

Дрогобицький державний педагогічний  
університет імені Івана Франка  
кафедра фізики та інформаційних систем

*Віктор Британ*

# ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

Частина 1

*Навчальний посібник*



Дрогобич 2023

**УДК 537**  
**Б 87**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 8 від 15 червня 2023 р.)

***Рецензенти:***

**Попович Володимир**, доцент кафедри технологічної та професійної освіти Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук;

**Кузик Олег**, доцент кафедри фізики та інформаційних систем Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, кандидат фізико-математичних наук.

**Відповідальний за випуск:**

**Лешко Роман**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Електрика та магнетизм. Частина 1.** Дрогобич :  
**Б 87** ДДПУ ім. І. Франка, 2023. 252 с.

Навчальний посібник “Електрика та магнетизм” написаний відповідно до робочої програми навчальної дисципліни “Загальна фізика” для підготовки фахівців бакалаврського рівня вищої освіти спеціальностей 014 Середня освіта (Фізика) і 104 Фізика та астрономія, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

У посібнику (частина 1) основна увага відведена з’ясуванню механізму електричних і магнітних явищ, що ґрунтується на експериментальних фактах а їх інтерпретація побудована в основному на класичних поглядах.

Бібліографія 8 назв.

# З М І С Т

Передмова .....	6
<b>РОЗДІЛ I. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ</b>	
1. Електричні заряди .....	7
2. Взаємодія нерухомих зарядів. Закон Кулона та експериментальні методи його перевірки .....	8
3. Польове трактування взаємодії нерухомих зарядів .....	16
4. Електростатичне поле .....	18
5. Зображення електричного поля .....	21
5А. Приклади розрахунку сили взаємодії електричних зарядів .....	25
6. Потік вектора напруженості електричного поля .....	32
7. Теорема Гауса .....	35
7.1. Коли справедлива теорема Гауса? .....	40
8. Диференціальна форма закону Кулона .....	41
8.1. Границі застосування поняття поля нерухомого заряду ....	43
9. Застосування теореми Гауса .....	44
10. Поняття про диполь. Електричне поле диполя .....	51
<b>РОЗДІЛ II. ПОТЕНЦІАЛЬНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ</b>	
11. Робота переміщення заряду в електричному полі. Потенціальність електричного поля .....	61
12. Потенціальна енергія заряду в електростатичному полі ....	64
13. Який зміст має "поле в даній точці"? .....	67
14. Потенціал електростатичного поля .....	68
15. Потенціальний зв'язок між напруженістю електричного поля і потенціалом. Еквіпотенціальні поверхні .....	73
16. Приклади розрахунку потенціалу електричного поля заряджених тіл .....	79
16.1. Потенціал електричного поля зарядженої пластини .....	79
16.2. Потенціал електричного поля рівномірно зарядженої нитки .....	81
16.3. Потенціал поля диполя .....	82
16.4. Потенціал електричного поля рівномірно зарядженої сфери .....	84

16.5. Потенціал електричного поля зарядженої пластинки певної товщини .....	86
17. Дослід Міллікена .....	88
18. Рівняння Пуасона і Лапласа .....	90
19. Розподіл заряду в провіднику .....	92
20. Густина заряду на поверхні провідника .....	96
21. Провідники в електричному полі .....	101
22. Чому напруженість електричного поля на поверхні зарядженого провідника більша, ніж зарядженої площини? .....	105
23. Метод зображень .....	107
24. Електроємність провідників. Конденсатори .....	113
25. Потенціальні і ємнісні коефіцієнти .....	122
26. Сполучення конденсаторів .....	125
27. Енергія взаємодії точкових зарядів .....	127
28. Енергія зарядженого конденсатора .....	131
29. Енергія і густина енергії електростатичного поля .....	132
30. Енергія диполя в електричному полі .....	135
31. Теорема Ірншоу .....	137

### ***РОЗДІЛ III. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ДІЕЛЕКТРИКАХ***

32. Поляризація діелектриків .....	140
33. Основи фізики поляризації діелектриків .....	143
34. Теорема Гауса для поля в діелектрику .....	153
35. Умови для векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі двох діелектриків. Заломлення ліній індукції електростатичного поля .....	159
36. Діелектрична проникність діелектриків .....	164
а) діелектрична проникність неполярних діелектриків.....	164
б) діелектрична проникність полярних діелектриків.....	166
37. Метод дзеркальних зображень для полів у діелектрика.....	169
38. Енергія електростатичного поля при наявності діелектрика .....	175
39. Енергія поляризованого діелектрика .....	176
40. Сегнетоелектрики .....	178
41. П'єзоелектрики .....	183
42. Механічні сили, при наявності діелектриків.....	188
42.1. Розглянемо спочатку, якою є повна енергія системи .....	188
42.2. Розглянемо приклади розрахунку дії сил на діелектрики	

в електричному полі за зміною електричної енергії.....	190
42.3. Розглянемо ще один приклад розрахунку пндемоторних сил .....	191
43. Електричне поле в різних інерціальних системах відліку .....	195
43А. Непотенціальність електричного поля точкового заряду .....	199

#### ***РОЗДІЛ IV. ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ***

44. Поняття про електричний струм .....	205
45. Характеристики електричного струму .....	207
46. Рівняння неперервності .....	210
47. Сторонні сили .....	212
48. Електрорушійна сила .....	216
49. Закон Ома .....	219
50. Робота і потужність електричного струму. Закон Джоуля-Ленца .....	229
51. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа .....	232
52. Вільні електрони в металах .....	239
53. Рух електронів в металі .....	245
Список використаних джерел .....	251

## ПЕРЕДМОВА

Як відомо, фізика є основою спеціальних і світоглядних знань майбутніх учених, учителів, інженерів, філософів, лікарів і людей інших професій.

Посібник написано в основному відповідно до чинних програм з курсу загальної фізики для закладів вищої освіти, тобто традиційно. Однак зроблена спроба деякі електричні і магнітні явища пояснити більш широко, введено елементи історії становлення фізичних теорій. Автор намагався відійти від тезового викладу, що часто призводить до заучування студентами окремих положень без їх глибокого розуміння.

Основна увага в посібнику зосереджена на з'ясуванні механізму електричних і магнітних явищ, яке ґрунтується на експериментальних фактах а їх інтерпретація побудована в основному на класичних поглядах. Однак при поясненні багатьох явищ зроблено спробу пов'язати класичну фізику електричних і магнітних явищ з основними положеннями теорії відносності і квантової фізики.

Обсяг посібника достатній для вивчення курсу фізики "Електрика і магнетизм" у педагогічних та інженерних закладах вищої освіти. Він може бути корисним для учителів, інженерів та спеціалістів інших професій.

## РОЗДІЛ I

### ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

#### 1. Електричні заряди

Крім гравітації, у природі існує особливий вид взаємодії – *електромагнітна*, прикладом якої можуть слугувати притягнення або відштовхування наелектризованих тіл. Давно відомо: якщо янтар потерти об шерсть, то він набуває властивості притягування легких предметів. Однак тільки у кінці XVIII ст. англійський лікар Джільберт детально дослідив це явище і виявив, що аналогічними властивостями володіють й інші речовини. Тіла, які мають таку саму властивість, як янтар, він назвав наелектризованими (від грецького *електрон* – янтар). Електричні заряди у деяких тілах можуть вільно переміщатися між різними частинами тіла, а в інших – ні.

Якщо зарядити два легкі тіла, підвішені на ізолюючих шовкових нитках, скляною паличкою, натертою шовком, то обидва тіла відхиляться. Те саме спостерігається і при зарядженні тіл ебонітовою паличкою натертою мішковиною. Проте якщо одне тіло зарядити скляною паличкою, а інше – ебонітовою, то вона притягуються одне до іншого. Це означає, що заряди відрізняються за якістю. Заряди, які виникають на склі, потертому об шовк, називаються *додатними*, а заряди, які виникають на ебоніті, потертому об мішковіну, – *негативними*. Відповідно *однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються*.

## 2. Взаємодія нерухомих зарядів. Закон Кулона та експериментальні методи його перевірки

З часу відкриття електричних зарядів була відома і їхня взаємодія. Проте початок кількісного вивчення електричних явищ належить до кінця XVIII ст., коли в 1785 р. французький фізик Кулон на досліді встановив закон взаємодії електричних зарядів.

Для зарядів, розміщених на тілах довільних розмірів, такий закон у загальному вигляді дати важко, оскільки сила взаємодії зарядів протяжно заряджених тіл залежить від, форми і взаємного розташування. Однак форма і взаємне розташування зарядів перестають впливати на взаємодію заряджених тіл, якщо їхні розміри значно менші від відстані між ними. Тому закон взаємодії електричних зарядів, який мав би загальне значення, можна установити тільки для точкових зарядів. Але електричні заряди завжди пов'язані з тілами певних розмірів. Тому ніяких точкових зарядів у математичному розумінні точки бути не може.

Під точковим у фізиці розуміють такий заряд, просторова протяжність якого є досить малою, і нею у цій задачі можна знехтувати.

Електростатичну взаємодію, тобто взаємодію нерухомих зарядів Кулон досліджував за допомогою чутливих крутильних терезів. У них на тонкій кварцовій нитці був підвішений горизонтальний стержень із маленькою зарядженою кулькою на кінці. Друга заряджена кулька підносилася до першої на деяку відстань у тій самій горизонтальній площині (рис. I.1). У результаті електростатичних сил притягання або відштовхування пружна нитка закручувалася на деякий кут  $\alpha$ , величина якого визначалася силою взаємодії між зарядами. Перед вимірюванням величина кута  $\alpha$  була проградуйована



залежно від величини сили, прикладеної до кульки. Радіуси кульок були настільки малими, що їх розмірами в порівнянні з відстанню між ними можна було знехтувати, і вважати їх точковими. Величину зарядів кульок можна було змінювати, зокрема зменшувати у відоме число разів приводячи їх у контакт із такими ж незарядженими кульками.

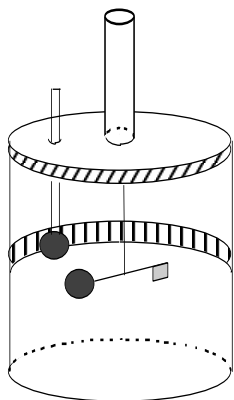


Рис. I.1

У результаті проведених дослідів, Кулон прийшов до висновку, що сила взаємодії двох точкових зарядів напрямлена вздовж прямої, яка з'єднує заряди й обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$

Залежність сили взаємодії  $F$  від величини зарядів можна було дослідити шляхом відомої зміни заряду заряджених кульок, не змінюючи відстані між ними. Якщо, наприклад, до зарядженої кульки торкнутися такою ж незарядженою, то заряд першої зменшується удвічі. Поміщаючи тепер цю кульку на вихідну відстань, можна було переконатися, що сила взаємодії між ними також зменшилась удвічі. Зменшуючи таким способом заряд кульки у два, чотири і більше разів, з'ясували, що сила взаємодії між зарядами зменшувалася у стільки ж разів.

Точніше дослідити залежність сили взаємодії між зарядами від їх величини, можна було таким підходом. Заряджені кульки назвемо А й Б і виміряємо силу взаємодії між їх зарядами. Нехай вона буде дорівнювати  $F_{АБ}$ . Замінімо тепер кульку Б іншою – В і виміряємо силу

взаємодії їх зарядів  $F_{Ae}$ . Відстань між кульками в обидвох випадках є однаковою.

Якщо згодом довільним способом змінити заряд кульки А і знову виміряти силу взаємодії заряду кульки А із зарядами кульок Б і В, то одержимо різні сили взаємодії. Залишиться А, а це означає, що відношення цих сил залежить тільки від зарядів кульок Б і В. Тому можна вважати, що це відношення дорівнює відношенню величин зарядів обидвох кульок. Тобто,

$$\frac{F_{A3}}{F_{Ae}} = \frac{q_3}{q_e}.$$

Цей вираз і є визначенням відношення величин двох зарядів і вказує спосіб порівняння зарядів.

Одержаний результат показує, що сила взаємодії пропорційна заряду однієї із кульок (А). Але оскільки обидві кульки в цих дослідах рівноцінні, то виходить, що сила взаємодії між зарядами пропорційна величині кожного із зарядів  $q_1$  і  $q_2$ .

Отже, сила взаємодії двох точкових зарядів дорівнює:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.1)$$

Це і є закон Кулона.  $k$  – коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибору системи одиниць.

Фізичним змістом цього закону є твердження про обернену залежність сили взаємодії двох зарядів квадрата відстані між ними і про адитивність дії електричних зарядів, тобто незалежність сили взаємодії двох зарядів від наявності інших. Тому незалежно від числа зарядів, що входять до системи, закон Кулона можна використовувати для визначення сили взаємодії кожної пари. А сила, з якою

система зарядів діє на деякий заряд, який не входить до цієї системи, дорівнює векторній сумі сил, з якими діє на даний заряд кожен із зарядів системи.

Тобто

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i .$$

Закон Кулона був установлений прямим вимірюванням сил взаємодії між зарядженими тілами, розміри яких були меншими від відстані між ними. Оскільки точність досліду була невисокою, то виникла потреба перевірки цього закону. Однак більш точне вимірювання сили взаємодії між зарядами не було можливим, оскільки в розпорядженні експериментаторів не було нерухомих точкових зарядів. Тому з результатами експерименту порівнювалися наслідки із закону Кулона, і на цій основі робилися висновки про межі його застосування. Оскільки закон Кулона входить до числа експериментальних фактів, на основі яких будувалося вчення про електрику, то на перевірку меж його дії, були спрямовані значні зусилля експериментаторів.

Першу експериментальну перевірку закону обернених квадратів виконав визначний англійський експериментатор Генрі Ковендіш у 1772 р., тобто десь за 13 років до досліджень Кулона. Однак робота Ковендіша не була опублікована і залишалася невідомою упродовж більше 100 років.

За теорією тяжіння, однорідний сферичний шар речовини в порожнині, оточений цим шаром, не створює ніякої сили. У перенесенні цієї теорії на взаємодію зарядів впливало, що якщо точкові електричні заряди взаємодіють за законом обернених квадратів відстаней, то сферичні шари зарядів також не створюють. Нехай деякий заряд

буде рівномірно розподілений поверхнею сфери з поверхневою густиною  $\sigma$  (рис. I.2).

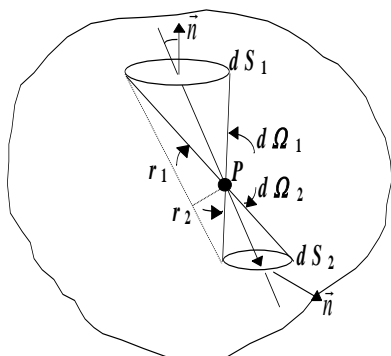


Рис. I.2

Візьмемо довільну точку  $P$  всередині однорідно зарядженої сфери і побудуємо вузький конус, який починається у точці  $P$ . Заряди, які розміщені на поверхні  $dS_1$  і  $dS_2$ , на пробний заряд  $q$  в точці  $P$  створюють протилежно напрямлені сили

$$dF_1 = q \frac{\sigma dS_1 \cos(\vec{n}_1, \vec{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1^2},$$

$$dF_2 = q \frac{\sigma dS_2 \cos(\vec{n}_2, \vec{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{dS_1 \cos(\vec{n}_1, \vec{r}_1)}{r_1^2} = d\Omega_1, \quad \frac{dS_2 \cos(\vec{n}_2, \vec{r}_2)}{r_2^2} = d\Omega_2,$$

де  $d\Omega_1$  і  $d\Omega_2$  – тілесні кути, які опираються на  $dS_1$  і  $dS_2$ . За побудовою  $d\Omega_1$  і  $d\Omega_2$  рівні між собою. Це означає, що за модулем сили  $dF_1$  і  $dF_2$  також рівні, а враховуючи те, що на поверхні  $dS_1$  і  $dS_2$  розміщуються однойменні заряди – протилежні за напрямом. У результаті відбувається взаємна компенсація сил від усіх пар протилежно розміщених елементів поверхні і результуюча

сила, що діє на пробний заряд у точці  $P$ , всередині рівномірно зарядженої сферичної поверхні, дорівнює нулю.

Отже, бачимо, що теорема про відсутність сферичної рівномірно зарядженої поверхні на пробні заряди, які розміщені всередині сфери, є наслідком закону Кулона – обернено пропорційності сили взаємодії квадрату відстані між зарядами.

Експериментальна перевірка цієї теореми, як зауважив Прістлі, може бути доведенням самого закону Кулона, оскільки така непряма перевірка може бути виконана з більшою точністю, ніж пряме вимірювання сил взаємодії. Таке дослідження виконав Кавендічі, а пізніше – Максвелл.

У досліді Кавендіша Металева куля 1 (рис. I.3) була закріплена на ізолюваній підставці 2. Дві металеві півсфери 3, ізолювані від землі, були закріплені на рухомих підставках і могли складати одну сферу, яка охоплює кулю 1. За допомогою отвору можна було вставляти дротину 4, підвішену на ізолюючій нитці 5, і з'єднати кулю та півсферу, не розряджаючи приладу.

При проведенні досліді півсфери 3 склали разом, з'єднували за допомогою дротини 4 і 3 і кулю 1 і заряджали. Ступінь зарядженості сфери контролювали електрометром. Після зарядки провідником 4 за допомогою нитки 5 забирали, обидві півсфери розсували і розряджали, з'єднуючи їх із землею. Після цього електрометр приєднували до кулі і перевіряли ступінь її зарядженості. Як правило, вона завжди була заряджена.

Результати своїх вимірювань вони представили у такій формі. Якщо прийняти, що сила взаємодії точкових зарядів  $F \sim \frac{1}{r^n}$ , то  $n$  може відрізнятись від 2 за

вимірюваннями Кавендіша не більше, ніж на  $2 \cdot 10^{-2}$ , а за Максвеллом – не більше, ніж  $5 \cdot 10^{-5}$ .

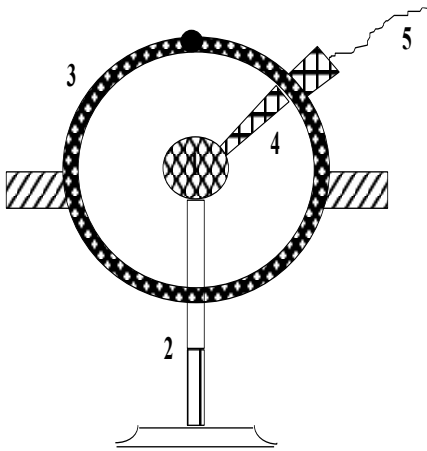


Рис. I.3

Реальним є знаходження відстаней, із яких закон Кулона починає бути неточним, а також установлення дійсного закону сил, які можуть змінити закон Кулона на відстанях. На сьогодні встановлено, що закон Кулона виконується до відстаней десятків сантиметрів.

Доведено також, що закон Кулона виконується у широких межах малих відстаней аж до відстаней  $10^{-13}$  см.

Формулою (2.1) виражено величину сили взаємодії двох точкових зарядів. Для того, щоб виразити її напрям, закон Кулона треба записати у векторній формі

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad (2.3)$$

$F_{12}$  – вектор сили, що діє на заряд 2 зі сторони заряду 1, а  $r_{12}$  – радіус вектор, напрямлений від заряду 1 до заряду 2.

Отже, згідно із законом Кулона, сила електростатичної взаємодії між двома точковими зарядами прямо пропорційна добутку величин цих зарядів, обернено пропорційна квадрату

відстані між ними і напрямлена вздовж прямої, яка проходить через точки розміщення зарядів.

Оскільки сили взаємодії між нерухомими точковими електричними зарядами напрямлені по прямій, що проходить через точки місця розміщення зарядів, то вони належать до центральних сил.

Одиницею вимірювання електричного заряду в системі СІ є кулон (*Кл*). Це – похідна одиниця і визначається як заряд, що проходить за 1 с через поперечний переріз провідника, в якому протікає постійний електричний струм величиною в 1 А.

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}.$$

У системі одиниць СІ  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Тому закон Кулона в системі одиниць СІ записують у вигляді:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Тут  $\epsilon_0$  – деяка стала, яка залежить від вибору системи одиниць.  $\epsilon_0$  має певну розмірність і називається електричною сталою або абсолютною діелектричною проникністю вакууму.

Сила взаємодії двох зарядів величиною по одному кулону кожний, що розміщені у вакуумі на відстані 1 м, дорівнює  $9 \cdot 10^9 \text{ Н}$ . Тоді

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{М}} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}.$$

Елементарний заряд, виражений у кулонах, дорівнює  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

### 3. Польове трактування взаємодії нерухомих зарядів

При дослідженні сил взаємодії електричних зарядів виникає питання природи їх передачі від одного до іншого.

У процесі розвитку фізики сформулювалися два підходи до відповіді на питання про передачу і природу сил взаємодії електричних зарядів. Перший із них базувався на передбаченні того, що тілам властива якість діяти на інші тіла на відстані без участі проміжних тіл або середовищ. Тобто передбачалось, що дія сил може передаватися від одного тіла до іншого через пустоту і притому миттєво. Ця теорія отримала назву теорії або принципу далекодії.

Вона в математичному відношенні досягла високого ступеня досконалості і довготривалості завдяки працям Лапласа, Ампера, Гауса, Остроградського, Кірхгофа й інших. Ця теорія відрізнялась формальною простотою і ясністю вихідних математичних положень і зовсім не допускала сумнівів щодо уявлень стосовно фізичної природи електричних сил. Її базою були тільки емпіричні факти і їх узагальнення. З точки зору цієї теорії при наявності тільки одного заряду, ніяких змін у навколишньому просторі не відбувається.

Проте хоч кількісне узгодження теорії з експериментом у досліджуваній області явищ не може вважатися достатнім доведенням правильності концепції безпосередньої дії на відстані, теорія далекодії проіснувала до останньої чверті XIX ст.

Однак самобутній розум Фарадея не підкорився формальним ідеям математиків. Він не міг примиритися з думкою, що тіло може виробляти безпосередню дію у тих місцях, в яких воно не розміщується і які відділені від



нього абсолютно пустим простором. Тому запропонував нову концепцію передачі взаємодії.

Згідно із Фарадеєм, дія одного тіла на інше може здійснюватися або безпосереднім дотиком, або її передачею через проміжне середовище.

При електризації, тіл у навколишньому ефірі виникають певні зміни, подібні до пружних деформацій і пов'язаних із ними натягів і тисків. Такими натягами і тисками Фарадей пояснював електричні, а також магнітні взаємодії.

За Фарадеєм, сила, яка діє на тіло, є наслідком взаємодії тіла із середовищем в цій точці, у якій воно перебуває. Отже, механізм взаємодії формується у вигляді локальних співвідношень.

Фарадей не представляв математичних обґрунтувань механізмів взаємодії, тому спробу математичного формулювання механічної картини передачі взаємодії виконав Максвелл. Він спробував подати сили електромагнітної взаємодії у вигляді сил, зумовлених натягами і тисками в ефірі. Проте ці зусилля не увінчались успіхом. Вони переконали фізиків наступних поколінь у принциповій неможливості механічної картини світу. Пружні сили самі виявилися результатом електричної взаємодії між електрично зарядженими частинками, із яких побудовані тіла. Ефіру не можна було приписувати механічні властивості і не можна говорити про рух відносно ефіру.

Нова концепція взаємодії заряджених тіл змусила фізиків перенести центр ваги з вивчення зарядів та струмів, які в теорії далекодії були центрами сил, на вивчення навколишнього середовища.

Отже, зародився інший погляд на природу взаємодії зарядів, згідно з яким взаємодія між ними здійснюється як неперервний процес “передачі сил” через простір між

тілами. Таке уявлення передачі взаємодії електричних зарядів, введене Фарадеєм, дістало назву принципу близькодії. Згідно з такою інтерпретацією, сила, що діє на тіло, є наслідком його взаємодії із середовищем у точці, в якій воно розміщене.

Початкове уявлення про посередника взаємодії – гіпотетичний ефір у майбутньому в науці переросло в поняття поля. Поле стало матеріальним середовищем, через яке відбувається взаємодія. Поле електричних зарядів назване електричним полем. Електричне поле надає простору локальну властивість, яка визначає стан інших зарядів, розташованих у цьому просторі.

#### 4. Електростатичне поле

При дослідженні взаємодії електричних зарядів доведемо, що величина, сили взаємодії пропорційна величинам зарядів. А оскільки взаємодія передається через електричне поле як невід'ємне від заряду матеріальне середовище, то це означає, що електричне поле володіє деякою силовою властивістю, яка й зумовлює силу взаємодії.

Для введення силової характеристики електричного поля, розглянемо нерухомий точковий заряд  $q$ , який розміщений у вакуумі. Поле, створене нерухомим зарядом, називається електростатичним. Для зручності його ми будемо називати електричним полем.

Характеристики електричного поля можна дослідити тільки через його дію на інші заряди. Тому в поле заряду  $q$  розмістимо точковий заряд  $q_1$ , який будемо називати пробним. Він має бути настільки малим  $q_1$  щоби своїм електричним полем не змінював поле заряду  $q$ . Виберемо деяку точку в полі заряду  $q$ , яка буде характеризуватися

радіус-вектором  $\vec{r}$  і розмістимо у ній заряд  $q_1$ . Відповідно до закону Кулона, на пробний заряд  $q_1$  буде діяти сила

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{r}. \quad (4.1)$$

З виразу (4.1) видно, що на заряд  $q_1$  діє сила, яка залежить не тільки від величин  $q$  і  $r$ , які визначають електричне поле заряду  $q$ , але і від заряду  $q_1$ . Якщо взяти різні за величиною пробні заряди  $q_1, q_2, q_3, \dots$  і розміщати їх по чергово в ту саму точку електричного поля, то сили  $F_1, F_2, F_3, \dots$  з якими електричне поле діє на них, будуть різні. Проте легко переконатись, що  $F/q_p$  для всіх пробних зарядів буде однаковим і визначається лише величинами  $q$  і  $r$ . Це відношення позначимо через  $E$ .

Отже,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_p} \quad (4.2)$$

$E$  називається напруженістю електричного поля, у цій точці поля.

Якщо в останнє рівняння підставити формулу  $\vec{F}$ , то напруженість електричного поля точкового заряду

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{r}. \quad (4.3)$$

Отже, напруженість електричного поля це вектор, напрям якого збігається з напрямом дії сили поля на позитивний пробний заряд, розміщений у даній точці поля і чисельно дорівнює величині сили, з якою це електричне

поля діє на одиничний позитивний заряд. Вона є силовою характеристикою електричного поля. Одиницею вимірювання напруженості електричного поля в системі СІ є  $V/m$ .

Розглянемо напруженість електричного поля системи точкових зарядів і зарядженого тіла, заряд на якому не можна прийняти за точковий.

Оскільки взаємодія зарядів має адитивний характер і у їх системі можна виділити взаємодію кожної пари, то це означає, що можна визначити і напруженість електричного поля кожного заряду, зокрема.

Нехай маємо систему точкових зарядів  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Сила  $F$ , яка буде діяти на заряд  $q_0$ , розміщений у даній точці, дорівнює геометричній сумі сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , з якими кожен заряд системи діє на  $q_0$ .

Тобто

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (4.4)$$

Розділимо кожен із доданків цього виразу на  $q_0$  і отримаємо сумарну напруженість електричних полів, створюваних кожним зарядом системи в даній точці.

$$\frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{\vec{F}_1}{q_0} + \frac{\vec{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (4.5)$$

Рівняння (4.5) виражає принцип суперпозиції електричних полів, із якого випливає, що результуюча напруженість електростатичного поля системи зарядів у деякій точці виражається геометричною сумою напруженостей, створюваних кожним із зарядів при відсутності інших.

Принцип суперпозиції відображає експериментальний факт, який складає одну із основ учення про електрику. Він становить важливу властивість електричних полів і за своєю роллю у вченні про електрику настільки важливий, як, наприклад, закон Кулона.

Принцип суперпозиції електричних полів є дійсним у широких межах відстаней між зарядами і, можливо, порушується лише на дуже малих відстанях, зокрема, на відстанях порядку розмірів атомних ядер ( $10^{-13}$ ) і менших.

Формула (3.4) дає можливість розрахувати напруженість електричного поля будь-якої системи нерухомих зарядів, а також заряджених тіл, заряд на яких не можна вважати точковим.

Для розрахунку напруженості поля заряджених тіл, крім принципу суперпозиції, необхідно застосувати ще принцип дискретності заряду. Як відомо, заряд  $q$  можна представити як суму окремих його частин  $\Delta q$ , кожен із яких можна прийняти за точковий заряд.

Тобто

$$q = \sum_{i=1}^N \Delta q_i . \quad (4.6)$$

Визначаючи тепер напруженість електричного поля кожного з точкових зарядів  $\Delta q_i$ , напруженість електричного поля всього заряду  $q$  згідно з (4.6) можна подати у такому вигляді

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{\Delta E}_i . \quad (4.7)$$

## 5. Зображення електричного поля

Щоб уявити собі електричне поле, необхідно з кожною точкою простору зв'язати вектор напруженості поля. Сукупність таких векторів утворює поле векторів

напруженості електричного поля подібне до поля векторів швидкості.

При цьому, як уже зазначалося, вектор напруженості електричного поля має напрям сили, із якою поле діє на позитивний заряд. А тому вектор  $\vec{E}$  має напрям від позитивного заряду і до заряду для негативного.

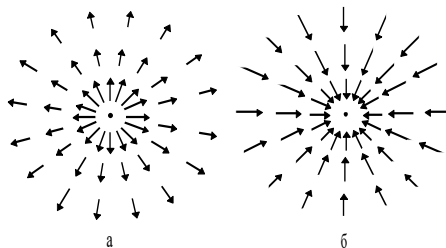


Рис. I.4

Електричне поле заряду можна, собі уявити тільки в тривимірному просторі, оскільки воно і є тривимірною векторною функцією. Для зображення у двовимірному просторі величини і напрямку  $\vec{E}$ , в різних точках простору нанесемо  $\vec{E}$  у вигляді стрілок різних розмірів – довші там, де напруженість поля більша (рис. I.4).

Таким методом на рис. I.4а зображено поле векторів  $\vec{E}$  ізольованого точкового заряду, рівного +3 у довільних одиницях, а на рис. I.4 – поле векторів  $\vec{E}$  точкового заряду величиною 1.

Для одержання повної тривимірної картини поля, можна уявити собі, що рисунок I.4а або I.4б обертається навколо осі симетрії.

Графічне зображення електричного поля за допомогою векторів напруженості не завжди є зручним. У цій моделі вектори напруженості часто утворюють заплутану картину. Більш наглядним і зручним є

запропонований Фарадеєм метод зображення електричних полів за допомогою силових ліній або інакше – ліній напруженості. Щоб зобразити електричне поле за допомогою ліній напруженості, необхідно провести їх так, щоб дотична до них у кожній точці збігалася з напрямом вектора  $\vec{E}$ .

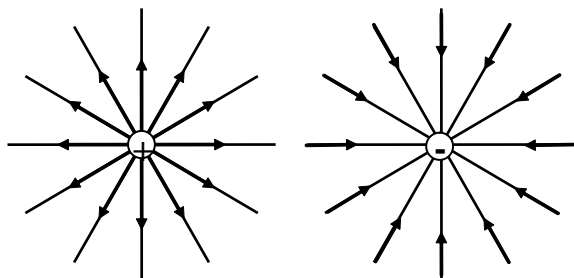


Рис. I.5. а

Лініям напруженості приписується напрям. Він приймається таким, як і напрям вектора напруженості поля  $\vec{E}$  безмежності (рис. I.5). Густина ліній вибирається такою, щоби їх кількість, яка перетинає одиницю поверхні, перпендикулярну до них, була рівною числовому значенню вектора  $\vec{E}$ . Тоді за картиною ліній напруженості можна судити про напрям і величину вектора  $\vec{E}$  в різних точках простору.

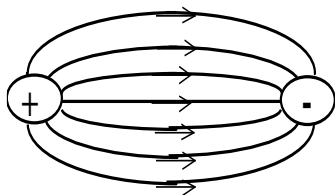


Рис. I.5. б

Для точкового заряду, лінії напруженості поля є сукупністю радіальних, напрямлених від заряду, якщо заряд додатний і до заряду, якщо він – негативний (рис. I.5б). Тобто одним кінцем вони опираються на заряд, а другим – збігають у безмежність.

Правомірно поставити питання, чи змінюється число ліній напруженості з відстанню від заряду? Для цього розмістимо деякий заряд усередині сферичної поверхні довільного радіуса  $r$ . Число ліній напруженості, які будуть перетинати сферичну поверхню, буде дорівнювати добутку густини ліній на площу поверхні сфери. За умовою густини ліній

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

А отже, загальне кількість ліній дорівнює

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (5.1)$$

З останнього виразу видно, що на будь-якій відстані від заряду загальна кількість ліній напруженості електростатичного поля є однаковою. А це ще раз підтверджує, що вони ніде, крім заряду, не починаються і не закінчуються. Ця властивість ліній напруженості є загальною для електростатичних полів, утворених будь-якими нерухомими зарядами.

Важливо зауважити, що, користуючись лініями напруженості для графічного зображення електричного поля, не можна забувати, що ліній поля не існує реально, а вони є тільки засобом зображення реального поля й одержання його якісної картини. Інакше кажучи, картина ліній поля не може замінити його точний математичний опис. Електричне поле точкового заряду є неоднорідним. Воно неоднорідне і для системи точкових зарядів. Це видно на рис. I.6, де наведено силові лінії електричного поля двох різнойменно заряджених кульок.

На рис. I.7 зображено електричне поле двох паралельних металевих пластин. У середній частині



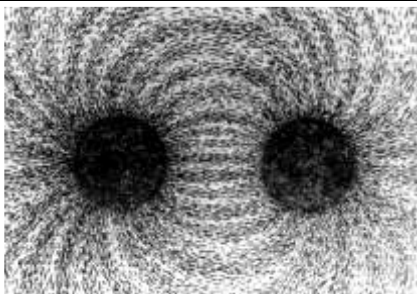


Рис. I.6

пластин лінії  
напруженості мають  
вигляд паралельних ліній,  
розміщених з однаковою  
густиною. А це означає,  
що напруженість поля між  
такими пластинами в  
кожній точці поля є  
однаковою.

Таке поле називається однорідним. Якщо відстань між пластинами дуже мала в порівнянні з розмірами пластин, то практично всі лінії напруженості починаються на одній пластині, а закінчуються – на іншій, тобто електричне поле зосереджене між пластинами.

З рисунка також добре видно, що лінії напруженості перпендикулярні до поверхні пластин. Якби ця умова не дотримувалася, то існували б складові поля, паралельні до поверхонь пластин, які би привели в рух вільні заряди в металі і порушили електростатичну рівновагу.

### 5А. Приклади розрахунку сили взаємодії електричних зарядів

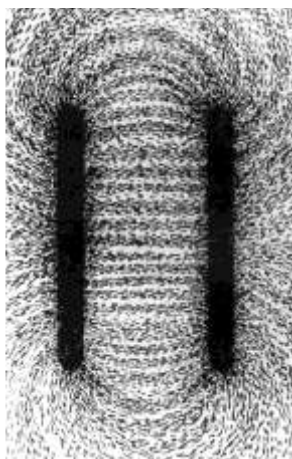


Рис. I.7

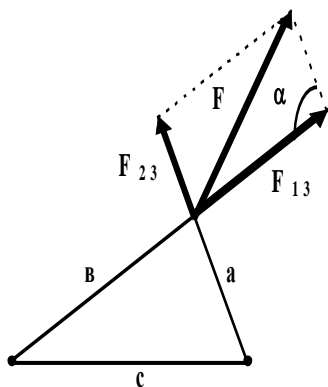
**1. Сила взаємодії між декількома електричними зарядами.** Розрахунок сили взаємодії декількох електричних зарядів ґрунтується на тому, що взаємодія між зарядами має адитивний характер, тобто є результуючою сил взаємодії між окремими зарядами як незалежними одна від одної.

Знайдемо, наприклад, силу, з якою діють два заряди  $q_1$  і  $q_2$ , розміщені на відстані  $a$  один від одного на третій заряд  $q_3$ , що розташований на відстані  $b$  і  $c$  відповідно від першого і другого.

Результуюча сила системи зарядів, що діє на цей заряд зі сторони інших

$$\vec{F} = \sum_{i,n=1}^N \vec{F}_{i,n(i \neq n)}$$

За теоремою косинусів, модуль цієї сили для системи, зображеної на рис. 1.8.



$$F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23} \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \cos(180 - \beta) = -\cos \beta .$$

Тоді

$$F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 + 2F_{13}F_{23} \cos \beta} .$$

Рис. 1.8

Цей вираз дає можливість обчислити силу дії зарядів  $q_1$  і  $q_2$  на заряд  $q_3$ , або на будь-який із них при різному їх розміщенні. Якщо, наприклад,  $\beta = 0$ , то заряд  $q$  розташований на продовженні відрізка, поза зарядами. У цьому випадку

$$F = F_{13} + F_{23} .$$

Якщо  $\beta = 180$ , тобто заряд  $q_3$  знаходиться між зарядами, то:

$$F = F_{13} - F_{23} .$$

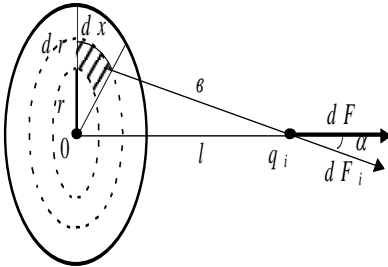
**2. Обчислення сили взаємодії між рівномірно зарядженою площиною і точковим зарядом.** Нехай пластина радіусом  $R$  рівномірно заряджена зарядом  $q$ . На відстані  $l$  від неї розміщений заряд  $q_1$ . Необхідно обчислити силу взаємодії між ними.

Якщо  $R$  і  $l$  співвимірні, то пряме застосування закону Кулона неправомірне. Тому, опираючись на принцип дискретності заряду, заряд  $q$  на пластині поділимо на порції  $dq$ , кожен з яких можна вважати точковим зарядом. Для цього пластину розділимо на елементи площею  $ds$  перпендикуляра. Ширина кільця буде визначатися приростом  $dr$ . Радіальними прямими кільце розділимо на площадки завдовжки  $dx$ . Тому площа площадки (рис. I.9)

$$ds = dr dx,$$

а заряд на ній

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} \cdot ds = \frac{q}{\pi R^2} dr dx.$$



З погляду симетрії, сила, з якою заряджена площина діятиме на точковий заряд, буде спрямована в напрямі перпендикуляра до пластини. Тому всі сили взаємодії між точковими порціями заряду площини, необхідно спроекувати на цей напрям. Із рисунка

видно, що

$$dF = dF_i \cos \alpha; dF_i = \frac{q dq}{4\pi \epsilon \epsilon_0 b^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{l}{b} = \frac{l}{\sqrt{R^2 + r^2}}; d^2 F = \frac{q_1 q_2 l}{4\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 R^2} \frac{dx dr}{(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

$$F = \frac{q q_1 l}{4\pi^2 \varepsilon \varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{dx}{(R^2 + l^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dr = \frac{q q_1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}}} \right].$$

Розглянемо окремі випадки.

а) нехай  $l \ll R$ , тобто заряджена пластина безмежно велика, тоді

$$F = \frac{q q_1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 R^2},$$

$\frac{q}{\pi R^2} = \sigma$  і називається поверхневою густиною заряду.

Отже,

$$F = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot q_1.$$

Порівнюючи одержаний вираз із виразом

$$F = E \cdot q,$$

бачимо, що  $\frac{\sigma}{2\varepsilon \varepsilon_0} = E$  і виражає напруженість електростатичного поля безмежної рівномірно зарядженої площини.

б) нехай  $l \gg R$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}}} \approx 1 - \frac{R^2}{2l^2}.$$

Тоді

$$F = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 l^2},$$

тобто, формула для сили взаємодії зарядженої площини і точкового заряду набуває вигляду формули для сили взаємодії точкових зарядів.

**3. Сила взаємодії між рівномірно зарядженою дротиною і точковим зарядом.** Нехай тонка дротина завдовжки  $l$  рівномірно заряджена зарядом  $q$ . На відстані  $r$  від дротини розташований заряд  $q_1$ . Визначимо силу взаємодії між цими зарядами.

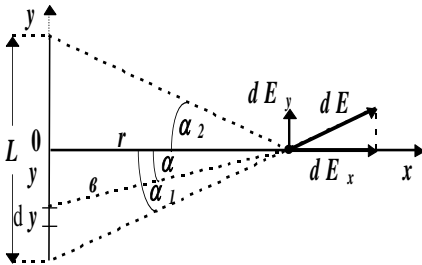


Рис. I.10

У цьому випадку, як і в попередньому, заряд  $q$  не локалізований в одній точці 1. Тому дротину розділимо на елементарні відрізки  $dy$ , заряд  $dq$  на кожному з яких буде точковим. Тоді за законом Кулона визначимо силу взаємодії

між точковими зарядами  $q_1$  і  $dq$ . Її вигідно знаходити за формулою

$$F = E \cdot q_1,$$

тобто, знайти спочатку напруженість електричного поля заряду дротини.

Отже,

$$dF = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 b^2}.$$

Дротину прив'яжемо до системи координат так, як показано на рис. I.10. Тоді  $dE$  можна розкласти на дві складові  $dE_x$  і  $dE_y$ .

$$dE_x = dE \cos \alpha; dE_y = dE \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{r}{b} = \frac{r}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$dq = \frac{q}{L} dy; dE_x = \frac{q \cos^3 \alpha dy}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r^2}; dy = \frac{rd\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$dE_x = \frac{qd\alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r} \cos \alpha d\alpha$$

$$dE_y = \frac{q \sin^3 \alpha dy}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L y^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L y r} \sin \alpha d\alpha$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r} (\sin \alpha_{21} + \sin \alpha_1)$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 L r} (\cos \alpha_{21} - \cos \alpha_1).$$

Розглянемо окремі випадки:

а) якщо дротинка необмежених розмірів, тоді  $E_y = 0$ ,

а

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 Lr} \cdot 2 = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 Lr}.$$

Якщо  $\frac{q}{L} = \gamma$ , де  $\gamma$  – лінійна густина заряду дротини, то

$$E_x = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 Lr}.$$

У цьому випадку напруженість електричного поля є нормальною до дротини. Сила, із якою заряд дротини буде діяти на точковий заряд  $q_1$ , буде дорівнювати

$$F = \frac{\gamma q_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

б) якщо дротина обмежених розмірів і точка О ділить її по половині, то:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  і  $E_y = 0$ :

$$E_x = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \cdot \sin \alpha; F = \frac{\gamma q_1}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \cdot \sin \alpha.$$

в) якщо  $L \ll r$ , то  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow 0$  і  $E_y = 0$ .

Для знаходження  $E_x$ ,  $\sin \alpha$  замінимо його значенням, визначеним із рисунка, припустивши для простоти, що  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Тоді отримаємо

$$E_x = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{L^2 + 4r^2}}.$$

$$\text{Отже, при } L \ll r \quad E_x = \frac{\gamma L}{\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} = \frac{\gamma q}{\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} :$$

Тобто одержуємо формулу напруженості поля точкового заряду. Тоді

$$F = \frac{qq_1}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2} .$$

## 6. Потік вектора напруженості електричного поля

Лінії напруженості електричного поля, вказуючи на його напрям, самі собою не визначають величину напруженості. Однак, як нам уже відомо (4), можна ввести умову, яка би зв'язувала величину напруженості поля з числом ліній напруженості. Для встановлення цього зв'язку довільне поле розіб'ємо на малі області, в яких напруженість поля є величиною сталою, і поле можна вважати однорідним. Перпендикулярно до ліній напруженості поля у цій області розмістимо площадку  $\Delta S_0$ .

