УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА

Юрій Галь, Уляна Добош, Ірина Корнейчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Навчально-методичний посібник

Дрогобич
2009

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Юрій Галь, Уляна Добош, Ірина Корнейчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Навчально-методичний посібник

(для фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" спеціальностей "Математика", "Математика та основи економіки", "Математика та фізика")

Дрогобич – 2009

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 4 від 15.04. 2009 р.)

Г 17 ГАЛЬ Ю.М., ДОБОШ У.П., КОРНЕЙЧУК І.В. Диференціальна геометрія і топологія: навчально-методичний посібник – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2009. – 83 с.

Посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни "Диференціальна геометрія і топологія" для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" спеціальностей "Математика", "Математика та основи економіки", "Математика та фізика", затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Містить приклади розв'язування задач, стислий виклад теоретичного матеріалу до кожної теми та завдання для самостійної роботи.

Розрахований на студентів ВНЗ.

Бібліографія 9 назв.

ББК 22.151

Відповідальний за випуск:

– **Комарницька Л. І.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики і методики викладання математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Рецензенти:

– **Скасків О. Б.**, доктор фізико-математичних наук; професор кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей Львівського національного університету імені Івана Франка;

– **Шаран В. Л.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Вступ

Для свідомого засвоєння диференціальної геометрії і топології важливе значення має розв'язування задач на практичних заняттях і в процесі самостійної роботи над курсом. Теми практичних занять, наведені у посібнику, повністю охоплюють основний зміст, ідеї і методи диференціальної геометрії і топології.

До кожної теми подано короткі теоретичні пояснення, а також розв'язки найбільш характерних задач. Майже до всіх задач є відповіді і вказівки до розв'язування.

При розв'язуванні задач слід особливу увагу звернути на виявлення їх геометричної суті, свідомо користуватися відповідними теоремами й формулами, де необхідно виконати рисунок.

Зміст

РОЗДІЛ І. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ
Тема 1. Дотична та нормаль кривої

Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої можна подати у вигляді такої таблиці

№ з/п	*Рівняння кривої*	*Рівняння дотичної*	*Рівняння нормалі*
1.	$y=f(x)$	$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$	$y-y_0=-\dfrac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)$
2.	$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$	$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}$	$(x-x_0)x'_{t_0}+(y-y_0)y'(t_0)=0$
3.	$F(x,y)=0$	$F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)=0$	$F_y^0(x-x_0)-F_x^0(y-y_0)=0$

Розглянемо приклади задач на знаходження рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої.

Задача 1. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=x\ln x+1$ у точці $A(1,1)$.

Розв'язування.

Крива задана рівнянням вигляду $y=f(x)$, тому знайдемо похідну $y'=\ln x+1$ і обчислимо її значення у точці A: $y'(1)=\ln 1+1=1$.

Тоді рівняння дотичної матиме вигляд

$$y-1=x-1,$$
$$x-y=0.$$

А рівняння нормалі

$$y-1=-(x-1),$$
$$x+y-2=0.$$

Відповідь: $x-y=0$; $x+y-2=0$.

Задача 2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ у довільній точці.

Розв'язування.

Дана крива задана параметричними рівняннями, тому $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$.

Рівняння дотичної і нормалі в довільній точці матимуть відповідно вигляд

$$\frac{x-a(t-\sin t)}{1-\cos t}=\frac{y-a(1-\cos t)}{\sin t};$$

$$\sin t(y-a(1-\cos t))+(1-\cos t)(x-a(t-\sin t))=0.$$

Відповідь: $\frac{x-a(t-\sin t)}{1-\cos t}=\frac{y-a(1-\cos t)}{\sin t}$, $\sin t(y-a(1-\cos t))+(1-\cos t)(x-a(t-\sin t))=0$.

Задача 3. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2+y^2=5$ у точці $A(-1;2)$.

Розв'язування.

Оскільки крива задана рівнянням вигляду $F(x,y)=0$, то

$$F_x=2x, \qquad F_x^0=-2.$$

$$F_y=2y, \qquad F_y^0=4.$$

Тоді рівняння дотичної

$$-2(x+1)+4(y-2)=0,$$

$$x-2y+5=0.$$

Рівняння нормалі

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{4},$$

$$2x+y=0.$$

Відповідь: $x-2y+5=0$, $2x+y=0$.

Розглянемо випадок просторової кривої. Якщо крива задана рівняннями
$x=x(t)$
$y=y(t)$, то рівняння дотичної до неї має вигляд
$z=z(t)$

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}. \qquad (1)$$

Задача 4. Знайти рівняння дотичної до кривої $\bar{r}=\left(\frac{t^2}{4};\frac{t^3}{3};\frac{t^2}{2}\right)$ у точці $A=\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язування.

$$\bar{r}=\left(\frac{t^4}{4};\frac{t^3}{3};\frac{t^2}{2}\right),$$

$$\bar{r}'(t)=(t^3,t^2,t).$$

Знайдемо t_0

$$\begin{cases}\dfrac{t_0^4}{4}=\dfrac{1}{4}\\[2mm] \dfrac{t_0^3}{3}=-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{t_0^2}{2}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Отже, $t_0=-1$.

Тоді $\bar{r}'(t_0)=(-1;1;-1)$ і рівняння дотичної

$$\frac{x-\frac{1}{4}}{-1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}.$$

Відповідь: $\dfrac{x-\frac{1}{4}}{-1}=\dfrac{y+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{-1}.$

Якщо ж крива задана рівняннями вигляду $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$, то рівняння дотичної до неї виглядає так

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\ \Phi'_y & \Phi'_z\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\ \Phi'_z & \Phi'_x\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F'_x & F'_y\\ \Phi'_x & \Phi'_y\end{vmatrix}}. \qquad (2)$$

Задача 5. Знайти рівняння дотичної до кривої $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ y^2+z^2=25\end{cases}$ у точці $A(1;3;4)$.

Розв'язування.

1. Перший спосіб.

Оскільки крива задана рівняннями виду $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ \Phi(x,y,z)=0\end{cases}$, то скористаємося формулою (2) для знаходження рівняння дотичної.

Знайдемо похідні:

$F'_x = 2x$, $\quad F'_{x_0} = 2$, $\quad \Phi'_x = 0$, $\quad \Phi'_{x_0} = 0$,

$F'_y = 2y$, $\quad F'_{y_0} = 6$, $\quad \Phi'_y = 2y$, $\quad \Phi'_{y_0} = 6$,

$F'_z = 0$, $\quad F'_{z_0} = 0$, $\quad \Phi'_z = 2z$, $\quad \Phi'_{z_0} = 8$.

Тоді рівняння дотичної

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{y-3}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z-4}{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x-1}{48} = \frac{y-3}{-16} = \frac{z-4}{12} \text{ або } \frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$.

2. Другий спосіб.

Нехай $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ – параметричні рівняння даної кривої, які перетворюють у тотожність рівняння даної системи.

Продиференціюємо по t обидва рівняння системи

$$\begin{cases} 2xx'_t + 2yy'_t = 0 \\ 2yy'_t + 2zz'_t = 0. \end{cases}$$

У точці $A(1;3;4)$ матимемо

$$\begin{cases} x'_{t_0} + 3y'_{t_0} = 0 \\ 3y'_{t_0} + 4z'_{t_0} = 0 \end{cases},$$

Звідки

$$\begin{cases} x'_{t_0} = 4z'_{t_0} \\ y'_{t_0} = -\frac{4}{3} z'_{t_0}. \end{cases}$$

Нехай $z'_{t_0} = 3$, тоді $x'_{t_0} = 12$, $y'_{t_0} = -4$.

Одержимо таке рівняння дотичної

$$\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$.

Задача 6. Знайти рівняння дотичної до лінії $\bar{r}(t) = (t^2, t, e^t)$, паралельної до площини $x - 2y - 5 = 0$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$$\vec{r}' = (2t, 1, e^t),\ \vec{r}_0' = (2t_0, 1, e^{t_0}).$$

Оскільки дотична паралельна до площини, то $r_0' \cdot \vec{n} = 0$, де $\vec{n}(1, -2, 0)$ – нормальний вектор площини. Отже, матимемо рівняння $2t_0 - 2 = 0$, $t_0 = 1$.

Знайдемо точку кривої, якій відповідає $z = 1$

$$x_0 = t_0^2 = 1,\ y_0 = t_0 = 1,\ z_0 = e^{t_0} = e,$$

а також $\vec{r}_0' = (2, 1, e)$.

Шукана дотична до даної кривої матиме вигляд

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-e}{e}.$$

Відповідь: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-e}{e}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривих у заданій точці:

а) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$, $A(-2; 0{,}8)$. (*Відповідь:* $4x + 25y - 12 = 0$.)

б) $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $A(2)$. (*Відповідь:* $4x - 5y + 4 = 0$, $12x + 15y - 28 = 0$.)

в) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$, $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (*Відповідь:* $x + y - \sqrt{2} = 0$, $x - y = 0$.)

г) $2x^2 - x^2y^2 - 3x + y + 7 = 0$, $A(1, -2)$. (*Відповідь:* $7x - 5y - 17 = 0$, $5x + 7y + 9 = 0$.)

д) $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $A(-1; 0)$. (*Відповідь:* $y^3 = \sqrt{4}(x+1)$.)

2. Знайти рівняння дотичної до кривої у даній точці:

а) $\vec{r}(t) = (t, t^2, e^t)$, $t_0 = 0$. (*Відповідь:* $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$.)

б) $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, e^t)$, $t = 0$. (*Відповідь:* $\frac{x-a}{0} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{1}$.)

в) $\bar{r}(t)=(e^t,e^{-t},t^2)$, $t_0=0$. (*Відповідь:* $\frac{x-e}{e}=\frac{y-e^{-1}}{e^{-1}}=\frac{z-1}{2}$.)

г) $\bar{r}(t)=(2\cos t,2\sin t,4t)$, $t_0=0$. (*Відповідь:* $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$.)

д) $\bar{r}(t)=(t,t^2,t^3)$, $t_0=1$. (*Відповідь:* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.)

е) $\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=47\\ x^2-2y^2-z=0\end{cases}$, $A(-2;1;6)$. (*Відповідь:* $\frac{x+2}{27}=\frac{y-1}{28}=\frac{z-6}{4}$.)

є) $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3\\ x^2+y^2=2\end{cases}$, $A(1;1;1)$. (*Відповідь:* $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$.)

ж) $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ x=y\end{cases}$, $A(x_0,y_0,z_0)$. (*Відповідь:* $\begin{cases}x=x_0+tz_0\\ y=y_0+tz_0\\ z=z_0+2tx_0\end{cases}$.)

3. Знайти рівняння дотичної до кривої $\bar{r}(t)=(3t-t^3;3t^2;3t+t^3)$, перпендикулярної до вектора $\bar{a}(3,1,1)$. (*Відповідь:* $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-12}{4}=\frac{z-14}{5}$, $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{1}$.)

4. Знайти рівняння дотичної до кривої $\bar{r}(t)=(t^2,t,e^t)$, паралельної до площини $x-2y-5=0$. (*Відповідь:* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-e}{1}$.)

Тема 2. Довжина дуги кривої

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{1}$$

де a і b – абсциси початку та кінця дуги.

Якщо крива задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

причому $t_1 < t < t_2$, а функції $x(t)$ і $y(t)$ мають неперервні похідні, то довжина дуги

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt. \tag{2}$$

Якщо матимемо рівняння кривої у полярних координатах $r = r(\varphi)$, де $\alpha < \varphi < \beta$, то довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi. \tag{3}$$

Розглянемо задачі на обчислення довжини дуги плоскої кривої.

Задача 1. Знайти довжину астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язування.

Знайдемо y із даного рівняння:

$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}},$$

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тоді скористаємося формулою (1) для обчислення довжини кривої.

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}.$$

Таким чином $S = 4\int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = 4a^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = 6a$.

Отжс, $S = 6a$.

Відповідь: $6a$.

Задача 2. Знайти довжину астроїди, заданої рівнянням $\begin{cases} x = a\cos^3 \frac{t}{4} \\ y = a\sin^3 \frac{t}{4} \end{cases}$.

Розв'язування.

Оскільки крива задана параметричним рівнянням, то для обчислення її довжини застосуємо формулу (2).

Обчислимо похідні

$$x'_t = -\frac{3}{4} a\cos^2 \frac{t}{4} \sin\frac{t}{4}, \quad y'_t = \frac{3}{4} a\sin^2 \frac{t}{4} \cos\frac{t}{4}.$$

Знайдемо:

$$x_t'^2 + y_t'^2 = \frac{9}{16} a^2 \sin^2 \frac{t}{4} \cos^2 \frac{t}{4}, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{3}{4} a\sin\frac{t}{4} \cos\frac{t}{4}.$$

Таким чином,

$$S = 4\int\limits_0^{2\pi} \frac{3}{4} a\sin\frac{t}{4} \cos\frac{t}{4} dt = 3a\int\limits_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = -3a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 6a.$$

Отже, $S = 6a$.

Відповідь: $6a$.

Задача 3. Знайти довжину логарифмічної спіралі $r = a^\varphi$ між точками (r_0, φ_0) і (r_1, φ_1).

Розв'язування.

Скористаємося формулою (3).

Обчислимо похідну

$$r' = a^\varphi \ln a.$$

Знайдемо

$$r^2 + r'^2 = a^{2\varphi} + a^{2\varphi} \ln^2 a = a^{2\varphi}(1 + \ln^2 a), \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = a^\varphi \sqrt{1 + \ln^2 a}.$$

Таким чином,

$$S=\sqrt{1+\ln^2 a}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a^{\varphi}d\varphi=\sqrt{1+\ln^2 a}\,\frac{a^{\varphi}}{\ln a}\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1}=\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}(a^{\varphi_1}-a^{\varphi_0})=\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}(r_1-r_0).$$

Отже,

$$S=\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}(r_1-r_0).$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{1+\ln^2 a}}{\ln a}(r_1-r_0)$.

Розглянемо випадок просторової кривої.

Довжина дуги кривої, заданої рівнянням $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ обчислюється за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt, \tag{4}$$

де $t_1<t<t_2$.

Задача 4. Знайти довжину гіперболічної гвинтової лінії $\bar{r}(t)=(acht, asht, at)$ між точками, де $t=0$ і $t=t_0$.

Розв'язування.

$x_t'=asht$, $y_t'=acht$, $z_t'=a$.

$x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2=a^2sh^2t+a^2ch^2t+a^2=a^2(sh^2t+ch^2t+1)=a^2(ch^2t+(sh^2t+1))=a^2(ch^2t+ch^2t)=$
$=2a^2ch^2t$

$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=a\sqrt{2}cht$.

$$S=\int_0^{t_0}a\sqrt{2}cht\,dt=a\sqrt{2}sht\Big|_0^{t_0}=a\sqrt{2}(sht_0-sh(0))=a\sqrt{2}sht_0.$$

Отже, $S=a\sqrt{2}sht_0$.

Відповідь. $a\sqrt{2}sht_0$.

Задача 5. Знайти довжину гвинтової лінії $\bar{r}(t)=(3a\cos t, 3a\sin t, 4at)$ від точки перетину з площиною *XOY* до довільної точки.

Розв'язування.

$\bar{r}(t)=(3a\cos t, 3a\sin t, 4at)$,

$\vec{r}'(t)=(-3a\sin t, 3a\cos t, 4a)$,

$|\vec{r}'(t)|=\sqrt{9a^2\sin^2 t+9a^2\cos^2 t+16a^2}=\sqrt{9a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)+16a^2}=5a$.

Знайдемо точку перетину лінії з площиною XOY:

$$\begin{cases} x=3a\cos t \\ y=3a\sin t \\ z=4at \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 4at=0 \Rightarrow t=0.$$

Тоді

$$S=\int_0^t 5a\,dt=5at\Big|_0^t=5at.$$

Отже, $S=5at$.

Відповідь: $5at$.

Задача 6. Знайти довжину лінії $\begin{cases} x^3=3a^2y \\ 2xy=a^2 \end{cases}$ між площинами $y=\dfrac{a}{3}$ і $y=9a$.

