,.$

12. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 x^2e^tu(t)dt\,,\quad H=L_2[0;1]\,.$

13. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (x^2-xt)u(t)dt\,,\quad H=L_2[0;1]\,.$

14. $A(x)=(x_5+3x_1;x_2;x_3;x_4;...;x_n;...)\,,\quad H=l_2\,.$

15. $A(x)=(0;3x_2-x_3;2x_1;x_4;0;0;...)\,,\quad H=l_2\,.$

16. $A(x)=(x_3;x_4;x_5;...)\,,\quad H=l_2\,.$

17. $A(x)=\left(x_1;\frac{x_2}{2};\frac{x_3}{3};...;\frac{x_n}{n};...\right),\quad H=l_2\,.$

18. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt\,,\quad K(x;t)=\begin{cases} x, & x\le t, \\ t, & t<x, \end{cases}\quad H=L_2[0;1]\,.$

19. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt\,,\quad K(x;t)=\begin{cases} x(1-t), & x\le t, \\ t(1-x), & t<x, \end{cases}\quad H=L_2[0;1]\,.$

20. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt\,,\quad K(x;t)=\begin{cases} (x+1)(1-t), & x\le t, \\ (t+1)(1-x), & t<x, \end{cases}$

$H=L_2[0;1]\,.$

21. $A(u)(x)=\int\limits_{-\pi/2}^0 K(x;t)u(t)dt\,,\quad K(x;t)=\begin{cases} \cos x\sin t, & x\le t, \\ \sin x\cos t, & t<x, \end{cases}$

$H = L_2[-\pi/2;0]$.

22. $A(u)(x) = u(-x)$, $H = C[-\pi;\pi]$.

23. $A(u)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x+t)u(t)dt$, $H = C[-\pi;\pi]$.

24. $A(u)(x) = \int\limits_{0}^{1} x\sin(\pi t)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$.

25. $A(u)(x) = \int\limits_{0}^{\pi} \cos x\cos(2t)u(t)dt$, $H = C[0;\pi]$.

26. $A(u)(x) = \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos(x+t)u(t)dt$, $H = C[0;\pi/2]$.

27. $A(u)(x) = u(0) + xu(1)$, $H = C[0;1]$.

28. $A(u)(x) = xu(x)$, $H = C[0;1]$.

29. $A(u)(x) = \int\limits_{0}^{1} x^2(t+1)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$.

30. $A(u)(x) = \int\limits_{0}^{\pi/4} K(x;t)u(t)dt$, $K(x;t) = \begin{cases} \cos 2x\sin 2t, & x \le t, \\ \sin 2x\cos 2t, & t < x, \end{cases}$

$H = L_2[0;\pi/4]$.

**18. Знайдіть власні значення і власні функції оператора** $Ay = y''$ **в дійсному просторі** $C[0;\pi]$ **з вказаною областю визначення** $D(A)$

1. $D(A) = \{y \in C^{(2)}[0;\pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}$.

2. $D(A)=\{y\in C^{(2)}[0;\pi]: y'(0)=y'(\pi)=0\}$.

3. $D(A)=\{y\in C^{(2)}[0;\pi]: y(0)=y(\pi),\ y'(0)=y'(\pi)\}$.

**19. Дослідіть оператор $A: H\to H$ на компактність у вказаному просторі $H$**

1. $A(x)=(0;x_1;...;x_n;...)$, $H=l_2$.

2. $A(u)(x)=x\int\limits_0^1 e^{tx}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

3. $A(u)(x)=xu(x)$, $H=C[0;1]$.

4. $A(u)(x)=xu(0)$, $H=C[0;1]$.

5. $A(u)(x)=u(\sqrt{x})$, $H=C[0;1]$.

6. $A(u)(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin tu(t)dt$, $H=C[-\pi;\pi]$.

7. $A(u)(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^2t^2u(t)dt$, $H=C[-\pi;\pi]$.

8. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 e^{xt}u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

9. $A(u)(x)=\int\limits_0^1\frac{u(t)}{|x-t|^2}dt$, $H=C[0;1]$.

10. $A(u)(x)=x^2u(x)+2x(0)$, $H=C[-1;1]$.

11. $A(u)(x)=\int\limits_0^x tu(t)dt$, $H=L_2[0;1]$.

12. $A(u)(x) = u(x^2)$, $H = C[0;1]$.

13. $A(u)(x) = 1 + u(x)$, $H = C[0;1]$.

14. $A(u)(x) = \int_0^1 t^2 \sin xu(t)dt$, $H = C[0;1]$.

15. $A(x) = (x_1; x_2 / 2; ...; x_n / 2^n; ...)$, $H = l_2$.