Нехай через одиницю поверхні площадки проходять лінії, кількість яких дорівнює числовому значенню напруженості поля в області площадки. Тобто, виконується

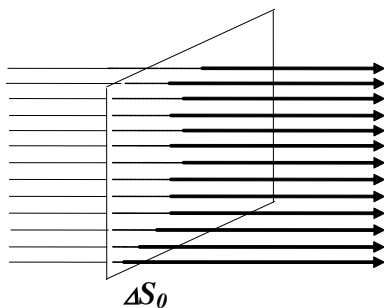


Рис. I.11

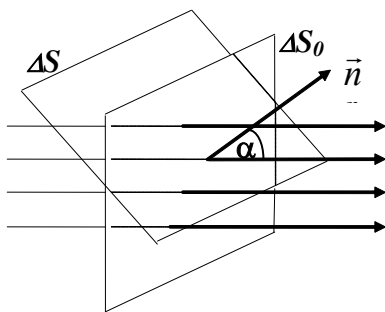


Рис. I.12



умова ( рис. I.11)

$$\frac{\Delta N_E}{\Delta S_0} = E. \quad (6.1.)$$

Цією умовою величина напруженості  $E$  зв'язана з густиною ліній напруженості.

Число ліній напруженості електростатичного поля, яке пронизує деяку поверхню, перпендикулярну до ліній напруженості, називається потоком напруженості електростатичного поля через цю поверхню.

Якщо потік напруженості позначити через  $N_E$ , то площадку  $S$  буде пронизувати елементарний потік  $N_E$ , який дорівнює  $N = E \cdot S$ .

Нехай лінії напруженості поля, що пронизують площадку  $S$ , утворюють кут із нормаллю до поверхні (рис. I.12), а проєкція  $S$  на площину, перпендикулярну до ліній напруженості, дорівнює  $\Delta S_0$ . Врахувавши це, вираз (6.1) запишемо у такому вигляді

$$\Delta N_E = E \Delta S_0 = \Delta S_0 E \cos \alpha .$$

$E \cos \alpha$  – проєкція вектора напруженості поля  $\vec{E}$  на напрям нормалі  $\vec{n}$  до поверхні  $\Delta S$ . Тобто

$$E \cos \alpha = E_n .$$

Відповідно

$$\Delta N_E = E_n \Delta S . \quad (6.2.)$$

Вираз (6.2) визначає елементарний потік ліній напруженості електричного поля, який пронизує довільно орієнтований елемент поверхні  $\Delta S$ .

Знак потоку  $\Delta N_f$  буде залежати від того, який утворюють лінії напруженості поля з напрямом нормалі до поверхні площадки 1, який прийнято за додатний.

Знайдемо потік вектора напруженості  $N_f$  через довільну поверхню  $S$ .

Він дорівнює алгебраїчній сумі елементарних потоків, які пронизують елементи поверхні  $\Delta S$ .

$$N_E = \sum_{\mu=1}^n \Delta N_{E_\mu} = \sum E_n \Delta N_{E_\mu}. \quad (6.3.)$$

Сумування проводиться за всіма елементами поверхні  $\Delta S$ .

Якщо елемент поверхні дорівнює  $dS$ , то потік вектора напруженості

$$dN_E = E_n dS; N_E = \int_S E_n dS. \quad (6.4.)$$

Отже, розглядаючи електростатичне поле у вакуумі, ми ввели потік ліній напруженості електростатичного поля, величина якого  $N$  через поверхню  $S$  визначається рівняннями (6.3) і (6.4). Лінії напруженості поля у вакуумі, як уже відзначалося, володіють властивістю неперервно простягатися від одного заряду до іншого або збігати у безмежність.

Однак картина ліній напруженості змінюється, якщо електричне поле утворене в середовищі, що здатне наелектризуватися. Наприклад, на границі двох однорідних діелектриків в електричному полі виникають зв'язані поверхневі заряди, й частина ліній напруженості на границю не пройдуть неперервно. Деякі з них на поверхневих зв'язаних зарядах діелектриків будуть або

закінчуватися, або починатися. Тому для характеристики електричного поля необхідна і така величина, яка би не залежала від діелектричних властивостей середовища.

Нею є вектор електричного зміщення або вектор електростатичної індукції  $\vec{D}$ , лінії якого в будь-якому середовищі, в тому числі й неоднорідному, будуть поширюватися неперервно.

## 7. Теорема Гауса

Із попереднього параграфа видно, що потік напруженості електричного поля через деяку площу

$$N = \int_S E_n dS, \quad (7.1)$$

де  $E_n$  – проєкція вектор напруженості електричного поля на додатну нормаль до площадки  $dS$ .

Теорема Гауса встановлює математичний зв'язок між потоками напруженості крізь замкнуту поверхню і зарядом, розміщеним в об'ємі, обмеженому поверхнею.

Отже, нехай точковий заряд  $q$  міститься всередині об'єму  $V$ , що обмежується поверхнею  $S$  (рис. I.13).

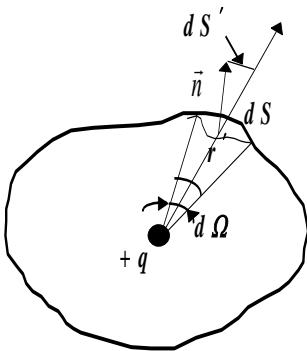


Рис. I.13

вибирається напрям,

Із точки, в якій розміщений заряд, побудуємо на лініях напруженості поля вузький конус, який тягнеться до поверхні, вирізаючи на ній невелику сферичну ділянку  $dS$ . До ділянки  $dS$  поставимо нормаль  $\vec{n}$  і проведемо радіус-вектор  $\vec{r}$  точок на поверхні  $dS$ .

Для замкнутих поверхонь за позитивний завжди збігається з напрямом

зовнішньої нормалі. За законом Кулона, напруженість електростатичного поля у точках на поверхні  $dS$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Нормальна складова вектора  $\vec{E}$

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\left(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}}\right).$$

Тоді

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\cos\left(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}}\right) dS}{r^2}. \quad (7.2)$$

Але

$$\frac{\cos\left(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}}\right) dS}{r^2} = d\Omega,$$

де  $d\Omega$  – тілесний кут, під яким видно елемент  $dS^\circ = dS \cos\left(\hat{\vec{n}}, \hat{\vec{r}}\right)$  із точки розміщення заряду  $q$ .

Тоді потік напруженості електричного поля через поверхню  $S$  буде дорівнювати

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega. \quad (7.3)$$

Враховуючи те, що тілесний кут, під яким видно замкнуту поверхню із точок усередині обмеженого нею об'єму дорівнює  $4\pi$ , тобто  $\int_S d\Omega = 4\pi$ , отримаємо:

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (7.4)$$

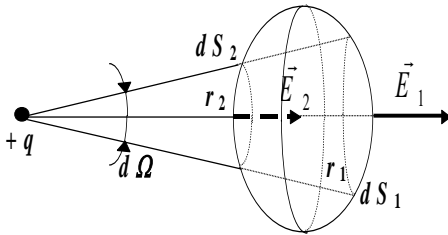


Рис. I.14

Розглянемо тепер потік напруженості електричного поля через замкнуту поверхню  $S$ , якщо точковий заряд  $q$  міститься поза об'єктом, обмеженим даною поверхнею (рис. I.14). Із

точки розміщення заряду побудуємо конус, твірні якого перетинатимуть поверхні замкнутої поверхні. Ми отримаємо два конуси, які вирізають на поверхні площадки  $dS_1$  і  $dS_2$ . Потік напруженості електричного поля через  $dS_1$  і  $dS_2$  буде дорівнювати сумі потоків  $dN_1$  і  $dN_2$ . Величини і знак потоків  $dN_1$  і  $dN_2$  будуть залежати від кутів  $(\hat{n}_1, \hat{r}_1)$  і  $(\hat{n}_2, \hat{r}_2)$ . Якщо, наприклад котрийсь із кутів  $(\hat{n}_1, \hat{r}_1)$  або  $(\hat{n}_2, \hat{r}_2)$  менший  $\frac{\pi}{2}$ , то потік  $dN_1$  або  $dN_2$  будуть мати позитивний знак. І, якщо котрийсь із цих кутів, більший  $\frac{\pi}{2}$ , то  $dN_1$  або  $dN_2$  буде мати від'ємний знак. Із рисунка

видно, що  $dN_1$  і  $dN_2$  є різних знаків.  $dN_2$  має від'ємний знак, а  $dN_1$  – додатний.

Оскільки кожний із потоків визначається за виразом (7.3)

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega, \quad (7.5)$$

то результуючий потік напруженості електричного поля буде визначатися різницею

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_S d\Omega_1 - \int_S d\Omega_2 \right). \quad (7.6)$$

Для обох конусів тілесний кут є спільним, а тому вираз (7.5) дорівнює нулю.

Отже, якщо точковий заряд, розміщений поза об'єктом, обмежений замкнутою поверхнею  $S$ , то потік напруженості через цю поверхню дорівнює нулю:

$$N = 0.$$

Знайдемо потік напруженості  $N$  для системи точкових зарядів, оточених замкнутою поверхнею  $S$ . Як відомо,

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Нехай до системи входять точкові заряди  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Згідно з принципом суперпозиції, напруженість поля  $\vec{E}$  в кожній точці є сумою напруженостей  $\vec{E}_i$  полів, створюваних кожним із точкових зарядів. Тобто:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i .$$

А тому:

$$N = \sum_{i=1}^n \oint_S E_i dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} Q ,$$

де  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$  – сумарний заряд в об'ємі, оточеному поверхнею  $S$ .

Якщо заряд розподілений по об'єму, обмеженому замкнутою поверхнею безперервно, то необхідно ввести об'ємну густину заряду  $\rho$  і заряд  $Q$  представити як:

$$Q = \int_V \rho dV .$$

Тоді теорема Гауса буде мати вигляд

$$N = \sum_{i=1}^n \oint_S E_i dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q . \quad (7.7)$$

1. Чи залежить потік напруженості заряду  $q$  від форми замкнутої поверхні, в якій міститься заряд? (Рис. I.15).

З рисунка I.15 видно, що, якщо поверхня не має гофрованості, то лінії напруженості електричного заряду, оточеного цією поверхнею, перетинають її тільки один раз, як і поверхню сфери. Тому число перетинів дорівнює числу ліній, що виходять із заряду, тобто  $\frac{q}{\varepsilon_0}$ .

Якщо взяти гофровану поверхню (рис. I.15б), то видно, що число перетинів лінії  $\vec{E}$  з поверхнею може бути тільки непарним, причому ці перетини будуть вносити в загальний потік позмінно то додатний, то від'ємний вклад. У кінцевому результаті, скільки би разів ця лінія не перетинала поверхню, результуючий вклад у потік буде дорівнювати або плюс одиниці (для ліній, що виходять назовні (або мінус одиниці) для ліній, що входять усередину).

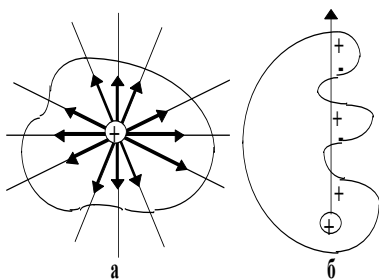


Рис. I.15

Таким чином, якою би не була форма замкнутої поверхні, що оточує точковий заряд  $q$ , потік вектора  $\vec{E}$  через неї є рівним  $\frac{q}{\epsilon_0}$ , тобто не залежить від форми поверхні, що оточує заряд.

Враховуючи

вищесказане, констатуємо, що потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які містяться усередині цієї поверхні, поділеній на  $\epsilon_0$ . Це і є теорема Гауса.

### 7.1. Коли справедлива теорема Гауса?

Очевидно, що всяка теорема є застосованою у випадках тотожних умовам її доведення. У зв'язку з цим справедливість теореми Гауса буде зумовлена зведенням підінтегрального виразу (7.2) до диференціалу тілесного кута  $d\Omega$ . Але можливо тоді, коли напруженість електричного поля  $\vec{E}$  є обернено пропорційною функцією квадрата відстані від точкового заряду. В інших випадках ця теорема вимагає уточнення.



Отже, фізичною основою теореми Гауса є закон Кулона, а тому вона – це його інтегральне вираження.

Закон Кулона за своєю формою не відрізняється від закону всесвітнього тяжіння Ньютона, адже в обох сила взаємодії змінюється обернено пропорційно квадрату відстані. Тому теорема Гауса є справедливою і для гравітаційних полів. Різниця тільки у тому, що заряди можуть бути як додатні, так і від'ємні, а гравітаційні маси – тільки додатні.

## 8. Диференціальна форма закону Кулона

Теорема Гауса, виражена рівнянням (7.7), зв'язує потік напруженості електричного поля  $\vec{E}$  через замкнуту поверхню із величиною заряду, який міститься у ній, тобто зв'язує дві величини, які належать до двох різних точок поля. Тому необхідно надати цій теоремі таку форму, в якій би були зв'язані величини, що належать до однієї точки поля. Щоб задовільнити означену умову, необхідно застосувати цю теорему до безмежно малого об'єму.

Отже, нехай маємо деякий об'єм, у просторі якого розподілений заряд з об'ємною густиною  $\rho(x, y, z)$ . Напруженість електричного поля цього заряду позначимо

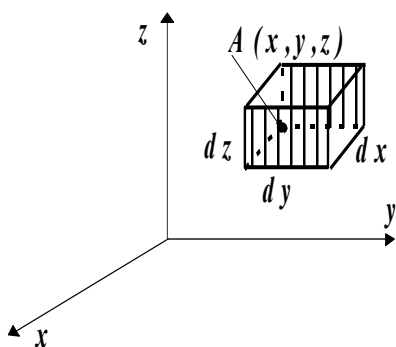


Рис. I.16

через  $\vec{E}$ . Введемо прямокутну систему координат  $x, y, z$ , у якій виберемо довільну точку поля  $A(x, y, z)$ . Проекції вектора  $\vec{E}$  в цій точці на відповідні осі позначимо через  $\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z$ . Розглянемо безмежно малий прямокутний

паралелепіпед з вершиною в точці  $A$  і ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , паралельними до координатних осей (рис. I.16). Визначимо потік напруженості через цю поверхню.

Потік напруженості поля через бокову грань  $dy$ ,  $dz$ , що проходить через точку  $A$ , дорівнює:

$$-\vec{E}_x dydz.$$

Знаком мінус враховано різний напрям зовнішньої нормалі  $dy$ ,  $dz$  і додатного напрямку  $E_x$ .

Через паралельну грань, зміщену вздовж осі  $x$  на  $dx$ , потік напруженості поля буде дорівнювати

$$\left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz.$$

Потік через обидві грані

$$\left( E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right) dydz - \vec{E}_x dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dV.$$

$dV$  – об'єм паралелепіпеда і дорівнює  $dV = dx dy dz$ . Таким самим способом можна визначити потоки напруженостей поля також через інші грані і, додаючи їх, отримаємо потік напруженості поля через всю поверхню паралелепіпеда, тобто повний потік напруженості поля. Він дорівнює

$$N = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV.$$

Величина заряду, який міститься в об'ємі паралелепіпеда, дорівнює  $\rho dV$ . Тому

$$\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho dV. \quad (8.1)$$

Це співвідношення виражає теорему Остроградського-Гауса в диференціальній формі.  $\left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$ , називається дивергенцією вектора і позначається символом  $\text{div} \vec{E}$ .

Дивергенцією цього вектора, як відомо із векторного аналізу, називається сума похідних від складових вектора по відповідних координатах. А тому (8.1) запишемо у такому вигляді

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (8.2)$$

Дивергенція характеризує потужність джерел вектора  $\vec{E}$  всередині даного об'єму. Виконуваних рівняння (8.2), як і теореми Гауса, зумовлена справедливістю закону Кулона. А отже, рівняння (8.2) є диференціальною формою закону Кулона. Його лінійність відображає справедливість принципу суперпозиції для напруженості поля.

### 8.1. Границі застосування поняття поля нерухомого заряду

Як відомо, завдання електростатики – вивчення електричних полів нерухомих зарядів. Проте як створюються нерухомі заряди, невідомо. Передбачається, що заряди утримуються у різних точках простору силами не електростатичного походження, природа яких у процесі електростатичної взаємодії не відіграє ніякої ролі.

Заряди розміщуються на поверхні провідників, але чому вони не покидають її, в електростатиці не вивчається. Є низка інших фактів – учасників процесів, однак не в електростатичних ефектах. Фактично моделі нерухомих елементарних зарядів не існує, а тому таке представлення цієї моделі є ідеалізацією.

Отже, оскільки не існує нерухомих елементарних зарядів, то нема і постійних полів. Проте в класичній теорії електричних явищ спостерігається не поле окремих електричних зарядів, а суперпозиція полів декількох або і багатьох зарядів. Вклад поля окремих елементарних зарядів – незначний. Крім того, напруженість електричного поля визначається як середня величина за деяким фізично малим об'ємом і фізично малим часом. Флуктуації поля є малими. Ці середні значення напруженості поля становлять предмет вивчення класичної теорії електричних і магнітних явищ. Отже, для електростатики істотна не нерухомість зарядів, а сталість у часі електричних полів, тобто полів з безмежно малими флуктуаціями. Така модель вимагає незначного вкладу від окремих елементарних зарядів у поле, яке вивчається. Звідси, наприклад, впливає, що електродинаміка не може бути застосованою до руху окремих електронів в атомі

## **9. Застосування теореми Гауса**

Теорема Гауса дає можливість у багатьох випадках знайти напруженість електрично заряджених тіл, які не можна вважати точковими, не використовуючи важко застосовувану в цих випадках теорію точкового заряду. Для прикладу розглянемо напруженість електричного поля декількох форм заряджених тіл, знання якої у майбутньому є необхідним.

А) напруженість електричного поля безмежної однорідно зарядженої площини. Нехай маємо безмежну

однорідну позитивно заряджену площину. Як міру величини заряду на її поверхні, введемо поверхневу густину заряду  $\sigma$ , яка визначається виразом

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

$dq$  – заряд, який зосереджений у кулі площею  $dS$ . Під площею  $dS$  розуміють фізично безмежно малу ділянку поверхні.

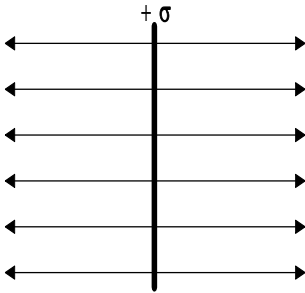


Рис. I.17

Лінії напруженості електричного поля такої зарядженої площини в будь-якій точці є перпендикулярними до площини (рис. I.17). Це впливає із заданого рівномірного розподілу заряду по поверхні площини й закономірностей симетрії. Якщо би, наприклад, лінії напруженості були напрямлені до поверхні під

кутом, то її складова, паралельна до площини, спричинила б переміщення зарядів її поверхнею, що призвело б до порушення рівномірного їх розподілу. Крім того, очевидно, що в симетричних відносно площини точках, напруженість поля однакова за величиною і протилежна за напрямом.

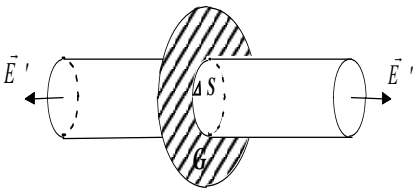


Рис. I.18

Уявімо собі циліндричну поверхню з твірними паралельними лініям напруженості поля, тобто, перпендикулярними до площини, і

основами  $\Delta S$ , розташованими відносно площини симетрично. (рис. I.18).

У силу симетрії  $E' = E'' = E$ . Застосуємо до цієї поверхні теорему Остроградського-Гауса. Через бокову поверхню потік напруженості буде дорівнювати нулю, оскільки нормальна складова напруженості до бокової поверхні  $\vec{E}_n$  в кожній її точці дорівнює нулю. Нормальна складова напруженості до основ циліндра  $\vec{E}_n$  збігається з напрямом  $\vec{E}$  і чисельно їй дорівнює. Тому сумарний потік через поверхню основи циліндра дорівнює  $2E\Delta S$ . У середині поверхні поміщений заряд величиною  $\sigma\Delta S$ . Оскільки за теоремою Гауса, потік напруженості через поверхню, яка оточує заряди, дорівнює їх алгебраїчній сумі, поділений на  $\epsilon_0$ , то

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0}.$$

Звідки

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (9.1)$$

Як видно, у формулу (9.1) не входять розміри циліндра. Це означає, що на будь-яких відстанях від безмежної площини напруженість електричного поля є однаковою за величиною. Напруженість електричного поля від'ємно зарядженої площини буде також виражатися рівнянням (9.1), різниця буде тільки в напрямі вектора напруженості поля.

Якщо заряджена площа буде скінчених розмірів, то формула (9.1) буде справджуватися тільки на відстанях від площини набагато менших розмірів пластини.

Б. Напруженість електричного поля двох паралельних рівномірно заряджених площин. Знайдемо напруженість електричного поля двох паралельних безмежних площин,

заряджених різнойменно з рівною за величиною і постійною поверхневою густиною заряду  $\sigma$ .

З рисунка видно, що вектори напруженостей електричного поля кожної із пластин між пластинами мають однаковий напрям (рис. I.19). Тому, згідно з принципом суперпозиції, напруженість поля між пластинами дорівнює:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

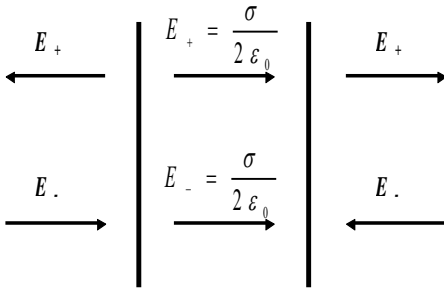


Рис. I.19

Поза об'ємом, обмеженим пластинами, вектори напруженостей мають протилежні напрями, і в результаті додавання результуюча напруженість поля дорівнює нулю.

Отже, електричне поле між двома різнойменно зарядженими пластинами зосереджене в просторі між ними. Якщо напруженість поля у всіх точках цієї області однакова за величиною і за напрямом; то воно називається однорідним. Лінії його напруженості є сукупністю паралельних рівновіддалених прямих.

Одержаний результат наближено справедливий і для площин обмежених розмірів, якщо відстань між ними набагато менша від їхніх лінійних розмірів. Відхилення від однорідності поля між пластинами обмежених розмірів є тільки на краю пластин.

В. Напруженість електричного поля безмежного рівномірно зародженого циліндра. Візьмемо безмежно довгий рівномірно заряджений циліндр радіусом  $R$  (рис. I.20). З погляду симетрії випливає, що лінії

напруженості перпендикулярні до поверхні циліндра і напрямлені вздовж радіальних прямих. Навколо зарядженого циліндра опишемо уявний циліндр радіусом  $r$  і висотою  $h$  і визначимо потік напруженості електричного поля через поверхню уявного циліндра.

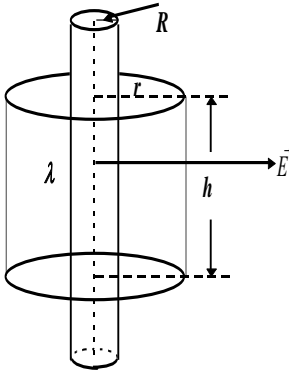


Рис. I.20

Потік напруженості через основи циліндра буде дорівнювати нулю, оскільки вони паралельні до ліній напруженості. А отже, необхідно визначити потік напруженості поля через бокову поверхню циліндра. Вона дорівнює:

$$N = ES = E \cdot 2\pi r h .$$

Подальші розрахунки необхідно проводити, виходячи із необхідності врахування радіуса зарядженого циліндра. Розглянемо спочатку напруженість поля зарядженого циліндра, радіусом  $R$  якого можна знехтувати, тобто задача зводиться до розрахунку напруженості електричного поля безмежно зарядженої нитки ( $R$  – безмежно мала величина).

Тоді на нитці в межах розмірів циліндра міститься заряд  $q = \lambda h$ , і  $\lambda$  – лінійна густина заряду і визначається як

$$\lambda = \frac{dq}{dh} .$$

За теоремою Гауса

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda h .$$

Звідки



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{або} \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{r}.$$

Якщо товщиною зарядженого циліндра знехтувати не можна, то необхідно ввести поверхневу густину заряду на поверхні циліндра  $\sigma$ . Тоді поверхнею уявного циліндра охоплено заряд  $\sigma S = 2\pi R h \sigma$ .

Тоді

$$2\pi R h E = \frac{2\pi R h \sigma}{\epsilon_0}.$$

Звідси

$$E = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}. \quad \text{Або} \quad \vec{E} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} \vec{r}.$$

Якщо  $r < R$ , то ми будемо мати поверхню, усередині якої відсутні заряди, в результаті чого  $E = 0$ .

Отже, всередині рівномірно зарядженого безмежного циліндра електричне поле відсутнє. Напруженість поля із зовні циліндра визначається лінійною густиною заряду й віддаллю від осі циліндра.

Г. Напруженість електричного поля зарядженої сферичної поверхні. Щоб знайти напруженість

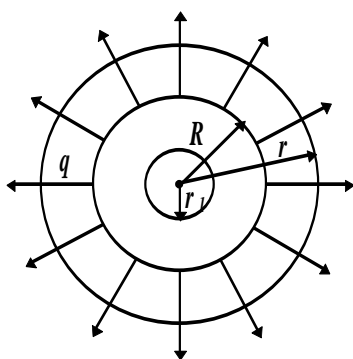


Рис. I.21

електричного поля зарядженої сфери радіусом  $R$ , оточимо її концентрично сферою більшого радіуса  $r$  ( $r > R$ ) і застосуємо до цієї сфери теорему Гауса (рис. I.21). Лінії напруженості електричного поля зарядженої сфери напрямлені радіально, тобто по нормалі до поверхні

сфери. Тому  $\vec{E}_n = \vec{E}$ . Крім того, оскільки заряд на поверхні зарядженої сфери розподілений рівномірно, то напруженість поля  $E$  на сфері є постійною. Потік напруженості електричного поля через поверхню радіусом  $r$  буде дорівнювати

$$4\pi r^2 \cdot E.$$

Якщо сфера заряджена зарядом  $q$ , то

$$4\pi r^2 \cdot E = q \frac{1}{\epsilon_0}.$$

Звідки отримаємо вираз для напруженості електричного поля зарядженої сфери

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Або

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (9.2)$$

Отже, як видно з виразу (9.2), електричне поле зарядженої сфери із зовні сфери тотожне з полем точкового заряду тієї ж величини, розташованого в центрі сфери.

Електричне поле всередині сфери дорівнює нулю. У цьому легко переконатися, якщо вписати у заряджену сферу радіусом  $r_1$  ( $r_1 < R$ ). Оскільки заряд, який міститься усередині такої сфери, дорівнює нулю, то потік напруженості через її поверхню також дорівнює нулю. Отже,  $E = 0$ .

Д. Напруженість електричного поля об'ємно-зарядженої кулі. Нехай маємо кулю радіусом  $R$ , заряджену з постійною об'ємною густиною  $\rho$ . Напруженість електричного поля поза межами кулі, тобто на відстані  $r > R$ , буде визначатися за формулою (9.2), оскільки і в

такому випадку поле буде володіти центральною симетрією.

Для точок всередині кулі результат буде іншим. Опишемо всередині кулі сферичну поверхню радіусом  $r$  ( $r < R$ ). Ця сфера буде містити у собі заряд  $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ , і потік напруженості через її поверхню буде дорівнювати  $4\pi r^2 E$ .

За теоремою Остроградського-Гауса

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3}{3} \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0}.$$

Звідки

$$E = \frac{1}{3} \frac{\rho r}{\epsilon_0}.$$

Або, взявши до уваги, що  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Таким чином, всередині кулі напруженість електричного поля збільшується лінійно з відстанню  $r$  від центра кулі.

## 10. Поняття про диполь. Електричне поле диполя

Розглянемо нейтральну систему, яка складається з нерухомих зарядів. Найпростішою і однією із найважливіших систем є диполь. Електричним диполем називається система двох рівних за величиною і

протилежних за знаком електричних зарядів  $+q$  і  $-q$ , відстань між якими  $l$  є малою в порівнянні з відстанню до точок поля, які розглядаються (рис I.22). Отже диполь – це модель системи зарядів, теорію якої можна перенести на деякі реальні об'єкти, зокрема, на молекули діелектриків. Тому вивчення поля диполя має істотне практичне значення.

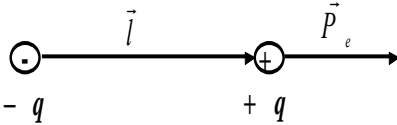


Рис. I.22

Уведемо деякі визначення. Добуток позитивного заряду диполя на плече називається електричним моментом диполя  $p_e$ :

$$\vec{p}_e = q\vec{l}.$$

Вектор  $\vec{p}_e$  збігається за напрямом з плечем диполя  $\vec{l}$ . Знайдемо вирази для напруженості електричного поля диполя у різних точках поля.

а) напруженість електричного поля диполя у точках на продовженні плеча диполя (рис. I.23).

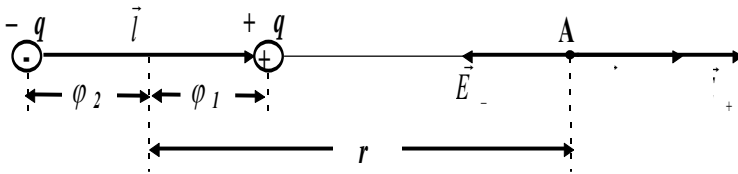


Рис. I.23

Відповідно до принципу суперпозиції полів, напруженість електричного поля диполя у будь-якій точці поля диполя  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ , де  $\vec{E}_+$  і  $\vec{E}_-$  – напруженості полів зарядів  $+q$  і  $-q$ .

Якщо точка А розміщена на осі диполя, то вектори  $\vec{E}_+$  і  $\vec{E}_-$  напрямлені вздовж цієї осі, але у протилежних напрямках. За формулою напруженості поля точкового заряду

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_1^3} \vec{r}_1, \quad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r_2^3} \vec{r}_2, \quad ,$$

де  $r_1$  і  $r_2$  – радіуси-вектори, проведені в точку А із кінців диполя  $+q$  і  $-q$ . Їх напрями збігаються із напрямом вектора  $l$ .

З рисунка видно, що  $r_1 = r - l/2$ , а  $r_2 = r + l/2$ . Або у векторній формі

$$\vec{r}_1 = \frac{\vec{l}}{l} (r - l/2), \quad \vec{r}_2 = \frac{\vec{l}}{l} (r + l/2).$$

Тому

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r - l/2)^2} \cdot \frac{\vec{l}}{l}, \quad \vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r + l/2)^2} \cdot \frac{\vec{l}}{l}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{l}}{l} \left[ \frac{1}{(r - l/2)^2} - \frac{1}{(r + l/2)^2} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2rq\vec{l}}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}$$

Якщо врахувати, що  $r \gg l$ , то доданком  $l^2/4$  можна знехтувати і останній вираз записати у такому вигляді

$$E = \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

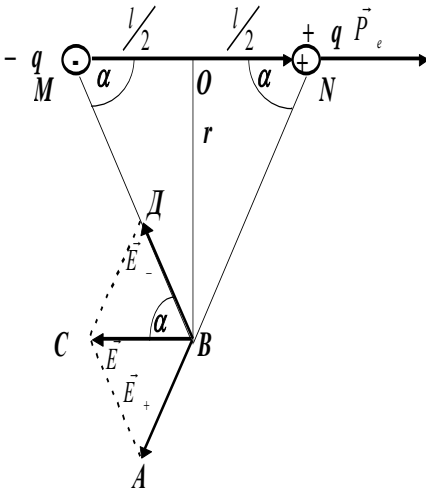
Але оскільки  $ql = p_e$ , то напруженість електричного поля диполя на продовженні плеча диполя буде дорівнювати

$$\vec{E} = \frac{2\vec{P}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.1)$$

б) напруженість електричного поля диполя на перпендикулярі до плеча диполя.

Розглянемо напруженість електричного поля диполя на перпендикулярі до плеча диполя, поставленого в точці, що є серединою плеча (рис. I.24). Оскільки точка В рівновіддалена від зарядів  $+q$  і  $-q$ , то

$$|E_+| = |E_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r^2 + l^2/4\right)}.$$



Із цієї причини трикутники  $BMN$  і  $B CD$  – подібні. Із подібності трикутників отримаємо

$$\frac{E_+}{E} = \frac{\sqrt{r^2 + l^2/4}}{l},$$

$$E = \frac{E_+ \cdot l}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}.$$

Нехтуючи доданком  $l^2/4$  в порівнянні з  $r^2$  і, враховуючи, що  $ql = P_e$ ,

Рис. I.24

одержимо вираз для напруженості електричного поля диполя у точках на перпендикулярі до плеча диполя, поставленого із середини плеча,

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_e}{r^3}. \quad (10.2)$$

в) напруженість електричного поля диполя у довільній точці поля.

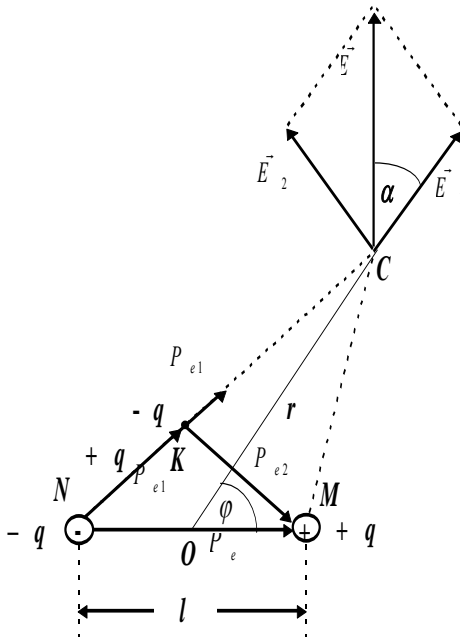


Рис. I.25

Наприкінці розглянемо загальний випадок обчислення напруженості електричного поля диполя (рис. I.25).

Нехай радіус-вектор точки С, проведений із середини плеча диполя (точка О) утворює із віссю диполя кут  $\varphi$ . Побудуємо на основі плеча диполя і точки С в електричному полі диполя трикутник NMC. Із точки М на пряму NC опустимо перпендикуляр KM і в

точці К розмістимо два точкові заряди  $+q$  і  $-q$ . Оскільки ці заряди рівні за величиною і протилежні за знаком, то вони взаємно нейтралізуються і не змінюють поля диполя. Внесення цих зарядів дає можливість розглянути два диполі (NK і МК).

$$\vec{P}_e = \vec{P}_{e1} + \vec{P}_{e2}.$$

Довжина плеча диполя  $l$  в порівнянні з  $r$  є дуже малою, тому кут  $\text{CNM} \approx \varphi$ . Електричний момент НК диполя  $P_{e1}$  дорівнює

$$P_{e1} = ql \cos \varphi = P_e \cos \varphi.$$

А МК диполя

$$P_{e2} = ql \sin \varphi = P_e \sin \varphi.$$

Для першого диполя точка С лежить на його осі, а для другого – на перпендикулярі, поставленому в середній точці осі. Кожен із цих диполів в точці С створює електричне поле, яке для першого диполя згідно із формулою (10.1) дорівнює

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{P}_{e1}}{r^3}.$$

А для другого

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{P}_{e2}}{r^3}.$$

Оскільки вектори електричних полів  $\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  диполів  $P_{e1}$  і  $P_{e2}$  взаємно перпендикулярні, то напруженість електричного поля  $E$  диполя MN в точці С буде дорівнювати



$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sqrt{(2P_{e1})^2 + (P_{e2})^2}.$$

Підставивши значення  $P_{e1}$  і  $P_{e2}$ , отримаємо вираз для напруженості електричного поля диполя у довільній точці поля.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_e}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}. \quad (10.3)$$

Із (10.3) легко отримати часткові випадки напруженості електричного поля диполя, тобто напруженість поля у точках на продовженні плеча диполя і на перпендикулярі, поставленого із середини плеча диполя. І дійсно, якщо  $\varphi = 0$ , то отримуємо вираз (10.1), а якщо  $\varphi = \pi/2$ , то – (10.2).

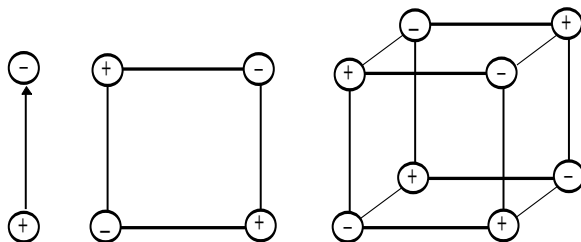


Рис. I.26

Напруженість електричного поля диполя, як видно із формули (10.3), залежить від напрямку радіус-вектора  $\vec{r}$  відносно осі диполя і зменшується із відстанню від диполя обернено пропорційно до кубу відстані від його центра, тобто спадає швидше, ніж у випадку поля одного точкового заряду.

Із двох диполів з протилежними за напрямом дипольними моментами можна скласти так званий квадруполь. Його поле спадає обернено пропорційно до четвертої степені відстані. Із двох квадруполів можна

скласти октуполь, для якого спадання поля з відстанню обернено пропорційне до п'ятої степені відстані (рис. I.26).

Отже, що більше число пар різнойменних зарядів і симетричніше вони розміщені, то швидше спадає напруженість поля з відстанню.

г) диполь в електричному полі. Зупиняючись детально на вивченні електричного поля диполя, ми ставили за мету дати більш глибоку інформацію про цю систему зарядів як про модель, яка має реальний зміст.

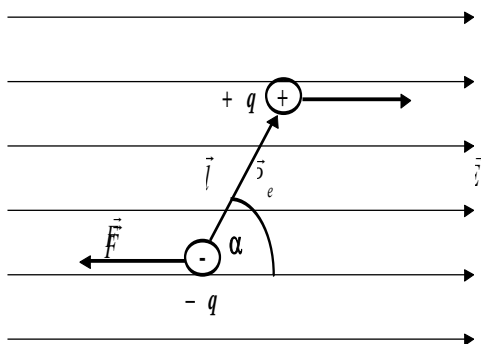


Рис. I.27

Так, наприклад, невелике провідне тіло в електричному полі можна наближено розглядати як диполь, позаяк на його кінцях виникають індуковані заряди, рівні за величиною і протилежні за знаком. Подібні заряди виникають на діелектриках, і тому невеликі діелектричні тіла в електричному полі можна розглядати як диполь. Але найважливіше те, що багато молекул побудовані з позитивних і негативних зарядів, центри яких зміщені один відносно одного. У багатьох випадках такі молекули розглядаються як електричні диполі.

Знайдемо силу, яка діє на диполь в електричному полі. Нехай диполь розміщена в однорідному полі (рис. I.27) напруженістю  $E$ . На заряди диполя будуть діяти

сили  $F=qE$ , які рівні за величиною, але протилежні за напрямом. Вони утворюють пару сил, момент якої

$$M = qlE \sin \alpha ,$$

де  $\alpha$  – кут між вектором  $\vec{l}$  і напруженістю поля  $\vec{E}$ .

Враховуючи, що  $ql = P_e$ , момент пари сил  $M = P_e E \sin(\vec{l}, \vec{E})$  або у векторній формі  $\vec{M} = [\vec{P}_e \vec{E}]$

Напрямок моменту цієї пари сил збігається з напрямом осі обертання диполя, тобто перпендикулярний до  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ .

Отже, в однорідному електричному полі діє тільки пара сил, яка повертає диполь так, щоб  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$  були паралельними.

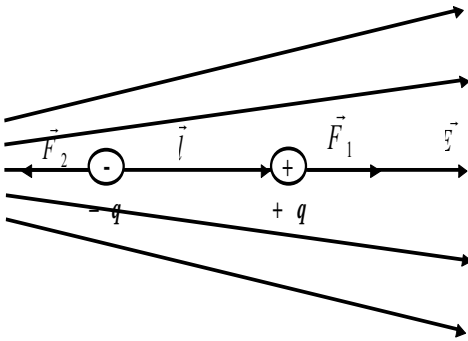


Рис. I.28

Розглянемо тепер диполь у неоднорідному електричному полі (рис. I.28).

Нехай в деякому місці поля електричний момент диполя  $\vec{P}_e$  паралельний до напруженості елек-

тричного поля  $\vec{E}$ . У цьому випадку сили, які діють на заряди диполя, уже нерівні за величиною. Їхня рівнодійна намагається перемістити диполь в область поля з більшою напруженістю. На негативний діє сила, яка дорівнює  $-qE$ . Сила, яка діє на позитивний заряд диполя, дорівнює  $+q\left[E + \frac{dE}{dx}l\right]$ , якщо систему координат вибрати так, щоб вісь  $X$  була напрямлена вздовж моменту диполя. Результуюча сила, яка діє на диполь

$$F = q \left( E + \frac{dE}{dx} l - E \right) = ql \frac{dE}{dx} = P_e \frac{dE}{dx}.$$

В однорідному електричному полі  $\frac{dE}{dx} = 0$  і тому результуюча сила, яка діє на диполь, також дорівнює нулю.

Якщо диполь у неоднорідному полі не паралельний до поля, то на нього, крім сили  $F$ , буде діяти, як і в однорідному полі, пара сил, що намагається повернути диполь і розмістити паралельно до поля.

РОЗДІЛ II

**ПОТЕНЦІАЛЬНІСТЬ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ**

**11. Робота переміщення заряду в електричному полі. Потенціальність електричного поля**

Із механіки відомо, що в гравітаційному полі діють консервативні сили, тому воно належить до так званих потенціальних полів. Робота переміщення будь-якого тіла в полі залежить не від форми шляху, а тільки від його початкового і кінцевого положення. Або інакше кажучи, вона визначається тільки зміною потенціальної енергії тіла, що переміщається.

Закон Кулона формально подібний до закону всесвітнього тяжіння Ньютона, а тому є підстави припускати, що сили, які діють в електричному полі, є консервативними, а електричне поле – потенціальним.

*Розглянемо це припущення.*

Елементарна робота, яка виконується силами гравітаційного поля при малому переміщенні  $d\vec{l}$  матеріальної точки,

$$dA = Fdl \cos\left(\vec{F}, \hat{d\vec{l}}\right).$$

Застосуємо цей вираз до сил електростатичного поля.

Нехай на токовий заряд  $q_0$  в електричному полі напруженістю  $\vec{E}$  діє сила  $\vec{F}$ , яка дорівнює  $q_0\vec{E}$ . Тоді елементарна робота сили  $\vec{F}$  з переміщення заряду  $q_0$  на відрізок  $d\vec{l}$  буде дорівнювати

$$dA = q_0 E \cos \left( \vec{E}, \hat{d\vec{l}} \right) dl,$$

$\left( \vec{E}, \hat{d\vec{l}} \right)$  – кут між напрямом  $\vec{E}$  і  $d\vec{l}$ .

У випадку скінченного переміщення заряду, наприклад, із точки А в Б, робота сил поля (рис. II.1)

$$A = q_0 \int_A^B E dl \cos \left( \vec{E}, \hat{d\vec{l}} \right) = q_0 \int_A^B \vec{E} d\vec{l},$$

$\vec{E} d\vec{l}$  – скалярний добуток векторів  $\vec{E}$  і  $d\vec{l}$ .

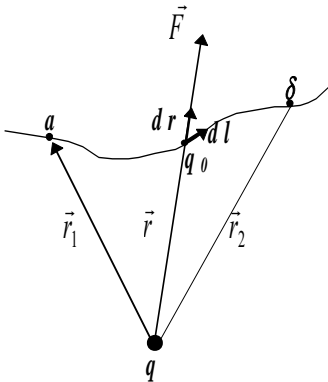


Рис. II.1

Останній вираз є загальною формулою для роботи із переміщення точкового заряду в електростатичному полі.