Розв'язування.

Запишемо рівняння даної лінії в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{t^3}{3a^2} \\ z=\dfrac{a^2}{2t} \end{cases}.$$

Тоді

$$x_t'=1,\ y_t'=\frac{t^2}{a^2},\ z_t'=-\frac{a^2}{2t^2}.$$

$$x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2=1+\frac{t^4}{a^4}+\frac{a^4}{4t^4}=\frac{4a^4t^4+4t^8+a^8}{4a^4t^4}=\left(\frac{2t^4+a^4}{2a^2t^2}\right)^2.$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\frac{2t^4+a^4}{2a^2t^2}.$$

Знайдемо точки перетину даної лінії з площинами

$$\gamma\cap\alpha:\ \frac{t^3}{3a^2}=\frac{a}{3}\Rightarrow t^3=a^3\Rightarrow t=a;$$

$$\gamma \cap \beta: \ \frac{t^3}{3a^2} = 9a \Rightarrow t^3 = 27a^3 \Rightarrow t = 3a.$$

$$S = \int_a^{3a} \frac{2t^4 + a^4}{2a^2t^2} dt = \frac{1}{2a^2}\left(\int_a^{3a} a^4 \frac{1}{t^2} dt + 2\int_a^{3a} t^2 dt\right) = \frac{1}{2a^2}\left(a^4\left(\frac{-2}{t^3}\right)\Bigg|_a^{3a} + \frac{2}{3}t^3\Bigg|_a^{3a}\right) = 9a.$$

Отже, $S = 9a$.

Відповідь: $9a$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \le t \le 2\pi$,

(*Відповідь:* $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.)

2. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t) = \left(at, a\sqrt{2}\ln t, \frac{c}{t}\right)$ між точками $A(1)$ і $B(10)$.

(*Відповідь:* 9,9c.)

3. Знайти довжину одного витка між двома точками перетину з площиною XOZ лінії $\bar{r}(t) = \left(a(t - \sin t), a(1 - \cos t), 4a\cos\frac{t}{2}\right)$.

(*Відповідь:* $8\sqrt{2}a$.)

4. Знайти довжину дуги кривої $\bar{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$, що міститься між точками $A(0)$ і $B(\pi)$.

(*Відповідь:* $\sqrt{3}\left(e^{\pi} - 1\right)$.)

5. Записати в натуральній параметризації рівняння кривої $\bar{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t, e^t)$.

(*Відповідь* $\begin{cases} x = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ y = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \\ z = \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \end{cases}$.)

6. Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ між точками $t = 0$ і $t = \frac{\pi}{2}$.

(*Відповідь:* $2a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.)

7. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln\cos x$ між точками $x=0$ і $x=\frac{\pi}{3}$.

(*Відповідь:* $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$.)

8. Знайти довжину лінії $\bar{r}(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t)$, $0\le t\le 2\pi$.

(*Відповідь: 10.*)

9. Записати в натуральній параметризації рівняння кривої $\bar{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$.

(*Відповідь:* $\begin{cases} x=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y=a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z=\frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$.)

10. Знайти довжину лінії $\bar{r}(t)=(a\,ch\,t, a\,sh\,t+b, at+c), a\ne 0$ між точками $t=0$ і $t=1$.

(*Відповідь:* $a\sqrt{2}\,sh\,t$.)

Тема 3. Кривина і скрут кривої

Для кривої $\bar r = \bar r(t)$ кривина обчислюється за формулою

$$k=\frac{|\bar r'\times\bar r''|}{|\bar r'|^3},$$

а скрут

$$æ=\frac{(\bar r'\bar r''\bar r''')}{(\bar r'\times\bar r'')^2}.$$

Задача 1. Знайти кривину і скрут кривої $\bar r=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$ в довільній точці.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$\bar r'=(e^t,-e^{-t},\sqrt{2})$, $\bar r''=(e^t,e^{-t},0)$, $\bar r'''=(e^t,-e^{-t},0)$.

Обчислимо

$|\bar r'|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}=e^t+e^{-t}$,

$\bar r'\times\bar r''=(-\sqrt{2}e^{-t},\sqrt{2}e^t,2)$,

$|\bar r'\times\bar r''|=\sqrt{2e^{-2t}+2e^{2t}+4}=\sqrt{2(e^t+e^{-t})^2}=\sqrt{2}(e^t+e^{-t})$,

$(\bar r'\times\bar r'')^2=|\bar r'\times\bar r''|^2=2(e^t+e^{-t})^2$,

$(\bar r'\bar r''\bar r''')=(\bar r'\times\bar r'')\cdot\bar r'''=-\sqrt{2}e^{-t}e^t-\sqrt{2}e^te^{-t}+2\cdot 0=-2\sqrt{2}$.

Таким чином, кривина кривої

$$k=\frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3}=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2},$$

а скрут

$$æ=k=\frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}.$$

Відповідь: $k=\frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3}=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$, $æ=\frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$.

Задача 2. Знайти кривину і скрут кривої $\bar r=(2t,\ln t,t^2)$, $t>0$ в точці $A(2,0,1)$.

Розв'язування.

Знайдемо t_0, що відповідає точці $A(2,0,1)$: $\begin{cases} 2=2t_0 \\ 0=\ln t_0 \\ 1=t_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0=1 \\ t_0=1 \\ t_0=\pm 1 \end{cases}$. Отже, $t_0=1$

Знайдемо

$\bar{r}'=(2,\frac{1}{t},2t)$, $\qquad \bar{r}_0'=(2,1,2)$,

$\bar{r}''=(0,-\frac{1}{t^2},2)$, $\qquad \bar{r}_0''=(0,-\frac{1}{t^2},2)$,

$\bar{r}'''=(0,-\frac{2}{t^3},0)$, $\qquad \bar{r}_0'''=(0,2,0)$.

$\left|\bar{r}_0'\right|=\sqrt{4+1+4}=3$,

$\bar{r}_0'\times\bar{r}_0''=(4,-4,-2)$,

$\left|\bar{r}_0'\times\bar{r}_0''\right|=\sqrt{16+16+4}=6$,

$(\bar{r}_0'\times\bar{r}'')\cdot\bar{r}_0'''=4\cdot 0-4\cdot 2-2\cdot 0=-8$,

$(\bar{r}_0'\times\bar{r}'')^2=\left|\bar{r}_0'\times\bar{r}_0''\right|^2=36$.

Отже, $k=\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9}$; $\text{æ}=\frac{-8}{36}=\frac{-2}{9}$.

Відповідь: $k=\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9}$; $\text{æ}=\frac{-8}{36}=\frac{-2}{9}$.

Задача 3. Знайти кривину і скрут кривої $\bar{r}=(a\,ch\,t, a\,sh\,t, at)$ в довільній точці.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$\bar{r}'=(a\,sh\,t,a\,ch\,t,a)$, $\bar{r}''=(a\,ch\,t,a\,sh\,t,0)$, $\bar{r}'''=(a\,sh\,t,a\,ch\,t,0)$.

Обчислимо

$\left|\bar{r}'\right|=\sqrt{a^2sh^2t+a^2ch^2t+a^2}=\sqrt{a^2(sh^2t+ch^2t+1)}=\sqrt{a^2(ch^2t+(1+sh^2t)}=a\sqrt{2ch^2t}=a\sqrt{2}\,ch\,t$.

$\bar{r}'\times\bar{r}''=(-a^2sh\,t,a^2ch\,t,a^2sh^2t-a^2ch^2t)=(-a^2sh\,t,a^2ch\,t,-a^2)$,

$\left|\bar{r}'\times\bar{r}''\right|=\sqrt{a^4sh^2t+a^4ch^2t+a^4}=a^2\sqrt{2}\,ch\,t$.

$(\bar{r}'\times\bar{r}'')\bar{r}'''=-a^3sh^2t+a^3ch^2t-a^2\cdot 0=a^3(ch^2t-sh^2t)=a^3$.

$(\bar{r}'\times\bar{r}'')^2=2a^4ch^2t$.

Тоді

$$k=\frac{a^2\sqrt{2}cht}{(a\sqrt{2}cht)^3}=\frac{1}{2ach^2t},\ æ=\frac{a^3}{2a^4ch^4t}=\frac{1}{2ach^2t}.$$

Отже, для даної кривої $æ=k=\frac{1}{2ach^2t}$.

Відповідь: $æ=k=\frac{1}{2ach^2t}$.

Задача 4. Довести, що крива $\begin{cases}x=t^2-1\\ y=t^2+2\\ z=t^3\end{cases}$ плоска.

Розв'язування.

Для того, щоб крива була плоскою, необхідно і досить, щоб її скрут у кожній точці дорівнював нулю. Тому

$\vec{r}'=(2t,2t,3t^2)$,

$\vec{r}''=(2,2,6t)$,

$\vec{r}'''=(0,0,6)$.

Таким чином

$$\vec{r}'\cdot\vec{r}''\cdot\vec{r}'''=\begin{vmatrix}2t & 2t & 3t^2\\ 2 & 2 & 6t\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}2t & 2t\\ 2 & 2\end{vmatrix}=6(4t-4t)=0$$

Отже, дана крива є плоска.

Відповідь: дана крива є плоска.

Задача 5. Обчислити кривину і скрут кривої $\begin{cases}x^2-y^2+z^2=1\\ y^2-2x+z=0\end{cases}$ в точці $A(1,1,1)$.

Розв'язування.

Нехай $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ і позначимо $\vec{r}'=(x',y',z')$, $\vec{r}_0'=(x_0',y_0',z_0')$.

Продиференціювавши по t дану систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases}xx'-yy'+zz'=0\\ 2yy'-2x'+z'=0\end{cases}\qquad(1)$$

У точці A матимемо

$$\begin{cases} x_0' - y_0' + z_0' = 0 \\ 2y_0' - 2x_0' + z_0' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = y_0' \in \mathbb{R} \\ z_0' = 0. \end{cases}$$

Отже, $\vec{r_0'} = (1,1,0)$.

Продиференціюємо по t систему (1)

$$\begin{cases} x'^2 + xx'' - y'^2 - yy'' + z'^2 + zz'' = 0 \\ 2y'^2 + 2yy'' - 2x'' + z'' = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 1 + x_0'' - 1 - y_0'' + z_0'' = 0 \\ 2 + 2y_0'' - 2x_0'' + z_0'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0'' - y_0'' + z_0'' = 0 \\ -2x_0'' + 2y_0'' + z_0'' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0'' = -\dfrac{2}{3} \\ x_0'' = y_0'' + \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{r''} = \left(1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

або $\vec{r''} = (3,1,-2)$.

Аналогічно знаходимо $\vec{r_0'''}$.

$$\begin{cases} 2x'x'' + x'x'' + xx''' - 2y'y'' - yy'' - yy''' + 2z'z'' + z'z'' + zz''' = 0 \\ 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' - 2x''' + z''' = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 + x_0''' - 3 - y_0''' + z_0''' = 0 \\ 6 + 2y_0''' - 2x''' + z_0''' = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_0''' - y_0''' + z_0''' = -6 \\ -2x_0''' - 2y_0''' + z_0''' = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0''' = -6 \\ y_0''' = x_0''' \end{cases}.$$

Отже, $\vec{r_0'''} = (1,1,-6)$.

Тоді

$$|\vec{r_0'}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

Знайдемо

$$(\vec{r_0'} \times \vec{r_0''}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -2).$$

Таким чином

$$|\vec{r_0'} \times \vec{r_0''}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}.$$

Обчислимо

$$(\vec{r_0'} \times \vec{r_0''}) \cdot \vec{r'''} = -2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) = 12.$$

Отже, $k = \dfrac{\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^3} = \dfrac{\sqrt{12}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $æ = \dfrac{\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^2} = 1$.

Відповідь: $k=\frac{\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^3}=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $æ=\frac{\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти кривину і скрут кривої $\bar{r}=(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ в точці $A(1,1,0)$.

(*Відповідь:* $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $æ=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.)

2. Знайти скрут кривої $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \\ z=\frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точці $A\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$.

(*Відповідь:* $æ=\frac{4}{9}$.)

3. В яких точках кривої $\bar{r}=(\cos t, \sin t, \frac{1}{2}\sin 2t)$ скрут є додатним?

(*Відповідь:* $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{4}$.)

4. Знайти кривину кривої $\bar{r}=\left(t-\sin t, 1-\cos t, 4\sin\frac{t}{2}\right)$ у довільній точці.

(*Відповідь.* $k=\frac{1}{4}\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}$)

5. При яких значеннях h гвинтова лінія $\bar{r}=(a\cos t, a\sin t, ht)$ має найбільший скрут?

(*Відповідь:* $h=a$.)

6. Довести, що крива $\begin{cases} x^2=2az \\ y^2=2bz \end{cases}$ є плоска.

7. Знайти кривину і скрут в довільній точці кривих:

а) $\bar{r}=\left(e^t\sin t, e^t\cos t, e^t\right)$; (*Відповідь:* $k=\frac{\sqrt{2}}{3e^t}$, $æ=-\frac{1}{3e^t}$.)

б) $\bar{r}=\left(3t-t^3, 3t^2, 3t+t^3\right)$; (*Відповідь:* $æ=k=\frac{1}{3(1+t^2)^2}$.)

в) $\bar{r} = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$. (*Відповідь:* $k = \dfrac{3}{25\sin t\cos t}$, $æ = \dfrac{4}{25\sin t\cos t}$.)

8. Знайти кривину і скрут кривої $\begin{cases} x + shx = \sin y + y \\ z + e^z = x + \ln(1+x) + 1 \end{cases}$ в точці $O(0,0,0)$.

(*Відповідь:* $k = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$, $æ = \dfrac{1}{2}$.)

Тема 4. Елементи супровідного тригранника кривої

Розглянемо задачі на знаходження рівнянь ребер і граней супровідного тригранника кривої.

Якщо крива задана рівнянням $\bar{r} = (x(t), y(t), z(t))$, то

$\bar{R} = \bar{r} + \bar{r}'\lambda$ – векторне рівняння дотичної до кривої;

$\bar{R} = \bar{r} + (\bar{r}' \times \bar{r}'')\lambda$ – векторне рівняння бінормалі до кривої;

$\bar{R} = \bar{r} + ((\bar{r}' \times \bar{r}'')\bar{r}'')\lambda$ – векторне рівняння головної нормалі до кривої,

де $\bar{\tau} = \dfrac{\bar{r}'}{|\bar{r}'|}$, $\bar{\beta} = \dfrac{\bar{r}' \times \bar{r}''}{|\bar{r}' \times \bar{r}''|}$, $\bar{\nu} = \dfrac{(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'}{|(\bar{r}' \times \bar{r}'') \times \bar{r}'|}$ – одиничні вектори дотичної, бінормалі і головної нормалі відповідно.

Рівняння дотичної, бінормалі і головної нормалі кривої (ребер тригранника) можна записати у вигляді

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3},$$

де $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$ – напрямний вектор для відповідної прямої (ребра тригранника).

Рівняння граней тригранника (нормальної, стичної та спрямної площин) у векторній формі мають відповідно вигляд

$$(\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{\tau} = 0, \quad (\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{\beta} = 0, \quad (\bar{R} - \bar{r}) \cdot \bar{\nu} = 0.$$

Задача 1. Знайти канонічний репер для кривої $\bar{r} = (t, t^2, t^3)$ в точці $t = 1$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$\bar{r}' = (1, 2t, 3t^2)$, $\qquad \bar{r}_0' = \bar{r}'(1) = (1, 2, 3)$,

$\bar{r}'' = (0, 2, 6t)$, $\qquad \bar{r}_0'' = \bar{r}''(1) = (0, 2, 6)$,

Тоді

$$\bar{r}_0' \times \bar{r}_0'' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6, -6, 2), \quad (\bar{r}_0' \times \bar{r}_0'') \times \bar{r}_0' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-22, -16, 18).$$

Обчислимо

$|\vec{r}_0'| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $|\vec{r}_0' \times \vec{r}_0''| = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$,

$|(\vec{r}_0' \times \vec{r}_0'') \times \vec{r}_0'| = \sqrt{22^2+16^2+18^2} = 2\sqrt{266}$.