16. $A(u)(x) = u(x^2 / 2)$, $H = C[-1;1]$.

17. $A(u)(x) = x^2 u(x)$, $H = C[0;1]$.

18. $A(u)(x) = u^2\left(\sqrt[3]{x}\right)$, $H = C[0;1]$.

19. $A(u)(x) = \int_0^1 x^2 \sqrt{t} u(t)dt$, $H = C[0;1]$.

20. $A(u)(x) = \int_0^1 \frac{u(t)}{\sqrt{(x-t)^2}} dt$, $H = C[0;1]$.

21. $A(u)(x) = \int_0^1 u(t^2)dt$, $H = C[0;1]$.

22. $A(u)(x) = u(0) + xu(1/2) + x^2 u(1)$, $H = C[0;1]$.

23. $A(u)(x) = \frac{u(x) + u(-x)}{2}$, $H = C[-1;1]$.

24. $A(u)(x) = \int_0^x tu(t)dt$, $H = C[0;1]$.

25. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 \frac{u(t)}{\sin(x-t)}dt$, $H=C[0;1]$.

26. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 \frac{u(\sqrt{t})}{t^{5/4}}dt$, $H=C[0;1]$.

27. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 (t\sin x+t^2\cos x)u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

28. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 \frac{u(t)}{t-1/2}dt$, $H=C[0;1]$.

29. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 \frac{u(t)}{\sqrt{|\sin x-\sin t|}}dt$, $H=C[0;1]$.

30. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 u(t)dt$, $H=C[0;1]$.

31. $A(u)(x)=\int\limits_0^1 t^2\cos xu(t)dt$, $H=C[0;1]$.

32. $A(u)(x)=x^2+u(x^2)$, $H=C[0;1]$.

**20. Знайдіть значення на елементі $u$ оператора $A^*:H\to H$, спряженого до оператора $A:H\to H$, заданого формулою або матрицею $\mathbf{A}$ у стандартному базисі простору $H$**

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix} i \\ 2i \end{pmatrix}$.

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} i & -i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 1+i & -2i \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix} -i \\ 2i \end{pmatrix}$.

5. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} i & -i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^2$, $u=\begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1+i & 0 & i \\ 1-i & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$.

9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1+i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1-i \\ i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H=\mathbb{C}^3$, $u=\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$.

11. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)(t-2ix)dt$, $H=L_2[0;1]$, $u(t)=\sin t$.

12. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)(t^2-ix)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=i\cos t\ .$

13. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)(e^t-ix)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=e^t\ .$

14. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)(t-ie^x)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=it\ .$

15. $A(u)(x)=\int_0^\pi u(t)e^{itx}dt\ ,\quad H=L_2[0;\pi],\quad u(t)=e^{it}\ .$

16. $A(u)(x)=\int_0^\pi u(t)\sin(itx)dt\ ,\quad H=L_2[0;\pi],\quad u(t)=t\ .$

17. $A(u)(x)=\int_0^\pi u(t)\cos(itx)dt\ ,\quad H=L_2[0;\pi],\quad u(t)=t\ .$

18. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)(t-2ix)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=2i\ .$

19. $A(u)(x)=\int_0^1 u(t)\frac{1}{(t-2ix)}dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=t\ .$

20. $A(u)(x)=\int_0^x tu(t)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=\sin\pi t\ .$

21. $A(u)(x)=\int_0^x txu(t)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=\cos\pi t\ .$

22. $A(u)(x)=i\int_0^x txu(t)dt\ ,\quad H=L_2[0;1],\quad u(t)=e^{it}\ .$

23. $A(u)(x) = i\int\limits_0^x xu(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = it$.

24. $A(u)(x) = \int\limits_0^x xu(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = t^2$.

25. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (t+x)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = \mathrm{arctg}\, t$.

26. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (t+x)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = \mathrm{arcctg}\, t$.

27. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (it+2x)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = -i\arcsin t$.

28. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 (t-2ix)u(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = \ln t$.

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1-i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^2$, $u = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-i \end{pmatrix}$.

30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ -i & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^3$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$.

31. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \mathbb{C}^3$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

32. $A(u)(x) = \int\limits_0^1 ixu(t)dt$, $H = L_2[0;1]$, $u(t) = \mathrm{arcctg}\, t$.

33. $A(u)(x)=\int_0^1 ix^2u(t)dt$ , $H=L_2[0;1]$, $u(t)=\arccos t$ .

34. $A(u)(x)=\int_0^1 tu(t)dt$ , $H=L_2[0;1]$, $u(t)=\mathrm{arctg}\, t$ .

35. $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$ , $H=L_2[0;1]$, $u(t)=\sin^2 t$ .