Розглянемо частковий випадок розміщення заряду  $q_0$  в електростатичному полі позитивного заряду  $q$ . Радіус-вектори точок А і Б позначимо відповідно через  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ . Тоді робота переміщення  $q_0$  точки А в точку Б

$$A = q_0 \int_A^B E dl \cos \left( \vec{E}, \hat{d\vec{l}} \right); dl \cos \left( \vec{E}, \hat{d\vec{l}} \right) = dr;$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2};$$

$$A = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (11.1)$$

Як видно з останнього виразу, робота, виконана при переміщенні заряду  $q_0$  в полі точкового заряду  $q$ , не залежить від форми шляху, яким рухався заряд  $q_0$ . Вона залежить тільки від початкового і кінцевого положення заряду  $q_0$  і характеристик поля, в якому він переміщається.

Якщо заряд  $q_0$  переміщається у полі не одного заряду, а системи зарядів  $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_n$ , то на нього діє сила  $\vec{F}$ , яка, згідно з принципом суперпозиції, дорівнює:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

А тому робота  $A$  результуючої сили дорівнює алгебраїчній сумі складових сил  $\vec{F}_i$ .

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}} \right). \quad (11.2)$$

Повна робота  $A$ , як і кожна з робіт  $A_1, A_2, A_3, \dots$  також залежить від сили.

Таким чином, ми доходимо висновку, що сили електростатичного поля, як і сили гравітаційного поля, є консервативними.

Розглянемо тепер роботу, яку виконують сили електростатичного поля, переміщаючи одиничний додатний заряд по замкнутому контуру. Вона дорівнює

$$\oint_L E dl \cos(\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_L \vec{E} d\vec{l},$$

$\oint_L \vec{E} d\vec{l}$  – називається циркуляцією вектора напруженості електричного поля по замкнутому контуру  $L$ .

Із виразу (11.2) видно, що робота з переміщення заряду в зовнішньому електростатичному полі по будь-якому замкнутому контуру, дорівнює нулю. Інакше кажучи, циркуляція вектора напруженості електростатичного поля уздовж замкнутого контура дорівнює нулю, тобто

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (11.3)$$

Таким чином, електростатичне поле є потенціальним. Останній вираз засвідчує також, що лінії напруженості електростатичного поля не можуть бути замкнутими.

## 12. Потенціальна енергія заряду в електростатичному полі

У механіці показано: якщо тіло розміщене в потенціальному полі сил, то воно володіє потенціальною енергією.

У силу потенціальності гравітаційного поля, як його енергетичну характеристику, вводиться потенціал. Потенціалом  $\varphi$  гравітаційного поля називається скалярна величина, яка дорівнює відношенню потенціальної енергії  $W_n$  матеріальної точки  $m$ , розміщеної у цій точці поля, до маси матеріальної точки.

$$\varphi = \frac{W_n}{m},$$

$\varphi$  не залежить від маси матеріальної точки, а є функцією координат точок гравітаційного поля.

Оскільки електростатичне поле є також потенціальним, то і для нього, як і для гравітаційного, можна ввести таку саму енергетичну характеристику – потенціал.



Як відомо, в потенціальному полі робота виконується за рахунок зміни потенціальної енергії. Тому, якщо точковий заряд  $q_0$  рухається в електростатичному полі точкового заряду  $q$ , то зміна його потенціальної енергії  $W_n$  при безмежно малому переміщенні дорівнює

$$dW_n = -dA = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}. \quad (12.3)$$

При переміщенні заряду із точки А в точку Б, які віддалені від заряду  $q$  на відстань  $r_1$  і  $r_2$ , зміна потенціальної енергії заряду  $q_0$  дорівнює

$$\Delta W_n = W_{n2} - W_{n1} = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

Якщо заряд  $q_0$  переміщається у полі системи зарядів  $q_1, q_2, q_3, \dots$  то зміна його потенціальної енергії

$$\Delta W_n = q_0 \sum_{i=1}^n \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i2}} - \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i1}} \right) \quad (12.4)$$

до  $r_{i1}$  і  $r_{i2}$  відстані між зарядами  $q_0$  і  $q_i$  до і після переміщення  $q_0$ .

Останній вираз дає можливість визначити тільки зміну потенціальної енергії заряду  $q_0$ , але не її абсолютне значення.

Для визначення абсолютного значення потенціальної енергії, якою володіє електричний заряд у даній точці електричного поля, необхідно умовитися, в якій точці поля вважати її рівною нулю. Проінтегрувавши вираз (12.3), для

потенціальної енергії заряду  $q_0$ , поміщеного в полі точкового заряду  $q$  на відстані  $r$  від останнього, отримаємо

$$W_n = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} + C, \quad (12.5)$$

де  $C$  – постійна інтегрування.

Отже, потенціальна енергія визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої  $C$ . А це засвідчує факт, що фізичний зміст має лише різниця потенціальних енергій заряду в двох точках простору, яка дорівнює роботі, виконаній при його переході з однієї точки поля в іншу. При визначенні цієї різниці стала  $C$  виключається.

Можна прийняти

$$W_{n\infty} = 0. \quad (12.6)$$

Тоді у виразі (12.5) постійна інтегрування  $C = 0$ . Отже, вираз для потенціальної енергії заряду  $q_0$  в полі заряду  $q$  в точці, віддаленій від заряду  $q$  на відстань  $r$ , остаточно набуде вигляду

$$W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}.$$

Легко побачити, що потенціальна енергія точкового заряду  $q_0$  в полі заряду  $q$  в точці з радіус-вектором  $\vec{r}$  чисельно дорівнює роботі, виконаній при перенесенні заряду  $q_0$  із даної точки поля у безмежність, від'ємна

Важливо відзначити, що потенціальна енергія є від'ємною, тобто обидва взаємодіючі заряди, що входять у вираз для потенціальної енергії, взаємодіють абсолютно симетрично. Заряд  $q$ , в полі якого переміщався заряд  $q_0$ , був

нерухомим цілком умовно. Таке ж значення потенціальної енергії ми одержимо, якщо закріпимо заряд  $q_0$ , а в його електростатичне поле будемо поміщати заряд  $q$ .

Потенціальна енергія  $W_n$  заряду  $q_0$ , розміщена у полі точкових зарядів  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ , дорівнює електричній сумі його потенціальних енергій у полях, створюваних кожним із зарядів зокрема.

$$W_n = \sum_{i=1}^n W_{ni} = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (12.7)$$

де  $r_i$  – відстань між зарядами  $q_0$  і  $q_i$ .

### **13. Який зміст має "поле в даній точці"?**

Розглядаючи явища електростатики, ми побачили, що вони зумовлені наявністю у просторі, де є електричні заряди електричного поля з реальним змістом. При розгляді цих явищ, часто користуються поняттям поля у даній точці, використовуючи цей термін і для поля в речовині. Однак для більш глибокого розуміння цього поняття необхідно зробити деякі уточнення.

Кожен макроскопічний заряд, знання структури і походження якого у феноменологічній теорії електростатики не є необхідним, складається з окремих мікрочарядів – електронів і ядер. Електрони і ядра, однак, не закріплені, а рухаються. Тому реальне електричне поле в речовині змінюється у просторі і часі надто швидко. Воно різне в різних точках атомів і в проміжках між ними. Для того, щоб визначити величину і напрям цього поля у певний момент часу, потрібно було б скласти поля всіх окремих ядер і електронів речовини. Проте розв'язок такої задачі і точне визначення "дійсного" поля, яке називається мікроскопічним, є нереальним. Та навіть, якщо б це було і

можливо, то результат був би настільки складним, що використати його було би неможливо. Але для розв'язку макроскопічних задач таке поле і не потрібне.

Електричне поле в речовині – це просторове усереднення значення мікроскопічного поля. Таке поле у речовині називається макроскопічним. Просторове усереднення проводиться за так званими фізично безмежно малими елементами об'єму. Це переважно відстані порядку розмірів тіла, яке створює поле. Отже, на  $l$  накладається умова

$$a \ll l \ll R,$$

де  $a \sim 10^{-10}$  м – розміри атома.

Пояснимо сказане прикладом. Нехай електричне поле створене зарядженою кулькою, розміщеною в діелектрику. Розглянемо поле в діелектрику і, зокрема, "в даній точці діелектрика". Воно буде результатом усереднення мікроскопічного поля по малому об'єму, який оточує означену точку. Розміри цього об'єму мають бути значно меншими від радіуса кульки, але вмщати велике число атомів. Якщо, наприклад, радіус кульки дорівнює  $R = 10^4$  м, то вищезазначеним вимогам відповідає кубик зі стороною  $l$  порядку  $10^{-7}$  м. Такий об'єм буде вмщати мільярди, а можливо, і більше атомів. Отже, електричне поле "в даній точці поля" – це усереднене мікроскопічне поле по малому об'єму речовини, який оточує цю точку.

#### **14. Потенціал електростатичного поля**

Перейдемо тепер до введення потенціалу. Для цього заряд  $q$  закріпимо і приймемо таким, що створює досліджуване електростатичне поле, а заряд  $q_{np}$  – за пробний. Потенціальна енергія пробного заряду  $q_{np}$  в

електростатичному полі заряду  $q$  залежить від величини не тільки  $q_{np}$ , але і  $q$ , а також відстані досліджуваної точки поля  $r$  від  $q$ .

$$W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qq_{np}}{r}. \quad (14.1)$$

Якщо взяти не один, а декілька пробних зарядів  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , ... і по чергово поміщати їх у ту саму точку електростатичного поля на відстані  $r$  від  $q$ , то значення їх потенціальної енергії буде різним, тобто буде дорівнювати  $W_{n1}$ ,  $W_{n2}$ ,  $W_{n3}$ , ... Однак, як видно із виразу (14.1), відношення потенціальної енергії пробного заряду до його величини, тобто

$$\varphi = \frac{W}{q_{np}} \quad (14.2)$$

залежить не від величини пробного заряду, а тільки від величини заряду, поле якого ми досліджуємо, тобто від заряду  $q$  і відстані точки поля від заряду. Тому вираз (14.2) є характеристикою такої точки електричного поля і називається електричним потенціалом. Потенціал виражає потенціальну енергію, яку мав би одиничний позитивний заряд у цій точці електричного поля.

Зберігаючи прийняту вище умову (10.6) для початку відліку енергії, знайдемо, що на відстані  $r \rightarrow \infty$

$$\varphi_\infty = \frac{W_\infty}{q_{np}} = 0.$$

Тобто, потенціал у безмежно віддалених точках поля дорівнює нулю.

Врахувавши це, вираз для потенціалу електричного поля запишемо у такому вигляді

$$\varphi_{\infty} = \frac{W_n}{q_{np}} = \frac{W_n - W_{n\infty}}{q_{np}} = \frac{A}{q_{np}}. \quad (14.3)$$

З цього виразу також видно, що потенціал електростатичного поля чисельно дорівнює роботі, виконаній полем при переміщенні одиничного позитивного заряду будь-яким шляхом із даної точки поля у безмежність.

Потенціал  $\varphi$  – це скалярна характеристика електричного поля. Він так само, як і вектор напруженості, є важливою характеристикою електричного поля.

Вираз для потенціалу електричного поля даної точки А поля можна записати і в такому вигляді:

$$\varphi(A) = \int_A^{\infty} E d\vec{l}. \quad (14.4)$$

Шлях із точки А в безмежність може бути будь-яким, але доцільно його вибрати таким, щоб можна було максимально спростити обчислення.

За допомогою (14.4) обчислимо потенціал поля точкового заряду. Якщо у (14.4) підставити напруженість поля точкового заряду  $q$ , то отримаємо

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Це і є потенціал електричного поля точкового заряду.

## Розділ II. Потенціальність електричного поля

Для системи точкових зарядів  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$  потенціал поля

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\mu=1}^n \frac{q_{\mu}}{r_{\mu}}. \quad (14.5)$$

Тобто, потенціал електростатичного поля системи зарядів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів кожного із зарядів.

Якщо заряд  $q_1, q_2, q_3, \dots$ , то у декартовій системі координат

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}.$$

Заряд  $q$  може бути не точковим, а розподіленим у деякому об'ємі. Тоді, припускаючи, як і раніше, що заряди зосереджені у деякій скінченій області простору з об'ємною густиною  $\rho$  і потенціал у безмежності дорівнює нулю, потенціал у цій точці поля виражається формулою

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r}.$$

У випадку коли заряд розподілений по поверхні поверхневою густиною  $\sigma$ , то на елементі поверхні  $ds$  його величина буде дорівнювати  $\sigma ds$ . Відповідно, потенціал у деякій точці на відстані  $r$  від  $ds$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma ds}{r}.$$

Цей вираз поширюється на всі поверхні, які мають поверхневий заряд.

Потенціали електростатичного поля додаються – алгебраїчна величина, тоді як напруженості при накладанні полів – векторна. З цієї причини обчислення потенціалів виявляється, як правило, набагато простішим, ніж обчислення напруженостей електричного поля.

Одиницею вимірювання електричного потенціалу є Вольт. Один Вольт – це різниця потенціалів між такими двома точками електричного поля, при переміщенні між якими заряду в 1 Кл виконується робота в 1 Дж.

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В}.$$

Знаючи потенціал двох точок електричного поля, легко визначити роботу переміщення заряду  $q$  між ними:

$$A = q \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = q(\varphi(B) - \varphi(A)) = q\Delta\varphi_{BA}.$$

З цього виразу видно, що різниця потенціалів між точками має зрозумілий фізичний зміст і може бути виміряна експериментально, натомість, згідно з формулою (10.5), потенціал  $\varphi$  даного електричного поля визначається з точністю до деякої сталої.

Користуючись неоднозначністю скалярного потенціалу, можна у наперед заданій точці приписати йому будь-яке, наперед задане значення. Тоді у всіх точках потенціал має певне значення, тобто є однозначним.

Надання потенціалу в одній із точок поля певного значення шляхом приписування йому цього значення називається нормуванням потенціалу.

Так, у дослідженні загальних питань електричного поля, створюваного локалізованою системою зарядів, потенціал у безмежно віддалених точках від заряду приймається рівним нулю.



В інших випадках за нульовий приймається потенціал Землі.

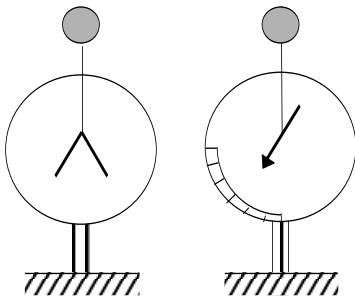


Рис. II.2.

Для вимірювання різниці потенціалів в електростатиці застосовують різні електроскопи і електрометри (Рис. II.2.). Електрометр відрізняється від електроскопа наявністю шкали, яка проградуєрована в одиницях заряду. Тобто, якщо електроскоп виявляє тільки зарядженість тіла, то

електрометр дає можливість виміряти величину заряду.

### **15. Потенціальний зв'язок між напруженістю електричного поля і потенціалом. Еквіпотенціальні поверхні**

Вище було показано, що електричне поле можна описати за допомогою або вектора напруженості, або скалярної величини – потенціалу. Оскільки ці величини є характеристикою однієї і тієї самої точки електричного поля, то природно думати, що між ними існує зв'язок. Виходячи із фізичного змісту напруженості електричного поля і його потенціалу, очевидно, що зв'язок між ними має бути подібним до зв'язку між потенціальною енергією і силою.

І дійсно, робота сил електричного поля, з одного боку, може бути представлена як добуток сили  $qE_e$  на елемент переміщення  $dl$ , а з іншого, як зменшення потенціальної енергії заряду  $d(q\phi)$ . Прирівнюючи ці вирази, отримаємо

$$qE_e dl = -d(q\varphi); qE_e dl = -q \frac{d\varphi}{dl},$$

звідти знайдемо що

$$E_e = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (15.1)$$

Через  $dl$  позначено довільно вибраний напрям у просторі. Його проєкції на відповідній осі в декартовій системі координат будуть рівні  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Тому проєкції вектора напруженості електричного поля відповідно позначимо через  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . Вони будуть дорівнювати

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; E_y = -\frac{d\varphi}{dy}; E_z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Їх можна об'єднати в одну формулу

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z = -\left(\vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Оскільки  $\vec{E}$  – вектор, то вираз, що наведений у дужках, є також вектором. Він характеризує швидкість зміни потенціалу в просторі і називається градієнтом потенціалу. Градієнт потенціалу позначається  $\vec{grad} \varphi$ . Його можна розглядати як добуток символічного вектора на скаляр  $\varphi$ . Визначенням

$$\vec{grad} \varphi = \vec{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (15.2)$$

Тому Формулу (15.2) можна записати коротко

$$\vec{E} = -\vec{grad} \varphi. \quad (15.3)$$

Отже, напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціалу, взятому зі знаком мінус.

Формула (15.3) дає можливість за відомим значенням  $\varphi$  знайти напруженість електричного поля у кожній його точці. Можна розв'язувати і обернену задачу, тобто за заданими значеннями  $E$  в кожній точці поля знаходити різницю потенціалів між двома довільними точками.

Для вияснення геометричного змісту градієнта потенціалу введемо поняття екіпотенціальних поверхонь або поверхонь рівного потенціалу що дає можливість також графічного зображення потенціалу електричного поля.

Як уже говорить сама назва, екіпотенціальною є така поверхня, у всіх точках якої потенціал однаковий. Якщо потенціал заданий як функція координат  $x, y, z$ , то рівняння екіпотенціальної поверхні має вигляд

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

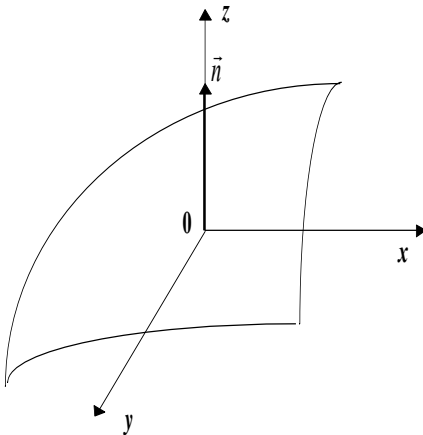


Рис. II.3

Для точкового заряду в однорідному просторі екіпотенціальні поверхні мають форму сферичних поверхонь з центром в точці, в якій є заряд.

Візьмемо на екіпотенціальной поверхні довільну точку  $O$  і введемо локальну систему координат з початком у цій точці (рис. II.3). Вісь  $Z$

спрямуємо по напрямку нормалі  $\vec{n}$  до екіпотенціальної

поверхні у бік зростання потенціалу  $\varphi$ . Той самий напрям приймемо за додатний напрям нормалі  $\vec{n}$ . Координатна площина  $xу$ , очевидно, суміститься з дотичною площиною до екіпотенціальної поверхні. Тоді в точці  $O$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Крім того,

$$\vec{k} = \vec{n}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}.$$

Тоді формула (15.2) набуде вигляду

$$\vec{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \vec{n}.$$

Функція  $\varphi$  зростає найбільш швидко у напрямі нормалі  $\vec{n}$ . Тому можна сформулювати таке визначення. Градієнтом функції  $\varphi(x, y, z)$  є вектор, спрямований у сторону максимального зростання цієї функції, а його довжина рівна похідній функції у тому ж напрямі. Перевага такого визначення полягає у тому, що воно має інваріантний характер, тобто ніяк не зв'язане з вибором певної системи координат.

Вектор напруженості електростатичного поля напрямлений протилежно до вектора градієнта потенціалу  $\varphi$ . Електричні силові лінії поля  $\epsilon$ , таким чином, лініями, вздовж яких потенціал  $\varphi$  змінюється найбільш швидко.

Якщо виразити роботу переміщення заряду  $q_0$  в електричному полі напруженістю  $E$  на деяку відстань  $dl$ , то вона буде дорівнювати

$$A = q_0 E dl \cos(\vec{E}, \vec{dl}). \quad (15.4)$$

Припустимо, що точки, між якими передбачається переміщення заряду, розташовані на екіпотенціальній поверхні. Оскільки різниця потенціалів між ними дорівнює нулю, то робота теж дорівнює нулю, а отже, по екіпотенціальній поверхні під дією електричного поля заряди переміщатися не можуть.

Застосувавши цей висновок до рівняння (15.4), і, врахувавши що

$$q_0 \neq 0 \text{ і } dl \neq 0,$$

отримаємо

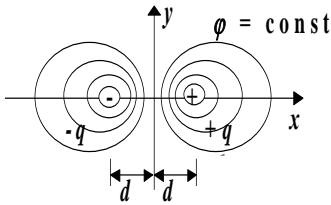
$$\cos(\vec{E}, \vec{dl}) = 0.$$

Тобто лінії вектора напруженості електростатичного поля перпендикулярні до екіпотенціальної поверхні в точці їх перетину.

Екіпотенціальні поверхні служать наочним зображенням картини поля. Їх рисують так, щоб при переході від однієї екіпотенціальної поверхні до сусідньої потенціал мав один і той самий приріст  $\Delta\varphi$ . Що менший вибрано приріст  $\Delta\varphi$ , то детальніше буде подано розподіл потенціалу в просторі, а з ним – і картину електростатичного поля. Для більшої наочності рисують також лінії напруженості, ортогональні до сім'ї поверхонь рівного потенціалу. Там, де (при сталому  $\Delta\varphi$ ) сусідні екіпотенціальні поверхні найбільш близько підходять одна до одної, напруженість електричного поля максимальна. І навпаки, в місцях, де віддаль між ними велика, буде мала напруженість поля  $E$ .

Еквіпотенціальну поверхню можна провести через будь-яку точку поля.

А тому таких поверхонь може бути побудовано безліч. Форма еквіпотенціальних поверхонь для системи зарядів залежить від їх розташування у просторі, а для протяжно заряджених тіл – від форми тіла. Найпростішу форму мають еквіпотенціальні поверхні для точкового заряду. Для двох точкових зарядів вони приймають



**Рис. П.4**

складний вигляд і залежать також від знаків зарядів.

Розглянемо, наприклад, поле двох додатних точкових зарядів  $q$ , розміщених на віддалі  $2d$  один від одного (Рис. П.4)

Оскільки потенціал точкового заряду на віддалі  $r$  від нього дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

то потенціал системи двох однакових точкових зарядів у точці  $(x, y, z)$  визначається алгебраїчною сумою потенціалів кожного із них

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

З останнього рівняння одержимо рівняння еквіпотенціальної поверхні:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} = const.$$

Кожна із них характеризується відповідним потенціалом

$$\varphi_1 = \text{const}, \varphi_2 = \text{const}.$$

На рис. II.4 зображено лінії перетину площини  $xu$  з екіпотенціальними поверхнями. Самі екіпотенціальні поверхні утворюються у результаті обертання картини, зображеної на рисунку II.4 навколо осі  $x$ .

## **16. Приклади розрахунку потенціалу електричного поля заряджених тіл**

### **16.1. Потенціал електричного поля зарядженої пластини.**

Нехай кругла пластинка радіусом  $R$  рівномірно заряджена зарядом  $q$ . Виведемо формулу для потенціалу електричного поля на перпендикулярі до пластини, поставленому у її центрі на відстані  $l_1$  від пластини.

Як і при визначенні напруженості електричного поля зарядженої пластини у випадку, коли  $R$  і  $l_1$  співвимірні, пряме застосування теорії потенціалу точкового заряду дещо утруднене. Однак якщо врахувати дискретність заряду, то заряд пластинки  $q$  можна розподілити на порції величиною  $dq$  і записати потенціал поля кожної з них. Тобто

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 b}, \quad dq = \frac{q}{\pi R^2} dS; \quad d\varphi = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon\epsilon_0} \frac{ds}{bR^2}.$$

Потенціал системи точкових зарядів дорівнює алгебраїчній сумі полів кожного із зарядів зокрема. Тому

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \iint \frac{dS}{b}.$$

Із рисунка II.5

$$dS = dxdr, \quad \text{а} \quad b = \sqrt{R^2 + r^2}.$$

Тоді

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{drdx}{\sqrt{r^2 + R^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 + l_1^2} - l_1).$$

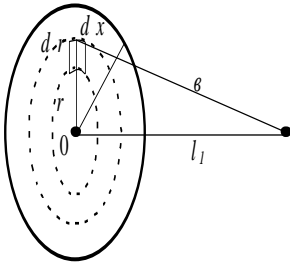


Рис. II.5

Потенціал поля рівномірно зарядженої пластини можна знайти й іншим шляхом, зокрема, використавши зв'язок між напруженістю і потенціалом поля. Відомо що  $E = -\frac{d\varphi}{dl}$ .

Із параграфу 5А (приклад 2) знаходимо, що напруженість електричного поля обмеженої рівномірно зарядженої пластини

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right)$$

Тому

$$\varphi = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^{l_1} \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \right) dl = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 + l_1^2} - l_1).$$



### 16.2. Потенціал електричного поля рівномірно зарядженої нитки

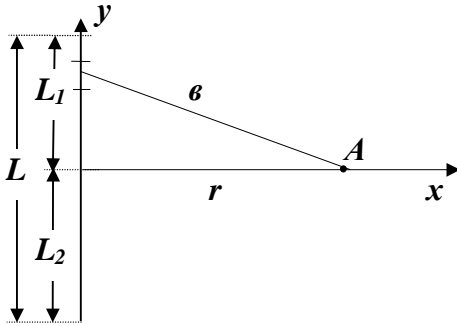


Рис. II.6

Візьмемо нитку завдовжки  $L$ , рівномірно заряджену зарядом  $q$ . Знайдемо потенціал електричного поля в точці А на відстані  $r$  від нитки (рис. II.6). Розподілимо заряд  $q$  на елементарні порції  $dq$ . Тоді потенціал поля заряду  $dq$  буде дорівнювати

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 b} \cdot dq = \frac{q}{L} dy.$$

$$d\varphi = \frac{qdy}{4\pi\epsilon_0 Lb}, b = \sqrt{y^2 + r^2}$$

$$d\varphi = \frac{qdy}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{y^2 + r^2}}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_{-L_2}^{L_1} \frac{dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(y + \sqrt{y^2 + r^2}\right) \Big|_{-L_2}^{L_1} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L_1 + \sqrt{L_1^2 + r^2}}{-L_2 + \sqrt{L_2^2 + r^2}} \end{aligned}$$

Розглянемо окремі випадки потенціалу поля зарядженої нитки.

а) при  $L \gg r$  потенціал поля прямує в безмежність. Це є наслідком того, що заряд не зосереджений в обмеженій області простору і тому застосувати одержану формулу для визначення потенціалу для випадку, коли  $L \rightarrow \infty$ , не можна.

б) якщо  $L \ll r$ , то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Тобто на великих відстанях у порівнянні з лінійними розмірами нитки, електричне поле близьке до кулонівського.

Складові напруженості електричного поля будуть визначатися за виразами

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy}.$$

### 16.3. Потенціал поля диполя

Нехай маємо диполь з електричним моментом  $p = lq$  (рис. II.7).

Знайдемо потенціал його електричного поля. Оскільки диполь складається з двох зарядів, то потенціал його електричного поля можна шукати як алгебраїчну суму потенціалів кожного із них. У цьому випадку потенціал буде дорівнювати

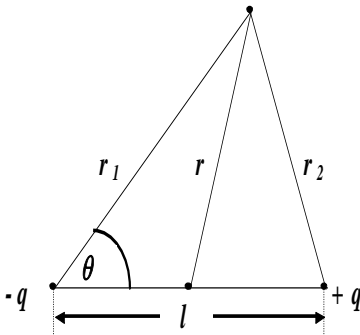


Рис. II.7

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Оскільки  $l \ll r$ , то  $r_1 - r_2 = l \cos \alpha$ , а  $r_1 r_2 \approx r^2$ , то

$$\varphi = \frac{ql \cos \alpha}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Однак потенціал поля диполя можна знайти й іншим шляхом. У параграфі 9 було показано, що напруженість електричного поля диполя у довільній точці на відстані  $r$  від середини диполя

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Зв'язок між напруженістю і потенціалом поля  $d\varphi = -E dr$ . Тому

$$d\varphi = -\frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} dr.$$

Звідки одержимо

$$\varphi = \frac{K}{4\pi \epsilon_0} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta} \int_0^r \frac{dr}{r^3} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Розглянемо окремі випадки.

а) потенціал поля на перпендикулярі до плеча диполя. У цьому випадку

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad \varphi = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

б) потенціал поля на продовженні плеча диполя.

$$\theta = 0 \quad ; \quad \varphi = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} .$$

### 16.4. Потенціал електричного поля рівномірно зарядженої сфери

Візьмемо сферу радіусом  $R$ , заряджену зарядом  $q$ . Знайдемо потенціал цієї сфери (рис. II.8).

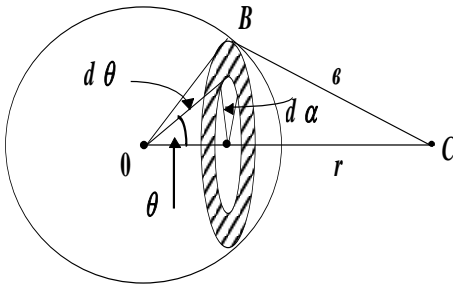


Рис. II.8

Із розглянутого в параграфі 13 випливає, що у випадку зарядженої провідної кулі, заряд на ній розміщується тільки на поверхні. Тому, очевидно, треба розглядати потенціал поля, створюваного поверхневим зарядом.

Поверхнева густина заряду

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} .$$

Металеву сферу розділимо на кільця завширшки  $Rd\theta$  і радіусом  $R \sin\theta$ .

Кільця, зі свого боку, розподілимо на площадки  $dS$ , заряд  $dq$  на яких можна вважати точковим. Величина  $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\alpha$ .

Тоді

$$dq = \sigma R^2 \sin\theta d\theta d\alpha .$$

Отже,

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\alpha}{b}.$$

Із трикутника ОВС за теоремою косинусів

$$b^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta.$$

Продиференціюємо цей вираз

$$2bdb = 2Rr \sin\theta d\theta, \quad bdb = Rr \sin\theta d\theta$$

і визначимо

$$R^2 \sin\theta d\theta = \frac{bR}{r} db;$$

Тоді

$$d\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R}{r} db d\alpha;$$

$$\varphi = \frac{\sigma R}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{r-R}^{r+R} db = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} b \Big|_{r-R}^{r+R} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

якщо  $r > R$  і  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , якщо  $r < R$ .

Отже, ми отримали, що потенціал електричного поля поза рівномірно зарядженою сферою є таким, яким би був, при умові зосередження заряду у центрі сфери. Потенціал поля всередині сфери є постійною величиною і дорівнює потенціалу поля на поверхні сфери.

Із виразів для потенціалу одержимо вирази для напруженості електричного поля усередині і поза зарядженою сферою

Отже, якщо  $r < R$ , то  $E = 0$ ; і якщо  $r > R$ , то

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

### 16.5. Потенціал електричного поля зарядженої пластинки певної товщини

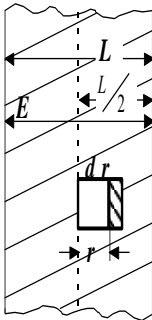


Рис. П.9

Нехай маємо плоско-паралельну пластинку завтовшки  $L$  – з діелектричною проникністю  $\epsilon$ , заряджену об'ємною густиною заряду  $\rho$ . Виведемо вираз для розрахунку різниці потенціалів між деякими точками всередині пластини (рис. П.9).

Для простоти прийемо, що пластинка заряджена однорідно, і густина заряду в будь-якій її точці є постійною. Для визначення різниці потенціалів, використаємо формулу зв'язку між напруженістю електричного поля і потенціалом. Тобто

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Для цього спочатку виведемо вираз для напруженості електричного поля.

Напруженість електричного поля такої однорідно зарядженої плоско-паралельної пластинки як усередині, так і поза її масами буде нормальною до поверхні пластини. Усередині пластини у будь-якому напрямі, паралельному до її поверхні, напруженість поля дорівнюватиме нулю. Якщо би напруженість електричного поля у напрямках, паралельних до поверхні не дорівнювала

нулю, то передовсім порушилась би рівномірність розподілу заряду всередині пластинки.

Електричне поле буде нормальним як до однієї, так і до іншої поверхні пластинки, напруженості яких протилежно напрямлені. Тому, очевидно, пластинку необхідно розділити площиною, паралельною до поверхонь на дві половини, вважаючи, що одна створює електричне поле в одному напрямі, а інша – в протилежному. Для обчислення напруженості цього поля застосуємо теорему Остроградського-Гауса. Виберемо деякий циліндрик з площами основ  $\Delta S$ , паралельними, а твірні – нормальними до поверхні пластини. Потік напруженості поля через бокову поверхню циліндрика буде дорівнювати нулю. Він буде дорівнювати нулю і через основу циліндрика, яка опирається на центральну площину, що розділяє пластину. Таким чином, залишається визначити потік напруженості електричного поля через основу, віддалену від центральної площини на висоту циліндрика  $r$ . Отже:

$$N_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV,$$

$dV$  – об'єм циліндрика. У нашому випадку

$$\int_V dV = \Delta S \cdot r.$$

Тому

$$N_E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \Delta S r.$$

Оскільки

$$N_E = E \cdot \Delta S,$$

то напруженість електричного поля на відстані  $r$  від центральної площини пластини

$$E = \frac{\rho r}{\varepsilon_0}.$$

Зміна потенціалу електричного поля при зміні  $r$  на  $dr$  буде мати вигляд:

$$d\varphi = -E dr,$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (r_1^2 - r_2^2).$$

Якщо відлік  $r$  проводити від центральної площини, то  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = r$  і

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0}.$$

Різниця потенціалів між точками на центральній площині і точками на поверхні пластини, відстані між якими  $r = \frac{L}{2}$ :

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0}.$$

## 17. Дослід Міллікена

Структура електричних зарядів довгий час була предметом всебічного осмислення. Думка про те, що електричний заряд може мати дискретну структуру була висловлена ще в 1752 р. Б. Франкліном. Однак відсутність експериментальних даних з цього приводу залишила це питання відкритим. У 1837 р. М. Фарадеєм було відкрите



явище електролізу, яке в принципі могло бути експериментальним підтвердженням дискретності заряду. Проте на основі законів електролізу, висновок про дискретність заряду було зроблено Г.Л. Гельмгольцем тільки 1881 р.

На основі законів електролізу було визначено величину елементарного заряду. Пряме визначення величини елементарного заряду було виконане Р. Міллікеном у 1809 р. Його експеримент базувався на дослідженні руху частинок в електричному полі. Схема досліду показана на рис II.10. Маленька сферичної форми

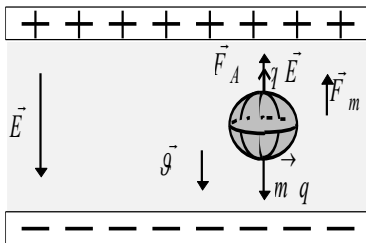


Рис. II.10

частинка рухалась у в'язкій рідині при наявності однорідного електричного поля. На частинку протилежно до сили тяжіння діяла сила в'язкого тертя і виштовхувальна сила. Сила в'язкого тертя, за законом Стокса, пропорційна до швидкості руху частинки. При сталій швидкості руху частинки сума всіх сил, що діють на неї, дорівнювала нулю. Ці сили в експерименті вимірювались без електричного поля. А за дослідженням руху частинки в електричному полі можна було знайти силу  $qE$ , що дозволяло за відомим  $E$  визначити заряд  $q$ .

Підбираючи напруженість електричного поля, можна було досягти того, щоб частинки перебували у стані спокою. У цьому випадку сила тертя відсутня, інші сили були виміряні, що за відомим  $E$  дало можливість визначити  $q$ .

Якщо з часом заряд кульки змінювати, то в різні проміжки часу за описаною методикою можна визначити  $q_1$  і  $q_2$ , а звідси – і зміну заряду  $\Delta q$ .

$$\Delta q = q_1 - q_2.$$

Із великої кількості вимірювань Міллікен прийшов до висновку, що  $\Delta q$  завжди є кратним одній і тій самій величині  $|e|$ . У зв'язку з цим  $\Delta q$  можна представити як:

$$\Delta q = n|e|, \text{ де } n=1,2,\dots$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

### 18. Рівняння Пуасона і Лапласа

Теорема Гауса встановлює зв'язок між напруженістю електричного поля у даній точці і величиною заряду. Задача визначення напруженості електричного поля розв'язується за цією теоремою легко, якщо відомий розподіл заряду. Однак часто трапляються випадки, коли розподіл зарядів невідомий, але відомі потенціали.

За теоремою Гауса

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Або

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (18.1)$$

Математично задача зводиться до такого. Складові напруженості електричного поля  $E_x, E_y, E_z$  по координатах за формулою зв'язку між напруженістю поля і потенціалом у даній точці поля, можна визначити через потенціали. Тобто:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (18.2)$$

Для того, щоб рівняння (18.1) записати через потенціал, рівняння (18.2) необхідно продиференціювати по координатах вдруге. Тоді отримаємо:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \quad (18.3)$$

(18.3) підставимо в (18.1) отримаємо:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (18.4)$$

Отже, ми фактично виконали математичну операцію  $\operatorname{divgrad}\varphi$ .

$$\operatorname{divgrad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi,$$

де  $\nabla^2\varphi$  – оператор Лапласа, який є символом других похідних по квадратах. Отже, використовуючи оператор Лапласа, рівняння (18.4) остаточно набуде вигляду:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Цей вираз називається рівнянням Пуассона.

У тих областях простору, де заряди відсутні, тобто  $\rho = 0$ , рівняння Пуассона переходить у рівняння Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = 0.$$

Отже, розв'язуючи рівняння Пуассона відносно  $\varphi$  після знайдення  $\varphi$ , можна визначити за формулами зв'язку потенціалу із напруженістю, напруженість електричного поля. Розв'язок повинен задовольняти такі вимоги, як неперервність і скінченність функції потенціалу  $\varphi$ , а також скінченність похідних по координатах.

### **19. Розподіл заряду в провіднику**

Перші експерименти щодо електризації тіл показали, що речовини розрізняються за здатністю зберігати наелектризований стан.

Деякі речовини легко піддаються електризації тертям, і їх у цьому стані можна утримати досить довгий час. Інші не піддаються електризації, а отже, і не зберігають наелектризованого стану. Тому дослідники XVIII ст. за цими ознаками поділили речовини на електрики і не електрики. Десь приблизно в 1730 р. в Англії Стефан Греї провів досліди, із яких випливало, що наелектризованість може передаватися від одного тіла до іншого горизонтальним шнурком на відстань декількох сот метрів, якщо сам шнурок підвішений на шовкових нитках.

Немає сумніву, що шнурок, який Греї використовував у своїх дослідах, був поганим провідником, у порівнянні з металом, однак він виявився повністю придатним для поширення заряду в електростатичних дослідах. Греї виявив також, що тонкий мідний дріт є добрим провідником.

Після робіт Греї і його сучасників електрики і неелектрики почали називати електричними провідниками й електричними ізоляторами. За електричною провідністю між ними існує суттєва відмінність. Електрична провідність добрих провідників, наприклад, металів, перевищує електричну провідність ізоляторів, наприклад, скла й пластмас приблизно в  $10^{20}$  разів.

Відома також велика група речовин, які мають меншу провідність, ніж метали – напівпровідники. Доцільно зазначити, що поділ речовин на провідники, напівпровідники і діелектрики є чисто умовним, оскільки і напівпровідники, і діелектрики утворюються залежно від умов. Наприклад, від нагрівання до високих температур, радіаційних опроміненнях, створенні сильних електричних полів, метали можуть мати значну провідність, і, навпаки – у швидкозмінних полях (наприклад, у рентгенівських променях електричне поле змінює свій напрям на протилежний за  $T \approx 10^{-18} - 10^{-20}$  с) будуть поводитися як діелектрики, оскільки заряди за час зміни напрямку електричного поля не встигають переміститися провідником на помітну відстань.

Різниця у провідності матеріалів обумовлена якісною різницею у їх, будові, кінетичних характеристиках електричних зарядів у даному матеріалі.

Таким чином, якщо діелектрики легко наелектризувалися тертям і довго в цьому стані могли залишатися, то в металах цей ефект не спостерігався. Тільки на початку минулого століття російським електротехніком В.В. Петровим експериментально було показано, що метали можна наелектризувати тертям – методом, який дістав назву стьобання. Трудність електризації металів тертям, очевидно, зумовлена тим, що заряди, які утворюються у місцях натирання, розподіляються по всіх тілах, які контактують з металом, у тому числі і по тілу експериментатора.

До провідників відносять речовини, з яких електричні заряди можуть переміщатися під дією навіть досить слабких електричних полів. Отже, зарядимо деякий провідник. Оскільки в провідниках заряди здатні під дією електричного поля переміщатися, то відбудеться миттєвий їх перерозподіл. Нас буде цікавити стаціонарний стан

заряду й електричного поля, який устанowitzя у провіднику після перерозподілу. Задамося метою виявити, яким буде електричне поле всередині провідника після досягнення стаціонарного стану.

У стаціонарному стані рух зарядів відсутній, а тому наперед можемо стверджувати, що в цьому випадку електричне поле всередині провідника рівне нулю. Правда, при цьому мусимо зауважити, що наші твердження передбачають відсутність інших не кулонівських сил, що діють на заряди, і здатні урівноважити електричні сили та забезпечити стаціонарний стан. Очевидно, варто зробити ще одне застереження. Говорячи про електричне поле всередині речовини, маємо на увазі поле, усереднене за об'ємом, який є значно більший від характерного об'єму атомної структури. Адже відомо, що у всіх речовинах. у тому числі, в добрих провідниках, у мікроскопічному масштабі поблизу атомних ядер існують дуже сильні електричні поля. Проте ядерне електричне поле не дає вкладу в середнє електричне поле провідника, створене електризацією.

Для забезпечення стаціонарного стану необхідно також, щоб напруженість електричного поля на поверхні провідника в кожній її точці була нормальною до поверхні. Тобто, у випадку рівноваги зарядів поверхня провідника буде екіпотенціальною.

Розглянуті умови дають можливість дослідити, як розподіляються заряди, надані провіднику.

Для того, щоб знайти цей розподіл, візьмемо в об'ємі провідника довільну замкнуту поверхню і застосуємо до неї теорему Остроградського-Гауса. Потік напруженості електричного поля має дорівнювати сумарному зарядові, який міститься у цій поверхні. Однак у стаціонарному стані напруженість електричного поля всередині провідника дорівнює нулю, а тому і потік вектора напруженості теж буде

дорівнювати нулю. А це засвідчує, що заряди в об'ємі, обмеженому вибраною нами поверхнею, відсутні. Оскільки вибрана поверхня зовсім довільна, то зроблений висновок можна поширити і на будь-які інші частини провідника, незалежно від їх розмірів.

Таким чином, при рівновазі у жодному місці всередині провідника не може бути надлишкових зарядів – усі вони розподіляються по поверхні провідника. Як би ми не заряджали провідник, заряди будуть перерозподілятися доти, доки напруженість електричного поля всередині провідника не стане рівною нулю.

Об'ємний заряд, який утворився всередині провідника, розсмоктується упродовж дуже короткого проміжку часу, який називається часом релаксації. Він залежить від матеріалу провідника, зокрема від його питомої електропровідності. Наприклад, для міді становить приблизно  $10^{-19}$  с. Такий час є дуже малим навіть у масштабах внутріатомних процесів. Тому в нестационарних процесах, коли поле змінюється з не дуже великими частотами, з достатньою точністю можна вважати, що вільні заряди розподіляються по поверхні провідника, а об'ємні заряди відсутні. Потенціал поля при умові рівноваги у всіх точках провідника є однаковим.

З умови постійності потенціалу у всіх точках провідника також випливає, що лінії напруженості електричного поля поверхневого заряду провідника мають бути перпендикулярні до його поверхні. Знайдемо цю напруженість.