Тоді

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3), \bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3,-3,1), \bar{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{266}}(-11,-8,9).$$

Відповідь: $\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3), \bar{\beta} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3,-3,1), \bar{\nu} = \frac{1}{\sqrt{266}}(-11,-8,9)$.

Задача 2. Знайти рівняння ребер і граней супровідного тригранника для кривої $\bar{r} = (\sin t, \cos t, tg t)$ в точці $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$$\bar{r}' = \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{\cos^2 t}\right), \qquad \bar{r}_0' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right),$$

$$\bar{r}'' = \left(-\sin t, -\cos t, \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right), \qquad \bar{r}_0'' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right).$$

Тоді

$$\bar{r}_0' \times \bar{r}_0'' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 4 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{6}{\sqrt{2}}, -1\right), \ (\bar{r}_0' \times \bar{r}_0'') \times \bar{r}_0' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{13}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, 4\right).$$

$$\begin{cases} x_0 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ z_0 = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

Запишемо рівняння ребер

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z-1}{2} \text{ або } \frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{z-1}{2\sqrt{2}}$$ – рівняння дотичної;

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{2}{\sqrt{2}}}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{6}{\sqrt{2}}}=\frac{z-1}{-1} \text{ або } \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}}=\frac{z-1}{1}$$ – рівняння бінормалі;

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{13}{\sqrt{2}}}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{z-1}{4} \text{ або } \frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-13}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{3}=\frac{z-1}{4\sqrt{2}}$$ – рівняння головної нормалі.

Запишемо рівняння граней

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 1+\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(-1)+(z-1)\cdot 2\sqrt{2}=0,$$

$x-y+2\sqrt{2}z-2\sqrt{2}=0$ – рівняння нормальної площини;

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+3\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1\cdot(z-1)=0,$$

$\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y+z-5=0$ – рівняння стичної площини;

$$-\frac{13}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+4(z-1)=0,$$

$13x-3y-4\sqrt{2}z-\sqrt{2}=0$ – рівняння спрямної площини.

Задача 3. Знайти рівняння головної нормалі та спрямної площини для кривої $\bar{r}=(t,t^2,e^t)$ в точці $M(0;0;1)$.

Розв'язування.

$\bar{r}'=(1,2t,e^t)$, $\bar{r}''=(0,2,e^t)$.

Знайдемо t_0, що відповідає точці $M(0;0;1)$

$$\begin{cases} x_0=t_0 \\ y_0=t_0^2 \\ z=e^{t_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=t_0 \\ 0=t_0^2 \\ 1=e^{t_0} \end{cases} \Rightarrow t_0=0.$$

Тоді

$\bar{r}_0'=(1,0,1)$, $\qquad \bar{r}_0''=(0,2,1)$,

$\bar{r}_0'\times\bar{r}_0''=(-2,-1,2)$, $\qquad (\bar{r}_0'\times\bar{r}_0'')\times\bar{r}_0'=(-1,4,1)$.

Отже, матимемо

$\frac{x}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{1}$ – рівняння головної нормалі,

$-1\cdot(x)+4y+1\cdot(z-1)=0$,

$x-4y-z+1=0$ – рівняння спрямної площини.

Відповідь: $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{1}$, $x-4y-z+1=0$.

Задача 4. Знайти рівняння головної нормалі та бінормалі для кривої $\begin{cases} x=y^2 \\ z=x^2 \end{cases}$ у точці $A(1;1;1)$.

Розв'язування.

Запишемо рівняння кривої в параметричній формі

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t \\ z=t^4 \end{cases}$$

тоді $$\begin{cases} x_0=t_0^2 \\ y_0=t_0 \\ z_0=t_0^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=t_0^2 \\ 1=t_0 \\ 1=t_0^4 \end{cases} \Rightarrow t_0=1.$$

Таким чином

$\vec{r}'=(2t,1,4t^3)$, $\quad \vec{r}_0'=(2,1,4)$

$\vec{r}''=(2,0,12t^2)$, $\quad \vec{r}_0''=(2,0,12)$,

$\vec{r}_0'\times\vec{r}_0''=(12,-16,-2)$, $\quad \vec{r}_0'\times\vec{r}_0''=(-6,8,1)$,

$(\vec{r}_0'\times\vec{r}_0'')\times\vec{r}_0'=(-62,-52,44)$, $\quad (\vec{r}_0'\times\vec{r}_0'')\times\vec{r}_0'=(31,26,-22)$.

Отримаємо

$\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-1}{1}$ – рівняння бінормалі,

$\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}$ – рівняння головної нормалі.

Відповідь: $\dfrac{x-1}{31}=\dfrac{y-1}{26}=\dfrac{z-1}{-22}$, $\dfrac{x-1}{-6}=\dfrac{y-1}{8}=\dfrac{z-1}{1}$.

Задача 5. Написати рівняння бінормалі і стичної площини кривої $\begin{cases} x^2+z^2=a^2 \\ y^2+z^2=b^2 \end{cases}$ в точці $A(a,b,0)$.

Розв'язування.

Нехай $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Знайдемо $\vec{r_0'}$, $\vec{r_0''}$. Продиференціюємо рівняння даної кривої по t

$$\begin{cases} 2xx_t' + 2zz_t' = 0 \\ 2yy_t' + 2zz_t' = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

У точці A матимемо

$$\begin{cases} a\cdot x_{t_0}' + 0\cdot z_{t_0}' = 0 \\ b\cdot y_{t_0}' + 0\cdot z_{t_0}' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot x_{t_0}' = 0 \\ b\cdot y_{t_0}' = 0 \\ z_{t_0}' \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{t_0}' = 0 \\ y_{t_0}' = 0 \\ z_{t_0}' = 1 \end{cases}.$$

Продиференціювавши по t систему (1) матимемо

$$\begin{cases} x_t'^2 + xx_t'' + z_t'^2 + zz_t'' = 0 \\ y_t'^2 + yy_t'' + z_t'^2 + zz_t'' = 0 \end{cases}.$$

Тоді у точці A

$$\begin{cases} 0 + a\cdot x_{t_0}'' + 1 + 0\cdot z_{t_0}'' = 0 \\ 0 + b\cdot y_{t_0}'' + 1 + 0\cdot z_{t_0}'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot x_{t_0}'' + 1 = 0 \\ b\cdot y_{t_0}'' + 1 = 0 \\ z_{t_0}'' \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{t_0}'' = -\frac{1}{a} \\ y_{t_0}'' = -\frac{1}{b} \\ z_{t_0}'' = 1 \end{cases}.$$

Отже, $\vec{r_0''} = \left(-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, 1\right)$.

Знайдемо

$$\vec{r_0'} \times \vec{r_0''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}, 1\right).$$

Тоді

$\dfrac{x-a}{\frac{1}{b}} = \dfrac{y-b}{-\frac{1}{a}} = \dfrac{z}{0}$ – рівняння бінормалі,

$\frac{1}{b}(x-a) - \frac{1}{a}(y-b) + 0\cdot z = 0$,

$ax - by - a^2 - b^2 = 0$ – рівняння стичної площини.

Відповідь: $\frac{x-a}{\frac{1}{b}}=\frac{y-b}{-\frac{1}{a}}=\frac{z}{0}$, $ax-by-a^2-b^2=0$.

Задача 6. Знайти рівняння нормальних площин кривої $\bar{r}=(t,t^2,t^3)$, що проходять через точку $A(0;3;0)$.

Розв'язування.

Знайдемо похідну $\bar{r}'=(1,2t,3t^2)$.

Рівняння нормальної площини даної кривої у довільній точці матиме вигляд

$$(x-t)+2t(y-t^2)+3t^2(z-t^3)=0.$$

Оскільки ця площина проходить через точку $A(0;3;0)$, то

$$(0-t)+2t(3-t^2)+3t^2(0-t^3)=0 \text{ або } 3t^5+2t^3-5t=0.$$

Це рівняння має корені $t_1=0$, $t_2=-1$, $t_3=1$. Значенням t відповідають площини

$$x=0, \qquad x-2y+3z+6=0, \qquad x+2y+3z-6=0.$$

Відповідь: $x=0, x-2y+3z+6=0, x+2y+3z-6=0$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти канонічний репер кривої:

а) $\bar{r}=(t,t^2,t^3)$ в довільній точці;

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=(1,0,0)$, $\bar{\nu}=(0,1,0)$, $\bar{\beta}=(0,0,1)$.)

б) $\bar{r}=\left(a(t-\sin t),a(1-\cos t),4a\cos\frac{t}{2}\right)$ в довільній точці;

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{\nu}=\left(\cos\frac{t}{2},-\sin\frac{t}{2},0\right)$,

$\bar{\beta}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.)

в) $\bar{r}=(t\sin t,t\cos t,te^t)$ в початку координат;

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\bar{\nu}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\bar{k}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.)

г) $\bar{r}=(t,t^3,t^2+4)$ в точці $t=1$;

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=\frac{1}{\sqrt{14}}(\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}),\ \bar{\nu}=\frac{1}{\sqrt{266}}(-11\bar{i}+9\bar{j}-8\bar{k}),\ \bar{\beta}=\frac{1}{\sqrt{19}}(-3\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k})$.)

д) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ в точці $A(1;1;1)$;

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \bar{\nu}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \bar{\beta}=(0,0,1)$.)

е) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ в точці $A(1,2;2)$.

(*Відповідь:* $\bar{\tau}=\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right),\ \bar{\nu}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},0\right),\ \bar{\beta}=(0,0,-1)$.)

2. Знайти рівняння головної нормалі кривої $\bar{r}=(t,t^2,e^t)$ в точці $t=0$.

(*Відповідь:* $x=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{-1}$.)

3.Знайти рівняння стичної площини кривої $\bar{r}=(a\cos t,b\sin t,e^t)$ в точці $A(a;0;1)$.

(*Відповідь:* $bx-ay+abz+2ab=0$.)

4. Знайти рівняння бінормалі і стичної площини кривої $\begin{cases} y=\frac{x^3}{3} \\ z=\frac{1}{2x} \end{cases}$ в точці $A\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

(*Відповідь:* $\frac{x-1}{2}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{2}$.)

5. Знайти рівняння бінормалі кривої $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2} \\ z=\frac{x^3}{6} \end{cases}$ в точці $A\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)$.

(*Відповідь:* $\frac{x-1}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-2}=\frac{z-\frac{1}{6}}{2}$.)

6. Знайти рівняння нормальної площини кривої $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = x \end{cases}$ в точці $A(3,3,18)$.

($Відповідь:$ $x + y + 12z - 222 = 0$.)

7. Довести, що нормальні площини кривої $\bar{r} = (a\sin t, a\sin t\cos t, a\cos t)$, $0 \le t < 2\pi$ проходять через початок координат.

8. Знайти рівняння граней супровідного тригранника кривої $\bar{r} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(t^2 + \frac{1}{2}t^4\right), \frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{2}}{4}\left(t^2 - \frac{1}{2}t^4\right)\right)$ в точці $M(t_0 = 1)$.

($Відповідь$ $12\sqrt{2}x - 24y - 1 = 0$, $12\sqrt{2}x + 12y - 13 = 0$, $8z - \sqrt{2} = 0$.)

9. Довести, що головні нормалі кривої $\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \\ z = -\cos t \end{cases}$ у всіх її точках паралельні до площини YOZ.

10. Знайти рівняння бінормалі і стичної площини кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ у точці $A(1,2,2)$.

($Відповідь:$ $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{81} = \frac{z-4}{128}$, $5x - 81y - 128z + 750 = 0$.)

11. Знайти рівняння стичної площини кривої $\bar{r} = \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right)$, що проходить через точку $A(0,0,9)$.

($Відповідь:$ $9x - 6y + z - 9 = 0$.)

12. Знайти рівняння головної нормалі і спрямної площини кривої $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ xy = z^2 \end{cases}$ в точці $A(1,1,1)$.

($Відповідь:$ $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$, $3x + 3y + 4z - 10 = 0$.)

Тема 5. Кривина плоскої кривої.

Натуральні рівняння кривих

Кривина плоскої кривої відповідно до заданого рівняння обчислюється за формулами:

1) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{3/2}} \qquad (1)$$

2) $y = f(x)$, $$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

3) $F(x,y) = 0$, $$k = \frac{\begin{Vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{Vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}} \qquad (3)$$

4) $\rho = \rho(\varphi)$. $$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}} \qquad (4)$$

Рівняння $\begin{cases} k = k(s) \\ \kappa = \kappa(s) \end{cases}$ (5), які однозначно з точністю до руху визначають криву в просторі, називаються її натуральними рівняннями.

Натуральне рівняння плоскої кривої має вигляд

$$k = k(s),\ æ=0 \qquad (6)$$

Задача 1. Скласти натуральне рівняння лінії $y = \sqrt{x^3}$.

Розв'язування.

Знайдемо довжину дуги кривої:

$$S = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx = \int_0^x \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^x \sqrt{9x+4}\,dx = \frac{1}{27}(9x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x = \frac{1}{27}((9x+4)^{3/2} - 8)$$

Отже, $S = \frac{1}{27}((9x+4)^{3/2} - 8)$.

Визначимо x через S

$(9x+4)^{3/2} = 27S + 8$, $9x + 4 = (27S+8)^{2/3}$

$$x=\frac{(27S+8)^{2/3}-4}{9}.$$

Знаходимо кривину даної лінії за формулою (2).

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ y''=\frac{3}{4\sqrt{x}},\ k=\frac{\frac{3}{4\sqrt{x}}}{\frac{(4+9x)^{3/2}}{8}}=\frac{6}{\sqrt{x}(9x+4)^{3/2}}.$$

Оскільки $(9x+4)^{3/2}=27S+8$, то

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{(27S+8)^{2/3}-4}}{3}.$$

Отримуємо таке натуральне рівняння кривої

$$k=\frac{6}{18(27S+8)\sqrt{(27S+8)^{2/3}-4}}.$$

Відповідь: $k=\dfrac{6}{18(27S+8)\sqrt{(27S+8)^{2/3}-4}}$.

Задача 2. Знайти натуральне рівняння астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3\dfrac{t}{4} \\ y=a\sin^3\dfrac{t}{4} \end{cases}$.

Розв'язування.

Знаходимо довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{3}{4}a\cos^2\dfrac{t}{4}\cdot\sin\dfrac{t}{4} \\ y'=\dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{t}{4}\cdot\cos\dfrac{t}{4} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x''=-\dfrac{3a}{16}\left(-2\cos\dfrac{t}{4}\sin^2\dfrac{t}{4}+\cos^3\dfrac{t}{4}\right) \\ y''=\dfrac{3a}{16}\left(2\sin\dfrac{t}{4}\cos^2\dfrac{t}{4}+\cos^3\dfrac{t}{4}\right) \end{cases}.$$

$$x'^2+y'^2=\frac{9}{16}a^2\cos^4\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4}+\frac{9}{16}a^2\sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}=\frac{9}{16}a^2\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}\left(\cos^2\frac{t}{4}+\sin^2\frac{t}{4}\right)=$$

$$=\frac{9}{16}a^2\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}.$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\frac{3}{4}a\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}=\frac{3}{8}a\sin\frac{t}{2}.$$

$$S=\frac{3}{8}a\int_{\pi}^{t}\sin\frac{t}{2}dt=-\frac{3}{4}a\cos\frac{t}{2}\Big|_{\pi}^{t}=-\frac{3}{4}a\cos\frac{t}{2}.$$

Обчислимо кривину кривої за формулою (1)

$$\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}=\left(\frac{3}{8}\right)^3a^3\sin^3\frac{t}{2}.$$

$$|x'y''-x''y'|=\left(\frac{3}{16}a\right)^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$k=\frac{\left(\frac{3}{16}\right)^2a^2\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{3}{8}a^3\sin^3\frac{t}{2}}=\frac{2}{3a\sin\frac{t}{2}}.$$

Визначимо t як функцію від S

$$\left|\cos\frac{t}{2}\right|=\frac{4}{3a}S.$$

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|=\frac{2}{3ak}.$$

$$\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}=\left(\frac{4}{3a}S\right)^2+\left(\frac{2}{3ak}\right)^2,$$

$$1=\left(\frac{4}{3a}S\right)^2+\left(\frac{2}{3ak}\right)^2,$$

$4S^2+\frac{1}{k^2}=\left(\frac{3a}{2}\right)^2$ – натуральне рівняння астроїди.