36. $A(u)(x)=\int_0^x u(t)dt$ , $H=L_2[0;1]$, $u(t)=t\cos t$ .

37. $A(x)=(x_2;x_3;...;x_n;...)$ , $H=l_2$ , $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$ .

38. $A(x)=(0;x_1;...;x_n;...)$ , $H=l_2$ , $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$ .

39. $A(x)=(3x_2-x_3;2x_3;x_3-2x_1;0;0;...)$ , $H=l_2$ , $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$ .

40. $A(x)=(3x_1;2x_2-ix_5;0;x_1-x_2;0;...)$ , $H=l_2$ , $x=(x_1;x_2;...;x_n;...)$ .

41. $A(u)(x)=e^x u(x)$ , $H=L_2[0;1]$, $u(x)=\sin^2 x$ .

42. $A(u)(x)=xu(x^2)$ , $H=L_2[0;1]$, $u(x)=x$ .

43. $A(u)(x)=e^{2ix}u(x)$ , $H=L_2[0;1]$, $u(x)=e^{ix}$ .

**21. Використовуючи формулу Шмідта, знайдіть розв’язки інтегральних рівнянь в просторі** $H$

1. $u(x)-s\int_0^1 u(t)dt=x$ , $H=L_2[0;1]$.

2. $u(x)-s\int_0^1 xtu(t)dt=x$ , $H=L_2[0;1]$.

3. $u(x) - s\int\limits_0^1 (x+t)u(t)dt = x, \quad H = L_2[0;1].$

4. $u(x) - s\int\limits_{-1}^1 (1+xt)u(t)dt = x^2, \quad H = L_2[-1;1].$

5. $u(x) - s\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t)u(t)dt = \sin 2x, \quad H = L_2[-\pi;\pi].$

6. $u(x) - s\int\limits_0^{2\pi} \sin x \sin t u(t)dt = \cos x + \sin x, \quad H = L_2[0;2\pi].$

7. $u(x) - s\int\limits_0^1 \min\{x;t\}u(t)dt = \sin \pi x, \quad H = L_2[0;1].$

8. $u(x) - s\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt = x, \quad K(x;t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \le x \le t, \\ t(x-1), & t \le x \le 1, \end{cases} \quad H = L_2[0;1].$

9. $u(x) - s\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt = \cos \pi x, \quad K(x;t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \le x \le t, \\ x(t+1), & t \le x \le 1, \end{cases}$

$H = L_2[0;1].$

10. $u(x) - s\int\limits_0^1 K(x;t)u(t)dt = x, \quad K(x;t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \le x \le t, \\ \cos t \sin x, & t \le x \le \pi, \end{cases}$

$H = L_2[0;\pi].$

11. $u(x) - s\int\limits_0^{\pi} K(x;t)u(t)dt = \sin\left(\frac{3}{2}x\right), \quad K(x;t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \le x \le t, \\ \sin t \cos x, & t \le x \le \pi, \end{cases}$

$H = L_2[0;\pi].$

12. $u(x)-s\int_0^1 K(x;t)u(t)dt=\sin(\pi x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $K(x;t)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le t,\\ -t, & t\le x\le 1,\end{cases}$

$H=L_2[0;1]$.

13. $u(x)-s\int_0^1 K(x;t)u(t)dt=1$, $K(x;t)=\begin{cases}x(t-1), & 0\le x\le t,\\ t(x-1), & t\le x\le 1,\end{cases}$ $H=L_2[0;1]$.

14. $u(x)-s\int_0^1 K(x;t)u(t)dt=\pi\cos\pi x+\sin\pi x$, $H=L_2[0;1]$,

$K(x;t)=\begin{cases}(x+1)t, & 0\le x\le t,\\ (t+1)x, & t\le x\le 1.\end{cases}$

15. $u(x)-s\int_{-1}^1 K(x;t)u(t)dt=1$, $K(x;t)=\begin{cases}(x+1)(1-t), & -1\le x\le t,\\ (t+1)(1-x), & t\le x\le 1,\end{cases}$

$H=L_2[-1;1]$.

16. $u(x)-s\int_0^1 K(x;t)u(t)dt=x$, $K(x;t)=\begin{cases}(e^x-e^{-x})(e^t+e^{2-t}), & 0\le x\le t,\\ (e^t-e^{-t})(e^x+e^{2-x}), & t\le x\le 1,\end{cases}$

$H=L_2[0;1]$.

17. $u(x)-s\int_0^1 K(x;t)u(t)dt=\cos\pi x$, $K(x;t)=\begin{cases}\sin x\sin(1-t), & 0\le x\le t,\\ \sin(1-x)\sin t, & t\le x\le 1,\end{cases}$

$H=L_2[0;1]$.