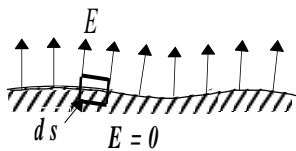


Рис. II.11

Візьмемо деяку заряджену поверхню провідника з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ . Розглянемо невеличку циліндричну поверхню, утворену нормальми до поверхні провідника

основами величиною  $dS$ , одна із яких розташована всередині, а друга – поза провідником (рис. II.11). Потік вектора електростатичного зміщення через цю поверхню дорівнює

$$dN_E = EdS,$$

де  $E$  – напруженість електростатичного поля у безпосередній близькості до поверхні провідника. Потік напруженості поля через внутрішню частину циліндричної поверхні дорівнює нулю, оскільки всередині провідника  $E = 0$ . Поза провідником у безпосередній близькості від нього напруженість поля  $E$  напрямлена по нормалі до поверхні провідника. Тому для бокової поверхні циліндра, що виступає назовні,  $E_n = 0$ , а для зовнішньої основи –  $E_n = E$ . Поверхневий заряд, який потрапляє всередину циліндра, дорівнює

$$dq = \sigma dS.$$

Застосувавши до циліндричної поверхні теорему Гауса, отримуємо:

$$EdS = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma dS.$$

Із останнього рівняння одержимо напруженість електричного поля поверхневого заряду провідника

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

## **20. Густина заряду на поверхні провідника**

На поверхні провідника заряди розподіляються так, щоб потенціальна енергія їх взаємодії була мінімальною. Цей принцип мінімуму повної потенціальної енергії зумовлює поверхневу густину заряду в різних точках



поверхні. На сфері і циліндрі поверхнева густина заряду всюди постійна в силу симетрії цих тіл, але на еліпсоїді, наприклад, вона є більшою на загострених кінцях.

Взагалі у тих місцях зарядженого провідника, де радіус кривизни менший, поверхнева густина заряду, а відповідно і напруженість електричного поля, завжди – більші (рис. II.12).

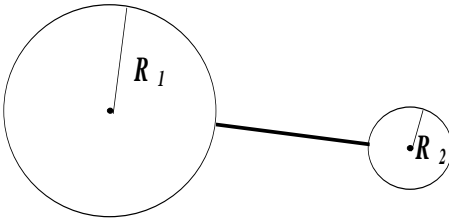


Рис. II.12

Сполучимо ці сфери провідником. Тоді потенціали обидвох сфер врівноважуються, тобто  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Якщо заряд першої сфери дорівнює  $q_1$ , то потенціал його поля

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}.$$

Заряд другої сфери  $q_2$  і потенціал його поля  $\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ . Прирівнявши потенціали обох сфер, отримаємо

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

Звідси

$$\frac{\sigma_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{R_1}.$$

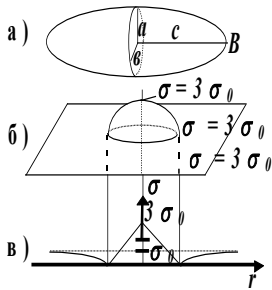


Рис. П.13

Отже, поверхневі густини зарядів обернено пропорційні радіусам кривизни поверхонь провідника.

Густини заряду в точках В і А еліпсоїда обертання відносяться як пів осі еліпсоїда  $c/a$  (рис. П.13).

Розподіл заряду на площині з виступом, який має форму півсфери, показано на рис. П.13б і в.

Надто великою може стати густина заряду на загостренні конуса. Якщо б конус закінчувався точкою, густина заряду на загостренні була би безмежно великою. Навпаки, густина зарядів у вершині конічної впадини дорівнює нулю. Загалом густина заряду у впадинах значно менша, ніж на опуклих частинах провідника. Якщо впадини є замкнутими пустотами, то густина заряду там рівна нулю.

Раніше ми показали, що напруженість електричного поля біля поверхні провідника пропорційна густині заряду. Про її величину можна судити і за густиною еквіпотенціальних поверхонь.

На рис. П.14 показано еквіпотенціальні поверхні зарядженого провідного еліпсоїда. Одна із них – поверхня еліпсоїда. Еквіпотенціальна поверхня, яка розміщується на

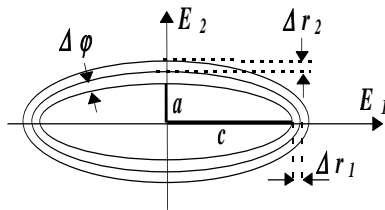


Рис. П.14

значній відстані від поверхні еліпсоїда, має бути сферою, оскільки заряд на провіднику на великій відстані від нього можна вважати точковим. У міру віддалення від еліпсоїда еквіпотенціальні

поверхні поступово наближаються до сферичних. Можна довести, що в результаті цього  $\Delta r_2 > \Delta r_1$ , а тому  $E_1 = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta r_1}$  має бути більшим, ніж  $E_2 = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta r_2}$  (в обох виразах  $\Delta\varphi$  – різниця потенціалів між одними і тими самими екіпотенціальними поверхнями). Звідси виходить, що  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Розподіл зарядів на поверхні провідника можна побачити на досліді. Для цього в різних точках досліджуваного тіла на його поверхні приклеюються парні аркуші із цигаркового паперу – електроскопи. При зарядженні провідника в місцях з більшою напруженістю електричного поля, тобто з більшою густиною поверхневого заряду, вони розходяться сильніше (рис. II.15).

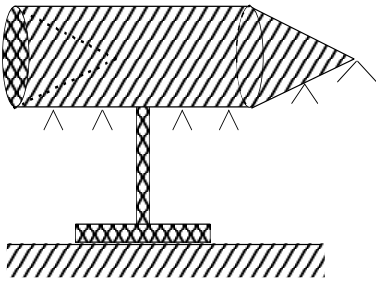


Рис. II.15

Як видно з рисунка, аркуші розходяться сильніше біля загострення провідника, що підтверджує раніше зроблений нами висновок, що на загостреннях провідника електричне поле може бути досить сильним.

Сильне електричне поле поблизу загострень призводить так званого «стікання зарядів із вістря». Це явище можна продемонструвати на вітрячку (рис. II.16), ввімкненому до електрофорної машини. Якщо надати вітрячку заряд, він починає обертатись у напрямі, показаному стрілкою. У вакуумі цей ефект не спостерігається. "Стікання заряду з вістря" або, як ще цей ефект називають "електричним вітром" добре видно на досліді, показаному на рис. II.17. Розміщене перед вістрям

S, з'єднаним із позитивним полюсом електростатичної машини, полум'я сильно відхиляється від вістря і навіть може погаснути.

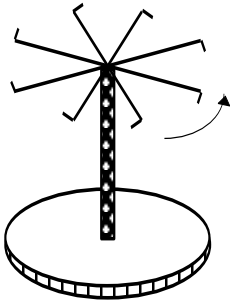


Рис. II.16

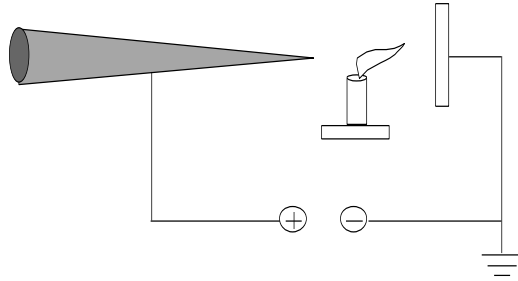


Рис. II.17

Той факт, що у вакуумі електричний вітер не спостерігається, приводить до висновку, що цей ефект не зумовлений стіканням зарядів із вістря провідника. Для стікання зарядів із, наприклад, металу необхідна емісія електронів із нього під дією електричного поля порядку  $10^6 - 10^7$  В/см і, щоб метал був заряджений негативно. "Стікання зарядів" з вістря відбувається при значно менших електричних полях і при будь-якому знаку заряду на вістрі.

Механізм цього явища полягає в іншому. У повітрі у невеликих кількостях є вільні заряди (іони обидвох знаків і електрони). Поблизу вістря ці заряди розганяються сильним полем вістря, стикаються з атомами газу й іонізують його. Електричне поле вістря однойменні з вістрям заряди направляє від вістря, які, захоплюючи атоми газу, створюють потік атомів і іонів. Цей потік і є «електричним вітром». Іони протилежного знаку до заряду вістря, притягуються до вістря і нейтралізують його заряд. Створюється враження, що заряд стікає з вістря провідника.

## 21. Провідники в електричному полі

Вище було показано, що заряд, одержаний провідником іззовні розподіляється його поверхнею так, щоб напруженість електричного поля в його об'ємі була рівна нулю. Такий стан зарядів зумовлений їх можливістю вільно рухатися провідником.

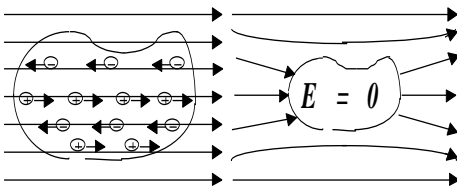


Рис. II.18

Однак у провідниках можуть вільно переміщатися не тільки заряди, принесені іззовні, але і вільні заряди складові провідника (електрони,

іони). Тому при внесенні провідника у зовнішнє електричне поле напруженістю  $\vec{E}$ , вільні заряди будуть переміщатися до його поверхні, додатні – за полем, а від'ємні – проти поля (рис. II.18). Отже, нейтральний провідник, поміщений в електричне поле, заряджається.

Явище електризації незарядженого провідника в зовнішньому електричному полі шляхом розділення наявних у ньому в рівних кількостях додатних і від'ємних зарядів, називається електризацією через вплив або електростатичною індукцією.

Поле індукованих зарядів направлене протилежно до зовнішнього поля. Таким чином, нагромадження зарядів на кінцях провідника спричиняє послаблення у ньому електричного поля. Перерозподіл зарядів у провіднику відбувається доти, доки напруженість поля всередині провідника не стане рівною нулю, а лінії напруженості поза провідником, перпендикулярними до його поверхні. Отже, нейтральний провідник, внесений в електричне поле, розриває частину ліній напруженості – вони закінчуються

на від'ємних індукованих зарядах і знову починаються на позитивних.

Якщо напруженість зовнішнього електричного поля позначити через  $\vec{E}_0$ , а внутрішнього, створеного індукованим зарядом, через  $\vec{E}_0$ , то напруженість сумарного поля в провіднику буде дорівнювати

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\%0}.$$

Оскільки  $\vec{E} = 0$ , то  $|\vec{E}_0| = |\vec{E}_{\%0}|$ . Тобто внутрішнє поле індукованих зарядів у провіднику повністю компенсує зовнішнє поле.

Густина заряду на поверхні провідника, само собою зрозуміло, залежить від напруженості зовнішнього поля. Повний заряд поверхні завжди досить малий у порівнянні із загальним зарядом всіх вільних електронів у металі. У кожному кубічному сантиметрі металу міститься біля  $10^{22}$ – $10^{23}$  електронів із загальним зарядом порядку  $1,6 \cdot 10^3$  Кл. Якщо в зовнішньому полі напруженістю  $E = 4 \cdot 10^5$  В/м вміщено кубик зі стороною  $10^{-2}$  м, то на його грані виникає заряд

$$\sigma = E \varepsilon_0 = 4 \cdot 10^5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ К/м}^2 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ К/м}^2,$$

що набагато менше сумарного заряду вільних електронів у кубіку.

Таким чином, у металах є великі резерви електронів для компенсації навіть дуже сильних зовнішніх полів. Фактично неможливо перекомпенсувати внутрішнє поле, не зруйнувавши метал зовнішнім полем.

Виникнення індукованих зарядів на провіднику, розміщеному в електричному полі, використовується для їх зарядки за допомогою так званих електростатичних машин.

Якщо відвести індукований заряд одного знаку на другий провідник (наприклад, у землю) і відключити останній, то перший провідник залишиться зарядженим зарядом протилежного знаку (рис. II.19).

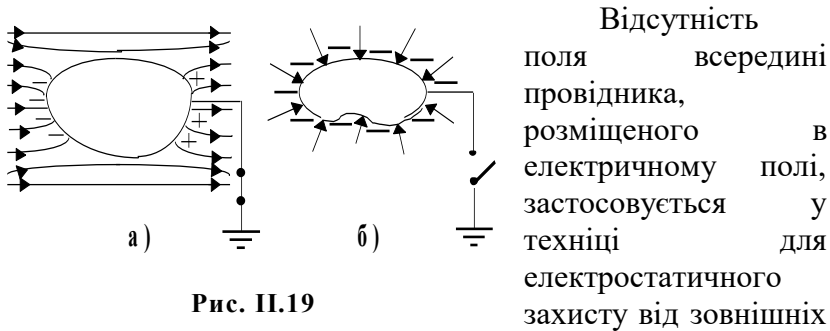


Рис. II.19

електростатичних полів різних електричних приладів. Зауважимо, що, як правило, достатнім електростатичним захистом є не тільки суцільні металеві екрани, але і замкнуті екрани із густої металевої сітки. Замкнутий пустотілий провідник екранує тільки поле зовнішніх зарядів.

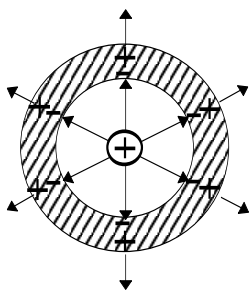


Рис. II.20

Якщо електричні заряди містяться всередині пустоти, то індуковані виникнуть не тільки на зовнішній поверхні провідника, але і на внутрішній (рис. II.20). Розподіл цих зарядів буде таким, щоби повне поле, рівне сумі полів, створюваних зарядом всередині пустоти й індукованими зарядами, в довільній точці в товщі металу було рівне нулю. Однак усередині пустоти поле не буде дорівнювати нулю, і тут будуть проходити лінії напруженості, які з'єднують заряд, який міститься у пустоті, з індукованим зарядом на внутрішній поверхні. Індукційні заряди на зовнішній поверхні викличуть поле в зовнішньому

просторі, і тому замкнута провідна поверхня не екранує поле електричних зарядів, розмішених у ній.

Велике електричне поле, яке виникає на вістрі зарядженого провідника, одержало цікаве застосування, а зокрема, на його основі побудовано іонний мікроскоп, робота якого зумовлена потужними полями, що виникають навколо металевого вістря. Дуже тонка голка, діаметр кінчика якої не більший  $1000 \text{ \AA}$ , розміщена в центрі скляного сферичної форми балона, в якому створено високий вакуум (рис. II.21). Усередині балон покритий тонким шаром флуоресцентної речовини. Між покриттям і голкою створюється дуже висока різниця потенціалів.

Нехай спочатку, вістря по відношенню до екрана буде заряджене негативно, електричне поле на кінці вістря може досягати величини  $40 \cdot 10^6 \text{ В/см}$ . У таких сильних полях електрони відриваються від поверхні вістря і за рахунок різниці потенціалів між екраном і вістрям у напрямі до екрана прискорюються.

Досягнувши екрана, вони викликають його світіння.

Електрони, які потрапили в точку поверхні, що флуоресціює, – це, в дуже доброму наближенні, ті самі електрони, які покинули другий кінець радіальних ліній поля. Адже електрони рухаються вздовж ліній поля, які з'єднують кінець вістря з поверхнею сфери. Тому на поверхні ми

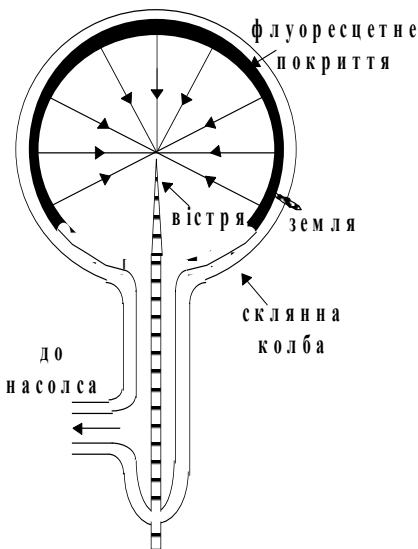


Рис. II.21



бачимо свого роду зображення кінчика вістря. Точніше – картину випромінювальної здатності поверхні вістря, тобто легкості, із якою електрони можуть залишати поверхню металевго вістря. Якщо сила розділення достатньо висока, то можна розраховувати положення окремих атомів на кінчику вістря. Але з електронами такого розділення досягнути неможливо.

Однак якщо змінити знак різниці потенціалів і впустити в колбу небагато гелію, то деталі розділені будуть кращими. Коли атом гелію стикається з кінчиком вістря, потужне поле зриває з атома електрон, і атом заряджається позитивно. Потім іон гелію прискорюється вздовж ліній напруженості, доки не потрапить на екран. Оскільки іон гелію значно тяжчий від електрона, то і квантово-механічні довжини хвиль у нього набагато менші. А якщо ще температура невисока, то вплив теплових флуктуацій швидкостей іонів менший, ніж в електронів.

А це сприяє одержанню більш чіткого зображення кінця вістря. З мікроскопом, що працює на принципі іонної емісії, вдалося домогтися збільшення до  $2 \cdot 10^6$  разів, тобто на порядок більшим, ніж в електронних мікроскопах.

## **22. Чому напруженість електричного поля на поверхні зарядженого провідника більша, ніж зарядженої площини?**

Як відомо, напруженість електростатичного поля біля зовнішньої поверхні зарядженого провідника дорівнює

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

де  $\sigma$  – локальна поверхнева густина заряду.

Якщо цей заряд, що є на провіднику, розподілити по безмежній площині і так, щоб його поверхнева густина була такою ж, як і на провіднику, то напруженість електростатичного поля буде

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

тобто у два рази меншою, ніж біля поверхні зарядженого провідника. Чому?

Якщо мати на увазі тільки ті заряди, які перенесені на провідник із зовні, то знайти відповідь на це питання, очевидно, неможливо. Для знаходження відповіді на поставлене питання ще раз згадаємо, що в об'ємі зарядженого провідника напруженість поля дорівнює нулю. При доведенні цього питання, ми зовсім не стверджували, але і не заперечували, що в провіднику не можуть бути "інші" заряди. Насправді для того, щоби в провіднику напруженість поля була рівною нулю, в ньому обов'язково мають бути ще якісь заряди. В безпосередній близькості до поверхні зарядженого провідника створюється поле напруженістю

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

як усередині, так і ззовні його поверхні. Але всі інші заряди створюють додаткове поле, рівне за величиною  $E_1$ . У результаті цього сумарне внутрішнє поле дорівнює нулю, а зовнішнє – подвоюється.

Отже,

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

### **23. Метод зображень**

Одним із методів розрахунку електричних полів є метод електричних зображень. Його суть покажемо на одному з найпростіших випадків. Отже, розглянемо точковий заряд, який розміщений на відстані  $r$  від тонкої провідної пластини. Оскільки пластина буде міститися в електричному полі, то за індукцією вона зарядиться зарядом, протилежним за знаком точкового. Поверхнева густина заряду, індукованого на пластині, відрахована від основи перпендикуляра, опущеного із заряду на пластину, буде різною. Найбільшою вона буде в точці основи цього перпендикуляра. З відстанню від цієї точки поверхнева густина заряду буде зменшуватися, а це ускладнює знаходження характеристик електричного поля такої системи. Метод дзеркальних зображень спрощує ці завданням

Для його введення розглянемо поле двох точкових зарядів, однакових за величиною і різних за знаком зарядів. Картина поля тих зарядів показана на рис. П.22. Навколо кожного із зарядів можна знайти такі поверхні, потенціали у кожній точці яких – однакові. Такі еквіпотенціальні поверхні навколо кожної із системи зарядів є складними. Однак у площині, перпендикулярній до прямої, що проходить через точки розміщення зарядів і ділить відстань між ними на половину, потенціали в кожній її точці дорівнюють нулю.

Напруженість електричного поля кожного із зарядів є перпендикулярною до площини нульового потенціалу. Тобто

$$E = E_{n+} + E_{n-}. \quad (23.1)$$

У точках на площині нормальні складові напруженості полів позитивного й негативного зарядів є

рівні, а тому напруженість сумарного поля у них подвоюється. Заберемо тепер заряд  $-q$ , а на місце еквіпотенціальної пластини  $OO'$  помістимо електропровідну пластину. Пластина, зарядившись, створює електричне поле, нормальне до площини. Його

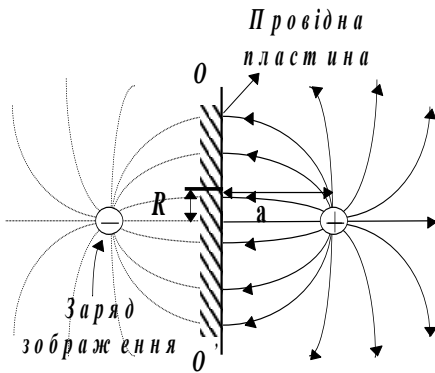


Рис. П.22

напруженість у кожній точці в безпосередній близькості до пластини буде дорівнювати нормальній складовій напруженості

електричного поля у цих точках точкового заряду. Тобто і в цьому випадку виконується умова (23.1). А це означає, що заряд, індукований на пластині точковим зарядом  $+q$ ,

можна замінити точковим зарядом  $-q$ , який зумовлює у просторі між  $+q$  і пластиною ту саму електричну взаємодію. З рис. П.22 видно, що заряд  $-q$  має бути розміщений із протилежної сторони пластини на відстані від неї, рівній відстані від пластини заряду  $+q$ . Тобто заряд  $-q$  є дзеркальним зображенням у пластині заряду  $+q$ . Метод, у якому використовуються заряди-зображення, називається методом дзеркального зображення.

Наведемо розрахунки заряду, індукованого на провідній пластині. Метод, у якому використовуються заряди-зображення, називається методом дзеркального зображення. Він, у широкому розумінні, полягає у розрахунку характеристик електричного поля, створеного зарядами у присутності провідників, шляхом введення замість індукованих зарядів на провідниках фіктивних зарядів, які є дзеркальним зображенням у провідниках цих зарядів.

Уведемо поверхневу густину індукованого заряду на площині  $\sigma$ . Очевидно, в різних точках заряджені поверхні вона буде різною, тобто  $\sigma = f(r)$  (рис. П.22).

Розглянемо точку поверхні пластини на відстані  $r$  від тієї точки, яка розміщена прямо проти позитивного заряду (на рис. точка Р). Електричне поле позитивного заряду в точці спрямоване усередину пластини. Нормальна складова напруженості цього поля

$$E_n = E \cos \alpha, \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2)};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Тоді

$$E_n(r) = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

До цієї напруженості додається напруженість поля негативного дзеркального заряду, що подвоїть нормальну складову сумарного поля. Тоді поверхнева густина індукованого заряду в довільній точці пластинки

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E(r) = -\frac{2aq}{4\pi (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

За цим виразом можна знайти сумарний заряд, індукований на площині.

$$dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr, \quad q = dq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dr}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = -q.$$

Отже, ми довели, що заряд, індукований на площині, за знаком протилежний, а за величиною рівний заряду  $q$ . Тому заряд на площині можна замінити фіктивним зарядом  $-q$ . Силу взаємодії між зарядом і площиною тепер можна визначити за формулою

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}.$$

Потенціал поля у довільній точці простору між площиною й зарядом дорівнює (рис. П.23)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

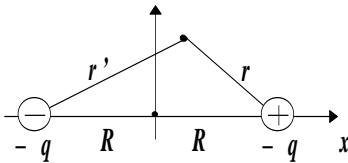


Рис. П.23

На площині  $r = r'$  і  $\varphi = 0$ , тобто площина є екіпотенціальною поверхнею з нульовим потенціалом.

Замість точкового заряду можна взяти заряджений прямолінійний провідник, розташований паралельно до поверхні площини. Поле такої системи в просторі між площиною й провідником збігається з полем, яке би створювалось зарядженим провідником зі своїм дзеркальним зображенням. Для декількох точкових зарядів або декількох прямолінійних провідників поле можна також розрахувати методом зображень – воно збігається з полем, створеним усіма зарядами з їх дзеркальними зображеннями.

Простим, крім площини, щодо знаходження характеристик, є ще електричне поле зарядженої сфери.

Розглянемо електричне поле навколо металевої сфери з точковим зарядом  $q$  поблизу неї. Нехай сфера буде заземлена, тобто потенціал її дорівнює нулю. Величина точкового заряду  $q$  і його віддаль від центра сфери  $R = OA$  відомі. Цими умовами розв'язок електростатичної задачі визначається однозначно. Оскільки заряд акумулюється ззовні сфери, то поле всередині неї дорівнює нулю. Знайдемо напруженість електричного поля поза сферою.

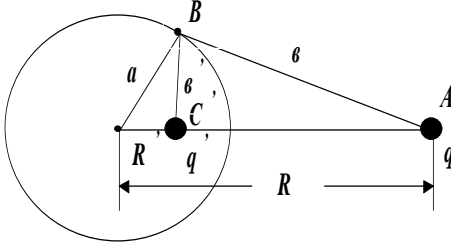


Рис. II.24

Виберемо на прямій OA (рис. II.24.) таку точку C, щоби трикутник O3C був подібний до трикутника OBA. Розмістимо в цій точці допоміжний заряд  $q'$ .

Якщо  $v$  і  $v'$  – довжини відрізків BA і BC, то потенціал зарядів  $q$  і  $q'$  у точці B становитиме

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 v} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 v'}$$

і набуває значення нуля, якщо

$$q' = -\frac{v'}{v} q = -\frac{a}{R} q.$$

З цього виразу видно, що величина заряду  $q'$  не залежить від положення точки B на сфері. Отже, потенціал, створюваний зарядами  $q$  і  $q'$ , рівний нулю у всіх точках сфери, тобто  $q'$  дзеркальним зображенням заряду  $q$  у сфері. Потенціал електричного поля поза сферою на віддальх  $r$  і  $r'$  від зарядів  $q$  і  $q'$  може бути записаний

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 b'}.$$

Загальний заряд  $q_{\text{ind}}$ , індукований на поверхні сфери, рівний за величиною і збігається за знаком із зарядом  $q'$ . Наведемо доведення цього висновку.

Нехай деяка довільна замкнена поверхня  $S$  оточує сферу  $S'$ , але не оточує заряди  $q$ . На поверхні  $S'$  поле  $E$  збігається з полем  $q$  і  $q'$ , із яких заряд  $q$  міститься за поверхнею  $S'$ . Тому потік  $N_E$  через поверхню  $S'$  буде дорівнювати  $N_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$ . За теоремою Остроградського-Гауса, цей потік рівний  $N_E = \frac{q_{\text{ind}}}{\varepsilon_0}$ . Отже,  $q_{\text{ind}} = q'$ .

Якщо потенціал сфери дорівнює  $\varphi_0$ , то для розв'язання задачі необхідно ввести ще один фіктивний заряд  $q_0 = a\varphi_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0$ , помістивши його в центрі сфери  $O$ . Напруженість електричного поля у зовнішньому просторі буде виражатися суперпозицією полів трьох зарядів:  $q$ ,  $q'$ ,  $q_0$ . Потенціал  $q'$  на сфері рівний нулю. На ній потенціал створюється тільки зарядом  $q$  і дорівнює  $\varphi_0 = \frac{q_0}{a}$ .

Доцільно відзначити, що заряди  $q$  і  $q'$  володіють властивістю взаємозамінності. Тобто, якщо заряд  $q'$  є дзеркальним зображенням заряду  $q$ , то можливий і обернений варіант – заряд  $q$  може бути дзеркальним зображенням заряду  $q'$ . А це дозволяє поширити викладений метод і на випадок, коли точковий заряд розміщено всередині провідної сферичної поверхні.

Розглянемо тепер випадок, коли сфера ізольована і відомий її заряд  $q_0$ . У цьому випадку для визначення поля



у зовнішньому просторі до зарядів  $q$  і  $q'$  необхідно додати третій фіктивний заряд  $q'' = q_0 - q'$ , розмістивши його у центрі сфери  $O$ . Розглянемо спочатку випадок, коли сфера розряджена, тобто  $q_0 = 0$ .

Тоді

$$q'' = -q' = -\frac{a}{R}q,$$

і поля поза сферою будуть утворюватися тепер накладанням полів зарядів  $q$ ,  $q'$ ,  $q''$ .

Знаючи величину заряду зображення, можна визначити, наприклад, силу взаємодії між точковим зарядом  $q$  і металевою кулею. Якщо куля заземлена, то

$$F'_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2}.$$

Якщо куля не заземлена, то  $F = F' - F''$  де  $F''$  – сила взаємодії між зарядом  $q$  і  $q'$ . Остаточо маємо

$$F = F' - F'' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2} - \frac{a}{R^3} \right).$$

## **24 Електроємність провідників. Конденсатори**

Вище ми показали, що всередині електрично ізолюваного зарядженого провідника напруженість електричного поля дорівнює нулю (рис. II.25).

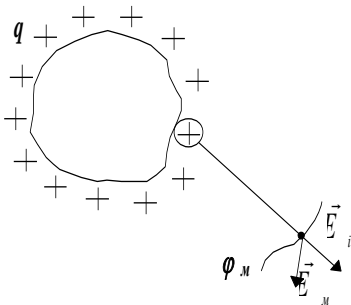
Для обчислення характеристик поля зарядженого провідника поза його межами скористуємось принципом суперпозиції електричних полів і дискретністю зарядів. Опираючись на дискретність заряду, заряд  $q$ , який

акумулюється на провіднику, представимо як суму  $n$  його частин  $q_i$ , кожна з яких є точковим зарядом. Тобто,

$$q = \sum_{i=1}^n q_i, \text{ а } \vec{E}_M = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

Тоді потенціал електричного поля у точці  $M$  (рис. II.25.) буде дорівнювати алгебраїчній сумі потенціалів полів кожного із елементарних точкових зарядів.

$$\varphi_M = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}.$$



**Рис. II.25**

Надамо тепер тому самому провідникові заряд  $q'$ , який в  $N$  разів більший від заряду  $q$ , тобто  $q' = Nq$ . Щоби поле всередині провідника і надалі було рівним нулю, заряд  $q'$  повинен розподілятися по поверхні провідника так, як і заряд  $q$ . А тому кожна з частинок  $q'_i$ , також буде в  $N$  разів більшою від відповідної частинки  $q_i$ . Обчислюючи тепер потенціал в точці  $M$ , отримаємо

$$\varphi'_M = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q'_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Nq_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} N \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = N\varphi_M \quad (24.1)$$

Тобто, потенціал у кожній точці поля зростає прямо пропорційно до заряду провідника. Цей висновок є

## Розділ II. Потенціальність електричного поля

справедливим і для всіх точок всередині і на поверхні провідника, потенціал в яких – однаковий.

Отже,

$$\varphi \sim q \quad (24.2)$$

Увівши коефіцієнт пропорційності (24.2), запишемо рівняння

$$C\varphi = q \text{ або } C = \frac{q}{\varphi}. \quad (24.3)$$

Із останньої формули видно, що  $C$  не є простим коефіцієнтом пропорційності, а має одиницю вимірювання, а значить – фізичний зміст.  $C$  називається електричною ємністю провідника. Ємність провідника, як видно із (24.3), чисельно дорівнює величині заряду, надання якого підвищує потенціал його електричного поля на одиницю.

За одиницю вимірювання електроємності в системі СІ прийнято ємність такого провідника, при наданні якому заряду в 1 Кл потенціал його електричного поля змінюється на 1 В. Ця одиниця ємності називається фарадою

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{1 \text{ Кл}}{1 \text{ В}} = 1 \text{ Ф}.$$

Фарада є досить великою одиницею, тому на практиці користуються малими одиницями ємності – мікрофарадою і пікофарадою.

$$1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}, 1 \text{ нФ} = 10^{-12} \text{ Ф}.$$

Знайдемо ємність кулі. Для цього обчислимо потенціал кулі, яка заряджена зарядом  $q$ . Використаємо

зв'язок між потенціалом і напруженістю електричного поля

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \quad (24.4)$$

Тоді потенціал кулі можна знайти, проінтегрувавши вираз (24.4) по  $r$  від  $R$  до  $\infty$  (потенціал у безмежності дорівнює нулю).

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon R}. \quad (24.5)$$

Зіставляючи тепер вирази (24.5) і (24.3), знайдемо, що ємність електрично ізолюваної кулі радіусом  $R$  в середовищі з діелектричною проникністю  $\varepsilon$  буде рівною

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R. \quad (24.6)$$

Відомим прикладом ізолюваної сферичної кулі є Земля. Її радіус  $R = 6400$  км, а діелектрична проникність навколишнього середовища практично дорівнює одиниці. За формулою (24.6) її ємність  $C \approx 700$  мкФ.

Електрично ізолюваний провідник, як правило, має електроємність значно меншу, ніж електроємність Землі. Якщо такий провідник зарядити і з'єднати із Землею, потенціал якої умовно будемо вважати рівним нулю, то в результаті різниці потенціалів між провідником і Землею заряд із провідника буде «стікати» в Землю. Цей процес буде продовжуватися доти, доки потенціали Землі і провідника не зрівняються. Але оскільки ємність провідника набагато менша від ємності Землі, то заряд, який стікає із провідника в Землю, практично не змінить її потенціалу. А це означає, що весь заряд перейде у Землю. Таким чином, заземляючи різні провідники, ми приводимо

їх до одного і того самого потенціалу Землі. Формула (24.3) виражає електроємність електрично ізольованого провідника.

Якщо провідник не є електрично ізольованим, тобто поблизу нього є інші провідники, то, заряджаючись, він буде наводити на поверхні сусідніх провідників заряди обох знаків. Ці індуковані заряди будуть створювати додаткове електричне поле, яке змінить потенціал поля цього зарядженого провідника. Вплив сторонніх провідників на потенціал зарядженого провідника буде залежати від їх розмірів і розташування. Такий самий вплив на потенціал поля зарядженого провідника будуть мати і близько розміщені діелектрики. Електричне поле індукованих зарядів на сторонніх провідниках і діелектриках завжди напрямлене протилежно до електричного поля, яке викликало ці заряди. А тому при внесенні у середовище, що оточує заряджений провідник, інших провідників і діелектриків, поле даного зарядженого провідника ослаблюється, а його потенціал падає. Згідно із виразом (24.3), електроємність провідника при цьому зростає у порівнянні з електроємністю того самого провідника у вакуумі у відсутності поблизу нього інших провідників і діелектриків. Це дає можливість створювати прилади різної ємності, які називаються конденсаторами.

Конденсатор складається із двох обкладок, розділених шаром діелектрика. Електричне поле зарядженого конденсатора зосереджене майже повністю у просторі між обкладками, а це запобігає впливу на його ємність інших провідників і діелектриків.

При прикладанні до конденсатора деякої напруги його обкладки заряджаються рівним за величиною і протилежними за знаком зарядами. Основною характеристикою конденсатора є його електроємність, під

якою розуміють фізичну величину, пропорційну заряду  $q$  обернено пропорційну різниці потенціалів між обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Електроємність конденсатора вимірюється у тих самих одиницях, що і ємність електрично ізольованого провідника.

Найпростішою конструкцією є плоский конденсатор, який складається з двох провідних плоских паралельних пластин, простір між якими заповнений діелектриком. Електроємність плоского конденсатора можна записати на основі таких міркувань. Передовсім необхідно прийняти, що відстань між обкладками є набагато меншою від лінійних розмірів обкладок, тобто  $d_0 \ll l$ . У цьому випадку можна знехтувати краєвими ефектами, і електричне поле всередині конденсатора вважати однорідним, а заряд  $q$  – рівномірно розподіленим по поверхні обкладок. Тоді поверхнева густина заряду на обкладках буде постійною і рівною

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Напруженість електричного поля між обкладками

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}.$$

З іншого боку, користуючись зв'язком між напруженістю поля і його градієнтом потенціалу, для нашого випадку однорідного поля маємо

$$E = -\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d_0} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d_0}.$$

Із останніх двох виразів можна одержати різницю потенціалів між обкладками конденсатора

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{qd_0}{\varepsilon_0 S}.$$

Тоді електроємність плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0}. \quad (24.7)$$

Отже, електроємність плоского конденсатора залежить від розмірів його обкладок, відстані між ними і діелектричної проникності діелектрика, який заповнює простір між обкладками.

При зменшенні відстані між обкладками зростає напруженість електричного поля у діелектричному шарі конденсатора. У дуже сильних полях (порядку  $10^7$  В/м) діелектрик перестає бути ізолятором. Для кожного діелектрика є певне максимальне допустиме значення напруженості електричного поля  $E_{проб}$ , вище від якого він втрачає властивості ізолятора. Втрата діелектриком властивостей ізолятора під дією електричного поля називається пробоем діелектрика. Тому для запобігання пробоем віддаль між обкладками не можна робити меншою від деякого мінімального значення

$$d_{\min} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{E_{np}} = \frac{U}{E_{np}},$$

а при постійній віддалі між обкладками до конденсатора не можна прикладати напругу, яка би перевищувала деяке максимальне значення.

$$U_{\max} = d_0 \cdot E_{np},$$

що називається пробивною напругою.

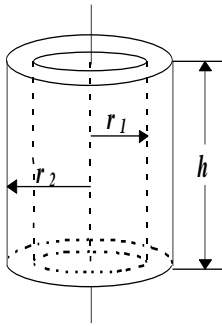


Рис. П.26

Серед можливих конструкцій конденсаторів є сферичні і циліндричні. Розглянемо електроємність останнього., Він складається із двох порожнистих коаксіальних металевих циліндрів з радіусами  $r_1$  і  $r_2$  (рис. П.26.). Для виведення формули електроємності циліндричного конденсатора припустимо, що довжина циліндрів є набагато більшою від їх радіусів, тобто  $h \gg r_1$  і  $r_2$ .

Тоді, нехтуючи, як і раніше, краєвими ефектами, можна визначити різницю потенціалів між обкладками, використавши формулу для напруженості електричного поля, створеного безмежно довгим прямим циліндром радіусом  $r$ , рівномірно зарядженим з постійною лінійною густиною  $\tau = q/h$ . Цей циліндр виберемо так, щоб він був у просторі між обкладками конденсатора ( $r_1 < r < r_2$ ). Тоді напруженість електричного поля, створюваного ним, буде:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

З іншого боку,



$$E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Порівнявши останні вирази і, проінтегрувавши у межах від  $r_1$  до  $r_2$ , отримаємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (24.8)$$

Вираз (24.8) підставимо в рівняння для електроємності двох провідників і отримаємо електроємність циліндричного конденсатора.

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Сферичний конденсатор складається із двох концентричних металевих обкладок сферичної форми, радіусами  $r_1$  і  $r_2$  (рис. II.27.). Якщо такий конденсатор зарядити, і заряд, наприклад, внутрішньої обкладки  $q > 0$ , то електричне поле, створене внутрішньою сферою, буде тільки ззовні сфери. Вектор його напруженості буде напрямлений у простір від сфери. Зовнішня обкладка буде заряджена зарядом  $-q$  і вектор напруженості поля буде напрямленим до сфери.

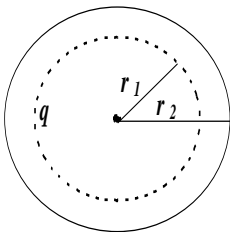


Рис. II.27

У результаті накладання цих полів сумарне поле ззовні конденсатора буде дорівнювати нулю. Напруженість поля у просторі між обкладками буде дорівнювати напруженості поля, створеного зарядом внутрішньої обкладки. Тому різниця потенціалів між обкладками буде дорівнювати

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Підставляючи це рівняння у формулу ємності двох провідників, одержимо формулу електроємності сферичного конденсатора

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}.$$

## 25. Потенціальні і ємнісні коефіцієнти

Ми розглянули ємності простих провідникових систем, у яких лінії напруженості електричного поля починаються на одному провіднику (обкладці) і закінчуються на іншому. Ємності таких конденсаторів розраховуються в основному за простою теорією.

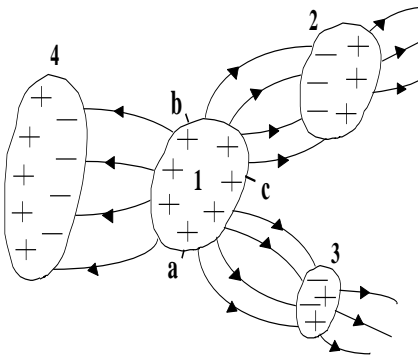


Рис. П.28

Очевидно, що більш складні конденсатори вимагають і більш складної теорії. Складність побудови теорії такої системи полягає у тому, що заряд якого-небудь із тіл буде залежати від потенціалів усіх провідників, які створюють електричне поле. Для знаходження

цього заряду виділимо на провіднику частину поверхні  $bc$ , яка з'єднується лініями напруженості тільки другим провідником (рис. П.28). Заряд ділянки  $bc$

$$q_{bc} = C_{bc} U_{12}.$$

## Розділ II. Потенціальність електричного поля

$C_{bc}$  – ємність ділянки  $bc$  відносно провідника 2, а  $U_{12}$  – напруга між провідниками 1 і 2.

Для ділянки  $cd$

$$q_{cd} = C_{cd}U_{13},$$

а для ділянки  $db$

$$q_{db} = C_{db}U_{14}.$$

Тоді весь заряд на провіднику 1 буде дорівнювати

$$q_1 = q_{bc} + q_{cd} + q_{db} = C_{bc}U_{12} + C_{cd}U_{13} + C_{db}U_{14} \quad (25.1)$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2; U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3; U_{14} = \varphi_1 - \varphi_4. \quad (25.2)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  – потенціали кожного із провідників відносно безмежності.

Підставляючи (25.1) в (25.2), отримаємо для заряду  $q_1$  лінійну функцію потенціалів всіх провідників у вигляді

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 + \dots + \sum_i C_{1i}\varphi_i.$$

Для інших провідників

$$q_k = \sum_i^k C_{ki}\varphi_i \quad (25.3)$$

де  $k$  – номер провідника.

Коефіцієнти  $C_{ki}$ , які входять у формулу (25.3) мають такий фізичний зміст.

Наприклад,  $C_{11}$  дорівнює заряду провідника 1, якщо його потенціал дорівнює одиниці, а потенціали всіх інших провідників – нулю.

Коефіцієнт  $C_{12}$  дорівнює заряду на провіднику 1, коли потенціал провідника 2 дорівнює одиниці, а потенціали всіх інших провідників, включаючи і першого – нулю, і т. д.

$C_{ki}$  – залежить від форми, розмірів, взаємного розміщення провідників і властивостей середовища. Вони називаються ємнісними коефіцієнтами.

Аналогічно до виразу (25.3) можна записати для потенціалів

$$\varphi_k = \sum_i^n \alpha_{ki} q_i.$$

де  $\alpha_{ki}$  – потенціальні коефіцієнти, які так само залежать від форми, розмірів та взаємного розміщення провідників, як і  $C_{ki}$ .

Розглянемо приклад. Для конденсатора кількість обкладок дорівнює двом. У цьому випадку

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Причому  $q_2 = -q_1$ . Розв'язавши ці рівняння відносно  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , можна знайти різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ , а врахувавши, що  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , отримаємо ємність конденсатора через ємнісні коефіцієнти

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}.$$

Доведемо, що коефіцієнти  $C_{ki}$  і  $C_{ik}$  задовольняють умову симетрії, тобто

$$C_{ki} = C_{ik}.$$

Тому

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{11} + C_{22} + 2C_{12}}.$$

Отже, визначивши ємнісні коефіцієнти, можна визначити ємність будь-якої системи.

## 26. Сполучення конденсаторів

Різні можливі значення електроємності і їх робочі напруги можна одержати шляхом послідовного чи паралельного сполучення конденсаторів у батарею. .