Відповідь: $4S^2+\frac{1}{k^2}=\left(\frac{3a}{2}\right)^2$.

Задача 3. В якій точці параболи $y^2=8x$ радіус кривини дорівнює $\frac{125}{16}$?

Розв'язування.

Радіус кривини $R=\frac{1}{k}=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$.

Знайдемо y'_x, y''_x.

$y^2 = 8x$, $2yy' = 8$, $y' = \frac{4}{y}$, $y'' = -\frac{4}{y^2}\cdot y' = \frac{16}{y^3}$.

Таким чином

$$R = \frac{\left(1+\frac{16}{y^2}\right)^{3/2}}{\frac{16}{y^3}} = \frac{\sqrt{(16+y^2)^3}}{16},$$

тоді $\sqrt{(16+y^2)^3} = 125$, $(16+y^2)^3 = 125^2$, $16+y^2 = 25$, $y = \pm 3$, $x = \frac{9}{8}$.

Отже, існує дві точки $A\left(\frac{9}{8},3\right)$ і $B\left(\frac{9}{8},-3\right)$, що задовольняють умову задачі.

Відповідь: $A\left(\frac{9}{8},3\right)$, $B\left(\frac{9}{8},-3\right)$.

Задача 4. Знайти кривину кривої $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ в точці $A\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Розв'язування.

Оскільки крива задана рівнянням $F(x,y) = 0$, то кривину можна шукати, користуючись формулами (3) або (2). Розглянемо ці два випадки.

Перший спосіб. Обчислимо похідні

$F_x^0 = 3x_0^2 - 3y_0^2 = \frac{9}{4}$, $F_y^0 = 3y_0^2 - 3x_0 = \frac{9}{4}$, $F_{xx}^0 = 6x_0 = 9$; $F_{yy}^0 = 6y_0 = 9$; $F_{xy}^0 = -3$,

тоді за формулою (3) обчислимо кривину

$$k = \frac{\begin{Vmatrix} 9 & -3 & \frac{9}{4} \\ -3 & 9 & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4} & 0 \end{Vmatrix}}{\left[\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Другий спосіб. Скористаємося для обчислення кривини формулою (1). Обчислимо похідні y'_x, y''_x за правилом диференціювання неявної функції

$y'_x = -\frac{F_x^0}{F_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$; $y'_0 = -1$,

$$y''_x = \frac{x^2 - 2xy^2 + y + y'(2x^2y - y^2x)}{(x-y^2)^2},$$

$$y''_x = \frac{x^2 - 2xy^2 + y + y'(2x^2y - y^2x)}{(x-y^2)^2}.$$

$$y''_0 = \frac{x_0^2 - 2x_0y_0^2 + y + y'_0(2x_0^2y_0 - y_0^2x_0)}{(x_0 - y_0^2)^2} = -\frac{32}{3}.$$

Толі

$$k = \frac{|y''_0|}{\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{32}{3}}{\left(1+(-1)^2\right)^{3/2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь: $k = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Задача 5. Знайти натуральне рівняння гіперболічної гвинтової лінії $\bar{r} = (acht, asht, at)$.

Розв'язування

Для цієї кривої довжину дуги, кривину і скрут ми знаходили в попередніх темах. Скористаємося цими результатами:

$$S = a\sqrt{2}sht,\ æ = k = \frac{1}{2ach^2t} \qquad (*).$$

Виразимо t через S

$$sht = \frac{S}{a\sqrt{2}}.$$

Тоді

$$ch^2t = 1 + sh^2t = 1 + \frac{S^2}{2a^2} = \frac{2a^2 + S^2}{2a^2}.$$

Підставивши це значення ch^2t у формулу (*), одержимо

$$æ = k = \frac{1}{2a\cdot\frac{(2a^2+S^2)}{2a^2}} = \frac{a}{2a^2 + S^2}$$

Натуральні рівняння даної кривої мають вигляд

$$k = \frac{a}{2a^2+S^2},\quad æ = \frac{a}{2a^2+S^2}.$$

Відповідь: $k = \frac{a}{2a^2+S^2}$, $æ = \frac{a}{2a^2+S^2}$.

Розглянемо задачу на знаходження параметричного рівняння плоскої кривої, знаючи її натуральне рівняння. Натуральне рівняння плоскої кривої $k = k(s)$, $æ = 0$. А параметричні рівняння кривої такі

$$x = \int_{s_0}^{s} \cos\alpha ds + x_0,$$

$$y = \int_{s_0}^{s} \sin\alpha ds + y_0,$$

де $\alpha = \int_{s_1}^{s} k(s)ds + \alpha_0$, α_0 – кут, який утворює дотична в даній точці до кривої з віссю OX.

Задача 6. Знайти параметричне рівняння лінії, знаючи її натуральне рівняння $\frac{1}{k^2} = 16a^2 - S^2$.

Розв'язування.

Знайдемо кривину k як функцію від S

$$k = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - S^2}}.$$

Визначимо кут α дотичної до кривої з віссю OX

$$\alpha = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{16a^2 - S^2}} ds = \arcsin\frac{S}{4a}.$$

Таким чином,

$$\alpha = \arcsin\frac{S}{4a} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{S}{4a} \Rightarrow S = 4a\sin\alpha \Rightarrow ds = 4a\cos\alpha d\alpha.$$

Тоді

$$x = \int_0^s \cos\alpha ds = 4a\int_0^t \cos^2\alpha d\alpha = 2a\int_0^t (1 + \cos 2\alpha)d\alpha = 2a\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\Big|_0^t = a(2t + \sin 2t),$$

$$y = 4a\int_0^s \sin\alpha\cos\alpha d\alpha = 2a\int_0^t \sin 2\alpha d\alpha = a(-\cos 2\alpha)\Big|_0^t = a(-\cos 2t + 1) = a(1 - \cos 2t).$$

Звідси

$$\begin{cases} x = a(2t + \sin 2t) \\ y = a(1 - \cos 2t) \end{cases}$$ – параметричні рівняння даної кривої.

Відповідь: $\begin{cases} x = a(2t + \sin 2t) \\ y = a(1 - \cos 2t) \end{cases}$

Задача 7. Знайти кривину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язування.

Обчислимо похідні $\rho' = -a\sin\varphi$, $\rho'' = -a\cos\varphi$ і підставимо у формулу (4)

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2(1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi),$$

$$\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho'' = a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2(\cos\varphi + \cos^2\varphi) = a^2(1+\cos^2\varphi + 2\cos\varphi + 2\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi) = 3a^2(1+\cos\varphi).$$

Таким чином

$$k = \frac{3a^2(1+\cos\varphi)}{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2a(1+\cos\varphi)}} = \frac{3}{2\sqrt{2a}\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{3}{4a\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Відповідь: $k = \dfrac{3}{4a\cos\frac{\varphi}{2}}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти кривину кривої $y = \sin x$ в точці $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

(*Відповідь:* $k = 1$.)

2. Знайти кривину лінії $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ в точці $t = \dfrac{\pi}{2}$.

(*Відповідь:* $k = \dfrac{\pi}{2}$.)

3. Знайти кривину кривої $x^2y^2 = (a^2 - y^2)(b + y^2)$.

(*Відповідь:* $k = \dfrac{y^3(2a^2b - y^4 - 3by^2)}{a(y^4 - 2by^3 + a^2b^2)^{3/2}}$.)

4. Знайти кривину кривої $\rho = a\varphi$.

(*Відповідь:* $k = \dfrac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{3/2}}$.)

5. Знайти кривину кривої $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ в точці $t = 1$.

(*Відповідь:* $k=\frac{1}{6}$.)

6. Знайти натуральне рівняння лінії $\begin{cases} x=\frac{a}{3}(2\cos t+\cos 2t) \\ y=\frac{a}{3}(2\sin t+\sin 2t) \end{cases}$.

(*Відповідь:* $S^2+\frac{9}{k^2}=\frac{64}{9}a^2$.)

7. Знайти натуральні рівняння лінії $\bar{r}=(a\cos t, a\sin t, ht)$.

(*Відповідь:* $k=\frac{a}{a^2+h^2}$, $æ=\frac{h}{a^2+h^2}$.)

8. Знайти натуральні рівняння лінії $\bar{r}=(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

(*Відповідь:* $k=\frac{\sqrt{2}}{4+S^2}$, $æ=-\frac{\sqrt{2}}{4+S^2}$.)

9. Знайти натуральні рівняння лінії $\bar{r}=\left(at, a\sqrt{2}\ln t, \frac{a}{t}\right)$.

(*Відповідь:* $æ=k=\frac{a\sqrt{2}}{S^2+4x^2}$.)

10.Знайти натуральні рівняння лінії $\bar{r}=(a\cos te^t, a\sin te^t, be^t)$.

(*Відповідь* $k=\frac{a\sqrt{2}}{S\sqrt{2a^2+b^2}}$, $æ=-\frac{b}{S\sqrt{2a^2+b^2}}$.)

11.Знайти криву, натуральне рівняння якої $k=\frac{1}{\sqrt{S}}$.

(*Відповідь:* $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(t\sin t+\cos t) \\ y=-\frac{1}{2}(t\cos t-\sin t) \end{cases}$.)

12.Знайти параметричне рівняння лінії, натуральне рівняння якої $\frac{1}{k^2}=2as$.

(*Відповідь:* $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$.)

13.Знайти криву, натуральне рівняння якої $S^2 + \frac{1}{k^2} = 4$.

$$\left(\textit{Відповідь: } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(t + \sin t) \\ y = -\frac{1}{2}\cos t \end{cases}.\right)$$

14.Знайти натуральне рівняння кривої $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$.

$$\left(\textit{Відповідь: } S^2 + \frac{9}{k} = 64a^2.\right)$$

Тема 6. Особливі точки плоских кривих.

Дотик кривих. Дискримінантна крива.

Стичне коло

1. Особливі точки плоских кривих

При розв'язуванні прикладів на знаходження і дослідження особливих точок досить обмежитися кривими, заданими рівняннями в симетричній формі $F(x,y)=0$. Для цього випадку координати особливих точок повинні задовольняти співвідношення

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F_x=0 \\ F_y=0 \end{cases}.$$

Якщо $\delta = F^0_{xx}\cdot F^0_{yy}-\left(F^0_{xy}\right)^2$ – дискримінант кривої, обчислений в особливій точці M_0, то при:

1) $\delta_0<0$ – особлива точка – вузол (або точка самоперетину),

2) $\delta_0>0$ – ізольована особлива точка,

3) $\delta_0=0$ – точка з подвійною дотичною, точка звороту.

Задача 1. Знайти особливі точки та визначити їх характер для кривої $x^3+y^3-x^2-y^2=0$.

Розв'язування.

Знайдемо $F_x=3x^2-2x$, $F_y=3y^2-2y$.

Система $\begin{cases} x^3+y^3-x^2-y^2=0 \\ x(3x-2)=0 \\ y(3y-2)=0 \end{cases}$ має розв'язок (0,0).

Отже, точка $O(0,0)$ – особлива точка.

Визначимо характер цієї особливої точки

$$F_{xx}=6x-2,\quad F^0_{xx}=-2,\quad F_{yy}=6y-2,\quad F^0_{yy}=-2,\quad F_{xy}=0,\quad F^0_{xy}=0.$$

Дискримінант в цій точці буде рівний

$$\delta_0 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0.$$

Тому початок координат є ізольованою точкою кривої.

Задача 2. Знайти особливі точки та визначити їх характер для кривої $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Розв'язування.

Знайдемо $F_x = 3x^2 - 3ay$, $F_y = 3y^2 - 3ax$.

Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 - 3axy = 0 \\ x^2 - ay = 0 \\ y^2 - ax = 0 \end{cases}$ є точка $O(0,0)$ – особлива точка.

Визначимо характер цієї особливої точки:

$F_{xx}^0 = 6x_0 = 0$, $F_{yy}^0 = 6y_0 = 0$, $F_{xy}^0 = -3a$.

Тоді $\delta_0 = -9a^2 < 0$.

Отже, початок координат є вузлом з дотичними, що збігаються з осями координат.

2. Дотик кривих

Нехай дано дві криві $\gamma_1 \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, $\gamma_2 : F(x,y) = 0$ і $M_0(t_0)$ – спільна точка цих кривих. Позначимо через $\sigma(t) = F\big(x(t), y(t)\big) = 0$.

Якщо $\sigma(t_0) = \sigma'(t_0) = \ldots = \sigma^{n}(t_0) = 0$, а $\sigma^{n+1}(t_0) \neq 0$, то криві мають в точці M_0 дотик n-го порядку.

Якщо ж $\gamma_1 : y = f(x)$, $\gamma_2 : y = g(x)$, то $\sigma(x) = g(x) - f(x)$.

Задача 3. Знайти порядок дотику кривих $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ і $x^2 = 4y - 2y^2$ в точці $O(0,0)$.

Розв'язування.

Складемо функцію $\sigma(t) = t^2 - 4t^2 + 2t^4 = 2t^4 - 3t^2$.

Знайдемо t_0, що відповідає точці $O(0,0)$.

$$\begin{cases} 0 = t_0 \\ 0 = t_0^2 \end{cases} \Rightarrow t_0 = 0.$$

Тоді матимемо

$$\sigma(0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0,$$

$$\sigma'(0) = 8t_0^3 - 6t_0 = 0,$$

$$\sigma''(0) = 24t_0^2 - 6 = -6 \neq 0.$$

Отже, в точці $O(0,0)$ криві мають дотик першого порядку.

Задача 4. Знайти порядок дотику кривих $y = \cos x - 1$ і $y = x^2$ в точці $O(0,0)$.

Розв'язування.

Складемо функцію

$\sigma(x) = x^2 - \cos x + 1,$

$\sigma(0) = 0 - \cos 0 + 1 = 0,$

$\sigma'(0) = 2x_0 + \sin x_0 = 0,$

$\sigma''(0) = 2 + \cos x_0 = 2 + 1 = 3 \neq 0.$

Отже, криві в точці $O(0.0)$ мають дотик першого порядку.

Задача 5. Довести, що криві $y = \sin x$ і $y = ax^4 - \dfrac{x^3}{6} + x$ мають в початку координат дотик третього порядку.

Розв'язування.

Складемо функцію

$\sigma(x) = \sin x - ax^4 + \dfrac{x^3}{6} - x, \ x_0 = 0,$

$\sigma(0) = 0,$

$\sigma'(0) = \cos x_0 - 4ax_0^3 + \dfrac{x_0^2}{2} - 1 = 0,$

$\sigma''(0) = -\sin x_0 - 12ax_0^2 + x_0 = 0,$

$\sigma'''(0) = -\cos x_0 - 24ax_0 + 1 = 0,$

$\sigma^{IV}(0) = \sin x_0 - 24a = -24a \neq 0.$

Отже, в початку координат криві мають дотик третього порядку.

3. Дискримінантна крива

Нехай $F(x,y,c)=0$ – рівняння сім'ї кривих. Рівняння дискримінантної кривої для цієї сім'ї

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ F_c(x,y,c)=0 \end{cases}.$$

Задача 6. Знайти дискримінантну криву сім'ї парабол $F(x,y,c)=(x+c)^2-\left(y+\frac{c^2}{2}\right)=0$.

Розв'язування.

Знайдемо $F_c=2(x+c)-c$.

Тоді визначимо c із рівнянь системи

$$\begin{cases} (x+c)^2-\left(y+\frac{c^2}{2}\right)=0 \\ 2(x+c)-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c^2}{4}=y+\frac{c^2}{2} \\ x+c=\frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{c^2}{4} \\ x=-\frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2=-y$$ – дискримінантна крива.