18. $u(x)-s\int_{-1}^1 (xt+1)u(t)dt=x^3$, $H=L_2[-1;1]$.

19. $u(x)-s\int_{-1}^{1}\left(\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{x}\right)u(t)dt=x^2$, $\quad H=L_2[-1;1]$.

20. $u(x)-s\int_{-1}^{1}(x+t)u(t)dt=x^2$, $H=L_2[-1;1]$.

21. $u(x)-s\int_{-1}^{1}(tx+t^2x^2)u(t)dt=x^2$, $\quad H=L_2[-1;1]$.

22. $u(x)-s\int_{0}^{\pi/2}\cos(t+x)u(t)dt=\sin x$, $\quad H=L_2[0;\pi/2]$.

## Список використаних джерел

1. Анікушин А.В., Семенов В.В. Збірник задач з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2017. – 64 с.
2. Банах С. Курс функціонального аналізу. – К.: Радянська школа, 1948. – 216 с.
3. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Ф. Функціональний аналіз: підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков (Серія “Університетська бібліотека”), 2014. – 559 с.
4. Боярищева Т.В., Гудивок Т.В., Погоріляк О.О. Функціональний аналіз: навчальний посібник. – Ужгород, 2013. – 125 с.
5. Вагін П.П., Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А. Основи функціонального аналізу: курс лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – 140 с.
6. Василишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В. Інтегральні рівняння. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224 с.
7. Винницький Б.В., Дільний В.М., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Функціональний аналіз, Ч.1: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. Івана Франка, 2014. – 150 с.
8. Винницький Б.В., Хаць Р.В. Функціональний аналіз, Ч.2: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. Івана Франка, 2015. – 136 с.
9. Винницький Б.В., Хаць Р.В. Вибрані розділи теорії функцій, Ч.1.: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2014. – 129 с.
10. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч.1. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 517 с.
11. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч.2. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 511 с.
12. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв’язування типових задач функціонального аналізу: методичний посібник для студентів. – Львів: Простір М, 2015. – 72 с.

13. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. – К. : Техніка, 1997. – 288 с.
14. Городній М.Ф., Константінов О.Ю., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2006. – 103 с.
15. Дюкарев Ю.М., Літвінова О.Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення. – Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2010. – 138 с.
16. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри: підручник. – Львів: Видавець І. Е. Чижиков (Серія “Університетська бібліотека”), 2012. – 590 с.
17. Кишакевич Ю.Л. Елементи функціонального аналізу. – Дрогобич: Каменяр, 2001. – 135 с.
18. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456 с.
19. Константінов О.Ю., Кукуш О.Г., Мішура Ю.С., Нестеренко О.Н., Чайковський А.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Компактні оператори. Інтегральні рівняння. Узагальнені функції – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. – 126 с.
20. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.
21. Федак І.В. Функціональний аналіз. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120 с.
22. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри: навчальний посібник. Ч.4. Лінійні функціонали та лінійні оператори. – Івано-Франківськ: ПНУ ім. В. Стефаника, 2020. – 56 с.
23. Хаць Р.В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання: навчальний посібник. – Дрогобич: ДДПУ ім. Івана Франка, 2023. – 130 с.
24. Arnold D.N. Functional analysis. – Penn State University, 2003. – 36 p.
25. Berezanskii Yu.M. Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators, Vol. 17. – American Mathematical Society: Providence, RI, 1968. – 809 p.

26. Curtain R.F., Pritchard A.J. Functional analysis in modern applied mathematics. – New York: Academic Press, 1977. – 348 p.
27. Dunford N., Schwartz J.T. Linear operators. Spectral operators, Part III. – New York: Interscience Publ., 1971. – 667 p.
28. Kadets V. A course in functional analysis and measure theory. – Springer, 2018. – 553 p.
29. Naimark M.A. Linear differential operators. – New York: Ungar, 1968. –527 p.
30. Nair M.T. Linear operator equations approximation and regularization. – New Jersey: World Scientific Publishing Co., 2009. – 264 p.
31. Pipkin A.C. A course on integral equations. – New York: Springer Science, 1991. – 281 p.
32. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of integral equations. – New York: CRC Press LLC, 1998. – 796 p.

**Електронне навчальне видання**

**Руслан Хаць**

# ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Дрогобицький державний педагогічний університет**
**імені Івана Франка**

**Редактор**
Ірина Невмержицька

**Технічний редактор**
Ольга Лужецька

**Коректор**
Ірина Артимко

Здано до набору 04.03.2024 р. Формат 60x90/16. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 9,75. Зам. 6.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.