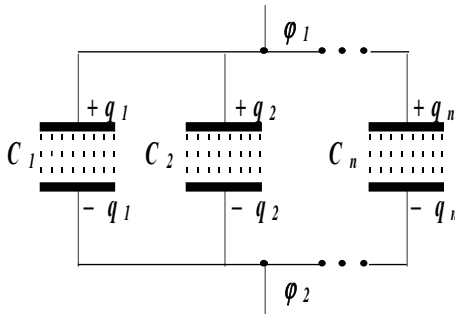


Рис. II.29

Нехай маємо кілька конденсаторів ємностями  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Сполучимо їх спочатку паралельно (рис. II.29). у такому разі одна із обкладок кожного конденсатора має потенціал  $\varphi_1$ , а друга –  $\varphi_2$ . Оскільки вони заряджені до однієї і тієї ж

різниці потенціалів  $\varphi_2 - \varphi_1$ , то їх заряди дорівнюють:

$$q_1 = C_1(\varphi_1 - \varphi_2), q_2 = C_2(\varphi_1 - \varphi_2), \dots, q_n = C_n(\varphi_1 - \varphi_2),$$

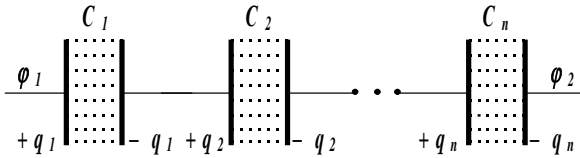
а заряд всієї батареї конденсаторів

$$q = \sum_{\mu=1}^n q_{\mu} = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{\mu=1}^n C_{\mu}.$$

З іншого боку,  $q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$ , де  $C$  – електроємність батареї. Із двох останніх виразів одержимо електроємність батареї паралельно сполучених конденсаторів

$$C = \sum_{i=1}^n C_i . \quad (20.1)$$

Отже, при паралельному сполученні конденсаторів їх загальна електроємність дорівнює сумі електроємностей окремих конденсаторів.



**Рис. П.30**

При послідовному сполученні конденсаторів (рис. П.30) друга обкладка першого конденсатора утворює з першою обкладкою другого єдиний провідник, на якому при подачі напруги на батарею виникають індуковані заряди такої ж величини, як заряд на першій обкладці першого і другій обкладці  $n$ -го конденсатора. Те ж саме справедливо для другої обкладки другого конденсатора і першої обкладки третього і т. д. Отже, для всіх конденсаторів, увімкнених послідовно, характерна однакова величина заряду  $q$  на обкладках. Тому напруга на кожному із конденсаторів

$$U_i = \frac{q}{C_i} .$$

Сума цих напруг дорівнює загальній напрузі на батареї:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{q}{C_i} = q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} .$$

Врахувавши, що  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$ , де  $C$  – ємність батареї із останнього рівняння отримаємо формулу електроємності при послідовному ввімкненні конденсаторів

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (20.2)$$

Отже, при послідовному ввімкненні конденсаторів додаються величини, обернені їх ємностям.

## **27. Енергія взаємодії точкових зарядів**

На основі аналізу всіх електричних явищ, неважко зрозуміти, що електричне поле володіє відповідним запалом енергії. Розглянуті вище явища взаємодії заряджених тіл є прямими підтвердженнями цього факту. А такі природні явища, як грозові розряди-блискавки, свідчать про величезне нагромадження електричної енергії в електричному полі.

Як відомо, сили, з якими взаємодіють заряджені тіла, є консервативними, а тому електростатичне поле заряджених тіл володіє запасом потенціальної енергії.

Розглянемо спочатку енергії системи точкових зарядів. Підхід до розв'язання цього питання можна виробити, визначивши взаємну енергію двох точкових зарядів. Отже, нехай маємо два точкові заряди  $q_1$  і  $q_2$  на відстані  $r_{12}$  один від одного. Коли вони взаємно віддалені на безмежність, то не взаємодіють і їхня взаємна енергія дорівнює нулю. Зблизимо їх на задану відстань  $r_{12}$ . Для цього необхідно виконати роботу проти сил електричного поля, за рахунок чого збільшиться потенціальна енергія системи на величину, рівну виконаній роботі. Зближення зарядів можна проводити, наближаючи  $q_1$  до  $q_2$  або  $q_2$  до

$q_1$ . В обох випадках буде виконана однакова робота, яка дорівнює

$$A_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \frac{q_2}{r_{12}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0},$$

де  $\varphi_1$  – потенціал поля заряду  $q_2$  в точці, віддаленій від  $q_2$  на відстань  $r_{12}$ .

Аналогічно робота перенесення заряду  $q_2$  із безмежності в точку на відстань  $r_{12}$  від першого заряду

$$A_2 = q_2\varphi_{21} = q_2 \frac{q_1}{r_{12}} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0},$$

де  $\varphi_2$  – потенціал поля заряду  $q_1$  в точці, в яку переноситься заряду  $q_1$ . Кожна із цих робіт виражає енергію системи. Тобто

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2.$$

Або

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2). \quad (27.1)$$

Враховуючи тепер (27.1), потенціальну енергію взаємодії багатьох точкових зарядів можна записати

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\mu} q_{\mu}\varphi_{\mu}, \quad (27.2)$$

де  $\varphi_i$  – потенціал у точці розміщення  $i$ -го заряду, електричних полів всіх інших зарядів



$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{r_{ik}}.$$

Тоді

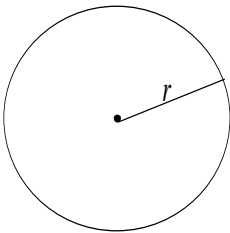
$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k}{r_{ik}}.$$

Отже, ми отримали формулу енергії взаємодії точкових зарядів. Однак у ній не враховано взаємодію складових елементів кожного із зарядів, тобто власну енергію заряджених тіл. Це і не дивно, адже ставилося завдання визначити енергію взаємодії дискретних точкових зарядів. Тому наступним питанням розглянемо електричну енергію, затрачену на утворення заряду тіла.

Візьмемо незаряджену металеву кульку радіусом  $r$  (рис. П.31). Зарядимо її зарядом  $q$ . Зарядку будемо проводити дуже малими порціями заряду  $dq$ , переносячи кожен із них із безмежності на поверхню кульки. Переносячи кожен із порцій  $dq$  на поверхню кульки, необхідно виконати роботу проти сил поля заряду, який уже акумульований на кульці.

Тобто

$$dA = \varphi dq,$$



$\varphi$  – потенціал поля на поверхні зарядженого провідника і  $\varphi$  змінна величина. Її можна виразити через ємність кульки  $C$ .

$$\varphi = \frac{q_i}{C}.$$

Рис. П.31

Тоді

$$A = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}.$$

За рахунок виконання роботи на сферу буде перенесено заряд  $q$ , а тому електричне поле заряду  $q$  буде володіти енергією  $A = W$ . Отже,

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \text{ а } C = 4\pi\epsilon_0 r.$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (27.3)$$

Формула (27.3) відображає енергію, затрачену на формування заряду  $q$  і заряду кульки. Ця енергія називається власною енергією заряду  $q$ .

При зменшенні радіуса кульки  $r \rightarrow 0$  наближення розмірів зарядженого тіла до точки із формули (27.3) видно, що власна енергія точкового заряду прямує до безмежності. Це призводить до серйозних труднощів при використанні поняття точкового заряду. Очевидно, що точковий у математичному розумінні точки заряд бути не може, і це поняття є абстракцією.

Розглянемо ще один приклад. Нехай кулька заряджена по всьому об'єму з об'ємною густиною заряду  $\rho$ . Очевидно, що вона не є металевою. Тоді в елементі об'єму  $dV$  міститься заряд  $dq = \rho dV$ . Між різними елементами заряду  $dq$  буде відбуватися взаємодія. Для визначення її енергії використаємо формулу

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (27.4)$$

перейшовши від суми до інтегралу:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi_i \rho dV \quad (27.5)$$

де  $\varphi_i$  – потенціал у точці елемента об'єму  $dV$ . Останній вираз представляє власну енергію об'ємно зарядженого тіла.

Якщо взяти декілька кульок, то потенціали  $\varphi_i$  в будь-якій точці  $i$ -ої кульки буде складатися із двох частин –  $\varphi_{i1}$ , створеної зарядами інших кульок і  $\varphi_{i\text{власн.}}$  –  $i$ -ої кульки:

$$\varphi_i = \varphi_{i1} + \varphi_{i\text{власн.}}$$

Тоді енергія такої системи буде дорівнювати:

$$W = \sum_{i=1} \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_{i1} \rho dV + \sum_{i=1} \frac{1}{2} \int_{V_i} \varphi_{i\text{власн.}} \rho dV . \quad (27.6)$$

Формула (27.6) виражає повну енергію розглянутої системи заряджених тіл.

Усе, що було сказано про енергію взаємодії і власну енергію, є справедливим і стосовно поверхневих зарядів. При їх наявності необхідно врахувати їхній вклад як у повну енергію, так і у власну. Тоді формула (27.5) набуде вигляду

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS ,$$

де  $\sigma$  – поверхнева густина заряду і  $\sigma dS = dq$ .

## 28. Енергія зарядженого конденсатора

Візьмемо конденсатор ємністю  $C$ . Якщо він не заряджений, то на кожній із обкладок кількість позитивних

і негативних зарядів однакова. Зарядити його можна, переносячи позитивний заряд безмежно малими порціями  $dq$  з однієї обкладки на іншу. При перенесенні кожної із наступних порцій  $dq$  необхідно виконати роботу проти сил електричного поля уже перенесеного заряду  $q$ .

$$dA = \Delta\varphi dq,$$

де  $\Delta\varphi$  – миттєве значення різниці потенціалів між обкладками уже перенесеного заряду  $q$ . Зарядка конденсатора може супроводжуватися виділенням або поглинанням тепла, а також зміною густини діелектрика. Проте в більшості випадків ці ефекти незначні, і ми ними знехтуємо. Тоді виконана робота  $dA$  зумовить тільки збільшення електричної енергії конденсатора  $W$ .

Тобто

$$dW = \Delta\varphi dq = \frac{q dq}{C}.$$

При умові, що  $C = const$ , тобто, коли температура діелектрика не змінюється і  $\varepsilon$  є постійним, проінтегрувавши останній вираз, отримаємо енергію зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} q \Delta\varphi = \frac{1}{2} C \Delta\varphi^2; \Delta\varphi = U \text{ і } W = \frac{1}{2} C U^2 \quad (28.1)$$

Це вільна енергія електричного поля конденсатора.

## **29. Енергія і густина енергії електростатичного поля**

Вище ми отримали формулу для розрахунку електричної енергії заряджених тіл через їх заряди і

потенціали. У цьому відношенні вони відповідають теорії дії на відстані. Енергія  $W$  інтерпретується як потенціальна енергія заряджених тіл, які притягаються або відштовхуються.

Однак електричну енергію заряджених тіл можна визначити, виходячи із поняття теорії поля і виразити її через напруженість поля.

Отже, ми показали, що енергія  $W$  об'ємно заряджених тіл

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV. \quad (29.1)$$

За теоремою Гауса

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Звідки

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}. \quad (29.2)$$

Підставимо вираз для  $\rho$  в (29.1) і отримаємо:

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{E} dV,$$

$$\varphi \operatorname{div} \vec{E} = -\vec{E} \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{div}(\varphi \vec{E}).$$

Тому

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \operatorname{grad} \varphi dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV,$$

$$E = -\operatorname{grad} \varphi.$$

А отже, перший інтеграл дорівнює  $\int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV$ .

Врахувавши це, отримаємо:

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV,$$
$$\int_V \operatorname{div}(\varphi \vec{E}) dV = \int_S \varphi \vec{E} dS,$$

$S$  – поверхня, яка охоплює заряджений об'єм  $V$ .

Передбачається, що всі заряди розміщені в скінченній області простору. Тому на великих відстанях  $\varphi E \sim \frac{1}{r^2}$ . Площа поверхні зростає прямо пропорційно  $r^2$ , а отже,  $\varphi E S \sim \frac{1}{r}$  і при віддаленні поверхні інтегрування  $S$  на безмежність, прямує до нуля. Таким чином, у всьому просторі, який охоплений електростатичним полем,

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E} \cdot \vec{E} dV. \quad (29.3)$$

Отже, якщо за виразом (29.2) носіями заряду виступають заряди, а енергія локалізована на них, то в (29.3) носіями заряду вважається електричне поле, локалізоване у всьому просторі, де воно поширене. За виразом (29.3) електрична енергія подібно до речовини, розподілена в просторі з об'ємною густиною

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (29.4)$$

Формула (29.4) виражає густину енергії електричного поля у просторі, де воно існує.

Покажемо, що формула (29.4) виражає повну енергію системи.

Нехай два заряди  $q_1$  і  $q_2$  створюють електричне поле, яке є геометричною сумою полів кожного із них. Тобто:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Густина енергії цього поля у вакуумі буде дорівнювати

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 + \varepsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Кожен із доданків отриманого рівняння має окремий фізичний зміст:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_1^2 - \text{виражає власну енергію поля заряду } q_1.$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E_2^2 - \text{виражає власну енергію поля заряду } q_2.$$

Скалярний добуток  $\varepsilon_0 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$  – виражає енергію взаємодії зарядів.

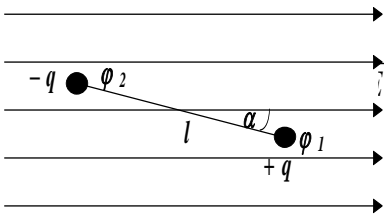
### **30. Енергія диполя в електричному полі**

Нехай диполь розміщується у зовнішньому електричному полі. Кожен із них буде володіти запасом потенціальної енергії. Її величина дорівнює:

$$W_p = q\varphi,$$

де  $\varphi$  – потенціал зовнішнього поля. Оскільки диполь є системою із двох зарядів (рис. П.32), то його потенціальна енергія в однорідному електричному полі

$$W_p = q\varphi_1 + (-q\varphi_2) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi.$$



**Рис. II.32**

У цьому виразі  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  потенціали в точках, де є заряди  $+q$  і  $-q$ .

Якщо врахувати зв'язок між напруженістю електричного поля і потенціалом, тобто, що  $\Delta\varphi = -El$ , а також значення

моменту диполя  $\vec{P} = q\vec{l}$ , то одержимо

$$W_p = -\vec{P}\vec{E}$$

або

$$W_p = -PE \cos \alpha.$$

З останнього виразу видно, що залежно від кута  $\alpha$  енергія диполя може приймати різні значення. Коли кут  $\alpha$  між вектором електричного моменту  $\vec{P}$  і вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}$  дорівнює  $\pi$ , тобто, коли диполь напрямлений проти поля, то його енергія буде максимальною  $W_p = PE$ . Мінімальним значення енергії диполя буде тоді, коли він зорієнтований за полем, тобто коли  $W_p = -PE$ . Залежність потенціальної енергії диполя у зовнішньому електричному полі від кута між  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ , приводить до появи обертального моменту, що прагне зорієнтувати диполь у напрямі поля, тобто в напрямі мінімуму його потенціальної енергії. У цьому положенні диполь перебуває у рівновазі.



### **31. Теорема Ірншоу**

Вираз для енергії взаємодії точкових зарядів дає можливість проаналізувати питання про стійкість системи нерухомих точкових електричних зарядів. З цим виникає питання, чи можливі такі конфігурації нерухомих одна відносно одної заряджених частинок, які представляли би, наприклад, атоми, молекули тощо, і які під дією електростатичних сил утворювали б стійку систему.

Якщо взяти систему із двох точкових зарядів, то внаслідок кулонівської взаємодії, вона стійкою не буде. Заряди, залежно від їх знаків, будуть притягатися або віддалятися, зменшуючи при цьому потенціальну енергію, набуту за рахунок електричного поля. Адже, як відомо, стійкого стану кожна система набуває тоді, коли не є мінімумом потенціальної енергії. Для системи із двох зарядів мінімум потенціальної енергії може наступити тільки при повному її зруйнуванні. По-іншому поводить ся система із трьох зарядів. У цьому випадку можливі конфігурації, у яких всі три заряди будуть у рівновазі, але вона буде нестійкою.

Доведемо це. Візьмемо три заряди  $+q$ ,  $-q'$  і  $-q'$  і розмістимо на одній прямій так, як показано на рис. У цьому випадку  $+q$  буде у рівновазі. Щоб заряд також був у рівновазі, необхідно, щоб сила притягання його до заряду  $+q$  врівноважувалась силою відштовхування другого заряду  $-q'$ .

За законом Кулона

$$\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(q')^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Звідки

$$q' = 4q.$$

Потенціальна енергія такої системи точкових зарядів буде дорівнювати

$$W_1 = \frac{(q')^2}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Якщо врахувати, що  $q' = 4q$ , то  $W_1 = 0$ , тобто  $W_1$  не залежить від  $r$ .

Для того, щоби переконатися, чи ця рівновага буде стійкою, змістимо заряд  $+q$  на  $\Delta y$  в напрямі, перпендикулярному до АВ. Повна енергія системи буде мати вигляд

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{(q')^2}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + 4\Delta y^2}} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + 4\Delta y^2}} = \\ &= \frac{2q^2}{\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\Delta y^2}} \right) > 0 \end{aligned}$$

Це означає, що стосовно такого зміщення вихідна рівновага є стійкою. Самостійно система не може видозмінюватись у напрямі зростання її енергії.

Змістимо тепер заряд  $+q$  на  $\Delta x$  вздовж прямої АВ і обчислимо повну енергію системи.

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{(q')^2}{4\pi\epsilon_0 2r} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (r + \Delta x)} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (r - \Delta x)} = \\ &= -\frac{2q^2 \Delta x^2}{\pi\epsilon_0 r (r^2 - \Delta x^2)} < 0 \end{aligned}$$

У цьому випадку енергія системи зменшується. Заряд  $+q$ , від вихідного рівноважного положення буде намагатися ще більше від нього відійти, оскільки це енергетично вигідно для всієї системи.

Отже, стосовно означеного зміщення вихідна рівновага є нестійкою. Такий результат можна отримати, якщо зміщувати один із зарядів  $q'$ .

Якщо зміщувати в напрямі прямої АВ заряди  $q'$ , а заряд  $q$  залишити на місці, то, оскільки в цьому випадку потенціальна енергія не залежить від  $r$ , рівновага системи у такому разі виявиться байдужою.

Таким чином, якщо розмістити три заряди у наведеному порядку на однакових відстанях один від одного, то вони будуть у рівновазі, яка, однак, порушиться при будь-якому найменшому зміщенні одного із них.

Може постати питання, чому заряди на заряджених провідниках або діелектриках перебувають у стійкій рівновазі? Очевидно, що їх рівновага зумовлена існуванням неелектричних сил.

Візьмемо, наприклад, атом водню, який складається із заряджених частинок – протона і електрона, зв'язаних між собою силами притягання. Проте вони не падають один на одного, тобто не наближаються необмежено близько. Причиною цього є рух електрона. В класичній моделі будови атома, траєкторія руху електрона не закінчується на ядрі, а є замкнутою. Сили відштовхування між ядром і електроном немає, і їх змінює рух електронів.

Отже, всяка рівноважна конфігурація нерухомих точкових електричних зарядів є нестійкою, якщо на них, крім кулонівських сил притягання і відштовхування, не діють інші сили не електричного походження. Це – теорема Ірншоу, яка є наслідком теореми Гауса і розв'язує питання стійкості системи заряджених тіл.

## РОЗДІЛ III

### ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ У ДІЕЛЕКТРИКАХ

#### 32. Поляризація діелектриків

Продовжуючи дослідження електричного поля, природно поставити питання, чи залежить воно від властивостей середовища. Відповідь на це питання можуть дати найпростіші досліди. Зарядимо, наприклад, електрометр і зафіксуємо його покази (рис. III.1). Наблизимо до електрометра скляну, парафінову, ебонітову абр іншу товсту не заряджену пластину, тобто діелектрик.

Зауважимо, що покази електрометра будуть зменшуватися, якщо пластину наближати до електрометра, і відновлюватися, якщо – віддаляти. Якщо би замість діелектрика ми взяли провідник, то спостерігали б аналогічний ефект. Але відомо, на провіднику, розміщеному в електричному полі, виникають індуковані заряди, які зумовлюють зміну поля. Тому можна зробити висновок, що і на діелектриках в електричному полі також виникають заряди (рис. III.1). Зарядження діелектрика приводить до появи сил, які діють на діелектрик незалежно від того, чи був він на початку зарядженим, чи ні.

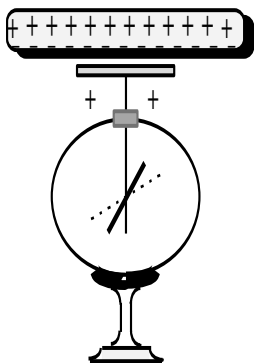


Рис. III.1

Проведемо ще один дослід. (рис. III.2). Підвісимо на тонкій шовковій нитці скляну паличку і наблизимо до неї заряджену кулю. Паличка почне повертатися й орієнтуватися у радіальному напрямі до центра кулі, тобто намагатиметься зайняти таке положення, щоб її вісь збіглася з лініями напруженості електричного поля кулі. Це

свідчить про те, що на кінці палички, повернутого до кулі, появились заряди протилежного знаку до знаку заряду кулі, а на другому – заряди однойменні заряду кулі.

Ці досліди показують, що на раніше незаряджених діелектриках в електричному полі виникають електричні заряди, і він набуває електричних. Це явище дістало назву поляризації діелектриків.

Явище поляризації діелектриків подібне до явища індукування в електричному полі зарядів на провіднику, однак і відмінне від нього. Відмінність полягає у тому, що

індуковані заряди в провіднику можна відділити один від одного, а заряди, які виникають у діелектрику

внаслідок поляризації, розділити неможливо. Тобто, якщо провідник розрізати в електричному полі на дві частини і вимкнути електричне поле, то

кожна з частин провідника залишиться зарядженою, чого немає в діелектриках.

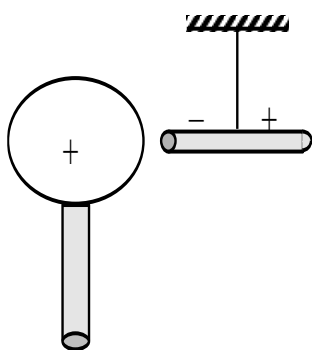


Рис. III.2

Причина відмінності між індукованими зарядами в провідниках і в поляризованих діелектриках є зрозумілою. У металах від'ємні заряди, носіями яких є електрони, перебувають у вільному стані і під дією електричного поля можуть переміщатися на деякі відстані. У результаті цього електричне поле перерозподіляє заряди в провіднику і на одному його кінці буде надлишок електронів, він зарядиться негативно, а на другому проявиться позитивний заряд ядер. Розрізавши в електричному полі провідник, кожна з його частин у відсутності поля залишиться зарядженою відповідним зарядом.

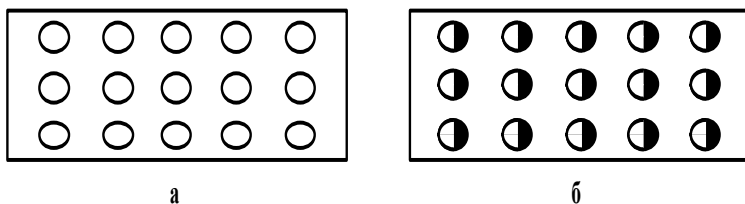


Рис. III.3

У діелектриках вільних зарядів не існує, оскільки електрони сильно зв'язані з ядрами атомів або атомами. Тому в електричному полі вони можуть зміщатися тільки в межах атомів або молекул (рис. III.3 і рис. III.4) у результаті чого порушиться компенсація зарядів ядра зарядами електронів, і молекула стане зарядженою. Ці заряди називаються зв'язаними. Цим терміном підкреслюється, що свобода переміщення зв'язаних зарядів обмежена.

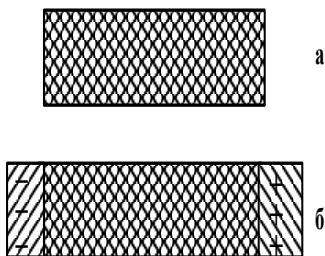


Рис. III.4

З рис. III.4 видно, що в однорідному діелектрику зв'язані заряди виникають тільки на його поверхні. Однорідний діелектрик в об'ємі не заряджений. Це зумовлено тим, що при таких умовах кількість позитивних і негативних зарядів є однаковою, в результаті чого має місце їх,

повна взаємна компенсація.

У неоднорідних діелектриках неоднорідною є і поляризація, тобто густина зв'язаних зарядів у різних частинах діелектрика – різна і повна їх компенсація не відбувається. Тому в неоднорідно поляризованому діелектрику зв'язані заряди виникають не тільки на поверхні, а і в об'ємі.

Виникнення індукованих зарядів у провідниках зумовлює безумовний вплив на електричне поле, яке їх викликало. Індукційні заряди створюють електричне поле,

яке, накладаючись на поле первинних зарядів, призводить до зменшення його наелектризованості, розміру самого поля і взаємодії між зарядами.

Вплив середовища на величину електричної взаємодії можна оцінити, якщо визначити силу взаємодії між двома зарядами у вакуумі і в цьому середовищі. Можна показати, що відношення сили взаємодії між зарядами у вакуумі  $F_0$  до сили їх взаємодії у даному середовищі  $F$  є величиною сталою і не залежить від величини зарядів. Це відношення називається діелектричною проникністю середовища і позначається буквою  $\varepsilon$ .

Тоді при наявності непровідного середовища, закон Кулона має вигляд

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}_0}{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \vec{r},$$

а напруженість електричного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{п}}} = \frac{\vec{F}_0}{\varepsilon q_{\text{п}}} = \frac{\vec{F}_0}{\varepsilon}.$$

Діелектрична проникність для різних середовищ різна. Так, наприклад, для вакууму  $\varepsilon = 1$ , для газу  $\varepsilon = 2$ , для повітря  $\varepsilon = 1.0006$ , для води  $\varepsilon = 80$ .

### **33. Основи фізики поляризації діелектриків**

Очевидно, що явище поляризації можна зрозуміти, розглянувши хоч б поверхово, будову діелектриків. Адже це явище обумовлене не якимись зарядами, внесеними в діелектрик ззовні, а зарядами складовими будови діелектрика.

Оскільки в діелектрику при невисоких температурах і в слабких електричних полях вільних зарядів не існує, то,

очевидно, що механізм поляризації обумовлюється зарядами, зосередженими в атомах і молекулах діелектрика.

Кожна молекула складається з атомів, а атоми – із позитивно заряджених ядер та електронів, які рухаються навколо них. Молекула діелектрика у відсутності зовнішнього електричного поля електрично нейтральна, оскільки сумарний позитивний заряд всіх ядер у молекулі дорівнює абсолютній величині заряду всіх електронів молекули. Проте це не означає, що молекули не мають електричних властивостей. Якщо всі позитивні заряди замінити одним сумарним зарядом  $+q$  і розмістити у центрі позитивних зарядів, а всі негативні заряди – сумарним негативним зарядом  $-q$ , розміщеним у центрі негативних зарядів, то дипольні моменти відмінні від нуля у молекулах різних діелектриків центри позитивних і негативних зарядів можуть збігатися або не збігатися. У молекулах таких, наприклад, діелектриків, як  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $CCl_4$  та інших, електрони розташовані симетрично навколо ядра, в результаті чого центри позитивних і негативних зарядів збігаються. Такі молекули називаються неполярними.

Якщо таку молекулу помістити в електричне поле, то в результаті дії на заряди сили електричного поля в різних напрямках, центри позитивних і негативних зарядів змістяться у протилежні сторони. Молекула або атом стане подібною до диполя з дипольним моментом  $\vec{P}_e$ .

Розглянемо цей факт на атомі водню. Для спрощення будемо вважати, що електрон в атомі водню рухається по

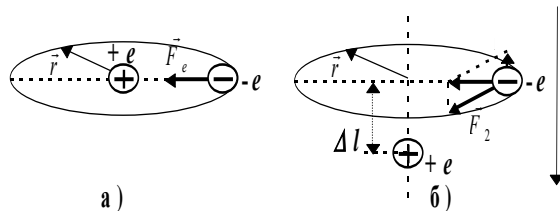


Рис. III.5



коловій орбіті (рис. III.5). Якщо електричне поле відсутнє, то на електрон діє сила електростатичного протягування ядра  $F_e$ , яка, за законом Кулона, дорівнює

$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Сила  $F_e$  є доцентровою, що діє на електрон як на частинку масою  $m_e$ , яка рухається по коловій орбіті радіусом  $r$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Тому

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\omega^2 r. \quad (33.1)$$

Унесемо тепер цей атом в електричне поле так, щоб вектор його напруженості  $\vec{E}$  був перпендикулярним до площини орбіти електрона. Під дією електричного поля орбіта електрона здеформується. У першому наближенні будемо вважати, що ця деформація приводить тільки до зміщення орбіти електрона на малу відстань у напрямі, протилежному до напрямку вектора  $\vec{E}$ , а радіус орбіти електрона і його кутова швидкість на орбіті залишаються незмінними. Дорівнює

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_e$$

$\vec{F}_1$  – сила, прикладена до електрона зі сторони зовнішнього електричного поля. Вона дорівнює  $\vec{F}_1 = -e\vec{E}$  і спричиняє зміщення орбіти електрона на  $\Delta l$ .  $\vec{F}_e$  – сила, прикладена до електрона зі сторони ядра і зумовлює зміщення орбіти електрона на  $\Delta l$ . (рис. III.37.б). Знайдемо зміщення орбіти електрона  $\Delta l$ .

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{F_1}{F} = \frac{eE}{m\omega^2 r}.$$

Звідси  $\Delta l = \frac{eE}{m\omega^2}$ .

Отже, зміщення орбіти електрона, а рівно ж зміщення центра негативних зарядів стосовно ядра під впливом зовнішнього електричного поля, пропорційне напруженості цього поля.

Зміщення  $\Delta l$  аналогічно пружній деформації, тому диполі, подібні до диполя, який наведено зовнішнім електричним полем в атомі водню, називаються пружними. Електричний момент пружного диполя дорівнює

$$P_e = e\Delta l = \frac{e^2 E}{m\omega^2}.$$

Врахувавши формулу (27.1), отримаємо:

$$P_e = 4\pi\varepsilon_0 r^3 E = \alpha\varepsilon_0 E.$$

У цьому виразі  $\alpha = 4\pi r^3$  і є множником, пропорційним третій степені радіуса орбіти, тобто об'єму атома, і називається поляризаційною здатністю атома.

Отже, індукований дипольний момент неполярної молекули в слабких електричних полях пропорційний напруженості електричного поля.  $P_e$  збігається з вектором напруженості електричного поля  $\vec{E}$ . Тому у векторному вигляді

$$\vec{P}_e = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}. \quad (33.2)$$

Зміщення електронного розподілу в атомах у зовнішньому електричному полі, яке приводить до розглянутого типу індукованого дипольного моменту,

називається електронною поляризацією. Вона і є причиною індукування зовнішнім електричним полем зв'язаного заряду на поверхні діелектрика з неполярними молекулами (рис. III.6).

Поверхневу густину зв'язаних зарядів на поверхні плоскопаралельної пластинки однорідного діелектрика можна обчислити так. Нехай площа пластинки, перпендикулярна до вектора напруженості зовнішнього електричного поля дорівнює  $S$ , а число електронів в одиниці об'єму діелектрика –  $n$ . Зміщення центрів

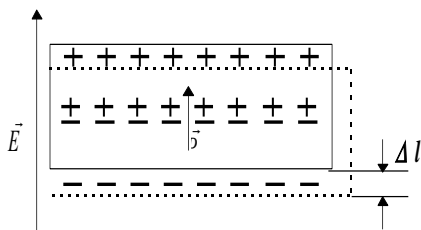


Рис. III.6

позитивних і негативних зарядів в електричному полі, як і раніше, позначимо через  $\Delta l$ . Тоді число електронів, які появляються на поверхні діелектрика під впливом поля, буде дорівнювати добутку  $Sn\Delta l$ .

Повний зв'язаний заряд на поверхні діелектрика одержимо, якщо це число електронів помножимо на заряд електрона  $e$ . Отже,

$$q_{зв} = enS\Delta l. \tag{33.3}$$

Тоді поверхнева густина зв'язаних зарядів буде дорівнювати

$$\sigma_{зв} = \frac{q}{S} = ne\Delta l.$$

Але  $e\Delta l = p_e$ . Тому  $\sigma_{зв} = np_e$ ,  $p_e$  – дипольний момент однієї молекули;  $\square$  – дипольний момент одиниці об'єму діелектрика. Його позначають через  $P$ .  $P$  – векторна величина і називається вектором поляризації діелектрика.

Остаточна поверхнева густина зв'язаних зарядів дорівнює

$$\sigma_{зв} = P_n, \quad (33.4)$$

$P_n$  – нормальна складова вектора поляризації  $P$  до поверхні на якій індукуються зв'язані заряди густиною  $\sigma_{зв}$ .

Ця формула показує, що нормальна складова  $P_n$  становить величину електричного заряду, зміщеного при поляризації через одиничну площадку в напрямі нормалі  $\vec{n}$  до неї.

Важливо відзначити, що ця інтерпретація є справедливою і у випадку неоднорідної поляризації, при якій  $\vec{P}$  змінюється від точки до точки. У цьому можна переконатися, якщо діелектрик розділити на малі об'єми  $dV$ , у межах яких поляризація є однорідною.

Однак при неоднорідній поляризації поляризаційні заряди можуть проявлятися не тільки на поверхні, але і в об'ємі діелектрика. Для визначення густини поляризаційних зарядів, виділимо в діелектрику довільний об'єм  $V$ , обмежений замкнутою поверхнею  $S$  (рис. III.7).

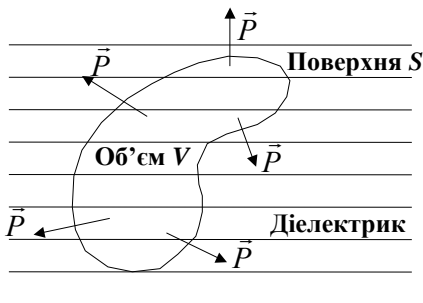


Рис. III.7

Заряд, зміщений через площадку  $dS$  буде дорівнювати

$$q_{зв} = -\oint_S P_n dS = -\oint_S (\vec{P} d\vec{S})$$

Якщо вважати, що поляризаційний заряд рівномірно розподілений по об'єму з об'ємною густиною  $\rho_{зв}$ , то

$$q_{зв} = \int_V \rho_{зв} dV.$$

Тоді

$$\int_V \rho_{зв} dV = -\oint_S (\vec{P} d\vec{S}). \quad (33.5)$$

У диференціальній формі за теоремою Гауса отримасмо

$$-div\vec{P} = \rho_{зв}. \quad (33.6)$$

Вирази (33.5) і (33.6) є різновидом теореми Остроградського-Гауса, яка зв'язує густину заряду поляризованого діелектрика з вектором поляризації.

Вектор поляризації служить кількісною мірою поляризації діелектрика. Якщо врахувати (33.1), то його можна записати

$$\vec{P} = n\varepsilon_0\alpha\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \quad (33.7)$$

$E$  – напруженість поля у точці прикладання вектора  $\vec{P}$ .

Коефіцієнт  $\chi = n\alpha$  називається діелектричною сприйнятливістю речовини.

Позаяк вектор поляризації – це дипольний момент одиниці об'єму діелектрика, то його можна визначити і так:

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N p_{el},$$

$p_{el}$  – дипольний момент  $i$ -ої молекули,  $N$  – число молекул в об'ємі  $\Delta V$ .

Отже, вектором поляризації діелектрика називається відношення дипольного електричного моменту малого об'єму діелектрика до цього об'єму.

Другу групу діелектриків складають речовини, в молекулах яких електрони розміщені несиметрично відносно ядра. У них центри позитивних і негативних

зарядів не збігаються, внаслідок чого молекули таких діелектриків характеризуються власним дипольним моментом  $P_e$ . Такі молекули називаються полярними. До діелектриків з полярними молекулами належать  $H_2O$ ,  $HCl$ ,  $HC_3Cl$ ,  $NH_3I$  та інші речовини. Наявність власного дипольного моменту  $P_e$  молекул цієї групи діелектриків дає підставу вважати, що вони поведуться як жорсткі диполі, відстань між зарядами  $+q$  і  $-q$ , яких є постійною і не залежить від наявності електричного поля. Таке припущення можливе лише в дуже слабких електричних полях. Адже при внесенні полярної молекули в електричне поле, на електрони і заряд ядра будуть діяти електричні сили, внаслідок чого центри позитивних і негативних зарядів будуть зміщуватися. Тому, крім власного дипольного моменту, в електричному полі в полярній молекулі буде індукуватися додатковий дипольний момент, величина якого пропорційна напруженості поля.

У відсутності електричного поля дипольні моменти молекул розміщені хаотично, і дипольний момент одиниці діелектрика дорівнює нулю.

Якщо такий діелектрик помістити в електричне поле, то дипольні моменти молекул намагаються зорієнтуватися у напрямі поля. Однак при звичайних температурах і напруженостях поля взаємодія молекул при їх тепловому русі не дозволяє їм прийняти повністю зорієнтований стан.

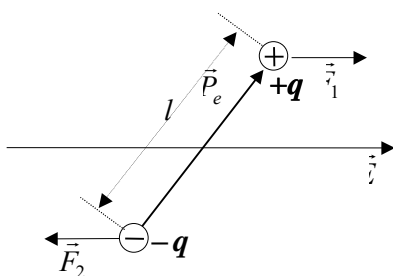


Рис. III.8

Але деяка орієнтація власних дипольних моментів молекул все ж відбувається, що зумовлює поляризацію діелектрика. Нехай полярна молекула міститься в однорідному електричному полі і її дипольний момент  $P_e$

напрявлений під кутом  $\alpha$  до напрямку вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  (рис. III.8). Як видно з рисунка, на диполь діє пара сил:

$$\vec{F}_1 = q\vec{E} \text{ ; } \vec{F}_2 = -q\vec{E} .$$

Момент пари сил чисельно дорівнює

$$M = qEl \sin \alpha = P_e E \sin \alpha .$$

Вектор моменту  $\vec{M}$  дорівнює векторному добутку векторів:

$$\vec{M} = [\vec{P}_e \vec{E}]$$

Отже, вектор моменту  $\vec{M}$  спрямований перпендикулярно до площини, яка проходить через вектори  $\vec{P}_e$  і  $\vec{E}$ . На рис. III.40 вектор  $\vec{M}$  спрямований від нас за рисунок.

З викладеного видно, що момент пари сил  $M$  намагається повернути диполь і зорієнтувати його так, щоб напрями векторів  $\vec{P}_e$  і  $\vec{E}$  збігалися. У цьому положенні сили, що діють на заряди жорсткого диполя, спрямовані по одній прямій у протилежні сторони, стимулюючи електронну поляризацію молекули.

Таким чином, поляризація діелектриків з полярними молекулами зумовлена орієнтацією власних дипольних моментів молекул під дією обертового моменту пари сил, що діють на заряди молекули в електричному полі.

Вектор поляризації для діелектриків з полярними молекулами дорівнює векторній сумі всіх молекулярних моментів в одиниці об'єму.

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \vec{P}_{ei} ,$$

де  $N$  – кількість полярних молекул (диполів) у малому об'ємі  $\Delta V$ .

Більш складною є дія на полярні молекули неоднорідного електричного поля. Якщо, наприклад, на довжині диполя  $l$  має місце помітна зміна напруженості електричного поля  $E$ , то, крім обертового моменту, на диполь буде діяти сила  $\vec{F}$ , що дорівнює векторній сумі сил  $\vec{F}_1$  і  $\vec{F}_2$  прикладених до обох зарядів диполя:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q(\vec{E}_1 - \vec{E}_2).$$

$\vec{E}_1$  і  $\vec{E}_2$  – напруженості поля у тих точках, у яких розміщені, відповідно, позитивний і негативний заряди диполя.

Різницю  $\vec{E}_1 - \vec{E}_2$  можна виразити через градієнт напруженості поля у напрямі довжини диполя  $l$ . Тобто

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = l \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}$$

Отже,

$$\vec{F} = ql \frac{\partial \vec{E}}{\partial l} = p_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial l}.$$

Сила  $F$  спрямована у напрямі зміни напруженості електричного поля і намагається змістити полярну молекулу в область більшої напруженості поля.

В окрему групу треба виділити деякі тверді діелектрики. Це, зокрема, іонні кристали, а також низка речовин з постійною поляризацією.

При внесенні іонного кристала типу  $NaCl$  в діелектричне поле відбувається деяке невелике зміщення позитивних іонів кристалічної ґратки в напрямі поля, а негативних – проти нього. У результаті цього такий



діелектрик загалом буде володіти дипольним моментом, індукованим полем і напрямленим уздовж поля. Тобто в іонних кристалах виникає поляризація, яка називається іонною.

У деяких твердих тілах існує постійна поляризація, навіть у відсутності зовнішнього електричного поля. Прикладом можуть бути речовини типу воску, які мають довгі молекули з власним дипольним моментом. Якщо розплавити віск і розмістити його в сильне електричне поле ( $\approx 10^{10}$  В/м), то дипольні моменти молекул частково зорієнтуються, залишаючись у такому стані і в твердій фазі воску навіть при відсутності зовнішнього електричного поля. Тобто віск буде володіти постійною поляризацією. Такі речовини називаються електретами.

Постійна внутрішня поляризація зустрічається і в деяких кристалічних речовинах, зокрема, в тих, де елементарна комірка ґратки володіє постійним дипольним моментом.

Внутрішні дипольні моменти діелектрика можуть змінюватися залежно від зовнішніх умов. Так, якщо деякі діелектрики нагрівати, то змінюється їх поляризованість. Такий ефект називається піроелектричним.

Аналогічно, якщо кристал піддати деформації, зокрема згину, то дипольні моменти діелектрика теж змінюються, у результаті він виявить електричний ефект, який називається п'єзоелектричним.

### **34. Теорема Гауса для поля у діелектрику**

Вивчаючи електричне поле у вакуумі і діелектрику, приходимо до висновку, що воно створюється зарядами двох станів – вільними й зв'язаними. Такий поділ зовсім не означає, що він відбувається за якимись різними фізичними ознаками. До вільних зарядів ми віднесли ті, що під дією

електричного поля можуть переміщатися. У металах це вільні електрони, а в газах – іони й електрони. До зв'язаних відносимо ті, які входять до складу атомів і молекул, А в іонних кристалах – іони у вузлах кристалічної ґратки.

Вільні заряди можна переносити з одного тіла в інше, чого не можна зробити зі зв'язаними.

Електричне поле створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами. У середовищі, яке здатне поляризуватися, воно є результируючим полем вільних і зв'язаних зарядів. У діелектриках електричне поле зв'язаних зарядів визначається електричними властивостями діелектриків. Однак електричне поле зв'язаних зарядів стимулюється зовнішнім електричним полем, створеним системою вільних зарядів. Тому є очевидним, що первинним джерелом електричного поля у речовині є вільні заряди.

Вище було показано, що вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  не залежить від електричних властивостей, оскільки визначається тільки величиною вільних зарядів. Теорема Гауса, записана через вектор електричного зміщення, має вигляд:

$$\oint_S \vec{D} dS = q_{\text{вільн}} . \quad (34.1)$$

Для електричного поля у вакуумі і потік вектора напруженості  $\vec{E}$  через будь-яку замкнуту поверхню  $S$  буде дорівнювати

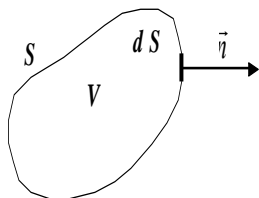
$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = q_{\text{вільн}} . \quad (34.2)$$

Електричне поле у середовищі, здатному поляризуватися, відрізняється від поля у вакуумі оскільки створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами. І, якщо поверхня  $S$  охоплює як вільні, так і зв'язані заряди, то в

правій частині рівняння (34.2) до  $q_{\text{вільн}}$  необхідно додати  $q_{\text{зв'яз}}$ , тобто взяти алгебраїчну суму зарядів, які охоплені поверхнею  $S$ .