Оскільки кожна з парабол даної сім'ї не має особливих точок, то дискримінантна крива $x^2=-y$ є обгорткою даної сім'ї кривих.

Задача 7. Знайти дискримінантну криву сім'ї напівкубічних парабол $F(x,y,c)=(x+c)^2-y^3=0$.

Розв'язування.

Знайдемо $F_c=2(x+c)$.

Рівняння дискримінантної кривої

$$\begin{cases} (x+c)^2-y^3=0 \\ 2(x+c)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3=0 \\ x+c=0 \end{cases} \Rightarrow y=0.$$

Дана дискримінантна крива $y=0$ є множиною особливих точок. Обгортки немає.

4. Стичне коло

Якщо крива задана рівнянням $y=f(x)$, то координати центра і радіус стичного кола знаходимо за формулами

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - y_0' \dfrac{1+y_0'^2}{y_0''} \\ \beta = y_0 + \dfrac{1+y_0'^2}{y_0''} \end{cases}, R = \frac{\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}}{|y_0''|}.$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - y_0' \dfrac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - y_0' x''} \\ \beta = y_0 + x_0 \dfrac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0' y_0'' - y_0' x_0''} \end{cases}; \ R = \frac{\left(x_0'^2 + y_0'^2\right)^{3/2}}{x_0' y_0'' - y_0' x''}.$$

Якщо крива задана рівнянням в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi)$, то переходячи до параметричного рівняння в прямокутній системі координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ можна знайти координати центра і радіус стичного кола

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Задача 8. Знайти координати центра і радіус стичного кола еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язування.

Обчислимо похідні

$x' = -a\sin t$, $\quad x'' = -a\cos t$,

$y' = b\cos t$, $\quad y'' = -b\sin t$.

Тоді

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t,$$

$$R = \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}{ab}.$$

Відповідь: $\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $\beta = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$, $R = \dfrac{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}{ab}$.

Задача 9. Знайти радіус стичного кола для астроїди $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Розв'язування.

Радіус стичного кола обчислюємо за формулою $R=\dfrac{\left(1+y_0'^2\right)^{3/2}}{|y_0''|}$.

Знайдемо y' і y'' для функції $y=\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}$:

$$y'=\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)=-x^{-\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$y''=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{-y^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot x-y\right)}{3x^{\frac{4}{3}}}=\frac{y^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}}=\frac{y^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)}{3x^{\frac{4}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Таким чином,

$$R=\frac{\left(1+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}=\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}a^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x}=3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}=3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

Відповідь: $R=3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти особливі точки і визначити їх характер для кривих:

а) $x^3+y^3=xy$; (*Відповідь: O(0,0) – точка самоперетину.*)

б) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; (*Відповідь A(0,a); B(0,-a); C(a,0); D(-a,0) - точки з подвійними дотичними*)

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$. (*Відповідь: O(0,0) – точка самоперетину*)

2. Знайти порядок дотику кривих в точці *O(0,0)*:

а) $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t^2\end{cases}$ і $x^2=2y+y^2$; (*Відповідь: n=1.*)

б) $y=x^2+4x^3$ і $y=3x^2-2x^4$; (*Відповідь:* $n=1$.)

в) $y=\sin x$ і $y=x+2x^3$; (*Відповідь:* $n=2$.)

г) $y=x^3+2x^5$ і $y=2x^3-x^4$. (*Відповідь:* $n=2$.)

3. Знайти рівняння дискримінантної кривої для сім'ї кривих:

а) $F(x,y,c)=(x+c)^2-(y+c)^3$; (*Відповідь:* $y-x=0$, $x-y+\frac{4}{27}=0$.)

б) $F(x,y,c)=(x-c)^3-(y+c^2)^2$; (*Відповідь:* $x=c+\frac{16c^2}{9}$, $y=-c^2-\frac{4c}{3}$, $x=c$, $y=-c$ – *множина особливих точок.*)

в) $F(x,y,c)=(x+c^2)^3-(y-c)^2$; (*Відповідь:* $x=-c^2+\frac{1}{9c^2}$, $y=c-\frac{1}{3c}$, $x=-c^2$, $y=c$ – *множина особливих точок.*)

г) $F(x,y,c)=(x+c^2)^3-(y-c)^2$. (*Відповідь:* $x=c^2\pm\frac{1}{\sqrt{6c}}$, $y=c\pm\frac{1}{\sqrt{(6c)^3}}$.)

4. Знайти радіус стичного кола для кривих:

а) $x^2=2py$; (*Відповідь:* $R=\frac{(x^2+p^2)^{3/2}}{2p}$.)

б) $x^2-y^2=a^2$; (*Відповідь:* $R=a$.)

в) $\rho=a(1+\cos\varphi)$; (*Відповідь:* $R=\frac{4}{3}a\cos\frac{\varphi}{2}$.)

г) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$. (*Відповідь:* $R=4a\sin\frac{t}{2}$.)

Тема 7. Еволюта та евольвента кривої

Еволютою кривої γ називається геометричне місце центрів кривини кривої. Еволюта є обгорткою сім'ї нормалей кривої. Евольвентою кривої γ називається крива $\tilde{\gamma}$, по відношенню до якої крива γ є еволютою.

Для кривої $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ рівняння еволюти має вигляд

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \\ \tilde{y} = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} \end{cases}.$$

Задача 1. Знайти еволюту еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язування

Оскільки координати центра стичного кола еліпса ми знаходили раніше, то матимемо

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ \bar{y} = -\dfrac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}.$$

Оскільки $a^2 - b^2 = c^2$, то

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ \bar{y} = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}.$$

Визначимо з цих рівнянь параметр t

$$\begin{cases} a\bar{x} = c^2\cos^3 t \\ b\bar{y} = -c^2\sin^3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a\bar{x})^{2/3} = c^{4/3}\cos^2 t \\ (b\bar{y})^{2/3} = c^{4/3}\sin^2 t \end{cases} \Rightarrow (a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = c^{4/3}.$$

Замінивши $\bar{x}$ та $\bar{y}$ на x та y матимемо

$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = c^{4/3}$ – рівняння еволюти еліпса.

Ця крива нагадує астроїду і отримується з неї розтягом по вертикалі.

Задача 2. Знайти еволюту параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні y' та y''

$$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y},\ y'' = -\frac{py'}{y^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Тоді
$$\begin{cases} \bar{x} = x - \dfrac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{-\frac{p^2}{y^3}} = 3x + p \\ \bar{y} = y + \dfrac{1+\frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} = -\dfrac{y^3}{p^2} = \pm\dfrac{2px\sqrt{2px}}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} - p = 3x \\ \bar{y}^2 = \dfrac{8x^3}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\bar{x}-p)^3 = 27x^3 \\ \bar{y}^2 = \dfrac{8x^3}{p} \end{cases}$$

$\dfrac{(\bar{x}-p)^3}{\bar{y}^2} = \dfrac{27}{8}p \Rightarrow \bar{y}^2 = \dfrac{8}{27p}\cdot(\bar{x}-p)^3$ або $y^2 = \dfrac{8}{27p}\cdot(x-p)^3$ – рівняння еволюти даної параболи.

Це напівкубічна парабола з вершиною в точці $(p;0)$.

Задача 3. Знайти еволюту логарифмічної спіралі $\rho = a^{\varphi}$.

Розв'язування.

Запишемо рівняння даної кривої у вигляді

$$\begin{cases} x = a^{\varphi}\cos\varphi \\ y = a^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}.$$

Знайдемо похідні x', x'' та y', y'' по φ

$$\begin{cases} x' = a^{\varphi}\ln a\cos\varphi - a^{\varphi}\sin\varphi \\ y' = a^{\varphi}\ln a\sin\varphi + a^{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = a^{\varphi}\ln^2 a\cos\varphi - 2a^{\varphi}\ln a\sin\varphi + a^{\varphi}\cos\varphi \\ y'' = a^{\varphi}\ln^2 a\sin\varphi + 2a^{\varphi}\ln a\cos\varphi - a^{\varphi}\sin\varphi \end{cases}.$$

Тоді

$$\begin{cases} \bar{x} = -a^{\varphi}\sin\varphi\ln a \\ \bar{y} = a^{\varphi}\cos\varphi\ln a \end{cases}$$

Радіус вектор центра кривини $\rho = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{a^{2\varphi}\ln^2 a} = a^{\varphi}\ln a$.

Якщо взяти $\ln a = a^{\varphi_0}$, то матимемо $\rho = a^{\varphi+\varphi_0}$ – еволюта даної кривої $\rho = a^{\varphi}$.

Відповідь: $\rho = a^{\varphi+\varphi_0}$.

Задача 4. Знайти евольвенту еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

Розв'язування.

$$\begin{cases} x' = -a\sin t \\ y' = b\cos t \end{cases}, \quad S = \int\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = S(t).$$

Тоді

$$\begin{cases} x = a\cos t - (-S(t)+C)\dfrac{a\sin t}{S'(t)} \\ y = b\sin t + (-S(t)+C)\dfrac{b\cos t}{S'(t)} \end{cases}$$ – рівняння евольвенти еліпса.

Відповідь: $\begin{cases} x = a\cos t - (-S(t)+C)\dfrac{a\sin t}{S'(t)} \\ y = b\sin t + (-S(t)+C)\dfrac{b\cos t}{S'(t)} \end{cases}.$

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти еволюту астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

(*Відповідь.* $\begin{cases} x = a\cos^3 t + 3a\sin^2 t\cos t \\ y = a\sin^3 t + 3a\cos^2 t\sin t \end{cases}$.)

2. Знайти еволюту еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(*Відповідь:* $\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$)

3. Знайти еволюту циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

(*Відповідь:* $\begin{cases} x = a(t + \sin t) \\ y = -a(1 - \cos t) \end{cases}$.)

4. Знайти еволюту кардіоїди $\rho = \lambda\varphi$.

(*Відповідь:* $\begin{cases} x = \lambda t\cos t - \lambda\dfrac{1+t^2}{2+t^2}(\sin t + t\cos t) \\ y = \lambda t\sin t + \lambda\dfrac{1+t^2}{2+t^2}(\cos t - t\sin t) \end{cases}$.)

5. Знайти еволюту гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

$$\left(\textit{Відповідь: } \begin{cases} x=\dfrac{a^2+b^2}{a}ch^3t \\ y=-\dfrac{a^2+b^2}{b}sh^3t \end{cases}.\right)$$

6. Знайти еволюту $y=ach\frac{x}{a}$.

$$\left(\textit{Відповідь: } \begin{cases} \xi=x-\dfrac{1}{a}sh\dfrac{x}{a}ch\dfrac{x}{a}. \\ \eta=0. \end{cases}\right)$$

РОЗДІЛ II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ ПОВЕРХОНЬ

Тема 8. Поверхня та її рівняння

Дотична площина і нормаль до поверхні

Поверхню можна задати такими рівняннями:

1) $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ – векторне рівняння поверхні або $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ – параметричні рівняння поверхні;

2) $z=f(x,y)$ – рівняння поверхні у явному вигляді;

3) $F(x,y,z)=0$ – рівняння поверхні у неявному вигляді.

Рівняння дотичної площини до поверхні, заданої рівнянням $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ має вигляд

$$p_1(x-x_0)+p_2(y-y_0)+p_3(z-z_0)=0 \text{ або } \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}=0,$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}, \text{ де } \bar{p}(p_1,p_2,p_3) \text{ і } \bar{p}=\bar{r}_u\times\bar{r}_v.$$

У випадку задання поверхні у вигляді $F(x,y,z)=0$ матимемо такі рівняння дотичної площини і нормалі відповідно

$$F_x^0(x-x_0)+F_y^0(y-y_0)+F_z^0(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x^0}=\frac{y-y_0}{F_y^0}=\frac{z-z_0}{F_z^0}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини і нормалі матимуть вигляд відповідно

$$z-z_0=f'_{x_0}(x-x_0)+f'_{y_0}(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f'_{x_0}}=\frac{y-y_0}{f'_{y_0}}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Задача 1. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до еліпсоїда $\begin{cases} x = a\cos v\cos u \\ y = b\cos v\sin u \\ z = c\sin v \end{cases}$ або $\bar{r} = (a\cos v\cos u, b\cos v\sin u, c\sin v)$ в довільній точці.

Розв'язування.

Знаходимо $\bar{r}_u = (-a\sin u\cos v, b\cos u\cos v, 0)$, $\bar{r}_v = (-a\cos u\sin v, -b\sin u\sin v, c\cos v)$.

Тоді

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = (bc\cos u\cos^2 v, ac\sin u\cos^2 v, ab\sin v\cos v).$$

Таким чином, рівняння дотичної площини буде

$$(x - a\cos v\cos u)bc\cos u\cos^2 v + (y - b\cos v\sin u)ac\sin u\cos^2 v + (z - c\sin v)c\cos v = 0,$$

а нормалі

$$\frac{x - a\cos v\cos u}{bc\cos u\cos^2 v} = \frac{y - b\cos v\sin u}{ac\sin u\cos^2 v} = \frac{z - c\sin v}{c\cos v}.$$

Відповідь: $\frac{x - a\cos v\cos u}{bc\cos u\cos^2 v} = \frac{y - b\cos v\sin u}{ac\sin u\cos^2 v} = \frac{z - c\sin v}{c\cos v}$,

$(x - a\cos v\cos u)bc\cos u\cos^2 v + (y - b\cos v\sin u)ac\sin u\cos^2 v + (z - c\sin v)c\cos v = 0$.

Задача 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $xy^2 + z^3 - 12 = 0$ в точці $M(1,2,2)$.

Розв'язування.

Поверхня задана рівнянням вигляду $F(x,y,z) = 0$. Тому

$F_x = y^2$, $\quad F_x^0 = 4$,

$F_y = 2xy$, $\quad F_y^0 = 4$,

$F_z = 3z^2$, $\quad F_z^0 = 12$..

Тоді

$4(x-1) + 4(y-2) + 12(z-2) = 0$ або $x + y + 3z - 9 = 0$ – рівняння дотичної площини, а

$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{12}$ або $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$ – рівняння нормалі.

Відповідь: $x + y + 3z - 9 = 0$; $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{12}$ або $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$.

Задача 3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^4 - 2xy^3$ в точці $M(0,-1,0)$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні

$f_x = 4x^3 - 2y^3$, $\qquad f_x^0 = 2$,

$f_y = -6xy^2$, $\qquad f_y^0 = 0$.

Отже, рівняння дотичної площини має вигляд

$$z = 2x \text{ або } 2x - z = 0,$$

а нормалі

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}.$$

Відповідь: $z = 2x$ або $2x - z = 0$; $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z}{-1}$.

Задача 4. Дано поверхню $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$. Знайти рівняння дотичної площини, паралельної до площини $2x + 4y + z = 0$.

Розв'язування.

$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 1$.

$F_x = 2x$, $\qquad F_x^0 = 2x_0$,

$F_y = 6y$, $\qquad F_y^0 = 6y_0$,

$F_z = 2z$, $\qquad F_z^0 = 2z_0$.

Рівняння дотичної площини запишеться у вигляді

$$2(x - x_0)x_0 + 6(y - y_0)y_0 + 2(z - z_0)z_0 = 0.$$

Оскільки точка дотику $M(x_0, y_0, z_0)$ належить поверхні, то

$$x_0^2 + 3y_0^2 + z_0^2 - 1 = 0 \qquad (*)$$

З умови паралельності дотичної площини і площини $2x + 4z + y = 0$ випливає, що $\dfrac{x_0}{2} = \dfrac{6y_0}{4} = \dfrac{z_0}{1} = k$. Звідки $x_0 = 2k$, $y_0 = \dfrac{2}{3}k$, $z_0 = k$.

Тоді рівняння (*) матиме вигляд

$$4k^2 + 3 \cdot \frac{4}{9}k^2 + k^2 = 1,$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{12}{31}} = \pm 2\sqrt{\frac{3}{31}}.$$

Тому $x_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$, $y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{9}}$, $z_0 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$.