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = q_{\text{вільн}} + q_{\text{зв}}. \quad (34.3)$$

Розглядаючи явище поляризації, ми брали до уваги однорідні діелектрики, в яких при поляризації зв'язані заряди виникають тільки на протилежних гранях, перпендикулярних до вектора  $\vec{E}$ . Однак у неоднорідних діелектриках поляризаційні заряди виникають і в об'ємі діелектрика.



**Рис. III.9**

Для знаходження поляризаційних зарядів  $q_{\text{зв}}$ , виділимо в діелектрику довільний об'єм  $V$ , обмежений замкнутою поверхнею  $S$  (рис. III.9) Заряд, зміщений при поляризації через площадку  $dS$  у від'ємному напрямі нормалі  $\vec{n}$ , відповідно до формули (34.3) дорівнює  $-P_n dS$ . Через всю поверхню  $S$  в середину об'єму  $V$  при поляризації надходить поляризаційний заряд

$$q_{\text{зв}} = -\oint_S P_n dS.$$

Підставивши останнє рівняння в (34.2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \oint_S (\epsilon_0 E_n + P_n) dS &= q_{\text{вільн}}, \\ \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} &= \vec{D}. \end{aligned} \quad (34.4)$$

Тому

$$\oint_S \vec{D}_n dS = q_{\text{вільні}}. \quad (34.5)$$

Це і є теорема Гауса для поля у діелектрику.

Із виразу (34.5) видно, що вектор  $\vec{D}$  через замкнуту поверхню дійсно визначається тільки вільними зарядами.

Це і оправдовує введення вектора  $\vec{D}$ .

Формула (34.4) дає зв'язок між векторами електричного зміщення, напруженості і поляризації.

Запишемо цю теорему в диференціальній формі. Заряд  $q$  представимо як

$$\int_V \rho dV,$$

де  $\rho$  – об'ємна густина вільних зарядів. Тоді

$$\oint_S \vec{D}_n dS = \int_V \rho dV.$$

За теоремою Гауса

$$\oint_S \vec{D}_n dS = \int_V \text{div} \vec{D} dV.$$

Тоді

$$\int_V \text{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Звідси отримаємо:

$$\text{div} \vec{D} = \rho. \quad (34.5a)$$

Це і є теорема Гауса для поля в діелектрику. Доцільно зауважити, що вона справедлива не тільки в електростатиці, але і для змінних у часі полів, і входить до

системи фундаментальних електродинамічних рівнянь Максвелла.

Отже, ми отримали низку рівнянь, які виражають електричне поле. Рівняння (34.4) є визначенням вектора  $\vec{D}$ . Воно справедливе для будь-яких діелектриків, у тому числі і для анізотропних, коли вектори  $\vec{P}$  і  $\vec{E}$ , а відповідно  $\vec{D}$  і  $\vec{E}$  непаралельні один до одного.

Рівняння (34.5а) справедливе тільки в тому випадку, коли в діелектрик внесено ззовні вільні заряди з об'ємною густиною  $\rho$ , тобто, коли він заряджений. Якщо діелектрик заряджений із зовні, тобто  $\rho_{\text{вільне}} = 0$ , то рівняння (34.5а) набуває вигляду:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0.$$

Із рівняння (34.4) вектор  $\vec{D}$  є напруженістю електричного поля. У слабких електричних полях  $D \sim E$ , тобто:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E,$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт пропорційності, який називається діелектричною проникністю речовини, і в слабких полях не залежить від напруженості поля  $E$ .

Рівняння (34.5а) запишемо ще у такому вигляді

$$\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \rho.$$

Оскільки  $\varepsilon = \text{const}$ , то

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \rho.$$

Для вакууму

$$\operatorname{div} \vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Із цих двох виразів випливає, що напруженість електричного поля у діелектрику

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}.$$

$E_0$  – напруженість електричного поля у вакуумі.

Можна також показати, що сила взаємодії між зарядами у діелектрику в порівнянні із силою взаємодії у вакуумі

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}_0}{\varepsilon}.$$

Діелектричні властивості середовища змінюють і ємність конденсаторів. Якщо між обкладками конденсатора розміщений діелектрик з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , то  $C = \varepsilon C_0$ , де  $C_0$  – ємність конденсатора з повітряним діелектриком.

Із рівняння (34.4) легко знайти зв'язок між поверхневими густинами вільних і зв'язаних зарядів. Як уже вище доведено, в однорідному діелектрику

$$P_n = \sigma_{зв}; D_n = \sigma_{вільн}.$$

Результуюче поле в діелектрику з діелектричною проникністю  $\varepsilon$

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Підставивши останні рівняння в (34.4), отримаємо:

$$\sigma_{ze} = \sigma_e \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Рівняння (34.4) дає також можливість знайти зв'язок діелектричної проникності із діелектричною сприйнятливістю

$$P = \alpha \varepsilon_0 E ; D = \varepsilon \varepsilon_0 E ;$$

$$\varepsilon_0 E + \chi \varepsilon_0 E = \varepsilon \varepsilon_0 E .$$

Звідки

$$\varepsilon = 1 + \chi .$$

Отже, електрична проникність  $\varepsilon$  дорівнює діелектричній сприйнятливості  $\chi$  збільшеній на одиницю.

### 35. Умови для векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ на межі двох діелектриків. Заломлення ліній індукції електростатичного поля

Вище відзначалося, що в неоднорідному діелектрику в результаті поляризації зв'язані заряди виникають не тільки на поверхні, але і в об'ємі. Це, безумовно, накладе відбиток на потік напруженості електричного поля у такому середовищі.

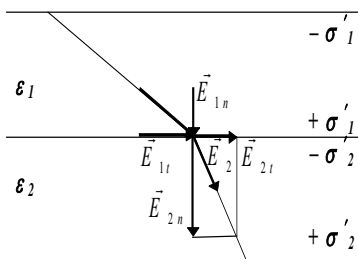


Рис. III.10

Для дослідження цього питання, розглянемо межу двох однорідних і ізотропних діелектриків, розміщених у зовнішньому електричному полі, напруженістю  $E_0$ . Діелектричні сталі

діелектриків  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Нехай напруженість зовнішнього поля  $E_0$  складає деякий кут  $\alpha$  з межею розподілення діелектриків (рис. III.10).

На межі розподілення діелектриків виникнуть зв'язані поверхневі заряди: на першому діелектрику з густиною  $+\sigma'_1$  і  $-\sigma'_1$ , а на другому – з густинами  $+\sigma'_2$  і  $-\sigma'_2$ . Заряди  $+\sigma'_1$  і  $-\sigma'_1$  створять у першому діелектрику електричне поле напруженістю

$$E'_1 = -\frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0},$$

напрявлену нормально до границь діелектрика в напрямі, протилежному нормальній складовій  $\vec{E}_{on}$ . Поза діелектриком ці заряди електричного поля не створюють.

У другому діелектрику заряди  $+\sigma'_2$  і  $-\sigma'_2$  створюють поле напруженістю

$$E'_2 = -\frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0}$$

також нормально до границі цього діелектрика.

Ці напруженості  $E'_1$  і  $E'_2$  полів зв'язаних зарядів, змінять лише нормальні складові зовнішнього електричного поля  $E_{on}$  і не змінять її складових, дотичних до межі розділення.

Маючи  $E'_1$  і  $E'_2$ , можна знайти сумарні нормальні складові напруженості електричного поля у діелектриках.

$$E_{1n} = E_{0n} - \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}, E_{2n} = E_{0n} - \frac{\sigma'_2}{\varepsilon_0} \quad (35.1)$$

Тангенціальні складові



$$E_{1t} = E_{0t}, E_{2t} = E_{0t}, E_{1n} = E_{2n}, \quad (35.2)$$

Тобто, тангенціальні складові напруженості електричного поля на межі двох діелектриків з різними діелектричними сталими – неперервні.

Доведемо ці твердження, які називають ще граничними умовами. Граничні умови визначають зв'язок між векторами електричного поля по різних боках поверхні, яка розділяє діелектрики.

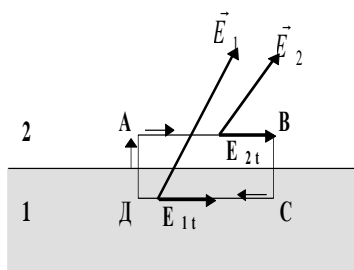


Рис. III.11

Розглянемо рис. III.11 за допомогою якого визначимо тангенціальні складові напруженості поля поблизу границі розділення діелектриків. Побудуємо поблизу цієї границі замкнутий контур. У зв'язку з потенціальністю електричного поля

циркуляція  $\vec{E}$  по замкнутому контуру, як відомо, дорівнює нулю. Тобто

$$\oint_{ABCD} E dl = 0$$

інтеграли по ділянках BC і DA є дуже малими, бо AB і CD розміщені буквально біля поверхні розділення. Знаки інтегралів по AB і CD протилежні, як і напрями інтегрування. Тому

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

Отже,

$$E_{2t} = E_{1t}.$$

Поверхневі густини зв'язаних зарядів

$$\sigma'_1 = \chi_1 \varepsilon_0 E_{1n} \quad ; \quad \sigma'_2 = \chi_2 \varepsilon_0 E_{2n} , \quad (35.3)$$

де  $\chi_1$  і  $\chi_2$  – діелектричні сприйнятливості першого і другого діелектриків.

Підставивши (35.3) у (35.1) отримаємо

$$\begin{aligned} E_{1n} &= E_{0n} - \chi_1 E_{1n} ; \quad E_{2n} = E_{0n} - \chi_2 E_{2n} ; \\ (1 + \chi_1) E_{1n} &= E_{0n} ; \quad (1 + \chi_2) E_{2n} = E_{0n} ; \\ \varepsilon_1 E_{1n} &= \varepsilon_2 E_{2n} . \end{aligned} \quad (35.4)$$

Рівності (35.2) і (35.4) є умовами для вектора  $\vec{E}$  на межі двох діелектриків з різними діелектричними сталими.

Розглянемо тепер поведінку на межі двох однорідних і ізотропних діелектриків з різними діелектричними сталими вектора електричної індукції  $\vec{D}$ .

Для цього спочатку з рівняння (35.2) підставимо  $E_{1t}$  і  $E_{2t}$ , і визначимо тангенціальні складові вектора електричної індукції.

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} . \quad (35.5)$$

Отже, тангенціальні складові вектора електричної індукції на межі двох діелектриків з різними діелектричними сталими терплять розрив неперервності.

Рівняння (35.4) для нормальних складових вектора напруженості електричного поля виразимо через нормальні складові вектора електричної індукції і отримаємо:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (35.6)$$

А це свідчить, що нормальна складова  $D_n$  вектора електричної індукції при переході через границю розділення діелектриків неперервна.

Рівняння (35.5) і (35.6) є умовами для вектора електричної індукції, на межі двох діелектриків. Вони вказують на неперервність ліній індукції, на межі двох середовищ з різними діелектричними проникливостями.

Із цих умов також видно, що, оскільки межі двох діелектриків з різними діелектричними сталими тангенціальні, складові вектора електричної індукції не однакові, то лінії індукції при переході з одного діелектрика в інший вихиляються від прямолінійного поширення, тобто заломлюються. У випадку коли лінії індукції переходять з діелектрика з більшою діелектричною проникністю у діелектрик з іншою діелектричною проникністю лінія індукції, заломлюючись, відхиляється до перпендикуляра до межі розділення, поставленого в точці переходу лінії індукції через межу діелектриків і навпаки (рис. III.12). На рис. III.12 показано перехід лінії електричної індукції з діелектрика з діелектричною сталою  $\varepsilon_1$  в діелектрик з діелектричною сталою  $\varepsilon_2$ , причому  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ .

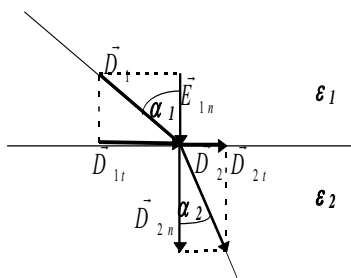


Рис. III.12

У першому діелектрику вектор індукції  $\vec{D}_1$  складає з нормаллю до межі розділення  $\alpha_1$ , а в другому діелектрику вектор  $\vec{D}_2$  складає кут  $\alpha_2$ . Розклавши  $\vec{D}_1$  на складові  $\vec{D}_{1t}$  і  $\vec{D}_{1n}$ , і  $\vec{D}_2$  на складові  $\vec{D}_{2t}$  і  $\vec{D}_{2n}$  (рис. III.44), отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}},$$

звідки

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} \cdot \frac{D_{2n}}{D_{1n}}.$$

Останній вираз із урахуванням умов (35.5) і (35.6), можна записати так

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Це рівняння виражає закон заломлення ліній індукції електричного поля на межі двох діелектриків із різними діелектричними проникностями.

### 36. Діелектрична проникність діелектриків

#### а) діелектрична проникність неполярних діелектриків.

Як ми уже знаємо, при внесенні неполярного діелектрика в електричне поле в ньому відбувається електронна поляризація. Величина поляризації діелектриків залежить не тільки від електричного поля, але і від властивостей діелектрика, зокрема, від поляризаційної здатності, яка характеризується коефіцієнтом  $\alpha$ . Для одиниці об'єму діелектрика з концентрацією молекул коефіцієнт поляризаційної здатності  $\alpha n = \chi$  і називається діелектричною сприйнятливістю. Діелектрична проникність  $\varepsilon = 1 + \chi$ .

Ця формула є наближеною, оскільки при її виведенні вважається, що електричне поле  $E'$ , яке викликає зміщення зарядів у молекулі, дорівнює середньому електричному полю  $E$ . А це не цілком коректно. При обчисленні поляризації молекул необхідно користуватися не середнім

значенням напруженості, а полем у точці, де розміщена ця молекула. Середнє поле  $E$  враховує дію всіх зарядів і зарядів всіх молекул. Поле  $E'$  виражає дію всіх зарядів за винятком молекули, яка розглядається. Хоч заряди однієї молекули і малі в порівнянні із зарядами багатьох інших молекул діелектрика, але ці заряди розміщуються у безпосередній близькості від точки, яка розглядається і тому їх включення приводить до поправки скінченої величини. Відмінність полів  $E$  і  $E'$  не істотно тільки в газах, для яких  $\epsilon$  близьке до одиниці.

Щоб отримати вираз для діелектричної проникності густих діелектриків, необхідно визначити величину поля,  $E'$ , яке діє на молекулу. Це взагалі надто складна задача, оскільки внутрішнє поле істотно залежить від структури діелектрика.

Напруженість електричного поля  $E'$  найпростіше можна обчислити тільки для кристалів з кубічною ґраткою. Для них

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (36.1.)$$

Цю формулу можна наближено застосувати і до неполярних рідин і газів, де розташування молекул хаотичне.

Обчислимо електронну поляризацію густих діелектриків. Дипольний момент одиниці об'єму діелектрика буде дорівнювати

$$P = n p = n \alpha \epsilon_0 \left( E + \frac{1}{3\epsilon_0} P \right)$$

Тому для електричного зміщення одержимо

$$\begin{aligned} D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + n\alpha \left[ \varepsilon_0 E + \frac{1}{3} (D - \varepsilon_0 E) \right] = \\ = \varepsilon_0 E + \frac{1}{3} n\alpha (D + 2\varepsilon_0 E) \end{aligned}$$

Але оскільки  $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$ , то із останнього виразу одержимо

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3} \quad (36.2.)$$

Формула (36.2.) називається формулою Клаузіуса-Мосотті.

Із неї видно, що для неполярних діелектриків величина  $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$  прямо пропорційна концентрації молекул, тобто густині цього діелектрика. Цей результат експериментально підтверджений для газів у широкому інтервалі зміни тисків. Із формули (36.2.) також видно, що при постійній густині діелектрика, діелектрична проникність не залежить від температури, бо поляризаційна здатність молекул залежить тільки від їх будови і не залежить від температури. Цей висновок добре підтверджується експериментально.

### **б) діелектрична проникність полярних діелектриків.**

Розглянемо тепер, чим визначається залежність діелектричної проникності газоподібних діелектриків і як саме. Спочатку будемо вважати, що при внесенні діелектрика з неполярними молекулами в електричне поле електронна поляризація молекул є незначною. Дипольний момент одиниці об'єму діелектрика

$$\bar{P} = \frac{\left( \sum_i \bar{P}_{Ei} \right)}{4V}$$

де  $\bar{P}_{Ei}$  – проекція дипольного моменту 1-ої молекули на напрям зовнішнього поля, а  $4V$  об'єм діелектрика.

$$\frac{\left( \sum_i \bar{P}_{Ei} \right)}{4V} = n\bar{P}_E$$

$n$  – концентрація молекул, а  $\bar{P}_E$  – середнє значення проекції дипольного моменту молекул на напрям поля. Тому обчислення поляризації зводиться до визначення  $\bar{P}_E$ . Розрахунок з використанням законів статистичної фізики дає

$$\bar{P}_E = \frac{P_0^2}{3kT} \cdot E' \quad (36.3.)$$

$\bar{P}_0$  – величина дипольного моменту однієї молекули, а  $k$  – стала Больцмана,  $T$  – абсолютна температура діелектрика,  $E'$  – напруженість поля, що діє на диполь. При виводі формули (36.3) прийнято, що поле  $E'$  не дуже велике і викликає тільки слабку впорядкованість диполів.

Результат, виражений формулою (36.3), якісно зрозумілий і без розрахунків: що більша напруженість електричного поля  $E'$ , то сильніша орієнтація диполів, більша проекція дипольного моменту на напрям поля і, що вища температура, то сильніший дезорієнтуючий вплив теплового руху і менша проекція дипольного моменту.

Якщо (36.3.) порівняти із виразом  $P = \alpha \varepsilon_0 E'$ , то видно, що при дипольній поляризації величина  $\frac{P_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$  відіграє таку саму роль, як і коефіцієнт поляризаційної здатності  $\alpha$  в неполярних діелектриках. Підставивши цю величину в (39.2.), отримаємо:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{9\varepsilon_0} \frac{P_0^2 \alpha}{kT} \quad (36.4)$$

Відзначимо, що формула (39.4) правильна лише тоді, коли величину внутрішнього поля можна подати у вигляді (36.1).

Із виразу (36.4) видно, що діелектрична проникність полярних діелектриків залежить від температури. Вона зменшується при нагріванні діелектрика (рис III.13).

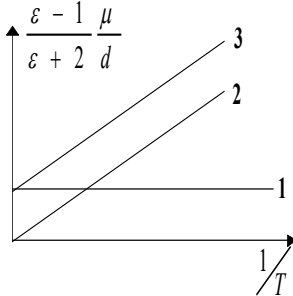


Рис. III.13

Вище ми розглянули поляризацію полярних діелектриків в електричних полях, в яких, в основному, має місце дипольна поляризація. В електричних полях, де в діелектрику збуджуються всі розглянуті типи поляризації, діелектрична проникність

виражається формулою

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left[ \alpha + \alpha_i + \frac{P_0^2}{3\varepsilon_0 kT} \right]$$

У цьому виразі перший доданок виражав електронну, другий – іонну, а третій – дипольну поляризацію.



### 37. Метод дзеркальних зображень для полів у діелектриках

Дзеркального зображення заряду в діелектриках з різною діелектричною проникністю немає. Однак ідея методу успішно може бути використана для розрахунку електричного поля в діелектриках.

Нехай маємо два однорідні діелектрики з плоскою границею їх розділення. Діелектричні проникності діелектриків  $\epsilon_1$  і  $\epsilon_2$ . В першому діелектрику на відстані  $d$  від межі її контакту помістили точковий заряд  $+q$ .

Електричне поле заряду  $q$  поляризуватиме діелектрики, в наслідок чого на межі їх розділення виникнуть поляризаційні заряди. Площина діелектрика, в якому знаходиться заряд  $+q$  (рис. III.14), зарядиться позитивно, а площина, контактуючого діелектрика – негативно.

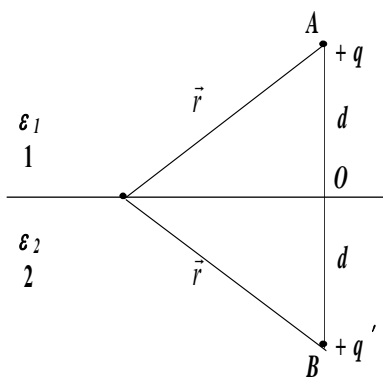


Рис. III.14

Заряд, індукований електричним полем заряду  $+q$  на контактуючих площинах діелектриків, замінимо точковим зарядом  $q'$  такої величини, який будучи розміщеним в діелектрику 2, на перпендикулярі АВ на відстані  $d$  від межі розділення, утворював би таке ж електричне поле, як і

індуковані заряди оскільки  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ , то  $|q'| \neq |q|$ . Знайдемо  $q'$ .

Нормальні складові вектора електростатичної індукції на межі розділення діелектриків однакові

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (38.1)$$

$$D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n}; \quad D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n} \quad (38.2)$$

$E_{1n}$  і  $E_{2n}$  – нормальні складові напруженостей електричного поля відповідно в діелектриках 1 і 2. В околі точки О напруженості поля в діелектрику 1 буде дорівнювати

$$E_{1n} = E_{qn} - E_{q'n}$$

У діелектрику 2

$$E_{2n} = E_{qn} + E_{q'n}$$

$$E_{1n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2} (q - q') \quad (38.3)$$

$$E_{1n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2} (q + q') \quad (38.4)$$

Із (38.1) і (38.2) отримаємо:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \quad (38.5)$$

Підставимо (38.3) і (38.4) в (38.5)

$$(q - q')\varepsilon_1 = (q + q')\varepsilon_2$$

Звідки

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \quad (38.6)$$

Заряд  $q$  можна знайти й іншим шляхом. Потенціал електричного поля в точках на границі розділення діелектриків з однієї сторони, дорівнює:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0r} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0r}$$

А з другої

$$\varphi_2 = \frac{q - q'}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0r}$$

Оскільки обидва значення потенціалу виражають потенціал однієї і тієї ж точки, тобто  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0r} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0r} = \frac{q - q'}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0r}$$

Звідси отримаємо значення заряду  $q'$ .

$$\frac{q}{\varepsilon_1} + \frac{q'}{\varepsilon_1} = \frac{q - q'}{\varepsilon_2}$$

$$q' = q \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Отже, застосовуючи метод дзеркальних зображень, легко знайти основні характеристики поля у такій неоднорідній структурі діелектриків.

Заряд  $q'$ , який прийнято як заряд-зображення є індукованим зарядом на межі контакту діелектриків. Він дорівнює різниці зв'язаних зарядів, індукованих на поверхнях діелектриків. Знак цього заряду, а відповідно і знак заряду-зображення, залежить від діелектричних проникностей діелектриків, що межують. Якщо  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , то

границя діелектриків у випадку позитивного заряду  $q$ , заряджена позитивно, тобто  $q' > 0$ . Якщо  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , то заряд  $q' < 0$ . Таким чином, знак заряду-зображення залежить від природи діелектриків.

Відповідно до знаку заряду на контактї діелектриків, напруженість електричного поля всередині першого діелектрика посилюється або послаблюється. Вище розглянуто випадок, коли  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , тобто послаблення електричного поля заряду  $q$  в першому діелектрику зарядом індукованим на їх контактї.

Напруженість електричного поля в другому діелектрику буде визначатись різницею заряду  $q$  і заряду  $q'$ , індукованого на межї діелектриків.

Розглянемо приклад розрахунку поверхневої густини зв'язаних зарядів, вектора поляризації і напруженості електричного поля діелектричного сферичного шару.

Нехай маємо дві концентричні сфери радіусами  $r_1$  і  $r_2$ , в центрі яких розміщено точковий заряд  $q$ . Простір між сферами заповнено діелектриком з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ .

У результаті поляризації діелектрика, на внутрішній і зовнішній поверхнях виникнуть зв'язані заряди. Оскільки електричне поле сферично симетричне, то поверхнева густина індукованих зв'язаних зарядів не буде залежати від вибору точок на поверхнях.

Потік електричного зміщення через будь-яку поверхню радіусом  $r$  і центром в центрі сфер за теоремою Остроградського-Гауса

$$\int_S D_r dS = D_r 4\pi r^2 = q$$

Отже,

$$D_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Знаючи  $D_r$ , можна визначити напруженість електричного поля. У різних точках, взятих на радіальній прямій, вона буде різною. Тому розглянемо кілька окремих випадків.

а)  $r < r_1$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

б)  $r_1 < r < r_2$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

в)  $r_2 < r$

$$E_r = \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

При  $r = r_1$  і  $r = r_2$  напруженість електричного поля терпить розриви, тоді як електричне зміщення є неперервним у всьому просторі. Знайдемо тепер нормальну складову вектора поляризації. Як відомо, електростатичне зміщення для поля у діелектрику

$$D_r = P_r + \varepsilon_0 E_r$$

Звідки

$$P_r = D_r - \varepsilon_0 E_r$$

Як і для напруженості електричного поля, і для  $P_r$  розглянемо три випадки.

а)  $r < r_1$

$$P_r = 0$$

б)  $r_1 < r < r_2$

$$P_r = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot q$$

в)  $r_2 < r$

$$P_r = 0$$

Тоді величина зв'язаних зарядів дорівнює:

а) на внутрішній поверхні сфери

$$\sigma_{\%o} = -P_r = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r_1^2};$$

б) на зовнішній поверхні сфери

$$\sigma_{\%o} = P_r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r_2^2}.$$

Знаючи поверхневу густину заряду, знайдемо поляризаційні заряди індуковані на поверхнях.

а) заряд на внутрішній поверхні сфери

$$q_1 = q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

б) заряд на зовнішній поверхні сфери

$$\sigma_{\%o} = P_r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi r_2^2}.$$

Як видно із останніх виразів, поляризаційні заряди, індуковані на сферичних поверхнях діелектричного шару, в центрі якого розміщений точковий заряд, є однаковими на обох поверхнях.

Електричне поле в середині сферичного шару створюється точковим зарядом  $q$  і зв'язаним зарядом, який індукований на внутрішній поверхні діелектрика. Зв'язаний заряд індукований на зовнішній поверхні шару в об'ємі

шару електричного поля не створює. Тому напруженість електричного поля точкового заряду  $q$ , всередині сферичного шару зменшується на величину напруженості поля створюваного зв'язаним зарядом  $q_{зв}$ . При  $r_1 \rightarrow 0$  точковий заряд  $q$  діє як ефективний точковий заряд

$$q_{ef} = q + q_{зв} = \frac{q}{\epsilon}$$

що і спричиняє послаблення електричного поля в діелектрику.

### **38. Енергія електростатичного поля при наявності діелектрика**

Розглянемо довільну систему вільних зарядів у вакуумі. Припустимо, що в довільній точці простору напруженість електричного поля буде  $\vec{E}_0$ , а густина енергії

$$w_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2.$$

Заповнимо простір однорідним діелектриком з діелектричною сталою  $\epsilon$  так, щоб початкове розміщення вільних зарядів не змінювалось. При таких умовах визначимо, як зміниться густина електричної енергії.

Отже, будемо вважати, що заряди є постійними. У цьому випадку

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0.$$

$\vec{D}$  до і після заповнення діелектриком є не змінним. Напруженість поля в діелектрику

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Тоді зміну густини енергії електростатичного поля при внесенні діелектрика запишемо:

$$\omega = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{1}{2} \frac{E_0}{\varepsilon} \varepsilon_0 E_0 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{\varepsilon}.$$

Отже, енергія поля при внесенні діелектрика зменшилась в  $\varepsilon$  разів. На що була затрачена енергія? Очевидно, на поляризацію діелектрика і процеси, що нею супроводжують.

Таким чином, при заповненні простору діелектриком виконується робота.

### 39. Енергія поляризованого діелектрика

Якщо діелектрик помістити в зовнішнє електричне поле, то він поляризується. Механізм поляризації діелектриків розглянуто нами в главі четвертій. Із розглянутого відомо, що поляризація, з одного боку, є деформацією електронних орбіт в атомах і молекулах діелектрика, з іншого – повертанням дипольних моментів молекул-диполів уздовж напрямку зовнішнього електричного поля. Все це пов'язане із затратою енергії, а тому є очевидним, що поляризований діелектрик повинен володіти запасом електричної енергії. Знайдемо цю енергію. Розглянемо спочатку діелектрик з неполярними молекулами (пружними диполями). У зовнішньому електричному полі у неполярних молекулах діелектрика відбувається зміщення центрів позитивних і негативних зарядів, тобто електронна поляризація. Така молекула набуває вигляду диполя. Електричний момент пружного диполя, який розміщений в електричному полі напруженістю  $\vec{E}$ , дорівнює



$$\vec{P}_e = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}, \text{ або } P_e = ql = \varepsilon_0 \alpha E \quad (39.1)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт поляризаційної здатності диполя,  $q$  і  $l$  – відповідно його заряд і довжина плеча (віддаль між центрами позитивних і негативних зарядів). До заряду  $q$  із сторони поля прикладена сила  $q\vec{E}$ , під дією якої збільшення плеча диполя (віддалі між центрами позитивних і негативних зарядів) на  $dl$  буде виконана робота  $dA = qEdl$ . З формули (39.1)

$$dl = \frac{\varepsilon_0 \alpha}{q} dE$$

тому

$$dA = \varepsilon_0 \alpha E dE$$

Інтегруючи цей вираз по  $E$  від 0 до  $E$ , знайдемо роботу електричного поля, затрачену на електронну поляризацію однієї неполярної молекули

$$A = \frac{\varepsilon_0 \alpha E^2}{2} = \frac{P_e E}{2}$$

Ця робота дорівнює тій потенціальній енергії, яку набуває пружний диполь в електричному полі з напруженістю  $\vec{E}$ . Якщо концентрація диполів  $n$ , то потенціальна енергія всіх диполів тобто об'ємна густина енергії поляризованого діелектрика, буде дорівнювати

$$\omega_{\text{л}} = A \cdot n = \frac{1}{2} n P_e E$$

Але, оскільки  $P_e \cdot n = P$  - модуль вектора поляризації, то

$$\omega_{\text{д}} = \frac{PE}{2}.$$

Такий самий результат можна одержати і для густини енергії діелектрика з неполярними молекулами (жорсткими диполями). Густина енергії електричного поля у вакуумі

$$\omega_{\%o} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Тоді в будь-якому середовищі повна густина електричної енергії буде дорівнювати

$$\omega_{\text{пов}} = \omega_{\text{вакуум}} + \omega_{\text{діелектрик}}$$

Тобто

$$\omega_{\%o} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{PE}{2}.$$

#### 40. Сегнетоелектрики

Серед полярних діелектриків, зокрема тих, які мають кристалічну будову, є такі, що володіють особливими фізичними властивостями. Деякі із них при деформації розтягу або стиску набувають дипольний момент, тобто поляризація може в них виникати і при відсутності електричного поля. Такі кристали належать до п'єзоелектриків. Прикладом такого кристала є кварц.

Інші кристали є поляризованими і в недеформованому стані. Такі діелектрики називаються сегнетоелектриками. Уперше ефект спонтанної поляризації було відкрито в кристалах сегнетової солі ( $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ ), в зв'язку з цим усі кристали, в яких має місце цей ефект, називають сегнетоелектриками.

Які фізичні властивості відрізняють сегнетоелектрики від інших діелектриків?

1. У той час як у звичайних діелектриках  $\varepsilon$  складає декілька одиниць, досягаючи як виняток декілька десятків

(для води, наприклад,  $\epsilon = 80$ , діелектрична проникність сегнетодіелектриків буває порядку декількох тисяч.

2. Залежність  $D$  від  $E$  не є лінійною, а отже, діелектрична проникність сегнетоелектриків залежить від напруженості електричного поля.

3. При зміні напрямку вектора зовнішнього електричного поля вектор поляризації  $P$  (а відповідно, і  $D$ ) відстають від напруженості поля  $E$ , в результаті чого  $P$  і  $D$  визначаються не тільки величиною  $E$  в даний момент, але і від того, чи був сегнетоелектрик в електричному полі раніше. Ця особливість сегнетоелектриків називається діелектричним гістерезисом.

Залежність електричного зміщення  $D$  від напруженості поля  $E$  має вигляд, який показано на рисунку III.15.

При початковому зростанні поля зростання електричного зміщення  $D$  описується віткою кривої 1, яка є нелінійною.

Якщо продовжувати зменшувати електричне поле, то зменшення електричного зміщення буде проходити згідно з кривою 2.

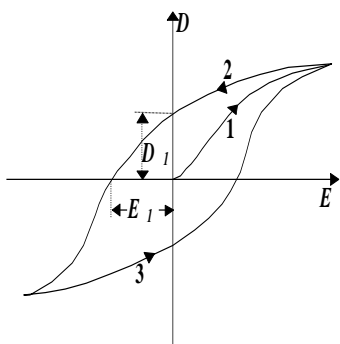


Рис. III.15

Коли напруженість поля  $E$  буде рівною нулю, електричне зміщення не дорівнює нулю, дорівнює величині, що зображається відрізком  $D_1$ . Це показує, що в сегнетоелектрика наявна залишкова поляризація, і він залишається поляризованими і при відсутності зовнішнього електричного поля. Щоб зняти залишкову поляризацію,

необхідно прикласти електричне поле  $E_1$  протилежного

напряму. Значення напруженості електричного поля  $E_1$ , яке знімає залишкову поляризацію називається коерцитивною силою. При подальшій циклічній зміні електричного поля зміна електричного зміщення описується зображеною петлеподібною кривою – петлею гістерезису.

Такий хід залежності  $D$  від  $E$  був відкритий у кристалах сегнетової солі. Однак він й властивий усім сегнетоелектрикам.

Сегнетоелектричні властивості сильно залежать від температури. При температурах, вищих певного значення  $T_k$ , яке є різним для різних речовин, сегнетоелектричні властивості зникають, і сегнетоелектрик перетворюється на звичайний діелектрик. Ця температура називається температурою Кюрі або точкою Кюрі, на честь французького фізика, який вперше виявив існування подібної критичної температури при дослідженні магнітних властивостей феромагнетиків. У деяких випадках, як, наприклад, для сегнетової солі, існують дві температури Кюрі ( $+22,5$  °C і  $-15$  °C) і сегнетоелектричні властивості спостерігаються тільки при температурах, що в межах між цими точками. Наявність однієї або декількох температур Кюрі є четвертою властивістю сегнетоелектриків. Крім сегнетової солі сегнетоелектричними властивостями володіє фосфат калію ( $KH_2PO_4$ ), титанат барію ( $BaTiO_3$ ) і інші. Температура Кюрі для титанату барію дорівнює 120 С.

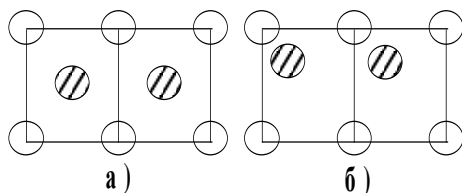


Рис. III.16

Для того, щоб кристал був сегнетоелектриком, необхідно (але недостатньо), щоби він не мав центра симетрії. На рис. III.16а показана плоска гратка, яка має центр симетрії.

Якщо центральний атом зміститься і не лежатиме на перетині діагоналей квадрата, ґратка не буде мати центра симетрії (рис. III.16б). При цьому не має значення, велике це зміщення чи мале. Істотним є тільки те, що кристал уже не має одного із елементів симетрії – центра симетрії.

Серед сегнетоелектриків найбільш просту кристалічну структуру має титанат барію. У неполярній фазі при температурі вищій  $120^{\circ}\text{C}$  він має кубічну структуру і володіє центром симетрії (рис. III.17).

На кожний кубик кристалічної структури  $\text{BaTiO}_3$  припадає по одному атому  $\text{Ba}$  (можна вважати, що на комірку припадає по  $\frac{1}{8}$  від кожного із восьми атомів  $\text{Ba}$ , що знаходяться у вершинах кубика; останні  $\frac{7}{8}$  припадає на комірки, які мають з даною загальні вершини).

Атомів кисню шість; на комірку припадає  $\frac{1}{2}$  кожного атома, а тому всього три атоми кисню. Нарешті, на кожний кубик припадає по одному атому  $\text{Ti}$ , розміщений у його центрі. При температурі, нижчій  $120^{\circ}\text{C}$  ґратка перестає бути кубічною внаслідок невеликого зміщення атомів. Куб перетворюється на пряму призму з квадратною основою, тобто, на тетрагональну кристалічну структуру.

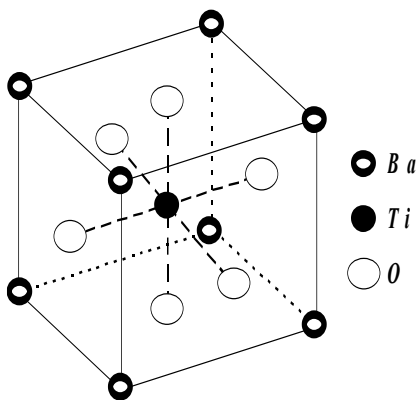


Рис. III.17

Одночасно атом  $Ti$  зміщується в напрямі до одного із атомів кисню, що позбавляє ґратку центра симетрії.

Усі ці зміщення обумовлені тим, що при температурі, нижчій  $120^{\circ}C$  кубічна структура ґратки титанату барію уже не відповідає мінімуму енергії електричної взаємодії частинок кристалу.

Частинки зміщуються і займають такі положення, при яких енергія взаємодії всіх атомів кристалу мінімальна.

Зміна параметрів ґратки при переході через точку Кюрі проходить поступово, проте симетрія кристалу змінюється стрибком, тобто відбувається фазовий перехід другого роду.

Розглядаючи кристалічну ґратку титанату барію, ми говорили про атоми титану, барію і кисню. Однак у дійсності метали титану і барію, створюючи хімічний зв'язок із киснем, віддають йому свої електрони, в результаті чого всі частинки є іонами. Тому зміщення  $Ti$  приводить до появи у елементарної комірки дипольного моменту.

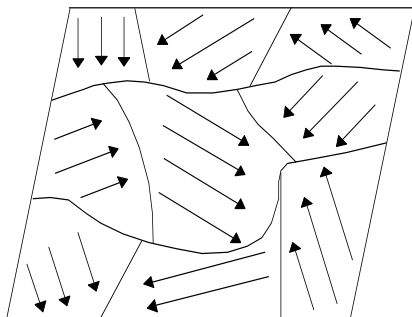


Рис. III.18

Здавалось би, що набуття елементарною коміркою дипольного моменту обумовлює автоматичне набуття дипольного моменту всім кристалом. Однак у такому випадку навколо сегнетоелектрика

виникло би електричне поле, яке володіло б відповідним запасом енергії. Щоб цього не було, кристал розбивається на невеликі поляризовані області, які називаються доменами, кожен з яких характеризується певним дипольним моментом, однак напрями дипольних моментів доменів не паралельні, а розташовуються так, щоб дипольний момент кристалу в цілому був рівним нулю. Зокрема, дипольні моменти доменів можуть створювати замкнуті ланцюжки (рис. III.18).

Орієнтація дипольних моментів окремих доменів може бути здійснена електричним полем, і тоді кристал набуває значного загального дипольного моменту. Тобто при наданні електричного поля відбувається часткова переорієнтація доменів сегнетоелектрика, а також ріст одних доменів за рахунок інших. При припиненні дії на сегнетоелектрик електричного поля повна розорієнтація доменів через їхню інертність і взаємний зв'язок не відбувається, в результаті чого він характеризується залишковою поляризацією.

Доменна будова сегнетоелектриків і є причиною гістерезису в їх поляризації при циклічній дії електричного поля.

Експериментальні доведення доменної структури сегнетоелектриків спочатку не були прямими. Прямі доведення дали спостереження у поляризованому світлі, а також травлення поверхні сегнетоелектриків. Наприклад, позитивно заряджений край домена  $BaTiO_3$  при травленні кислотою, руйнується сильніше, ніж заряджений від'ємна.

#### **41. П'єзоелектрики**

У 1880 р. Пером і Жаком Кюрі було зауважено, що в деяких кристалах поляризація може виникати і без електричного поля, якщо кристал піддати механічній

деформації. Це явище одержало назву п'єзоелектричного ефекту.

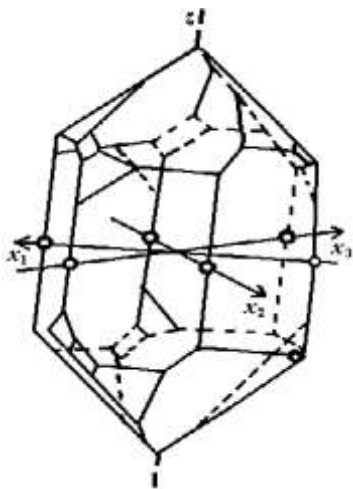


Рис. III.19

кристали характеризуються чотирма кристалічними осями, які визначають важливі напрями всередині кристалу (рис. III.19).

Одна із цих осей сполучає вершини піраміди. Три інших  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  перпендикулярні до осі  $Z$  сполучають протилежні ребра шестигранної призми. Напрямок, що визначається віссю  $Z$ , п'єзоелектрично неактивний: при стисненні або розтягу по цьому напрямку поляризація не відбувається. І, навпаки, при стисненні або розтягу в будь-якому напрямі, перпендикулярному до осі  $Z$ , кристал поляризується. Вісь  $Z$  називається оптичною, а осі  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  – електричними або п'єзоелектричними.

Розглянемо пластинку кварцу, вирізану перпендикулярно до однієї із осей п'єзоелектричних осей  $X$ . Вісь, перпендикулярну до  $Z$  і  $X$ , позначимо через  $Y$  (рис. III.20). При розтягуванні пластинки вздовж осі  $X$  на перпендикулярних до неї гранях  $ABCD$  і  $EFGH$



появляються різноіменні поляризаційні заряди. Такий поляризаційний ефект називається повздовжнім. Якщо змінити характер деформації, тобто перейти до стиснення, то знаки зарядів зміняться на протилежні.

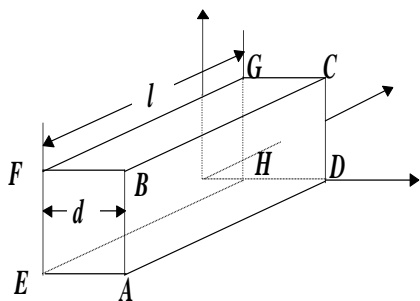


Рис. III.20

П'єзоелектричний ефект виникає і при стисненні або розтягу в напрямі осі  $Y$ . Деформація у цьому напрямі приводить до поляризації вздовж осі  $X$  і виникнення на гранях  $ABCD$  і  $EFGH$  поляризаційних зарядів.

Цей ефект називається поперечним.

При цьому виявляється, що знаки зарядів на кожній грані при стисненні вздовж  $Y$  (у поперечному ефекті) такі, як при розтягу вздовж осі  $X$  (у повздовжньому ефекті).

Розглянемо якісно пояснення п'єзоелектричного ефекту. На рис. III.21 схематично показані проєкції позитивних іонів  $Si$  (заштриховані кружки) і негативних іонів  $O$  (світлі кружки) у площині, перпендикулярній до оптичної осі  $Z$ .

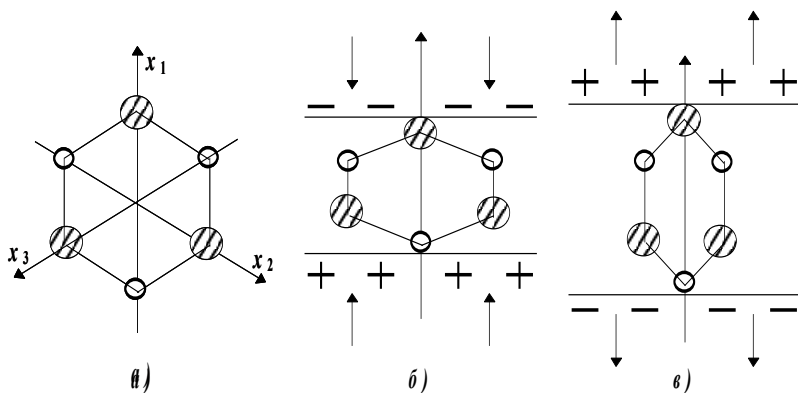


Рис. III.21

Цей рисунок не відповідає фактичній конфігурації іонів в елементарній комірці кварцу, в якій іони не лежать в одній площині, а їхня кількість більша від показаної. Однак він правильно передає симетрію взаємного розташування іонів, що є достатнім для якісного пояснення п'єзоелектричного ефекту. Рис. III.21а – не деформований кристал. На грані А, перпендикулярної до осі  $X_1$ , є виступаючі позитивні заряди, а на паралельній їй грані В – негативні. При стисненні вздовж осі  $X_2$  (рис. III.21б) елементарна комірка деформується. При цьому позитивний іон 1 і від'ємний іон 2 "втискаються" всередину комірки, в результаті чого виступаючі заряди (позитивний на площині А і негативний – В) зменшуються, що еквівалентно виникненню від'ємного заряду на площині А і позитивного заряду на площині В. При розтягу вздовж осі  $X_1$  має місце обернене (рис. III.21в): іони 1 і 2 "витісняються" із комірки. А тому на грані А виникає додатковий позитивний заряд, а на грані В – негативний.

Сучасна теорія твердого тіла і досліди показують, що п'єзоелектричний ефект може виникати тільки в таких кристалах, де елементарна комірка не має центра симетрії. До таких матеріалів належить кварц. Крім кварцу, п'єзоелектричний ефект спостерігається у великій кількості інших кристалів. У сегнетової солі, наприклад, він і більший, ніж у кварцу.

Сильними п'єзоелектриками є кристали сполук елементів 2-ої і 6-ої груп періодичної системи Менделєєва ( $CdS$ ,  $ZnS$ ) а також багато інших хімічних сполук. Розглянутий нами п'єзоелектричний ефект називається прямим. Однак існує і зворотне явище: в п'єзоелектричних кристалах виникнення поляризації супроводжується механічними деформаціями. Цей ефект називається зворотним п'єзоелектричним ефектом.

Якщо на металеві пластинки, закріплені на кристалі, подати електричну напругу, то кристал під дією поля поляризується і деформується (рис. III.22).

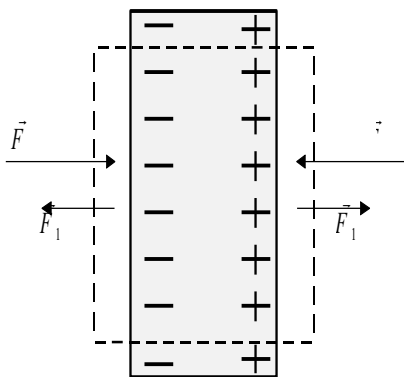


Рис. III.22

Умова необхідності існування зворотного п'єзоелектричного ефекту ґрунтується на факті існування прямого п'єзоелектричного ефекту і законі збереження енергії.

Якщо, наприклад, пластинку, показану на рис. III.22 піддати стискуванню зовнішньою силою  $F$ , то виникне

п'єзоелектричний ефект. Якби цього не було, то робота зовнішніх сил дорівнювала би потенціальній енергії пружно деформованої пластинки. Але, оскільки п'єзоелектричний ефект існує, і на пластинці появляються заряди, то виникає електричне поле, яке володіє запасом додаткової енергії. За законом збереження енергії впливає, що при стискуванні пластинки виконується більша робота, а значить, у ній виникають додаткові сили  $F_1$  які протидіють стискуванню. Це і є сили зворотного п'єзоелектричного ефекту. Знаки прямого і зворотного п'єзоелектричних ефектів залежать від знаків деформацій. Якщо в обох випадках знаки зарядів на гранях однакові, то знаки деформацій різні. Якщо ж при стискуванні пластинки на гранях появляються заряди, показані на рис. 76, то при створенні такої поляризації зовнішнім полем пластинка буде розтягуватися.

Зворотний п'єзоелектричний ефект зовнішньо подібний до ефекту електрострикції, хоч й істотно відмінний. П'єзоелектричний ефект залежить від напрямку

електричного поля і при його зміні змінює знак на протилежний. Електрострикція від напрямку електричного поля не залежить. П'єзоелектричний ефект спостерігається тільки в окремих кристалах, де відсутній центр симетрії, натомість електрострикція має місце у всіх діелектриках.

Прямий і зворотний п'єзоелектричні ефекти мають широке застосування в електроніці. П'єзокварци використовуються для одержання і спостереження ультразвуків, стабілізації електричних коливань, в різних вимірювальних приладах і для виготовлення еталонів часу, для виготовлення мікрофонів, телефонів, п'єзоелектричних адаптерів, манометрів, віброметрів і інших.

## **42. Механічні сили, при наявності діелектриків.**

В електричному полі на діелектрики і провідники діють сили, які називають пондеромоторними, тобто силами, які діють на вагомій тіла. Цей термін був введений тоді, коли у фізиці разом зі звичайними речовинами, визнавалося існування багатьох невагомих субстанцій (тепець, ефір, електричні і магнітні рідини тощо). Однак оскільки невагомих субстанцій не існує, то цей термін застарів. Але ним користуються, позаяк не існує іншого.

Першопричиною виникнення пондеромоторних сил є електричні заряди, надані тілам. Прикладом таких сил є кулонівська взаємодія двох точкових зарядів. Можна, звичайно, знайти сили, що діють на провідники довільної форми і розмірів, але для цього необхідно знати повну енергію системи.

### **42.1. Розглянемо спочатку, якою є повна енергія системи**

Розглядаючи це явище, ми вважали, що електричне поле, діючи на електронну систему молекул, переводить їх

на заряджений стан, або заряджені молекули в полярних діелектриках орієнтує в певному напрямі. Всі інші параметри діелектрика вважалися незмінними. Проте поляризація діелектрика може супроводжуватися зміною температури та появою в ньому механічних сил і напруг. В результаті цього під час зарядки тіл їх діелектрична проникність може змінитися, оскільки вона залежить від температури і густини діелектрика. Ця обставина не впливає на вираз для елементарної роботи

$$dA = -\varphi dq$$

Однак інтегрування цього виразу проводилось у припущенні  $\varepsilon = const$ . А тому, зрозуміло, таким шляхом не можна одержати вираз для внутрішньої електричної енергії системи. Але, все-таки, вирази (19.2) і (19.4) ілюструють не менш важливу фізичну величину, а саме вільну енергію системи, зумовлену електризацією тіл.

Щоб це довести, переведемо систему в кінцевий стан двома етапами. Нехай спочатку електричне поле відсутнє. У такому стані проведемо деформацію тіл і підведемо до них таку кількість тепла, щоб у них був той самий розподіл температури і густини, як і в кінцевому стані. Очевидно, що система одержала деякий приріст вільної енергії, який ми позначимо через  $W_{np}$ . Цей приріст з електризацією тіл не зв'язаний.

На другому етапі будемо заряджати тіла, переносючи на них заряд безмежно малими порціями, зберігаючи незмінними температуру і густину в кожній точці простору. Роботу, яку при цьому затрачено, можна обчислити таким самим методом, як при виводі формул (19.2) і (19.4) Оскільки процес електризації тіл було проведено ізотермічно квазістатичним процесом, то виконана робота пішла на приріст вільної енергії системи.

Приріст вільної енергії на цьому етапі позначимо через  $W_e$ . Якщо вільну енергію в початковому стані прийняти рівною нулю, то повну вільну енергію системи в кінцевому стані можна записати  $W_n = W_{np} + W_e$ .

Отже, повна енергія системи складається із  $W_{np}$ , яка виражає приріст пружної частини вільної енергії, і  $W_e$  – електричної.

### 42.2. Розглянемо приклади розрахунку дії сил на діелектрики в електричному полі за зміною електричної енергії

Нехай маємо плоский конденсатор, простір між пластинами заповнено нестискаючою рідиною з діелектричною проникністю  $\varepsilon$ . Визначимо сили притягання між пластинами. Частину вільної енергії можна не брати до уваги, оскільки для нестискаючої рідини  $dW_n = dW_e$ .

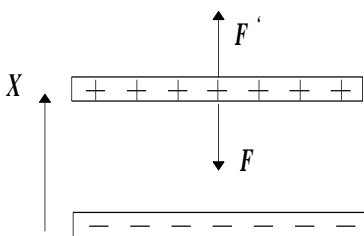


Рис. III.55

Нехай вісь  $x$  напрямлена від від'ємно зарядженої пластини до позитивної. Якщо змістити позитивно заряджену пластину в напрямі  $x$  на величину  $\delta x$  (рис. III.55), то якщо зберегти заряд на пластинах незмінних, то незмінною залишиться

індукція електричного зміщення  $D$ , а з нею об'ємна густина вільної енергії  $\frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon \varepsilon_0}$ .

При зміщенні пластини об'єм конденсатора збільшиться на  $\delta V = S \delta x$ . Оскільки при цьому частина

рідини ввійде в конденсатор, то збільшиться його вільна енергія на  $dW_n = \omega \delta V = \omega \cdot S \delta x$ .

Віртуальна робота, виконана з силою  $F$ , буде дорівнювати

$$dA = Fdx = Sfdx = fdV,$$

де  $f$  – сила, віднесена до одиниці площі пластини.

$$dA + dW_n = 0.$$

$$dA = -dW_n.$$

Отже,

$$fdV = -\omega dV.$$

А тому

$$f = -\omega = -\frac{1}{2} \frac{D^2}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2.$$

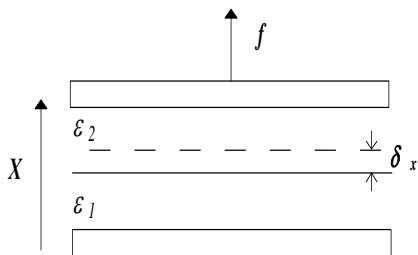
Таким чином, сила  $f$ , віднесена до одиниці площі пластини, чисельно дорівнює густині вільної енергії  $\omega$  в одиниці об'єму між пластинами. Знак (-) вказує на те, що  $f$  є силою притягання і напрямлена в сторону відхилення значень осі  $x$ .  $f$  виражає повну силу притягання між пластинами конденсатора і складається з пружної сили  $f_{np}$  і електричної сили  $f_{ел}$ , віднесених до одиниці площі пластин.

### **42.3. Розглянемо ще один приклад розрахунку пондемоторних сил**

Нехай маємо контакт двох діелектриків з діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Пондемоторні сили будуть діяти на межі розділення цих діелектриків. Поверхнева густина зарядів на межі діелектриків може

дорівнювати або не дорівнювати нулю. Знову розглянемо плоский конденсатор, заповнений двома однорідними не стискувальними діелектричними рідинами. Межа контакту рідин паралельна до пластин. Нехай електричне поле однорідне і перпендикулярне до площини контакту діелектриків. Змістимо межу контакту діелектриків на  $\delta x$ , зберігаючи сталими заряди на пластинках. Тоді незмінними залишаються й індукції  $\bar{D}_1$  і  $\bar{D}_2$  в діелектриках. При таких умовах постійними залишаються також густини вільних енергій у діелектриках

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1^2 \text{ і } \omega_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2^2.$$



**Рис. III.24**

При зміщенні рідина з діелектричною проникністю  $\varepsilon_1$  буде входити в конденсатор, а з діелектричною проникністю  $\varepsilon_2$  – виходити (рис. III.24). Приріст вільної енергії буде дорівнювати:

$$dA = Sfdx = -(\omega_1 - \omega_2)Sdx.$$

Звідси

$$f = \omega_2 - \omega_1.$$

За додатний напрям відліку прийнято напрям додатної осі  $x$ .



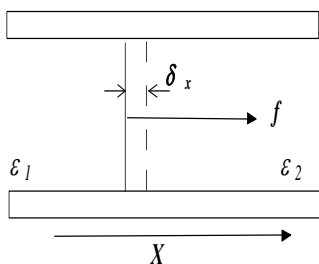


Рис. III.25

Аналогічно розв'язується питання, коли електричне поле  $\epsilon$  паралельним до площини розділення діелектриків. Тому знову розглянемо плоский конденсатор, заповнений рідким діелектриком, межа між якими перпендикулярна до поверхонь пластин (рис. III.25).

Електричне поле паралельне межі розділення діелектриків, у

тому  $E_1 = E_2 = E$ . У цьому випадку  $f = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\epsilon_0 E^2$ .

І, якщо  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , то  $f > 0$ , тобто сила  $\vec{f}$  напрямлена від діелектрика з більшою діелектричною проникністю до діелектрика з меншою діелектричною проникністю.

Загалом, як показують різноманітні дослідження, пондеomotorні сили, які діють на незарядженій межі двох діелектриків, спрямовані завжди в напрямі діелектрика з меншою діелектричною проникністю.

Цим, наприклад, пояснюється притягання легких шматків паперу до наелектризованої палички.

Отже, експериментально і теоретично було доведено, що на діелектрики в електричному полі діють механічні сили. Вони виникають у тому випадку, коли діелектрик загалом не заряджений.

Механічні сили зумовлені поляризаційними зарядами (як поверхневими, так і об'ємними), які виникають на діелектриках в електричному полі, і тому на кожен елемент поверхні і об'єму діелектрика діє певна сила.

Якщо діелектрик розміщений не у вакуумі, а в середовищі, здатному поляризуватися, то поляризуватися буде і навколишнє середовище. Тому сили, які будуть діяти

на діелектрик, залежатимуть як від поляризаційних зарядів діелектрика, так і від поляризаційних зарядів середовища.

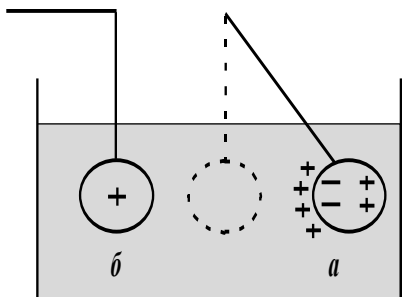


Рис. III.26

За сказаним можна прослідкувати на досліді, показаному на рис. III.26. Металева і парафінова кульки підвішені на нитках поблизу одна від одної. Якщо металеву кульку зарядити, то в повітрі парафінову вона буде притягувати. Якщо

занурити обидві кульки в ацетон, у якого діелектрична проникність більша, ніж у парафіну, то парафінова кулька відштовхується від металеві.

Зміна взаємодії кульок у повітрі і діелектрику появою на поверхні кульки поляризаційних зарядів з деякою поверхневою густиною  $\sigma'_1$ , а на границі середовища, що прилягає до кульки, – поляризаційних зарядів протилежного знаку з другою густиною  $\sigma'_2$ . Тому сила, що діє на поверхню кульки, залежить від результуючого заряду  $|\sigma'_1 - \sigma'_2|$ . Якщо діелектрична проникність середовища  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , то  $\sigma'_1 < \sigma'_2$ . Якщо  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , то  $\sigma'_1 > \sigma'_2$  і результуючий заряд змінює знак, що і зумовлює зміну притягання кульок їх відштовхуванням.

Однак на тіло в діелектрику буде діяти сила зумовлена не тільки вільними зарядами, які розміщені на ньому, але внаслідок поляризації на кожен елемент об'єму діелектрика діють сили, які призводять до його деформації. Це явище має назву електрострикції. Внаслідок електрострикції всередині діелектрика виникають механічні сили.

### 43. Електричне поле в різних інерціальних системах відліку

Вище ми розглядали характеристики електричного поля заряду рухомого відносно спостерігача. У такій інерціальній системі відліку спостерігач буде відзначати електричне поле, яке підлягає уже розглянутим закономірностям. А яким же буде електричне поле у тій самій просторово-часовій точці для спостерігача, який перебуває в іншій інерціальній системі відліку, що рухається стосовно даної?

При розгляді цього питання будемо виходити з того, що заряд не залежить від стану відліку, тобто є інваріантним, що доведено численними дослідженнями. Взяти хоча б заряд елементарних частинок – він однаковий у будь-яких системах відліку. Атоми і молекули речовин, якщо на них не впливають зовнішні фактори, є нейтральними, незважаючи на те, що заряджені складові атому – електрони і протони по-різному рухаються. Якщо би рух якось впливав на величину заряду, то точної компенсації позитивних і негативних зарядів в атомах, а також і в молекулах не було би. Тому, якщо в деякій інерціальній системі таке заряджене тіло має заряд  $q$ , то таким самим він буде і в іншій інерціальній системі відліку, яка стосовно даної рухається.

Виберемо в інерціальній системі відліку  $K$  замкнуту поверхню  $S$ , яка оточує систему  $n$  зарядів. Потік напруженості електричного поля через цю поверхню за теоремою Остроградського-Гауса буде дорівнювати

$$\int_S \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

В іншій інерціальній системі відліку  $K'$ , яка стосовно  $K$  рухається, потік напруженості електричного поля буде мати вигляд

$$\int_{S^{\circledast}} \vec{E}' dS'$$

Але величина заряду не залежить від стану системи, тому

$$\int_S \vec{E} dS = \int_{S^{\circledast}} \vec{E}' dS'$$

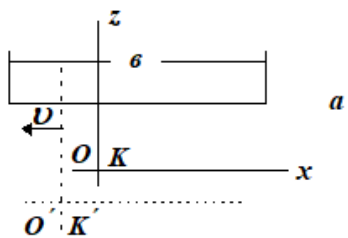
Оскільки події одночасні в системі відліку  $K$  можуть бути не одночасними в системі  $K'$ , то кожен із цих інтегралів необхідно обчислювати для одного моменту часу у своїй системі.

Рівність наведених інтегралів формально виражає релятивістську інваріантність заряду.

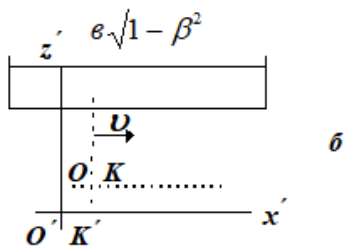
Розглянемо тепер якою буде напруженість електричного поля у системі відліку  $K'$ , якщо в системі  $K$  воно дорівнює  $E$ ?

Для прикладу розглянемо напруженість електричного поля тонкої зарядженої нитки завдовжки  $b$  з лінійною густиною заряду  $\gamma$ . Нехай маємо дві системи відліку, одна із яких  $K$  нерухома, а штрихована  $K'$  рухається вліво зі швидкістю  $v$  паралельно до осі  $x$  не штрихованої системи (рис. III.27). Нитку розмістимо спочатку паралельно до осі  $x$ . У нештрихованій системі координат напруженість електричного поля для точок біля середини нитки, близько розміщених до нитки, дорівнює  $E$  і позначається формулою

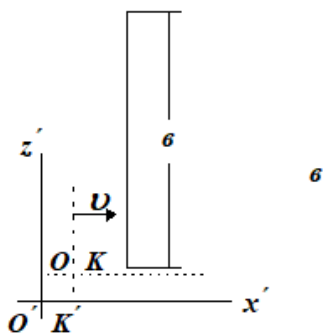
$$\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r}$$



a



b



b

Рис. III.27

У штрихованій системі координат напруженість електричного поля очевидно змінюється, і справді, в рухомій  $K'$  системі координат довжина нитки зменшиться і становитиме  $b\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ .

Це приведе до зміни лінійної густини заряду на нитці до  $\gamma'$ . Величина всього заряду на нитці не змінюється. Напруженість електричного поля в штрихованій системі відліку буде

$$E'_z = \frac{\gamma'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Отже,

$$E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Такою буде і складова

$E'_y$ . Тобто

$$E'_y = \frac{E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Розмістимо тепер заряджену нитку паралельно до осі  $z$ . Вектор напруженості електричного поля у напрямі осі  $x$  не штрихованої системи відліку позначимо через  $E_x$ . У

штрихованій системі координат на тій самій відстані  $r$  від нитки нічого не зміниться, оскільки заряд інваріантний, а густина заряду безмежно тонкої нитки визначається його розподілом уздовж довжини нитки, яка в даному випадку не змінюється. Тобто

$$E_x = E'_x .$$

Ми розглянули один із найпростіших випадків електричного поля в інерціальній системі відліку. А чи можна одержаний результат поширити на більш загальні випадки?

Для встановлення цього будемо виходити із суті електричного поля. Ми його ввели як матеріальну субстанцію, через яку передається взаємодія зарядів. Оскільки поняття поля реальне, то воно повинно мати однозначний зміст у різних системах відліку.

Тобто, спостерігач у не штрихованій системі відліку, вимірявши в деякий момент напруженість електричного поля, повинен на основі тільки цих вимірювань, побачити, що виміряють у тій самій точці поля і в той самий момент часу спостерігачі з інших систем відліку.

Якщо би було не так, то поняття поля не мало би змісту. З цього погляду отримані значення напруженості електричного поля у напрямі перпендикулярному і паралельному до швидкості руху штрихованої системи відліку, мають більш загальний зміст.

Тобто, яким би не був напрям вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  у системі відліку  $K$ , його можна розглядати як суперпозицію полів, напрямлених у напрямках  $x, y, z$ , і, знаючи перетворення кожної складової, визначити вектор поля  $\vec{E}'$  в цій самій точці простору і в той самий момент часу в системі  $K'$ . Він дорівнює

$$(E')^2 = (E'_x)^2 + (E'_y)^2 + (E'_z)^2.$$

### 43А. Непотенціальність електричного поля точкового заряду

Розглянемо знову штриховану і нештриховану інерціальні системи відліку. Нехай штрихована система відліку  $K'$  рухається зі швидкістю  $v$  у від'ємному напрямі осі  $x$  (рис. III.27Б). Зв'язок між координатами точок у нерухомій і рухомій зі сталою швидкістю інерціальних систем відліку визначається із перетворень Лоренца.

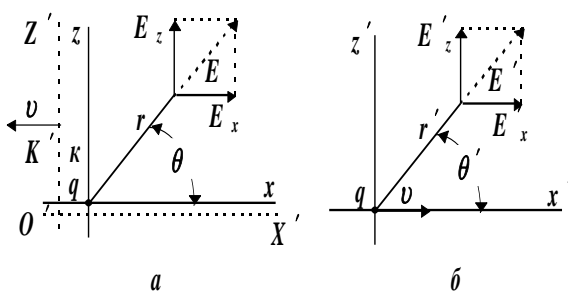


Рис. III.27Б

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' - \frac{1}{c}\beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Якщо заряд  $q$  міститься у точці початку координат нерухомої системи відліку, то складові напруженості електричного поля у будь-яких точках площини  $xz$  будуть мати вигляд

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Приймемо, початок відліку часу  $t = 0$  момент, коли початки координат  $O$  і  $O'$  збігаються, тобто коли  $x = 0$  і  $x' = 0$ . В цей момент заряд проходить через початок координат  $K'$ .

Із доведеного в попередньому параграфі відомо, що проєкції на відповідні осі цього поля в штрихованій системі відліку виражаються рівняннями

$$E'_x = E_x \quad \text{і} \quad E'_z = \frac{E_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Перейшовши до координат системи відліку  $K'$ , для  $t' = 0$  матимемо:

$$E'_x = \frac{aqx'}{4\pi\epsilon_0 \left( (ax')^2 + z'^2 \right)^{3/2}}; \quad E'_z = \frac{aqz'}{4\pi\epsilon_0 \left( (ax')^2 + z'^2 \right)^{3/2}},$$

де  $a = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ .

У нештрихованій системі координат вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  утворює з віссю  $x$  той самий кут, що і радіус-вектор точки, в якій визначається напруженість поля. Із останніх рівнянь видно, що

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'}.$$

А це означає, що і в штрихованій системі координат вектор  $\vec{E}'$  спрямований радіально від миттєвого положення



заряду. Загальна напруженість електричного поля буде дорівнювати

$$E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2 = \frac{a^2 q^2 (x'^2 + z'^2)}{\left( (ax')^2 + z'^2 \right)^3 (4\pi\epsilon_0)^2}.$$

Якщо провести необхідні перетворення, то отримаємо:

$$E'^2 = \frac{q^2 (1 - \beta^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 (x'^2 + z'^2)^2 \left( 1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2 + z'^2} \right)^3}.$$

Але, як видно з рисунка

$$(x'^2 + z'^2)^{1/2} = r', \quad z' = r' \sin \theta.$$

Тоді

$$E' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \quad (43A.1)$$

Як бачимо, напруженість електричного поля рухомого заряду є складною. Вона складається із напруженості електричного поля нерухомого заряду і складової, зумовленої рухом заряду.

Отже, ми отримали вираз для напруженості електричного поля точкового заряду, який в інерціальній системі відліку рухається вправо зі швидкістю  $\bar{v}$  паралельно осі  $x$ . Тут  $\theta'$  – кут між напрямом руху заряду і радіус-вектором, проведеним із миттєвого положення заряду до точки спостереження.

Як видно з цього виразу, в напрямі перпендикулярному до швидкості руху заряду, напруженість електричного поля

$$E_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

а в напрямі паралельному  $\vec{v}$

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} (1-\beta^2),$$

Відношення

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} > 1.$$

Це означає, що електричне поле рухомого точкового заряду в інерціальній системі відліку не є сферично-симетричним. Воно сильніше у напрямі перпендикулярному до швидкості руху заряду, ніж у напрямі паралельному і набуває характеру симетрії відносно осі, яка збігається з напрямом швидкості  $\vec{v}$  (рис. III.27В). Таке поле не потенціальне.

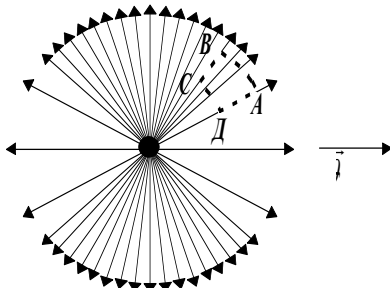


Рис. III.27В

І дійсно, умовою потенціальності електричного поля є

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Якщо взяти цей інтеграл по контуру *АВСД*,

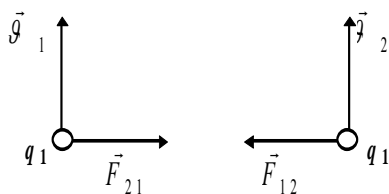
то на відрізках дуг лінійні суми дорівнюють нулю, а на відрізках  $AB$  і  $CD$ , хоч вони і рівні, напруженість поля не однакова, а тому циркуляція вектора напруженості електричного поля відмінна від нуля.

Формула (43 А.1) дає можливість визначити силу взаємодії між зарядами в рухомій системі відліку. Нехай заряд  $q_1$  рухається паралельно заряду  $q$  із швидкістю  $v$  (рис. 27Б) і перебуває від нього на відстані  $r'$ . У момент часу  $t' = 0$ , коли початок координат штрихованої системи відліку проходить через початок координат нештрихованої системи відліку  $\sin \theta = 1$ . Тоді

$$F' = E' q_1 = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad F = F' \sqrt{1-\beta^2} \quad (43A.2)$$

$F$  – сила взаємодії між нерухомими відносно системи відліку зарядами формула (43 А.2) є формулою перетворення сили взаємодії між зарядами при переході від нерухомої до рухомої системи відліку. З цього виразу видно, що в рухомих системах відліку обернена пропорційність сили взаємодії між зарядами квадрата відстані між ними порушується.



**Рис. III.28**

Характер взаємодії залежить від напрямку руху. Якщо, наприклад  $g_1$  і  $g_2$  паралельні, однаково напрямлені і перпендикулярні до вектора  $\vec{g}_{12}$  (рис. III.28), то у випадку

однойменних зарядів сили взаємодії будуть силами притягання, а у випадку різнойменних – силами відштовхування. Якщо швидкості антипаралельні, то при тих же умовах однойменні заряди будуть відштовхуватися, а різнойменні – притягатися.

## РОЗДІЛ IV

### ПОСТІЙНИЙ ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

#### 44. Поняття про електричний струм

У розділі «Електростатика» ми розглянули основи фізики явищ, зумовлені нерухомими зарядами. Однак важливу частину вчення про електростатику складають явища, викликані рухом електричних зарядів. Розділ фізики, який вивчає ці явища, називається електродинамікою.

Важливо, однак, відзначити, що електростатичні явища також супроводжуються рухом елементарних зарядів. Проте ці рухи або не впливають на електричне поле, як, наприклад, теплові коливання іонів ґратки зарядженого металевого провідника, або є дуже короточасними рухами, пов'язаними з переходом зарядів одного рівноважного стану в інший, наприклад, перерозподіл електронів у провіднику при електростатичній індукції та інші. Але оскільки електростатика вивчає явища, зумовлені, рівновагою зарядів, то ці процеси не розглядалися. Нам відомо також, що під дією електричного поля заряджені частинки набувають напрямленого руху.

Будь-який упорядкований рух зарядів називається електричним струмом. Для існування електричного струму необхідні дві умови. Перша – наявність у певному середовищі носіїв заряду. В металах такими є електрони, в електролітах – позитивні і негативні іони, в газах – позитивні іони, електрони, а також негативні іони. У напівпровідниках носіями електричного заряду є електрони і дірки.

Друга умова – наявність у певному середовищі електричного поля, енергія якого була би достатньою для переміщення електричних зарядів.

Упорядкований рух зарядів може існувати не тільки в електричному полі, але і за рахунок переміщення у просторі зарядженого тіла, наприклад, провідника або діелектрика. Такий електричний струм називається конвекційним.

Деякі дуже малі струми можуть виникати і при відсутності електричного поля. У такому випадку середовище, в якому є електричні заряди, – загалом нейтральне. Це означає, що середнє число зарядів, які рухаються хаотично і за одиницю часу перетинають будь-яку поверхню, взяту у такому середовищі, зліва направо і навпаки, є однаковим. Проте може виявитись, що саме за рахунок повної хаотичності їхня кількість у певний момент може виявитись різною. Тоді виникає дуже слабкий локальний електричний струм. Він називається флуктуаційним.

Флуктуаційні струми – випадкові, їхня величина і напрям не підлягають якимось закономірностям. Однак вони є тією границею, що обмежує чутливість електровимірювальних приладів.

За напрям електричного струму умовно вибрано напрям руху позитивних зарядів.

Факт існування електричного струму, наприклад, у металевому провіднику, говорить про те, що в цьому випадку електричне поле всередині провідника не дорівнює нулю. Очевидно, що відсутність електричного поля усередині зарядженого провідного середовища – це лише умова нерухомості зарядів, тобто відсутності електричного струму.

## 45. Характеристики електричного струму

Інтенсивність і напрям електричного струму характеризується двома важливими величинами: величиною  $I$  і густиною  $j$ .

Величиною струму називається фізична величина  $I$ , яка дорівнює відношенню заряду  $dq$ , що переноситься через деяку поверхню  $S$ , перпендикулярну до напрямку перенесення, до проміжку  $dt$  перенесення.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (45.1)$$

Якщо струм і його напрям із плином часу не змінюються, то струм називається постійним. У цьому випадку

$$I = \frac{q}{t}$$

де  $q$  – заряд, перенесений через поверхню  $S$  за певний час  $t$ .

Електричний струм може бути постійним, якщо заряди, які під дією електричного поля переміщуються провідником, не нагромаджуються або не зменшується їхня кількість у жодній із частин провідника. Тобто, якщо величина заряду, яка за одиницю часу проходить через цей поперечний переріз провідника є однаковою для будь-якого його перерізу. А для цього необхідно, щоб електричне коло було замкнутим. В іншому випадку, нагромадження або зменшення заряду в окремих місцях провідника приведе до зміни з часом потенціалу даних місць провідника, а отже, і струму.

Якщо заряд вимірювати в Кл, а час у секундах, то одиницею вимірювання струму буде ампер (А).

Отже, один ампер дорівнює величині постійного електричного струму, при якому через будь-який

поперечний переріз провідника за секунду переноситься заряд, який дорівнює одному кулону

$$1A = 1 \frac{Кл}{с}$$

Густина струму вводиться як векторна величина, яка характеризує напрям електричного струму в різних точках даної поверхні і розподіл по ній величини струму. Вектор густини струму  $\vec{j}$  збігається за напрямом з рухом позитивно заряджених частинок – носіїв заряду і чисельно дорівнює відношенню величини струму  $dI$  через малий елемент поверхні  $dS$ , нормальної до напрямку руху носіїв заряду, до площі цього елемента

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

Якщо струм постійний і провідник однорідний, то

$$j = \frac{I}{S} \quad (45.2)$$

Густина струму вимірюється в амперах на квадратний метр

$$\left( \frac{A}{m^2} \right).$$

Для більш детального розуміння поняття густини струму, розглянемо провідник різного перерізу, яким протікає постійний струм (рис. IV.1). Оскільки в провіднику струм постійний, то заряди, які протікають за одиницю часу через поперечний переріз,  $S_1$  і  $S_2$  рівні.

Тобто  $q_1 = q_2$ . Оскільки  $q_1 = j_1 S_1 t$ , а  $q_2 = j_2 S_2 t$ , то



$$j_1 S_1 = j_2 S_2, \quad \frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

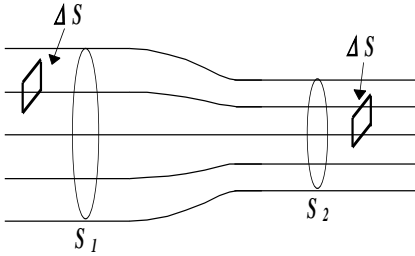


Рис. IV.1

Тобто в колі постійного струму, яке складається із провідників з різним поперечним перерізом, густини струмів у різних перерізах є обернено пропорційні площам цих перерізів.

На рис. IV.1 упорядкований рух зарядів показано суцільними тонкими лініями, по дотичних до них напрямлена густина струму  $\vec{j}$ . Ці лінії називаються лініями струму. Домовилися уважати, що число ліній струму, які проходять через одиничну площадку, перпендикулярну до них, має дорівнювати величині вектора  $\vec{j}$  в даній точці провідника.

Отже, вектор густини струму  $\vec{j}$ , так як і напруженість електричного поля  $\vec{E}$ , індукція  $\vec{D}$  і інші вектори полів, є величиною локальною, тобто має певне значення і напрям у певній точці провідника, в той час як струм  $I$  – величина інтегральна.

Знаючи вектор густини струму  $\vec{j}$  в кожній точці провідника, завжди можна знайти і величину струму  $I$ . Із наведеного вище, зокрема із формули (37.1)

$$I = \int_S j dS, \quad (45.3)$$

де інтегрування проводиться по всій поверхні  $S$  будь-якого перерізу провідника.

### 46. Рівняння неперервності

Розглянемо у провіднику, в якому протікає електричний струм, деяку уявну замкнену поверхню  $S$ . Проекцію вектора густини струму  $\vec{j}$  на зовнішню нормаль до елемента поверхні  $dS$  позначимо через  $\vec{j}_n$ . Із визначення густини струму витікає, що заряд, який за одиницю часу виходить із об'єму  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$ , дорівнює (рис. IV.62)

$$\oint_S j_n dS,$$

де інтегрування проводиться по всій замкнутій поверхні  $S$ .

Той самий заряд, який за одиницю часу витікає із взятого об'єму, можна з другої сторони подати у вигляді

$$-\frac{dq}{dt}.$$

За законом збереження

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S j_n dS. \quad (46.1)$$

Рівняння (46.1) називається рівнянням неперервності.

За аналогією з перетворенням рівняння Пуассона, рівняння (46.1) можна записати в диференціальній формі, що зв'яже струми і заряди в одній і тій самій точці провідника. Для цього, як і раніше, розглянемо малий паралелепіпед з ребрами, паралельними до координатних вісей  $x, y, z$ . (рис. IV.2). І знайдемо, що права частина рівняння (46.1) дорівнює

$$\left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) dr,$$

де  $dr = dx dy dz$  – об'єм паралелепіпеда.

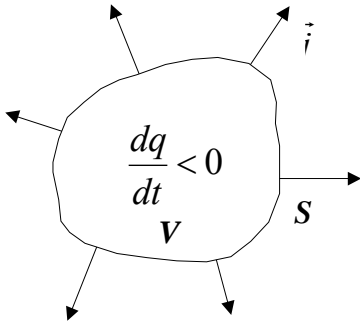


Рис. IV.2

Якщо об'ємна густина заряду в провіднику  $\rho$ , то  $q = \rho dr i$  рівняння неперервності запишемо у такому вигляді

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Тут використано символи частинних похідних, оскільки

$\vec{j}$  і  $\rho$  можуть залежати від координат, так і від часу.

Користуючись поняттям дивергенції, останнє рівняння запишемо в більш компактній формі

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \vec{j}. \quad (46.2)$$

Рівняння неперервності (46.2) виражає закон збереження заряду, згідно з яким у точках, які є джерелом вектора  $\vec{j}$ , має місце зміщення заряду. У випадках постійного струму потенціал у різних точках, густина заряду і інші величини є незмінними. Тому для постійного струму

$$\text{div} \vec{j} = 0.$$

Таким чином, у випадку постійного струму вектор  $\vec{j}$  не має джерела. А це означає, що лінії постійного струму не мають початку і кінця, тобто вони завжди замкнуті.

#### **47. Сторонні сили**

Як уже згадувалося, однією із умов існування електричного струму є наявність у провіднику електричного поля, під дією якого вільні носії заряду набувають упорядкованого руху. Однак необхідно розглянути, як створюється електричне поле в провіднику. Адже з електростатики відомо, що електричне поле всередині зарядженого провідника відсутнє. Таке твердження є дійсно справедливим, але воно виконується тільки при умові рівноважного розподілу зарядів. При русі зарядів рівноважний розподіл зарядів порушується: поверхня провідника уже не є екіпотенціальною, електричні силові лінії напрямлені не перпендикулярно до поверхні, позаяк для руху зарядів необхідно, щоби тангенціальна складова напруженості електричного поля на поверхні провідника не дорівнювала нулю. Крім того, оскільки напруженість електричного поля усередині провідника дорівнює нулю тільки при рівноважному розподілі зарядів на поверхні провідника, то при порушенні рівноваги електричне поле всередині провідника існує.

Воно і є причиною упорядкованого руху вільних зарядів у провіднику.

Для дослідження характеру електричного поля в провіднику яке би зумовлювало в ньому електричний струм, проведемо такий дослід.

Нехай маємо заряджений конденсатор, обкладки якого замкнемо металевим провідником. Між обкладками зарядженого конденсатора існує різниця потенціалів, яка

буде і на кінцях провідника, що замикає обкладки. Градієнт потенціалу в провіднику буде визначати в ньому величину напруженості електричного поля, під дією якого заряди із однієї обкладки будуть протікати на другу. Протікання зарядів буде проходити в напрямі зменшення заряду обкладок. У результаті цього різниця потенціалів між ними безперервно буде зменшуватись. Ця обставина є загальною для будь-якого електростатичного поля: воно завжди переміщає заряди так, щоб різниця потенціалів зменшувалась, а електричне поле в провіднику щезало.

Отже, очевидно, що упродовж часу розрядки конденсатора, різниця потенціалів між обкладками стане рівною нулю, а тому струм у провіднику припиниться.

Цей дослід приводить нас до висновку, що електростатичне поле не може забезпечити існування постійного електричного струму, для чого необхідно підтримувати постійну різницю потенціалів. Такий результат можна одержати, виходячи і з інших міркувань. Відомо, що для існування постійного електричного струму необхідно, щоб електричне коло було замкнутим, а лінії струму – неперервні. Для забезпечення неперервності ліній струму, необхідно, щоби лінії напруженості електричного поля в провіднику були замкнутими, що суперечить характеру електричного поля, адже у ньому

$$\oint_L E_t dl = 0.$$

Отже, очевидно, що для створення в електричному колі постійного струму, на вільні заряди повинні діяти, крім сил електростатичного поля, ще якісь інші сили, неелектричного походження. Їх називають сторонніми.

Щоб зрозуміти значення, природу і функції сторонніх сил, розглянемо такий приклад.

Візьмемо електропровідне кільце (рис. IV.3) з прорізом  $AK$ . Якимось уявним «черпачком» електрони із  $A$

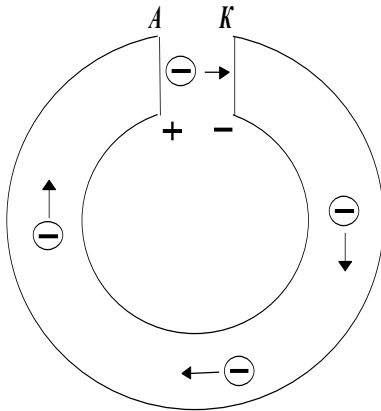


Рис. IV.3

через  $AK$  будемо переносити в  $K$ . Тоді в  $K$  буде створено надлишковий негативний заряд, а в  $A$  – надлишковий позитивний (надлишок позитивних іонів), і електрони під дією сил електричного поля направляться кільцем від  $K$  до  $A$ . Шлях від  $A$  до  $K$  вони здійснять уже не під дією електричних сил, а проти них, під дією механічних сил нашого «черпачка». У

зовнішньому колі  $AK$  роботу виконують сили електричного поля, яка витрачається на виділення тепла. Однак якщо вона поповнюється за рахунок роботи сторонніх сил у прорізі  $AK$ , то електричне поле в кільці з часом не змінюється і в ньому буде протікати електричний струм. Отже, якщо сили електростатичного поля приводять до з'єднання зарядів різних знаків, що спричиняє вирівнювання потенціалів і зникнення електричного поля в провіднику, то сторонні сили зумовлюють розділення різнойменних зарядів і підтримують різницю потенціалів на кінцях провідника.

Джерелом сторонніх сил у колі електричного струму є джерело електричної енергії. Переміщаючи заряди, сторонні сили виконують роботу за рахунок енергії, продукуюваної джерелом електричної енергії.

Джерелом електричної енергії є гальванічні елементи, акумулятори, електричні генератори тощо. Робота сторонніх сил в електричному генераторі виконується за

рахунок механічної енергії, а в гальванічних елементах – енергії, яка виділяється при хімічних процесах розчинення електродів в електроліті.

Розглянемо, як змінюється у вищерозглянутому колі потенціал. Найвищий буде в точці  $A$ , від якої він понижується в обидві сторони. (рис. IV.4). Потенціальна енергія електронів дорівнює  $U = e\varphi$ , тобто має знак протилежний знаку потенціалу (заряд електрона  $e$  негативний). Хід  $U$  зображений на рис. IV.5. На ділянці  $KA$  (у зовнішньому колі) електрони «скочуються з гірки», на ділянці  $AK$  – вибираються на неї під дією сторонніх сил.

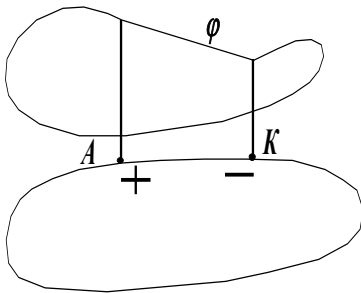


Рис. IV.4

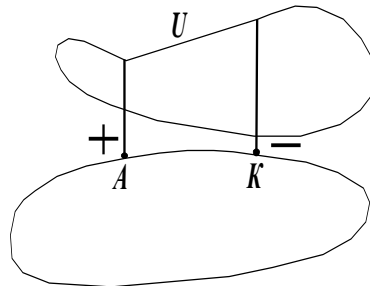


Рис. IV.5

Якщо точки  $K$  і  $A$  близько одна до одної, то зміна потенціалу між ними буде досить крутою. У цьому випадку говорять про існування стрибка потенціалу.