Підставивши ці значення x_0, y_0, z_0 у рівняння (*), одержимо остаточно рівняння дотичної площини

$$2x+4y+z=\frac{\sqrt{93}}{3} \text{ і } 2x+4y+z=-\frac{\sqrt{93}}{3}.$$

Отже, умову задачі задовольняє дві площини.

Задачі для самостійної роботи

1. Написати рівняння дотичної площини до прямого гелікоїда $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, av)$ в довільній його точці.

(*Відповідь:* $a\sin v\cdot x - a\cos v\cdot y + uz - auv = 0$, $\frac{x-u\cos v}{a\sin v}=\frac{y-u\sin v}{-a\cos v}=\frac{z-av}{u}$.)

2. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $xyz=a^3$ в довільній точці (x_0, y_0, z_0).

(*Відповідь:* $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 - 3a^3 = 0$, $\frac{x-x_0}{y_0z_0}=\frac{y-y_0}{x_0z_0}=\frac{z-z_0}{x_0y_0}$)

3. Знайти рівняння дотичної площини до тора $\bar{r}=((2+3\cos u)\cos v, (2+3\cos u)\sin v, 3\sin u)$, паралельної до площини $x+y+z+5=0$.

(*Відповідь:* $x+y+z\pm2\sqrt{2}\pm3\sqrt{3}=0$, $x+y+z\pm2\sqrt{2}\mp3\sqrt{3}=0$.)

4. Знайти дотичні площини поверхні $z=x^4-2xy^3$, перпендикулярні до прямої $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{1}$.

(*Відповідь:* $2x-6y-z+3=0$, $2x-6y-z-6=0$.)

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z=x^2+3y^2$ в точці, для якої $x=1$, $y=1$.

(*Відповідь:* $2x+6y-z+4=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-4}{-1}$.)

6. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2+2y^2+z^2-1=0$, паралельної до площини $x-y+2z=0$.

(*Відповідь:* $x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$, *де* (x_0,y_0,z_0) – *точка дотику.*

$x_0=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$, $y_0=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$, $z_0=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}$.)

7. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2+y^2-x+2y+4z-13=0$ в точці $M(2,1,2)$.

(*Відповідь:* $3x+4y+4z-18=0$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{4}$.)

8. Для поверхні $xyz=1$ знайти її нормалі, що проходять через початок координат.

(*Відповідь:* $x=y=z$, $-x=y=z$, $x=-y=z$, $x=y=-z$.)

9. Для поверхні $xyz=1$ знайти рівняння дотичної площини, що паралельна до площини $x+y+z-1=0$.

(*Відповідь:* $x+y+z+1=0$.)

10. Знайти рівняння дотичної площини до сфери $x^2+y^2+z^2=a$ в точці $A(0,0,a)$.

(*Відповідь:* $z-a=0$.)

Тема 9. Перша квадратична форма поверхні

Перша квадратична форма поверхні $\bar{r}=\bar{r}(u,v)$ має вигляд

$$I=ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \qquad (1)$$

де $E=\bar{r}_u^2$, $F=\bar{r}_u\cdot\bar{r}_v$, $G=\bar{r}_v^2$

Якщо ж поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, то

$$I=ds^2=Edx^2+2Fdxdy+Gdy^2 \qquad (2)$$

де $E=1+f_x^2$, $F=f_x\cdot f_y$, $G=1+f_y^2$

Задача 1. Знайти першу квадратичну форму гелікоїда $\bar{r}=(u\cos v,u\sin v,av)$.

Розв'язування.

Скористаємося формулою (1):

$\bar{r}=(u\cos v,u\sin v,av)$,

$\bar{r}_u=(\cos v,\sin v,0)$,

$\bar{r}_v=(-u\sin v,u\cos v,a)$,

$E=\bar{r}_u^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1$,

$F=\bar{r}_u\cdot\bar{r}_v=-u\sin v\cos v+u\cos v\sin v+a\cdot 0=0$,

$G=\bar{r}_v^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+a^2=u^2+a^2$.

Тоді

$$I=ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2.$$

Відповідь: $I=ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$.

Задача 2. Визначити першу квадратичну форму параболоїда $z=x^2+2y^2$.

Розв'язування.

Знайдемо коефіцієнти E, F, G:

$E=1+f_x^2=1+(2x)^2=1+4x^2$, $F=f_x\cdot f_y=2x\cdot 4y=8xy$, $G=1+f_y^2=1+(4y^2)=1+16y^2$.

Тоді згідно формули (2) матимемо

$I=ds^2=(1+4x^2)dx^2+16xydxdy+(1+16y^2)dy^2$.

Відповідь: $I=ds^2=(1+4x^2)dx^2+16xydxdy+(1+16y^2)dy^2$.

Застосування першої квадратичної форми

до вивчення внутрішньої геометрії поверхні

Довжина дуги кривої $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$, розміщеної на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt \tag{3}$$

Якщо дві криві на поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ перетинаються в деякій точці A і мають в цій точці напрями (du,dv), і $(\delta u,\delta v)$, то кут φ між ним обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{4}$$

Координатна сітка (u,v) на поверхні ортогональна тоді і тільки тоді, коли

$F(u,v) = 0$. (5)

Площа S частини поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ обчислюється за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv, \tag{6}$$

D – область, в яку проектується дана частина поверхні.

Якщо $z = f(x,y)$, то

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy. \tag{7}$$

Задача 3. На поверхні $\bar{r} = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ обчислити довжину дуги лінії $v = au$ між точками її перетину з лініями *u=1, u=2*.

Розв'язування.

Знайдемо першу квадратичну форму даної поверхні

$\bar{r}_u = (2u, 2u, v)$, $\bar{r}_v = (2v, -2v, u)$, $E = \bar{r}_u^2 = 8u^2 + v^2$, $F = \bar{r}_u\bar{r}_v = 4uv - 4uv + uv = uv$,

$G = \bar{r}_v^2 = 8v^2 + u^2$, $ds^2 = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)dv^2$.

Знайдемо точки перетину даної кривої $v = au$ з кривими *u = 1 і u = 2*:

$\gamma \cap \gamma_1 : \begin{cases} au = v, \\ u = 1. \end{cases} \Rightarrow u = 1, v = a \qquad A(1,a).$

$$\gamma\cap\gamma_2:\begin{cases}au=v,\\ u=2.\end{cases}\Rightarrow u=2, v=2a \quad B(2,2a).$$

$v=au$, $dv=adu$.

Тоді згідно формули (3) матимемо

$$S=\int_A^B\sqrt{(8u^2+v^2)du^2+2uvdudv+(8v^2+u^2)dv^2}=$$

$$=\int_1^2\sqrt{(8u^2+a^2u^2)du^2+2u^2a^2dudv+(8a^4u^2+a^2u^2)du^2}=\int_1^2\sqrt{8a^4u^2+4a^2u^2+8u^2}du=$$

$$=\int_1^2 2\sqrt{2a^4+a^2+2}udu=2\sqrt{2a^4+a^2+2}\left.\frac{u^2}{2}\right|_1^2=3\sqrt{2a^4+a^2+2};$$

$$S=3\sqrt{2a^4+a^2+2}.$$

Відповідь: $S=3\sqrt{2a^4+a^2+2}$.

Задача 4. Знайти кут між кривими $v=u+1$, $v=3-u$ на поверхні $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, u^2)$.

Розв'язування.

Знайдемо:

1) точку перетину даних ліній:

$$\begin{cases}v=u+1\\ v=3-u\end{cases}\Rightarrow u=1, v=2.$$

Отже $A(u_0,x_0)=A(1,2)$.

2) диференціали по першій і другій кривих:

$v=u+1$. $\qquad\qquad v=3-u$.

$dv=du$. $\qquad\qquad \delta v=-\delta u$.

3) коефіцієнти першої квадратичної форми:

$\bar{r}_u=(\cos v, \sin v, 2u)$,

$\bar{r}_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$,

$E=1+4u^2$, $F=0$, $G=u^2$.

Тоді згідно формули (4) матимемо

$$\cos\varphi=\frac{(1+4u_0^2)du\delta u-u_0^2du\delta u}{\sqrt{(1+4u_0^2)du^2+u^2du^2}\cdot\sqrt{(1+4u_0^2)\delta u^2+u^2\delta u^2}}=\frac{(1+3u_0^2)du\delta u}{\sqrt{1+5u_0^2}du\cdot\sqrt{1+5u_0^2}\delta u}=\frac{1+3u_0^2}{1+5u_0^2}=$$

$$=\frac{1+3}{1+5}=\frac{2}{3}.$$

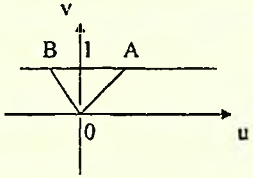
Відповідь: $\varphi=\arccos\frac{2}{3}$.

Задача 5. Знайти площу трикутника, утвореного перетином ліній $u=av$, $u=-av$, $v=1$ на поверхні $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, av)$.

Розв'язування.

Для поверхні $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, av)$ перша квадратична форма дорівнює $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ (див. задачу 1).

Отже, $E=1$, $F=0$, $G=u^2+a^2$. Тоді $EG-F^2=u^2+a^2$.



ΔOAB - область D

Отже,

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint\limits_D\sqrt{u^2+a^2}\,dudv=2\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^{av}\sqrt{u^2+a^2}\,du=$$

$$=2\int\limits_0^1\left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|\right)\Bigg|_0^{av}dv=2\left(\frac{a^2v^2}{2}\sqrt{a^2v^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|av+\sqrt{a^2v^2+a^2}\right|-\frac{a^2}{2}\ln|a|\right)=$$

$$=a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

Відповідь: $S=a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

Задача 6. Довести, що площі областей на параболоїдах $z=axy$ і $z=\frac{a(x^2+y^2)}{2}$, що проектуються на площину XOY, рівні.

Розв'язування.

Знайдемо дискримінант $EG-F^2$ для обидвох поверхонь.

$z=axy$:

$E=1+a^2y^2$, $F=a^2xy$, $G=1+a^2x^2$, $EG-F^2=(1+a^2y^2)(1+a^2x^2)-a^4x^2y^2$.

$$z=\frac{a(x^2+y^2)}{2};$$

$E=1+a^2x^2$, $F=a^2xy$, $G=1+a^2y^2$, $EG-F^2=(1+a^2x^2)(1+a^2y^2)-a^4x^2y^2$.

Оскільки дискримінанти цих поверхонь рівні, то проекції областей даних двох поверхонь на XOY є рівні.

Задачі для самостійної роботи

1. На поверхні з першою квадратичною формою

$$I=ds^2=du^2+\frac{1}{4}sh^2u\,dv^2$$

знайти довжину дуги кривої $2u=v$ між точками $A(u_1,v_1)$ і $B(u_2,v_2)$.

(*Відповідь:* $S=|shu_2-shu_1|$.)

2. На гелікоїді $\bar{r}=(u\cos v, u\sin v, hv)$ знайти довжину лінії $u=a$ між точками $M_1(u_1,v_1)$, $M_2(u_2,v_2)$.

(*Відповідь:* $S=\sqrt{a^2+h^2}\cdot|v_2-v_1|$.)

3. Знайти периметр криволінійного трикутника, утвореного перетином ліній $u=\pm\frac{1}{2}av^2$, $v=1$ на поверхні $ds^2=du^2+(u^2+a^2)dv^2$.

(*Відповідь:* $3\frac{1}{3}a$.)

4. Визначити характер координатної сітки на поверхні $\bar{r}=\left(\frac{a}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\cos u, \frac{a}{2}\left(v+\frac{1}{v}\right)\sin u, \frac{c}{2}\left(v-\frac{1}{v}\right)\right)$.

(*Відповідь: ортогональна.*)

5. На поверхні з лінійним елементом $ds^2=du^2+dv^2$ знайти кут між лініями $2u=v$ і $2u=-v$.

(*Відповідь:* $\cos\varphi=-\frac{3}{5}$.)

6. На катеноїді $\bar{r}=(chu\cos v, chu\sin v, u)$ знайти кут між лініями $u+v=0$ і $u-v=0$ в їх спільній точці.

(*Відповідь:* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.)

7. Знайти периметр і внутрішні кути криволінійного трикутника, утвореного лініями $u = v^2$, $u = -v^2$ і $v = 2$ на поверхні $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, 2v)$.

(*Відповідь:* $P = 40$, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$.)

8. Довести, що на поверхні $\bar{r} = \left(u\left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\right), v\left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}\right), 2uv\right)$ координатні лінії ортогональні.

9. Під яким кутом перетинаються криві $u + v = 0$ і $u - v = 0$ на поверхні $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$.

(*Відповідь:* $\cos\varphi = \pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$.)

10. Обчислити площу чотирикутника, що лежить на гелікоїді $\bar{r} = (au\cos v, au\sin v, hv)$ і обмеженого кривими $u = 0$, $u = \frac{h}{a}$, $v = 0$, $v = 1$.

(*Відповідь:* $S = \frac{h^2}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right)$.)

Тема 10. Друга квадратична форма поверхні

Для поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ друга квадратична форма має вигляд

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2,$$

де $L = \dfrac{(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}$, $M = \dfrac{(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}}$, $N = \dfrac{(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}$.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = z(x,y)$, то

$$L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}},\ L = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

Нормальна кривина поверхні обчислюється за формулою

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Рівняння для визначення головних кривин має вигляд

$$\left(EG - F^2\right)\lambda^2 - \left(EN + GL - 2FM\right)\lambda + \left(LN - M^2\right) = 0.$$

Повна і середня кривини поверхні обчислюються за формулами

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ H = \frac{EN + GL - 2FM}{2\left(EG - F^2\right)}.$$

В залежності від значень $K(u,v)$ і $H(u,v)$ точки поверхні класифікують таким чином:

- еліптнчна, якщо $K > 0$, $H \neq 0$;
- гіперболічна, якщо $K < 0$, $H \neq 0$;
- параболічна, якщо $K = 0$, $H \neq 0$;
- точка сплощення, якщо $K = H = 0$.

Задача 1. Знайти другу квадратичну форму гелікоїда $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$.

Розв'язування

Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми

$\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$,

$\bar{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$,

$\bar{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, a)$,

$\bar{r}_{uu} = (0,0.0)$,

$\overline{r_{uv}} = (-\sin v, \cos v, 0)$,

$\overline{r_{vv}} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$.

$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$, $F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$, $G = u\cos^2 v + u\sin^2 v + a^2 = u^2 + a^2$.

$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + a^2}$.

$$\bar{r}_u \times \bar{r}_v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = (a\sin v, -a\cos v, u).$$

$(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uu}) = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v)\ \bar{r}_{uu} = a\sin v \cdot 0 - a\cos v \cdot 0 + u \cdot 0 = 0$.

Отжс, $L = \frac{0}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0$.

$(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{uv}) = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) \cdot \bar{r}_{uv} = a\sin v \cdot (-\sin v) - a\cos v \cdot \cos v + u \cdot 0 = -a\sin^2 v - a\cos^2 v = -a$.

Таким чином,

$$M = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

$(\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{r}_{vv}) = (\bar{r}_u \times \bar{r}_v) \cdot \bar{r}_{vv} = -au\sin v\cos v + au\sin v\cos v + u \cdot 0 = 0$.

Тоді

$$N = \frac{0}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

Отже, $ds^2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} dudv$.

Відповідь: $ds^2 = -\frac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}} dudv$.

Задача 2. Знайти другу квадратичну форму поверхні $z = 2x^2 - 3y^2$.

Розв'язування.

$z_x = 4x$, $z_y = -6y$, $z_{xx} = 4$, $z_{yy} = -6$, $z_{xy} = 0$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2}$.

Тоді

$$L = \frac{4}{\sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2}},\ M = 0,\ N = \frac{-6}{\sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2}}.$$

Таким чином друга квадратична форма для даної поверхні має вигляд

$$ds^2 = \frac{4}{\sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2}} dx^2 - \frac{-6}{\sqrt{1 + 16x^2 + 36y^2}} dy^2.$$

Відповідь: $ds^2=\frac{4}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dx^2-\frac{-6}{\sqrt{1+16x^2+36y^2}}dy^2$.

Задача 3. Знайти нормальну кривину гелікоїда $\bar r=(u\cos v,u\sin v,av)$ при $u=a$ в напрямку $u=-av$.

Розв'язування.

Для даної поверхні (див. задачу 1) перша і друга квадратичні форми мають вигляд

$$I=du^2+\left(u^2+a^2\right)dv^2,\ II=-\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv.$$

Оскільки $u=-av$, то $du=-adv$. Тоді

$$k_n=\frac{-\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}dudv}{du^2+\left(u^2+a^2\right)dv^2}=\frac{-\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}\left(-adv^2\right)}{a^2dv^2+\left(u^2+a^2\right)dv^2}=\frac{\frac{2a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}dv^2}{\left(u^2+2a^2\right)dv^2}=\frac{\frac{2a^2}{\sqrt{2a^2}}}{3a^2}=\frac{\sqrt2}{3a}.$$

Відповідь: $k_n=\frac{\sqrt2}{3a}$.

Задача 4. Знайти головні кривини поверхні $\bar r=(\cos v-(u+v)\sin v,\sin v+$ $+(u+v)\cos v,u+2v)$ в довільній точці.

Розв'язування.

Обчислимо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм

$\bar r_u=(-\sin v,\cos v,1)$,

$\bar r_v=(-2\sin v-(u+v)\cos v,2\cos v-(u+v)\sin v,2)$,

$\bar r_{uu}=(0,0,0)$,

$\bar r_{uv}=(-\cos v,-\sin v,0)$,

$\bar r_{vv}=(-3\cos v+(u+v)\sin v,-3\sin v-(u+v)\cos v,0)$.

Тоді

$E=\sin^2 v+\cos^2 v+1=2$,

$F=2\sin^2 v+(u+v)\cos v\sin v+2\cos^2 v-(u+v)\sin v\cos v+2=4$,

$G=4\sin^2 v+(u+v)^2\cos^2 v+4(u+v)\cos v\sin v+4\cos^2 v+(u+v)^2\sin^2 v-4(u+v)\cos v\sin v+4=$

$=8+(u+v)^2$,

$H=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{16+2(u+v)^2-16}=\sqrt2(u+v)$.

$(\overline{r}_u \times \overline{r}_v) \cdot \overline{r}_{uu} = 0$,

тому $L = 0$.

$(\overline{r}_u \times \overline{r}_v) = ((u+v)\sin v, -(u+v)\cos v, u+v)$,

$(\overline{r}_u \times \overline{r}_v) \cdot \overline{r}_{uv} = -(u+v)\sin v\cos v + (u+v)\sin v\cos v + (u+v)\cdot 0 = 0$,

тому $M = 0$.

$(\overline{r}_u \times \overline{r}_v) \cdot \overline{r}_{vv} = 3(u+v)\sin v\cos v + (u+v)^2\sin^2 v + 3(u+v)\sin v\cos v + (u+v)^2\cos^2 v + (u+v)\cdot 0 =$

$= (u+v)^2$,

тому $N = \dfrac{(u+v)^2}{\sqrt{2}(u+v)} = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}$.

Рівняння для визначення головних радіусів має вигляд

$$2(u+v)^2 k^2 - \sqrt{2}(u+v)k = 0.$$

Розв'язуючи, отримаємо

$2(u+v)^2 k^2 - \sqrt{2}(u+v)k = 0$,

$2(u+v)k^2 - \sqrt{2}k = 0$,

$k(2(u+v)k - \sqrt{2}k) = 0$,

$k_1 = 0$, $k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}(u+v)}$.

Відповідь: 0, $\dfrac{1}{\sqrt{2}(u+v)}$.

Задача 5. Знайти повну і середню кривини поверхні $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$.

Розв'язування.

Обчислимо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм

$\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$,

$\overline{r}_u = (\cos v, \sin v, 1)$,

$\overline{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$,

$\overline{r}_{uu} = (0,0,0)$,

$\overline{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$,

$\overline{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$.

Тоді

$$E=2,\ F=1,\ G=u^2+1,\ EG-F^2=2u^2+1, L=0,\ M=\frac{-1}{\sqrt{2u^2+1}},\ N=\frac{u^2}{\sqrt{2u^2+1}}.$$

Таким чином повна та середня кривини будуть відповідно рівні

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\frac{-1}{\sqrt{2u^2+1}}}{2u^2+1}=-\frac{1}{(2u^2+1)^2},$$

$$H=\frac{EN-2FM+2GL}{2(EG-F^2)}=\frac{\frac{2u^2}{\sqrt{2u^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{2u^2+1}}}{2(2u^2+1)}=\frac{u^2+1}{\sqrt{(2u^2+1)^3}}.$$

Відповідь: $K=-\frac{1}{(2u^2+1)^2}$, $H=\frac{u^2+1}{\sqrt{(2u^2+1)^3}}$.

Задача 6. Знайти повну і середню кривини гіперболічного параболоїда $z=x^2-y^2$ у довільній точці.

Розв'язування.

Обчислимо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм. Для цього знайдемо z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}:

$z_x=2x$, $z_{yy}=-2$, $z_{xy}=0$.

$z_y=-2y$, $z_{xx}=2$,

Тоді

$E=1+4x^2$, $F=-4xy$, $G=1+4y^2$,

$L=\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$, $M=0$, $N=-\frac{2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$.

Таким чином

$$K=\frac{\frac{-4}{1+4x^2+4y^2}}{1+4x^2+4y^2}=\frac{-4}{(1+4x^2+4y^2)^2},$$

$$H=\frac{\frac{-2(1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\frac{-2(1+4y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}}{2(1+4x^2+4y^2)}=\frac{4(y^2-x^2)}{\sqrt{(1+4x^2+4y^2)^3}}.$$

Відповідь: $K=\dfrac{-4}{\left(1+4x^2+4y^2\right)^2}$, $H=\dfrac{4\left(y^2-x^2\right)}{\sqrt{\left(1+4x^2+4y^2\right)^3}}$.

Задача 7. Визначити характер точки $A(0;0;0)$ поверхні $az=\left(x-\dfrac{y^2}{ab}\right)^3$.

Розв'язування.

Обчислимо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм

$z_x=\dfrac{3}{a}\left(x-\dfrac{y^2}{ab}\right)^2$, $\qquad z_x(A)=0$,

$z_y=\dfrac{-6y}{a^2b}\left(x-\dfrac{y^2}{ab}\right)^2$, $\qquad z_y(A)=0$,

$z_{xx}=\dfrac{6}{a}\left(x-\dfrac{y^2}{ab}\right)$, $\qquad z_{xx}(A)=0$,

$z_{yy}=\dfrac{-6}{a^4b^2}\left(abx-y^2\right)\left(abx-5y^2\right)$, $\qquad z_{yy}(A)=0$,

$z_{xy}=\dfrac{-6y}{a^2b}\left(x-\dfrac{y^2}{ab}\right)$, $\qquad z_{xy}(A)=0$.

Тоді матимемо

$E=1$, $\qquad F=0$, $\qquad G=0$,

$L=0$, $\qquad M=0$, $\qquad N=0$.

Таким чином

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0,\ H=\frac{EN-2FM+2GL}{2\left(EG-F^2\right)}=0.$$

Отже, точка $A(0;0;0)$ є точкою сплощення.

Відповідь: $A(0;0;0)$ –точка сплощення.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти нормальну кривину поверхні $\bar{r}=\left(u,v,u^2+v^2\right)$ в точці $A(1;1)$, якщо $u-v^3=0$.

(*Відповідь:* $\dfrac{10}{111}$.)

2. Знайти нормальну кривину поверхні $x = a\cos u\cos v$, $y = b\cos v\sin u$, $z = c\sin v$ в точці $A(0;b;0)$ в напрямку $\frac{dv}{du} = -\frac{a}{c}$.

(*Відповідь:* $\frac{-b\left(a^2+c^2\right)}{2a^2c^2}$.)

3. Знайти нормальну кривину косого гелікоїда $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, u+v)$ при $v = 2$ в напрямку $u + v = 0$.

(*Відповідь:* $k_n = \frac{2}{5}$.)

4. Знайти нормальну кривину поверхні $\bar{r} = (u, v, uv)$ в точці $P(2,2,4)$ в напрямку $v = u$.

(*Відповідь:* $k_n = \frac{1}{27}$.)

5. Знайти нормальну кривину поверхні $z = ax^2 - by^2$ в точці $A(0;0)$ в напрямку $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$.

(*Відповідь:* $\frac{2}{5}(4a-b)$.)

6. Знайти головні напрямки поверхні $z = x^4 - 2xy^3$ в точці $A(0,-1;0)$.

(*Відповідь:* $\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{5}$.)

7. Знайти головні кривини поверхні $\bar{r} = \left(u, v, a\left(u^2+v^2\right)\right)$ в точці $O(0;0;0)$.

(*Відповідь:* $2a$, $2a$)

8. Знайти головні кривини поверхні $\bar{r} = (u+v, u-v, uv+3)$ в точці $A\left(2,-1,3\frac{3}{4}\right)$.

9. Знайти головні кривини поверхні $\bar{r} = (u\cos v, u\sin v, av)$ в довільній точці.

(*Відповідь:* $k_1 = -k_2 = \frac{a}{u^2+a^2}$.)

10.Знайти повну і середню кривини параболоїда $z = axy$ в точці $x = y = 0$.

(*Відповідь:* $H = 0$, $K = -a^2$.)

11. Знайти повну і середню кривини поверхні $\bar{r}=(av\cos u, av\sin u, cv)$ в довільній точці.

(*Відповідь:* $H=\dfrac{-c}{2av\sqrt{a^2+c^2}}$, $K=0$.)

12.Знайти середню кривину поверхні $z=a\,ch\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{a}}$ в довільній точці.

(*Відповідь:* $H=0$.)

Тема 11. Лінії на поверхні

У даному курсі розглядаються деякі "чудові" лінії на поверхні – лінії кривини, асимптотичні лінії, геодезичні лінії.

Якщо поверхня задана рівняннями $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases}$

то диференціальними рівняннями цих ліній будуть відповідно

$$\begin{vmatrix} d^2u & -dudv & d^2v \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \text{ – рівняння лінії кривини} \qquad (1)$$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \text{ – рівняння асимптотичної лінії} \qquad (2)$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{E_v}{2G} + \left(\frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{G}\right)\frac{dv}{du} + \left(\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{2G}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{G_u}{2E}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 \text{ – рівняння геодезичної лінії} \quad (3)$$

Задача 1. Знайти лінії кривини гелікоїда $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = av \end{cases}$.

Розв'язування.

Коефіцієнти першої і другої квадратичних форм для гелікоїда дорівнюють

$E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + a^2$,

$L = 0$, $M = \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, $N = 0$.

Диференціальним рівнянням лінії кривини гелікоїда буде

$$\begin{vmatrix} d^2u & -dudv & d^2v \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{du^2}{u^2 + a^2} - dv^2 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння

$$\frac{du^2}{u^2 + a^2} - dv^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} - dv\right)\left(\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} + dv\right) = 0 \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} - dv = 0, \quad \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} + dv = 0.$$

тоді

$$\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)=v+C_1,\ \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)-v=C_2.$$

Ми отримали дві сім'ї ліній кривини гелікоїда.

Відповідь: $\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)=v+C_1$, $\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)-v=C_2$.

Задача 2. Знайти лінії кривини гіперболічного параболоїда $z=xy$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні і коефіцієнти I і II квадратичних форм

$f'_x=y$, $f'_y=x$, $f''_{xx}=0$, $f''_{xy}=1$, $f''_{yy}=0$, $E=1+y^2$, $F=xy$, $G=1+x^2$, $L=0$,

$M=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, $N=0$.

Тоді диференціальне рівняння лінії кривини матиме вигляд

$$(1+y^2)dx^2-(1+x^2)dy^2=0.$$

Звідси матимемо

$$\sqrt{1+y^2}dx-\sqrt{1+x^2}dy=0 \text{ і } \sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0.$$

Розв'яжемо ці рівняння:

$\sqrt{1+y^2}dx-\sqrt{1+x^2}dy=0;$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=0;$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_1;$

$\ln\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=\ln C_1;$

$\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=C_1.$

$\sqrt{1+y^2}dx+\sqrt{1+x^2}dy=0;$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=0;$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_2;$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=\ln C_2;$

$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=C_2.$

Отримали дві сім'ї ліній кривини даної поверхні.

Відповідь: $\dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}=C_1$, $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=C_2$.

Задача 3. Знайти асимптотичні лінії тора $\begin{cases} x=(a+r\cos u)\cos v \\ y=(a+r\cos u)\sin v. \\ z=r\sin u \end{cases}$

Розв'язування.

Оскільки для цієї поверхні коефіцієнти другої квадратичної форми дорівнюють

$$L = r,\ M = 0,\ N = (a + r\cos u)\cos u,$$

то диференціальне рівняння асимптотичних ліній тора матиме вигляд

$$r^2 du^2 + (a + r\cos u)\cos u\, dv^2 = 0.$$

Тоді

$$dv = \pm \frac{r du}{\sqrt{-(a + r\cos u)\cos u}}.$$

Звідси

$$v\Big|_{v_0}^{v} = \pm r \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{-(a + r\cos u)\cos u}}.$$

$v - v_0 = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{-(a + r\cos u)\cos u}}$ – рівняння двох сімей асимптотичних ліній в інтегральній формі.

Відповідь: $v - v_0 = \pm \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{-(a + r\cos u)\cos u}}$.

Задача 4. Знайти асимптотичні лінії гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

Розв'язування.

Знайдемо похідні $f'_x = \frac{x}{a^2}$, $f'_y = -\frac{y}{b^2}$, $f''_{xx} = \frac{1}{a^2}$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -\frac{1}{b^2}$.

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній буде таким

$$\frac{dx^2}{a^2} - \frac{dy^2}{b^2} = 0.$$

Тоді матимемо $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ і $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$.

Звідси

$\int dy = \frac{b}{a}\int dx$ і $\int dy = -\frac{b}{a}\int dx$ – дві сім'ї асимптотичних ліній даної поверхні.

Відповідь: $\int dy = \frac{b}{a}\int dx$, $\int dy = -\frac{b}{a}\int dx$.

Задача 5. Написати рівняння геодезичних ліній поверхні, для якої $ds^2 = du^2 + sh^2 u dv^2$.

Розв'язування.

З умови задачі маємо, що $E=1$, $F=0$, $G=sh^2u$, тоді $E_u=0$, $E_v=0$, $G_u = 2shu\cdot chu$, $G_v=0$.

Тоді диференціальне рівняння геодезичних ліній матиме вигляд

$$v'' = -\frac{2shu\cdot chu}{sh^2u}v' - shu\cdot chu\cdot v'^3.$$

$$shu\cdot v'' + 2chu\cdot v' + sh^2u\cdot chu\cdot v'^3 = 0.$$

$$shu\frac{v''}{v'^3} + 2chu\frac{v'}{v'^3} + \frac{sh^2u\cdot chu\cdot v'^3}{v'^3} = 0,$$

$$shu\frac{v''}{v'^3} + 2chu\frac{1}{v'^2} + sh^2u\cdot chu = 0.$$

Зробимо заміну $\frac{1}{v'^2} = y$, тоді $v'^2 = \frac{1}{y}$, $v' = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $v'' = \frac{-y'}{2\sqrt{y^3}}$, $v'^3 = \frac{1}{\sqrt{y^3}}$.

Таким чином, ми отримаємо наступне рівняння

$$-\frac{1}{2}shu\cdot y' + 2chu\cdot y - sh^2u\ chu = 0 \Rightarrow shu\ y' - 4chu\cdot y = 2sh^2u\cdot chu \Rightarrow y' - 4\frac{chu}{shu}y = 2shu\cdot chu.$$

Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = e^{4\int\frac{chu}{shu}du}\cdot z(u) = e^{4\ln shu}\ z(u) = sh^4u\cdot z(u).$$

Тоді

$$y' = 4sh^3u\cdot chu\cdot z(u) + sh^4u\cdot z'(u),$$

$$4sh^3u\cdot chu\ z(u) + sh^4u\cdot z'(u) - 4chu\cdot sh^3u\ z(u) = 2shu\cdot chu,$$

$$sh^4u\cdot z'(u) = 2shu\ chu,$$

$$dz = 2\frac{chu}{sh^3u}du,$$

$$z = 2\int\frac{chu}{sh^3u}du = \left(-2\frac{1}{2sh^2u} + C\right) = -\frac{1}{sh^2u} + C,$$

$$y = sh^4u\left(C - \frac{1}{sh^2u}\right) = Csh^4u\cdot sh^2u = sh^2u(Csh^2u - 1),$$

$$v'^2=\frac{1}{v}=\frac{1}{sh^2u(Csh^2u-1)}\Rightarrow v=\pm\int\frac{1}{\sqrt{sh^2u(Csh^2u-1)}}du.$$

Відповідь: $v=\pm\int\frac{1}{\sqrt{sh^2u(Csh^2u-1)}}du$.

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти лінії кривини на поверхні $\bar{r}=\left(\frac{a}{2}(u-v),\frac{b}{2}(u+v),\frac{uv}{2}\right)$.

(*Відповідь:*

$$\frac{du^2}{a^2+b^2+u^2}-\frac{dv^2}{a^2+b^2+v^2}=0\ )$$

2. Знайти лінії кривини на поверхні $\bar{r}=\left(\sqrt{p}(u+v),\sqrt{q}(u-v),2uv\right)$.

(*Відповідь:* $\frac{du^2}{p+q+4u^2}-\frac{dv^2}{p+q+4v^2}=0$.)

3. Знайти лінії кривини на поверхні $\bar{r}=\left(u\left(3v^2-u^2-\frac{1}{3}\right),v\left(3u^2-v^2-\frac{1}{3}\right),2uv\right)$.

(*Відповідь:* $u+v=C_1,\ u-v=C_2$.)

4. Знайти асимптотичні лінії на поверхні $\begin{cases}x=\frac{v}{chu}\\ y=\frac{uv}{chu}\\ z=arctgv\end{cases}$.

(*Відповідь:* $v=sh\left(\frac{u}{\sqrt{2}}+C_1\right),\ v=sh\left(C_2-\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$.)

5. Знайти асимптотичні лінії на поверхні $z=xy^3-yx^3$.

(*Відповідь:* $x^2-y^2=C_1,\ xy=C_2$.)

6. Знайти рівняння геодезичних ліній на поверхні $\bar{r}=(u\cos v,u\sin v,av)$.

(*Відповідь:* $v=C_1\int\frac{du}{\sqrt{(u^2+a^2)(u^2+a^2-C_1^2)}}+v_0$.)

7. Знайти рівняння геодезичних ліній на поверхні

$\bar{r} = (u\cos u\cos v, a\sin v\cos v, b\sin v)$.

(*Відповідь:* $v = C\int_{u_0}^{u}\sqrt{\frac{a^2-b^2-u^2}{(u^2-C^2)(a^2-u^2)}}\frac{du}{u} + v_0$.)

8. Знайти геодезичні лінії на круговому циліндрі $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \\ z = v \end{cases}$.

(*Відповідь.* $Au + Bv + C = 0$.)

1) $A = 0$: $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \\ z = -\dfrac{C}{B} \end{cases}$. *2)* $B = 0$: $\begin{cases} x = r\cos\left(-\dfrac{C}{A}\right) \\ y = r\sin\left(-\dfrac{C}{A}\right) \\ z = v \end{cases}$. *3)* $A \neq 0$, $B \neq 0$: $\begin{cases} x = r\cos u \\ y = r\sin u \\ z = -\dfrac{A}{B}u - \dfrac{C}{B} \end{cases}$.

9. Знайти геодезичні лінії на поверхні $\bar{r} = (ch u\cos v, ch u\sin v, u)$.

(*Відповідь:* $v = \int\frac{du}{\sqrt{Cch^2u - 4}}$.)

10.Знайти асимптотичні лінії для поверхні $z = y\cos x$.

(*Відповідь:* $x = C_1$, $y^2\sin x = C_2$.)

РОЗДІЛ III. ЕЛЕМЕНТИ ТОПОЛОГІЇ

Тема 12. Елементи топології

Топологією на множині X називається сім'я τ підмножин множини X, що задовольняє умовам: а) вся множина X і порожня множина $\varnothing$ є елементами сім'ї τ; б) об'єднання довільної множини елементів з τ належить τ; в) перетин скінченного числа елементів з τ належить τ.

Пара (X,τ) називається топологічним простором. Топологічний простір будемо позначати також однією буквою X. Елементи з сім'ї τ називаються відкритими множинами. Підмножина A топологічного простору X називається замкненою, якщо її доповнення $X\setminus A$ є відкритою множиною. Замиканням підмножини A топологічного простору X називається перетин всіх замкнених в X множин, що містять A. Замикання множини A будемо позначати через $\bar{A}$.

Околом множини $A\subset X$ називається довільна відкрита множина з простору X, яка містить A (множина A може, зокрема, складатися з однієї точки).

Об'єднанням усіх відкритих множин, які містяться в підмножині A топологічного простору X, називається внутрішністю множини A і позначається $Int_X A$, або $IntA$, або $\overset{\circ}{A}$.

Границею множини A називається множина $\bar{A}\setminus IntA$. Границю множини A будемо позначати через $\dot{A}$.

Відображення f топологічного простору X у топологічний простір Y (чи на топологічний простір Y) називається неперервним, якщо прообраз довільної відкритої множини з Y є відкритою множиною в X. Окрім того, якщо відображення f – взаємнооднозначне і відображення f^{-1} також неперервне, то відображення f називається гомеоморфізмом.

Метрикою на множині X називають функцію $d: X\times X\to R$, для якої виконуються умови:

1^0. $d(x,y)\geq 0$.

$d(x,y)=0$ тоді і тільки тоді, коли $x=y$.

2^0. $d(x,y)=d(y,x), \forall x,y\in X$ (симетричність).

3^0. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y), \forall x,y,z\in X$ (нерівність трикутника).

Число $d(x,y)$ – відстань від точки X до точки $У$. Пара (x,d), де d – метрика на X, називається метричним простором.

Задача 1. Чи є відкритою множиною в R^1 будь-який відкритий проміжок $]a,b[$?

Є, бо кожний $]a,b[$ є околом своєї середини.

Задача 2. Чи є круги відкритими множинами в R^2?

Розв'язування.

На R^2 круги є відкритими множинами, бо околами служать внутрішності кругів.

Задача 3. Нехай A – множина точок, що лежать на сторонах трикутника в, R^2, U і V – доповнення до A. Чи будуть відкритими множинами A, U і V?

Розв'язування.

Для $x\in U$ окіл $N(x,r)\in U$, якщо r менше, ніж відстань від x до сторін трикутника A. Отже, U – відкрита в R^2.

Аналогічно V – відкрита множина R^2.

Але множина A не є відкрита в R^2, бо для довільної точки $z\in A$ жоден окіл $N(z,r)$ не міститься в A.

Відповідь: U і V – відкриті.

Задача 4. Чи є в R^3 відкритими сфера, множина точок поза кулею і всередині кулі?

Розв'язування.

В R^3 сфера не є відкрита, а дві інші множини є відкритими, бо околи їх точок містять точки цих множин.

Задача 5. Знайти внутрішність і замикання вказаних проміжків L на числовій прямій.

1) $[a,b]$; 3) $(a,b]$; 5) $[a,\infty)$; 7) (a,∞); 9) $(-\infty,\infty)$.

2) $[a,b)$; 4) (a,b); 6) $(-\infty,b]$; 8) $(-\infty,b)$;

Розв'язування.

1) $\overset{\circ}{L}=(a,b)$, $\bar{L}=L$;

2) $\overset{\circ}{L}=(a,b)$, $\bar{L}=[a,b]$;

3) $\overset{\circ}{L}=(a,b)$, $\bar{L}=[a,b]$;

4) $\overset{\circ}{L}=(a,b)$, $\bar{L}=[a,b]$;

5) $\overset{\circ}{L}=(a,\infty)$, $\bar{L}=[a,\infty)$;

6) $\overset{\circ}{L}=(-\infty,b)$, $\bar{L}=(-\infty,b]$;

7) $\overset{\circ}{L}=(a,\infty)$, $\bar{L}=[a,\infty)$;

8) $\overset{\circ}{L}=(-\infty,b)$, $\bar{L}=(-\infty,b]$;

9) $\overset{\circ}{L}=(-\infty,\infty)$, $\bar{L}-(-\infty,\infty)$.

Задача 6. Знайти всі топології у множині, що складається з двох елементів.

Розв'язування.

Нехай $A=\{a,b\}$, тоді $T_1=\{A\}, T_2=\{0,A\}, T_3=\{\varnothing,\{a\},A\}, T_4=\{\varnothing,\{b\},A\}$.

Задача 7. Чи є еліпсоїд гомеоморфний сфері?

Розв'язування.

Так. Сферу розмістити так, щоб її центр співпадав з центром еліпсоїда і здійснити проектування еліпсоїда на сферу із центра (центральне проектування точок).

Задача 8. Довести, що однопорожнинний гіперболоїд гомеоморфний еліптичному циліндру.

Розв'язування.

Розмістити ці поверхні так, щоб їх осі співпадали і зробити паралельне проектування з осі.

Задача 9. Чи є функція $d(x,y)=|x-y|$ метрикою в множині дійсних чисел?

Розв'язування.

$d(x,y)=|x-y|$, $x,y\in R$.

Перевіримо виконання аксіом $1^0, 2^0, 3^0$.

1. $d(x,y)=|x-y|>0$.

1. $d(x,y)=|x-y|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$.

2. $d(x,y)=|y-x|=|x-y|=d(x,y)$.

3. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

$|x-y|\le|x-z|+|z-y|$

$|x-y|=|x-z+z-y|\le|x-z|+|z-y|$, оскільки $|a+b|\le|a|+|b|$ для $a,b\in R$.

Отже, усі аксіоми виконуються.

Відповідь: дана функція є метрикою на R.

Задача 10. Чи є в множині дійсних чисел функція $d(x,y)=\sin^2(x-y)$ метрикою?

Розв'язування.

1. $d(x,y)=\sin^2(x-y)\ge 0$

$\sin^2(x-y)=0\Rightarrow x-y=\pi n\Rightarrow x=y+\pi n\Rightarrow x\ne y$.

Отже, аксіома 1° не виконується і дана функція не є метрикою.

Задача 11. Чи є в множині натуральних чисел функція $d(x,y)=|x^2-y^2|$ метрикою?

Розв'язування

1. $\rho(x,y)=|x^2-y^2|\ge 0$

$d(x,y)=|x^2-y^2|=0\Leftrightarrow x^2-y^2=0\Leftrightarrow x=y, x=-y$

2. $d(y,x)=|y^2-x^2|=|x^2-y^2|=d(x,y)$.

3. $|x^2-y^2|=|x^2-z^2+z^2-y^2|=|(x^2-z^2)+(z^2-y^2)|\le|x^2-z^2|+|z^2-y^2|$

Отже, $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

Відповідь: дана функція є метрикою.

Задача 12. Чи є функція $d(x,y)=|x-y|^2$ метрикою в множині натуральних чисел?

Розв'язування.

Аксіоми 1° і 2° виконуються.

Перевіримо виконання аксіоми трикутника:

$|x-y|^2 \le |x-z|^2 + |z-y|^2$ – не виконується, бо наприклад, при $x=1$, $y=3$, $z=2$ матимемо: $d(x,y)=4$, $d(x,z)=1$, $d(z,y)=1$, $4>1+1$.

Відповідь: функція $d(x,y)=|x-y|^2$ не є метрикою на R.

Задача 13. Чи є метрикою в R^n функція $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$?

Розв'язування.

$x=(x_1,x_2,...x_n)$, $y=(y_1,y_2,...y_n)$

1. $d(x,y)\ge 0$

$$d(x,y)=0 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0 \Leftrightarrow (x_i-y_i)^2=0 \Leftrightarrow x_i=y_i$$

2. $d(y,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=d(x,y)$.

3. Доведемо, що $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$. (1)

Нехай $(x_i-z_i)=a_i$, $(z_i-y_i)=b_i$. Тоді $x_i-y_i=a_i+b_i$ і нерівність (1) буде рівносильна нерівності $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$. (2)

Піднесемо обидві частини нерівності (2) до квадрату і одержимо: $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$ або

$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \le \sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$, звідки $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$

– нерівність Коші-Буняковського, яка виконується для будь-яких a_i, $b_i \in \mathbb{R}$.

Отже, тоді виконується нерівність (2), а значить і нерівність (1).

Відповідь: дана функція є метрикою.

Задача 14. Чи є метрикою функція $d(x,y)=\begin{cases}0, \text{якщо } x=y\\ 1, \text{якщо } x\ne y\end{cases}$ в множині дійсних чисел.

Розв'язування.

1. $d(x,y) \geq 0$

$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

2. $d(y,x) = 0$, $d(x,y) = 0$, якщо $x = y$. Отже, $d(x,y) = d(y,x)$

Якщо ж $x \neq y$, то $d(x,y) = d(y,x) = 1$.

3. Якщо $x = y$, то $d(x,y) = d(x,z) = d(y,z) = 0$, тоді $0 \leq 0 + 0$. Якщо $x \neq y$, то $d(x,y) = d(z,x) = d(z,y) = 1$ і тоді $1 \leq 1 + 1$.

Отже, усі аксіоми виконуються.

Відповідь. дана функція є метрикою.

Задачі для самостійної роботи

1. Довести, що функція $d(x,y) = (x-y)^2$ не є метрикою на множині R.
2. Чи є метрикою на множині R функція $d(x,y) = |x-y|$? *(Відповідь: так)*
3. Чи є метрикою функція $d(x,y) = \sqrt{|y-x|}$ на множині R?*(Відповідь: так)*
4. Довести, що множина всіх функцій, обмежених на $[a,b]$ утворює метричний простір, якщо $d(x,y) = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |\varphi(t) - \psi(t)|$
5. Довести, що функція $d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x = y \\ |x| + |y|, \text{якщо } x \neq y \end{cases}$ є метрикою на R.
6. Довести, що функція $d(x,y) = x^2 + y^2$ не є метрикою на R.
7. Довести, що функція $d(x,y) = |x-y| + 1$ не є метрикою на R.
8. Знайти внутрішність і замикання множин на R:

а) $A = (0, \sqrt{2})$, б) $B = [0, \sqrt{2}]$, в) $C = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, г) $D = [2, \sqrt{3}]$.

Література

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 234 с.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 341с.
3. Атанасян Л.С. Сборник задач по геометрии, Ч. II – М., 1975. – 210 с.
4. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч. II – М.: Просв., 1987. – 196 с.
5. Базылев В.Т. Сборник задач по геометрии, Ч. II – М.: 1980. – 178 с.
6. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия, Ч. II – М.: 1975. – 198 с.
7. Кованцов и др. Дифференциальная геометрия. Топология. Тензорный анализ. Сб. задач. – М.: Высшая школа, 1982. – 197 с.
8. Норден Л.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: 1958. - 157 с.
9. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: 1958. – 165с

Навчально-методичне видання

Юрій Галь, Уляна Добош, Ірина Корнейчук

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Навчально-методичний посібник

для фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Бакалавр" спеціальностей "Математика", "Математика та основи економіки", "Математика та фізика"

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

Головний редактор
Ірина Невмержицька
Редактор
Іванна Біблий
Технічний редактор
Наталя Кізима
Коректор
Світлана Бецко

Здано до набору 20.04.2009 р. Підписано до друку 18.05.2009 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 4.82. Зам. 51.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12. 04. 2005 р.) 82100, Дрогобич, вул. І.Франка, 24, к.43, тел. 2 – 23 – 78.