Необхідність введення у коло електричного струму джерела сторонніх сил можна розглянути і на такому прикладі. Відомо, що електростатичне поле за характером подібне до гравітаційного. Тому візьмемо деяке тіло, піднімемо його на певну висоту і відпустимо. Під дією сил гравітаційного поля воно буде рухатись і впаде на Землю. Чи можливий самостійний рух цього тіла в зворотному напрямі і повернення у вихідне положення? Ні! Для перетворення цього у вихідне положення необхідно виконати роботу за рахунок мускульних або інших сил.

Подібна ситуація має місце і в провідниках, де заряди рухаються під дією електростатичного поля. В цьому випадку позитивні заряди із точок з вищим потенціалом будуть переміщатись у точки з нижчим, однак зворотний рух за рахунок цього поля неможливий.

#### 48. Електрорушійна сила

У попередньому параграфі ми з'ясували, що, оскільки циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю, то воно не може забезпечити рух зарядів замкнутим колом. Тому в замкнутому електричному колі разом з ділянками, на яких позитивні заряди рухаються у

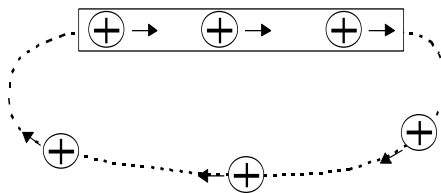


Рис. IV.6

бік зменшення потенціалу провідника, мають бути ділянки на яких рух позитивних зарядів відбувається в напрямі зростання потенціалу, тобто проти сил електричного поля

(рис. IV.6). Це забезпечують сторонні сили.

Отже, на заряди  $q$  в провіднику, в якому протікає електричний струм, діє сила електростатичного поля, яка дорівнює

$$\vec{F}_E = q\vec{E}_E \quad (48.1)$$

і стороння сила

$$\vec{F}_{cm} = q\vec{E}_{cm} \quad (48.2)$$

Векторна величина  $\vec{E}_{cm}$  виражає напруженість поля сторонніх сил.



Результуюча сила, яка діє на заряд  $q$  в кожній точці електричного кола, буде дорівнювати

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_{cm}.$$

Роботу, виконувану цією силою з переміщення заряду  $q$  на ділянці кола 1-2 знайдемо, як

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{F}_E d\vec{l} + \int_1^2 \vec{F}_{cm} d\vec{l},$$

де  $d\vec{l}$  – елементарне переміщення заряду.

Враховуючи (46.1) і (46.2), отримаємо

$$A_{12} = q \int_1^2 \vec{E}_E d\vec{l} + q \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} \quad (48.3)$$

Розглянемо більш детально кожен із цих доданків. Інтеграл  $\int_1^2 \vec{E}_E d\vec{l}$  чисельно дорівнює роботі, виконуваний силами електростатичного поля (кулонівськими силами) при переміщенні одиничного позитивного заряду із точки 1 в точку 2. В електростатиці було показано що

$$\vec{E}_E d\vec{l} = -d\varphi,$$

де  $\varphi$  – потенціал електростатичного поля.

Таким чином,

$$\int_1^2 \vec{E}_E d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – потенціал точок 1 і 2.

Другий аналогічний лінійний інтеграл, який містить вектор  $\vec{E}_{cm}$  напруженості поля сторонніх сил, називається електрорушійною силою

$$\int_1^2 E_{cm} dl = \varepsilon_{12} .$$

Для замкнутого електричного кола, рівняння (48.3) має вигляд

$$A = q \oint \vec{E}_E d\vec{l} + q \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} .$$

Перший доданок цього рівняння дорівнює нулю. Тому робота з переміщення заряду в замкнутому колі

$$A = q \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} \quad (48.4)$$

З цього рівняння одержимо зміст електрорушійної сили

$$A = q\varepsilon ; \quad \varepsilon = \frac{A}{q} \quad (48.5)$$

Отже, електрорушійною силою називається фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі сторонніх сил з переміщення одиничного позитивного заряду вздовж замкнутого електричного кола.

Робота, виражена рівнянням (48.5), виконується за рахунок джерела електричної енергії. Тому величина  $\varepsilon$  називається електрорушійною силою джерела електричної енергії і вимірюється у вольтах.

Фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі, виконуваний сумарним полем кулонівських і сторонніх сил з переміщення в електричному колі одиничного

позитивного заряду із точки 1 в точку 2, називається напругою.

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E}_E d\vec{l} + \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Або

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \quad (48.6)$$

У системі СІ напруга вимірюється у вольтах.

Це поняття напруги не збігається з тим, яким користуються в електростатиці для позначення різниці потенціалів, а є його узагальненням. Напруга на ділянці кола дорівнює різниці потенціалів тільки в тому випадку, коли на цій ділянці увімкнено е .р. с.

#### 49. Закон Ома

Вище ми показали, що у випадку незмінності стану провідника, для кожного з них існує однозначна залежність між напругою  $U$ , прикладеною до кінців провідника, і величиною струму в ньому:

$$I = f(U).$$

У цьому легко переконатися, провівши прості експерименти.

Для багатьох провідників, зокрема для металів, залежність між струмом і напругою на кінцях провідника особливо проста – величина струму прямо пропорційна прикладеній напрузі. Тобто

$$I = kU$$

або

$$I = k[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}] \quad (49.1)$$

Пряма пропорційність величини струму в провіднику спаду напруги в ньому була експериментально встановлена Омом (1787–1854). Тому рівняння (49.1), яке виражає таку залежність, називається законом Ома.

Коефіцієнт пропорційності  $k$  має розмірність. Він залежить від природи речовини провідника, його температури, геометричних розмірів і форми провідника. Отже, коефіцієнт пропорційності має фізичний зміст і визначає стан електричної провідності провідника. Він називається електропровідністю провідника, а величина обернена провідності – електричним опором провідника. Отже,

$$R = \frac{1}{k}.$$

Одиницею опору провідника є  $Ом$ . Це опір такого провідника, в якому при напрузі в  $1В$  протікає струм величиною  $1А$ .

$$1 Ом = 1 \frac{e}{A}.$$

Одиницею вимірювання електропровідності є  $Ом^{-1}$ . Для вимірювання великих опорів введено більші одиниці опору

$$1 кілоОм(кОм) = 10^3 Ом, 1 мегаОм(МОм) = 10^6 Ом.$$

Опір провідника, як відомо, залежить від природи матеріалу провідника і його геометричних розмірів. Для однорідного циліндричного провідника він дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (49.2)$$

Для будь-якого провідника

$$R_{1,2} = \int_1^2 \rho \frac{dl}{S},$$

де  $l$  – довжина провідника,  $S$  – площа поперечного перерізу, а  $\rho$  – питомий опір провідника.

Як видно із (49.2), питомий опір – це опір провідника завдовжки  $1 \text{ м}$  і площею поперечного перерізу  $1 \text{ м}^2$ .

Обернена величина до питомого опору називається питомою електропровідністю. Отже,

$$\frac{1}{\rho} = \sigma \quad (49.3)$$

Питомий опір у системі СІ вимірюється в  $\text{Ом} \cdot \text{м}$ , а питома електропровідність в  $\text{Ом}^{-1} \text{м}^{-1}$ .

Увівши поняття опору, рівняння (49.1) запишемо у такому вигляді

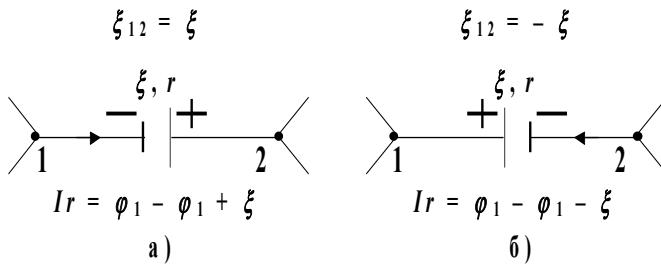
$$IR_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12} \quad (49.4)$$

Це рівняння є математичним записом закону Ома в найбільш загальному вигляді: добуток опору ділянки електричного кола на величину струму в ньому дорівнює сумі спаду електричного потенціалу на цій ділянці і е. р. с. всіх джерел електричної енергії, увімкнених на ділянці.

Узагальнений закон Ома, як видно із його виведення, виражає закон збереження і перетворення енергії стосовно ділянки кола постійного електричного струму.

При виводі рівняння (49.4), ми прийняли, що вектор  $d\vec{l}$  збігається за напрямом з напрямом вектора густини

струму  $\vec{j}$ . А тому при визначенні  $\xi_{12}$  в (49.4) необхідно користуватися таким правилом знаків для е. р. с. джерел, увімкнених у ділянці кола 1–2: якщо напруженість поля сторонніх сил у джерелі збігається з напрямом зі струмом на ділянці кола, тобто, якщо всередині джерела струм іде від катода до анода, то при розрахунку  $\xi_{12}$  е. р. с. потрібно вважати додатною (рис. IV.7а). Якщо струм усередині джерела протікає від анода до катода, то е. р. с. потрібно вважати від'ємною (рис. IV.7б).



**Рис. IV.7**

Із формули (48.4) можна одержати закон Ома для різних ділянок електричного кола. Так, наприклад, для ділянки кола, на якій не увімкнено е. р. с., закон Ома має вигляд

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}} \quad (49.5)$$

Для всього кола, яке можна розглядати як ділянку, кінці якої збігаються, так що  $\varphi_1 = \varphi_2$  і  $R_{12} = R$  – загальний опір кола, закон Ома виражається формулою:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad (49.6)$$

де  $\varepsilon$  – алгебраїчна сума всіх е. р. с., увімкнених у це коло.

Якщо замкнуте коло складається джерела електричної енергії з е. р. с.  $\varepsilon$  і внутрішнім опором  $r$ , а також

зовнішньої частини кола опором  $R_3$ , то величина струму в колі дорівнює

$$I = \frac{\varepsilon}{R_3 + r} \quad (49.7)$$

Формула (49.5) може також виражати закон Ома для всього зовнішнього кола, якщо замінити в ній  $\varphi_1 = \varphi_+$  – потенціал одного полюса джерела електричної енергії, звімкненого в коло, а  $\varphi_2 = \varphi_-$  – потенціал другого, і  $R_3$  – опір зовнішнього кола. Порівнюючи вираз (49.5), записаний для всього зовнішнього кола з виразом (49.7), то отримаємо:

$$\frac{\varphi_+ - \varphi_-}{R_3} = \frac{\varepsilon}{R_3 + r} \quad \text{або} \quad \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\varepsilon} = \frac{R_3}{R_3 + r}.$$

Звідси видно: якщо в колі протікає електричний струм, то різниця потенціалів між полюсами джерела електричної енергії завжди менша від електрорушійної сили. Тільки в граничному випадку, коли опір зовнішньої частини кола безмежно великий ( $R_3 \rightarrow \infty$ ), і струм  $I \rightarrow 0$ , одержимо

$$\varepsilon = \varphi_+ - \varphi_-.$$

А це означає, що електрорушійна сила чисельно дорівнює різниці потенціалів між полюсами розімкненого джерела напруги.

Розглянемо деякі приклади застосування закону Ома до розрахунку характеристик зовнішнього електричного кола.

Нехай у зовнішнє електричне коло послідовно увімкнено  $n$  опорів. Різниця потенціалів у зовнішньому колі дорівнює різниці потенціалів між полюсами джерела напруги  $\varphi_+ - \varphi_-$ .

Цю різницю потенціалів можна подати як суму різниць потенціалів між кінцями кожного із опорів. Тобто

$$\varphi_+ - \varphi_- = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n).$$

Врахувавши рівняння (47.5), останнє рівняння запишемо у такому вигляді

$$IR_3 = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n \quad (49.8)$$

де  $R_3$  – загальний опір зовнішнього кола, а  $R_1, R_2, \dots, R_n$  – опори відповідно 1-ої, 2-ої, ... і  $n$ -ої ділянок кола.

$IR$  називається спадом напруги. Отже, різниця потенціалів між полюсами джерела струму дорівнює сумі спадів напруг на кожній із ділянок зовнішнього кола.

Із рівняння (49.8) отримаємо:

$$R_K = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Тобто, загальний опір послідовно увімкнених опорів, дорівнює їх сумі.

Розглянемо тепер ділянку електричного кола, яке складається з  $n$  паралельних віток. (рис. IV.8). Будемо вважати, що в кожну із ділянок увімкнено джерело електрорушійної сили, величиною  $\varepsilon_i$ . За законом Ома величина струму в  $i$ -ій вітці дорівнює

$$I_i = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_i} + \frac{\varepsilon_i}{R_i}.$$

За законом збереження заряду, загальний струм

$$I = \sum_{i=1}^n I_i.$$

Тобто



$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{E}_i}{R_i} = (\varphi_1 - \varphi_2) \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{E}_i}{R_i}. \quad (49.9)$$

З другої сторони

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_3} + \frac{\mathcal{E}}{R_3} \quad (49.10)$$

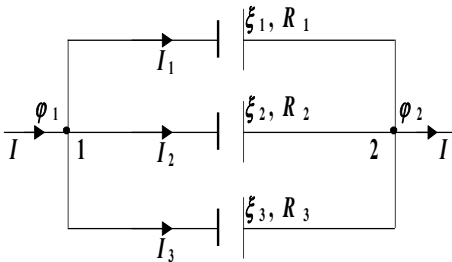


Рис. IV.8

Якщо порівняти відповідні доданки виразів (49.9) і (49.10), то одержимо два важливі висновки. Із порівняння перших доданків, одержимо вираз для обчислення загального опору вітки паралельно ввімкнених

провідників

$$\frac{1}{R_3} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Із порівняння двох других доданків можна одержати рівняння для загальної е. р. с. батареї паралельно ввімкнених джерел струму

$$\frac{\mathcal{E}}{R_3} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{E}_i}{R_i}.$$

Нехай батарея складається з джерел струму з однаковою е. р. с., тобто

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \dots = \mathcal{E}_n.$$

Тоді

$$\mathcal{E} = R_K \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{E}_i}{R_i} = R_K \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \cdot \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i.$$

Отже, електрорушійна сила батареї із паралельно ввімкнених джерел струму з однаковими е. р. с., дорівнює електрорушійній силі одного джерела.

Рівняння (49.5) і (49.6) виражають закон Ома в інтегральній формі. Знайдемо диференціальну форму закону Ома, тобто таку, в якій зв'язок між векторами  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  виражено в одній точці провідника. Розглянемо цей зв'язок в ізотропному провіднику, в якому упорядкований рух носіїв заряду відбувається в напрямі вектора  $\vec{E}$ , тобто напрямі векторів  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  збігаються. У такому провіднику

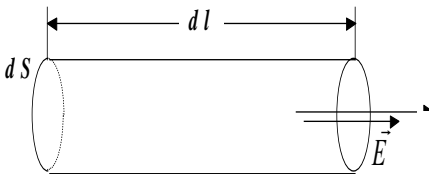


Рис. IV.9

виберемо деякий елементарний циліндричний об'єм із твірними, паралельними векторам  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  (рис. IV.9). Величина струму в циліндрику

буде дорівнювати  $j dS$ . Напруга, прикладена до циліндрика, дорівнює  $E dl$ , де  $E$  – напруженість електричного поля в циліндрику. Опір провідника

$$dR = \rho \frac{dl}{dS}.$$

Підставляючи ці значення у формулу (49.5) отримуємо:

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} \cdot E dl.$$

З цього рівняння одержимо зв'язок між  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  у даній точці провідника

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (49.11)$$

Оскільки вектори  $\vec{j}$  і  $\vec{E}$  однаково напрямлені і  $\frac{1}{\rho} = \sigma$ , то у векторній формі рівняння (49.11) має вигляд

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (49.12)$$

Це рівняння виражає закон Ома в диференціальній формі.

Отже, густина струму в провіднику дорівнює добутку питомої електропровідності провідника на напруженість електричного поля у ньому.

Справедливість закону Ома для багатьох тіл, зокрема для металів, підтверджено експериментально. У металах він реалізується у широких межах напруженостей електричного поля. Проте, строго кажучи, закон Ома є справедливим тільки для фізично однорідних провідників. І тим не менше, він – один із найважливіших, хоч і не фундаментальних, законів електродинаміки.

Маючи закон Ома в диференціальній формі, повернемося ще раз до вияснення характеру електричного поля у провіднику. Рівняння Пуассона для постійного струму в провіднику має вигляд  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

Підставивши у цей вираз  $\vec{j}$  із закону Ома, отримаємо

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0.$$

Оскільки  $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon \varepsilon_0}$ , то  $\operatorname{div} \left( \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{D} \right) = 0$ .

Якщо електропровідність провідника і його діелектрична проникність є величини постійні, то останнє рівняння можна розглядати тільки у вигляді

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0.$$

А це з урахування теорема Остроградського-Гауса, свідчить, що у випадку постійного струму, в однорідному провіднику об'ємна густина заряду дорівнює нулю.

Таким чином, у випадку постійного струму макроскопічні електричні заряди можуть розміщуватися тільки на поверхні провідників або в місцях його неоднорідності. Цим електричне поле постійного струму є подібним за характером до електростатичного поля. Очевидно, ця аналогія зумовлена тим, що в постійному струмі густина заряду в кожній точці провідника з часом не змінюється, хоч і відбувається їх рух: на місце зарядів, які під дією електричного поля вийшли, безперервно приходять інші. А такі заряди створюють таке саме електричне поле, як і нерухомі. Виходячи з цих міркувань, можна вважати, що електричне поле постійного струму є потенціальним.

Однак електричне поле існує тільки на поверхні провідника, причому його лінії напруженості нормальні до його поверхні. А згідно із законом Ома воно має бути і всередині провідника, інакше не існувало би електричного струму. Це і забезпечує поле сторонніх сил. І дійсно, робота поля сторонніх сил з переміщення одиничного позитивного заряду в замкнутому електричному колі дорівнює не нулю, а алгебраїчній сумі електрорушійних сил джерел електричної енергії, увімкнених у це коло. А це вказує на те, що поле сторонніх сил є не потенціальним.

## 50. Робота і потужність електричного струму. Закон Джоуля-Ленца

Розглянемо довільну ділянку кола постійного струму, до кінців якого прикладена напруга  $U$ . Величина заряду, яка за час  $t$  проходить через кожний переріз провідника  $q = It$ . Це рівнозначно тому, що заряд  $q$  за час  $t$  переноситься з одного провідника на другий. При цьому сили електричного поля і сторонні сили, які діють на цій ділянці, виконують роботу

$$A = U_{12}q = IUt \text{ або } A = I(\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12})t \quad (50.1)$$

Поділивши роботу на час, одержимо потужність, яка розвивається струмом на цій ділянці електричного кола:

$$D = IU = I(\varphi_1 - \varphi_2) + I\varepsilon_{12}. \quad (50.2)$$

Якщо струму кола є функцією часу, то формулу (50.1) треба записувати у вигляді.

$$dA = I^2 R dt .$$

Потужність вимірюється у ватах ( $Bm$ )

$$1Bm = 1A \cdot 1B = 1AB .$$

Більшими одиницями вимірювання потужності є

$$1kBm = 10^3 Bm , 1MBm = 10^6 Bm .$$

На ділянці електричного кола, на якій відсутня е. р. с., формули для роботи і потужності мають вигляд

$$A = I(\varphi_1 - \varphi_2)t , P = I(\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (50.3)$$

Для всього замкнутого кола робота дорівнює

$$A = I\varepsilon t , \quad (50.4)$$

а потужність

$$P = I\varepsilon \quad (50.5).$$

Із останньої формули видно, що роботу у всьому колі виконують сторонні сили.

Досліди показують, що протікання електричного струму по провіднику супроводжується виділенням у ньому тепла. Механізм зміни внутрішньої енергії провідника при проходженні по ньому електричного струму, зумовлений взаємодією носіїв заряду, які беруть участь у напрямленому перенесенні заряду із елементами будови провідника. Так, у металевому провіднику, електрони провідності взаємодіють з іонами кристалічної ґратки, за рахунок чого кожен із них у кінці вільного пробігу втрачає швидкість напрямленого руху, набуту під дією електричного поля. При цьому енергія впорядкованого руху електронів перетворюється на внутрішню енергію провідника, що проявляється у його нагріванні. Експериментально встановлено, що у випадку, коли провідник нерухомий і в ньому не відбуваються хімічні перетворення, величина теплоти, яка виділяється при проходженні в ньому постійного електричного струму, може бути обчислена за формулою

$$Q = IUt \text{ або } Q = I^2 Rt. \quad (50.6)$$

Формула (50.6) експериментально була встановлена незалежно Джоулем і Ленцом і називається законом Джоуля-Ленца.

Якщо струм у провіднику з часом змінюється, то

$$Q = \int_0^t I^2 R dt \quad (50.7)$$

Отже, кількість теплоти, яка виділяється струмом у провіднику, прямо пропорційна величині струму, часу його проходження і напрузі.

Формула (50.6) визначає теплоту, яка виділяється у всьому провіднику. Однак від неї можна перейти до виразу, що характеризує виділення тепла в різних місцях провідника. Для цього виділимо у провіднику елементарний об'єм у вигляді циліндрика (рис. IV.69), площею поперечного перерізу  $dS$  і довжиною  $dl$ . Будемо вважати, що провідник однорідний, його питомий опір  $\rho$ , а густина струму, що протікає у ньому,  $j$ . Тоді за час  $dt$ , згідно із законом Джоуля-Ленца, в циліндрику виділиться тепло

$$dQ = RI^2 dt = \frac{\rho dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt. \quad (50.8),$$

де  $dV = dSdl$  – величина елементарного об'єму.

Розділивши (50.8) на  $dV$  і  $dt$ , знайдемо кількість теплоти, яка виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу:

$$w = \rho j^2. \quad (50.9).$$

Якщо врахувати, що  $j = \sigma E$ , а  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , то

$$w = \sigma E^2 \quad (50.10).$$

Отже, величина теплоти, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу при проходженні в ньому електричного струму, дорівнює добутку питомої електропровідності провідника на квадрат напруженості електричного поля у ньому.

Рівняння (50.10) виражає закон Джоуля-Ленца у диференціальній формі.

Повернемося до рівняння (50.6), яке виражає інтегральну форму закону Джоуля-Ленца для ділянки

електричного кола опором  $R$ . Якщо у нього підставити (50.4), то отримаємо:

$$Q = It[(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}].$$

Звідси вираз для кількості теплоти, яка виділяється у всьому замкнутому електричному колі, буде мати вигляд:

$$Q = I\varepsilon t \quad (50.11)$$

А це свідчить, що нагрівання провідника відбувається тільки за рахунок сторонніх сил. Роль електростатичного поля зводиться до перерозподілу цього тепла між різними ділянками кола з різними опорами.

## **51. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа**

Електричні величини, такі, наприклад, як струм або напругу, за законом Ома легко розрахувати в окремих вітках або простих електричних колах. Однак у розгалужених колах і складних електричних схемах у більшості випадків зробити це досить важко. Розрахунок розгалужених кіл значно спрощується, якщо для цього застосувати правила, сформульовані Кірхгофом. Їх два.

Перше базується на законі збереження заряду і суті постійного струму, згідно з яким ані у жодній із точок, ані на жодній із ділянок провідника, в якому установився постійний електричний струм, не повинні нагромаджуватися електричні заряди. Воно стосується точок електричного кола, в яких відбувається розгалуження струмів. Це точки, в яких сходяться більше двох провідників. Вони називаються вузлами (рис. IV.10).



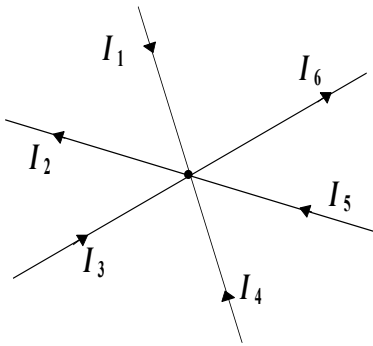


Рис. IV.10

Перше правило Кірхгофа формулюється так: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (51.1)$$

де  $n$  – число провідників, які сходяться у вузлі, а  $I_k$  – струми в них.

Для використання першого правила Кірхгофа, зокрема для обчислення алгебраїчної суми струмів, необхідно домовитися про знак струму. Так, за позитивні приймають ті струми, які у вузол входять, а ті які з нього виходять – негативні.

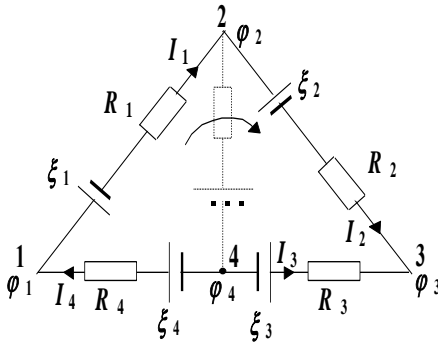


Рис. IV.11

Для використання першого правила Кірхгофа буде мати вигляд

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

ВИГЛЯД

Друге правило Кірхгофа є узагальненням закону Ома на розгалуженні електричні кола. Воно формулюється так: у будь-якому замкненому контурі, довільно вибраному в розгалуженому колі, алгебраїчна сума добутків величин

струмів  $I_i$  на опори  $R_i$  відповідних ділянок цього контура дорівнює алгебраїчній сумі  $e$ . р. с  $\varepsilon_k$  в контурі

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k . \quad (51.2).$$

Для доведення цього правила розглянемо схему, показану на рис. IV.11. Задамося напрямом обходу по колу (наприклад, за годинниковою стрілкою, як показано на рисунку). Виберемо контур 1–2–3–4–1 і до кожної із нерозгалужених ділянок застосуємо закон Ома.

Одержимо систему рівнянь

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1 ,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2 ,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3 ,$$

$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4 .$$

Якщо ці рівняння додати, то одержимо:

$$\sum_{\mu} I_{\mu} R_{\mu} = \sum_k \varepsilon_k ,$$

тобто вираз другого правила Кірхгофа.

Рівняння (51.2) можна скласти для всіх замкнутих контурів, які можна виділити у даному розгалуженому колі. Проте незалежними будуть тільки рівняння для тих контурів, які не можна одержати накладанням інших контурів один на одного. Так, наприклад, для кола, наведеного на рис. IV.72, можна скласти три рівняння:

для контура 1–2–3–4–1,

для контура 3–4–5–6–3,

для контура 1–2–3–4–5–6–1.

Останній контур утворюється накладанням перших двох. Тому рівняння не будуть незалежними. Як незалежні можна взяти два будь-які рівняння із даних трьох.

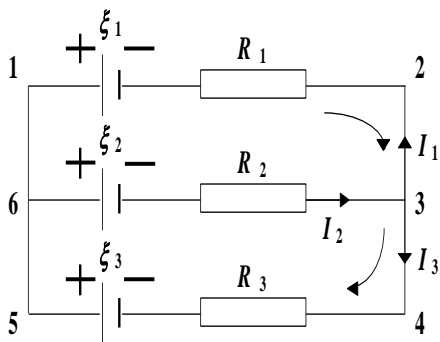


Рис. IV.12

При застосуванні другого правила Кірхгофа струмам і електрорушійним силам необхідно приписувати знак із відповідним вибраним напрямом обходу. Їх вибирають так: якщо в заданому контурі або в окремих вітках контура напрям

обходу по контуру збігається з напрямом струму, то добуток  $IR$ , тобто спад напруги на даній ділянці, приймається за позитивний, а якщо напрям обходу протилежний напрямку струму – занегативний.

Так, на рис. IV.12 струм  $I_1$  необхідно вважати негативним, оскільки його напрям протилежний напрямку обходу. е. р. с.  $\varepsilon_1$  також необхідно прийняти із знаком мінус, оскільки вона напрямлена протилежно обходу.

Напрямок обходу по контуру, як правило, вибирається цілком довільно і незалежно від вибору напрямку обходу в інших контурах. При цьому може виявитися, що один і той самий струм або одна і та сама е. р. с. увійдуть у різні рівняння із різними знаками. Проте це не має якогось значення, оскільки зміна обходу по контуру приведе тільки до зміни знаків у рівнянні другого правила Кірхгофа на протилежні.

При застосуванні правил Кірхгофа для розрахунку електричних величин у складному колі постійного струму, рекомендується такий порядок:

а) довільно вибрати і позначити на рисунку стрілками напрями струмів у всіх вітках кола;

б) вияснити кількість вузлів у колі і для кожного  $n$ -і вузлів записати рівняння першого правила Кірхгофа.

с) виділити довільні замкнуті контури і, вибравши напрям обходу, записати для них систему рівнянь другого правила Кірхгофа. Число незалежних рівнянь має дорівнювати числу різних струмів, які протікають у розгалуженому колі. Тому якщо відомо  $e$ , р. с. і опори для всіх нерозгалужених ділянок, то можуть бути визначені усі струми.

Правила Кірхгофа дають можливість розв'язувати і обернені задачі, наприклад, знаходити  $e$ , р. с. джерел струму, які необхідно вмикати в кожен із ділянок кола із відповідним опором, щоб одержати в них потрібні струми.

**Розглянемо декілька прикладів застосування правил Кірхгофа. 1.**

**МІСТОК УІТСТОНА.** Місток Уітстона складається із

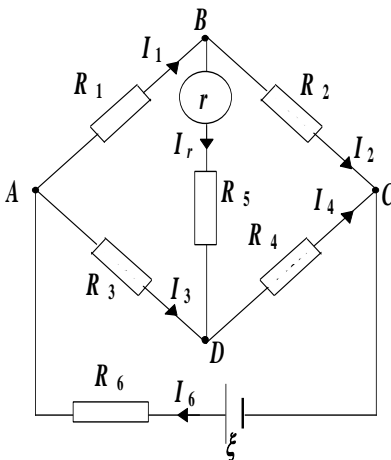


Рис. IV.13

системи опорів увімкнених так, як показано на рис. IV.73.  $R_1, R_2, R_3$  і  $R_4$  утворюють плечі містка. В одну діагональ АС ввімкнена батарея  $e$ , р. с.  $\varepsilon$  і опором  $R_6$ . В другу діагональ ВD ввімкнено гальванометр з опором  $R_5$ .

Для вузлів А, В, С згідно з першим законом Кірхгофа

$$I_6 - I_1 - I_3 = 0,$$

$$I_1 - I_2 - I_c = 0, \quad (51.3)$$

$$I_2 + I_4 - I_6 = 0.$$

Легко бачити, що рівняння для вузла D нічого нового не дає.

Рівняння другого правила Кірхгофа для незалежних контурів ABCEA, ABDA і BCDB мають вигляд

$$\begin{aligned} I_6 R_6 + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \varepsilon, \\ I_1 R_1 + I_c R_c - I_3 R_3 &= 0, \\ I_2 R_2 - I_4 R_4 - I_c R_c &= 0. \end{aligned} \quad (51.4)$$

Із цих шести рівнянь можна знайти шість невідомих. Якщо відомі всі опори і е. р. с., то такими невідомими будуть струми, які протікають в окремих вітках схеми. Якщо невідомий який-небудь із опорів, наприклад,  $R_1$ , то, вимірюючи струм, який проходить через гальванометр, із рівнянь (51.3) і (51.4) можна визначити останніх п'ять струмів і опір  $R_1$ . Така схема називається не скомпенсованим містком Уїтстона, що досягається зміною опорів містка. І дійсно, якщо змінювати опори  $R_2$ ,  $R_3$  і  $R_4$ , то можна домогтися такого положення, коли струм через гальванометр буде дорівнювати нулю. Тоді із рівнянь (51.3) знаходимо, що

$$I_1 = I_2 \text{ і } I_3 = I_4.$$

Враховуючи це у рівнянні (45.4), одержимо

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \text{ і } I_2 R_2 = I_4 R_4.$$

Із цих рівнянь за відомими опорами  $R_2$ ,  $R_3$  і  $R_4$  можна визначити невідомий опір  $R_1$

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Звідки

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (51.5)$$

Отже, використовуючи місток Уїтстона, можна вимірювати опори провідників.

Із формули (51.5) видно, що для вимірювання опору  $R_1$  необхідно визначити величину опору  $R_2$  і відношення  $R_3/R_4$ . Величина е. р. с. батареї, її опір і опір гальванометра істотної ролі не відіграють. Гальванометр у схемі виконує роль індикатора скомпенсованості містка. Тому часто на практиці використовують так звані реохордні містки Уїтстона, схема якого показана на рис. IV.14.

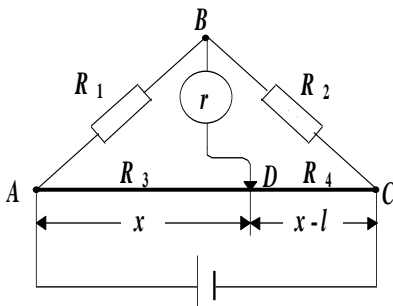


Рис. IV.14

Опорами  $R_3$  і  $R_4$  в цьому містку є один калібрований дріт (реохорд). Контакт гальванометра з реохордом (точка D) є рухомих, і в момент скомпенсованості містка (гальванометр повинен показувати нуль), вимірюється положення

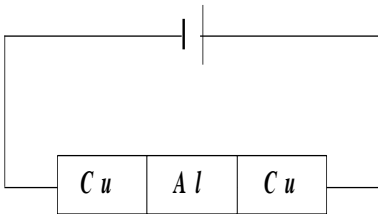
рухомого контакту на шкалі, розташованої паралельно до реохорда. У цьому випадку відношення опорів  $R_3/R_4$  дорівнює відношенню обох ділянок реохорда. Тобто

$$R_1 = R_2 \frac{x}{l-x}. \quad (51.6)$$

На основі схем містка Уїтстона побудовано чимало приладів, які дають можливість вимірювати опори провідників.

## **52. Вільні електрони в металах**

У попередній главі ми з'ясували, що однією із умов існування електричного струму у заданому середовищі є наявність у ньому вільних носіїв заряду. Простішою була проблема з'ясування природи носіїв заряду в електролітах, в яких проходження електричного струму пов'язане із одночасним перенесенням до електродів речовини. Для металів ця проблема виявилася досить складною. Тому для її розв'язання і з'ясування природи носіїв заряду в металах було проведено цілу низку експериментів. Ми зупинимось на двох із них, які значно розв'язують проблему носіїв заряду в металах.



**Рис. IV.15**

Перший дослід був проведений Рікке у 1901 р. на предмет виявлення перенесення носіями заряду в металах речовини. (рис. IV.15). Передбачалось, що якщо в металах при протіканні по них

постійного електричного струму відбувається перенесення речовини металу, то носіями заряду в них є частинки, зв'язані з атомами, тобто іони металу, подібно як це має місце в електролітах. На це питання мав відповісти дослід Рікке. У ньому циліндри з різних металів (Cu, Al, Cu) з досконало відшліфованими основами були притиснуті один до одного і через них майже рік проходив постійний струм.

Після закінчення досліду циліндри були розібрані і проаналізовані на взаємне проникнення металів. На контактах, незважаючи на те, що через них проходило майже  $3,5 \cdot 10^6$  Кл. електрики, було виявлено тільки сліди взаємного проникнення металів, яке не перевищувало наслідки звичайної дифузії атомів у твердих тілах. Так з'ясувалося, що перенесення електричного заряду в металах не зв'язане з перенесенням речовини металу, а отже, вільні носії електричного заряду в металах не є іонами. Такими частинками могли бути відкриті в 1897 р. Томсоном електрони. Це припущення також вимагало експериментальної перевірки. Експеримент міг би, наприклад, ґрунтуватися на збудженні в провіднику електричного струму силами інерції. Адже всякий нерівномірний рух провідника мав би зумовлювати рух вільних електронів відносно кристалічної ґратки, тобто генерувати електричний струм. При прискореному обертанні електрони мали б відставати, а при гальмуванні – випереджувати іони кристалічної ґратки провідника. Отже, якщо в металі є вільні носії заряду, то має спостерігатись електричний струм.

Проведемо деякі розрахунки. Візьмемо провідник (рис. IV.16) завдовжки  $l$ , який рухається зі швидкістю  $\vec{v}_0$ .

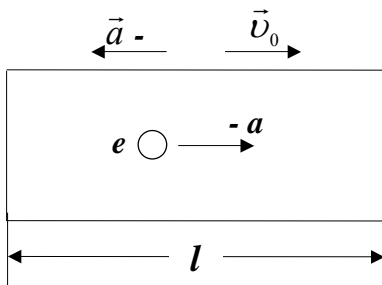


Рис. IV.16

Загальмуємо його прискоренням  $\vec{a}$ . Продовжуючи рухатись за інерцією, носії заряду набудуть відносно провідника прискорення  $-\vec{a}$ . Таке прискорення можна надати носіям заряду в провіднику, створивши в



ньому електричне поле напруженістю  $E = -\frac{ma}{e}$ , тобто прикласти до кінців провідника різницю потенціалів

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl = -\int_1^2 \frac{ma}{e} dl = \frac{mal}{e},$$

де  $m$  і  $e$  – маса і заряд носія.

За рахунок цієї різниці потенціалів провідником пройде струм

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

де  $R$  – опір провідника.

За час  $dt$  через поперечний переріз провідника пройде заряд величиною

$$dq = I dt = -\frac{mal}{eR} dt = -\frac{ml}{eR} dv.$$

За позитивний прийемо той заряд, який рухається у напрямі руху провідника.

Заряд, який пройде через поперечний переріз провідника за весь час гальмування, буде дорівнювати

$$q = \int_0^t dq = -\int_{v_0}^0 \frac{ml}{eR} dv = \frac{mlv_0}{eR}. \quad (52.1)$$

Одержаний вираз, за даними  $l$ ,  $v_0$ ,  $R$ , а також  $q$  дає можливість визначити питомий заряд носіїв струму у металі. Знак носіїв заряду можна визначити за напрямом імпульсу.

Ідея подібних дослідів була запропонована в 1913 р. Л.І. Мендельштамом і Н.Д. Папалексі. Вперше вони і провели цей дослід, показавши, що при крутильних

коливаннях дрютяної котушки навколо її геометричної осі, (рис. IV.17) в телефонній трубці, ввімкненій до кінців котушки, виникав тріск, який міг бути зумовлений тільки імпульсами струму в провіднику.

Цей дослід підтвердив існування інерційного руху носіїв заряду в провіднику. Проте із нього не було визначено знак носіїв заряду, а наближення Першої світової війни взагалі завадило вченим закінчити дослідження. (Дослід проводився у Стразбурзі).

Подальші дослідження природи носіїв заряду в металевому провіднику знову були запропоновані Г.А. Лоренцом і проведенні в 1916 р. англійськими фізиками Р. Толменом і Г. Стюартом.

У їхньому досліді котушка з великим числом витків тонкого дроту приводилася в обертання навколо своєї осі. Кінці котушки були приєднані до чутливого балістичного гальванометра. Після закручування котушка різко гальмувалась. Загальна довжина її обмотки складала 500 м, а лінійна швидкість руху досягала  $300 \frac{м}{с}$ .

Дослід показав, що при гальмуванні котушки в ній дійсно виникав короткочасний струм, а його напрям відповідав руху негативно заряджених частинок. Величина заряду, яка проходила провідником за час гальмування котушки визначалась балістичним гальванометром. Знаючи всі інші дані, за формулою (44.1) можна було визначити

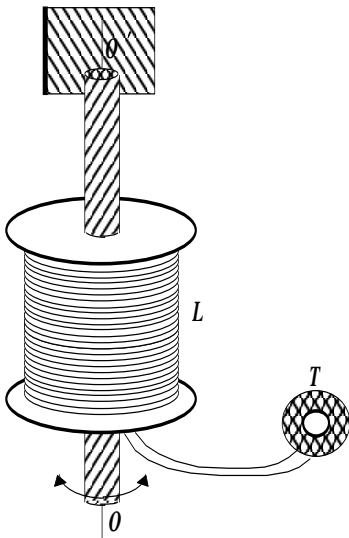


Рис. IV.17

питомий заряд носіїв заряду в металевому провіднику.

Розрахунки показали, що для міді

$$\frac{e}{m} = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг},$$

а для срібла

$$\frac{e}{m} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

(Сучасні дані  $\frac{e}{m} = 1,758 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ ).

Знайдені значення питомого заряду носіїв струму у зазначених металах із досліду Толмена і Стюарта, були близькими до значень питомого заряду електрона, знайденого іншими методами, наприклад, за відхиленням електронів в електричному і магнітному полях. Крім того, знаючи величину елементарного заряду, можна було знайти і масу вільного носія заряду в металах. Вона виявилась порядку  $10^{-30} \text{ кг}$ , тобто в 2000 разів меншою від найлегшого атома – атома водню ( $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ ). А це показало, що носіями заряду в металі у жодному випадку не можуть бути заряджені атоми, тобто іони.

Так було доведено, що носіями електричного заряду в металах є електрони.

Струм у металах можна створити дуже малою різницею потенціалів, що є підставою вважати, що носії заряду – електрони, рухаються металом практично вільно.

Наявність у металах вільних електронів зумовлена тим, що при утворенні кристалічної ґратки від його атомів відриваються найбільш слабо зв'язані валентні електрони, які стають «колективною» власністю всього об'єму металу. Якщо від кожного атома відриваються по одному

електрону, то концентрація вільних електронів буде дорівнювати кількості атомів в одиниці об'єму.

Число атомів в одиниці об'єму дорівнює

$$n = \frac{\rho N_A}{M},$$

де  $M$  – маса кіломоля,  $N_A$  – число Авогадро,  $\rho$  – густина металу.

Для металів відношення  $\frac{\rho}{M}$  змінюється від  $20 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$  (для калію) до  $20 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$  (для берилію). А тому концентрація вільних електронів у різних металах змінюється в межах

$$n = (10^{28} \div 10^{29}) \text{ м}^3 .$$

Відрив валентних електронів від своїх атомів, що утворюють кристалічну ґратку металу, відбувається без будь-якої зовнішньої дії на них. Що стосується інших електронів, розміщених на більш близьких до ядра атома орбітах, то вони залишаються зв'язаними з ядром. Переважно число електронів, втрачених атомами металу, дорівнює валентності металу.

Сукупність усіх електронів, які у певний час містяться у металі у вільному стані, утримується нетривало. За цей час вони, беручи участь в інтенсивному тепловому хаотичному русі, велике число разів стикаються взаємно, а також із атомами кристалічної ґратки. При зустрічі вільного електрона з позитивним іоном може відбутися їх злиття. Не виключена також можливість приєднання вільного електрона і до нейтрального атома. Тобто в об'ємі металу протікають процеси, характерні для тих, що відбуваються як при утворенні нових вільних

електронів, так і при їх рекомбінуванні, тобто зворотному приєднанні до іонів. Існування цих протилежних процесів приводить до того, що в будь-якому металі концентрація вільних електронів завжди строго постійна і не залежить від зовнішніх факторів, зокрема, майже не залежить від температури. Тобто постійність концентрації зумовлена динамічною рівновагою між утворенням вільних електронів і їх рекомбінацією.

### **53. Рух електронів у металі**

Вільні електрони в металі, беручи участь у тепловому русі, рухаються у різних напрямках з досить значною швидкістю. Але позаяк вільних електронів дуже багато, тепловий рух процес статичний, в якому число електронів, які переміщуються в одному напрямі, у середньому дорівнює числу електронів, які переміщуються у протилежному, то сумарний заряд, який переноситься електронами через будь-який переріз провідника при відсутності зовнішнього електричного поля, дорівнює нулю.

У процесі неупорядкованого і хаотичного руху вільні електрони зазнають численних зіткнень з іонами кристалічної ґратки і між собою. При кожному зіткненні змінюється або швидкість, або напрям руху електрона, а частіше і одне, й інше. У результаті такої взаємодії електрони обмінюються енергією з кристалічною ґраткою.

Теплову швидкість електронів у металі можна знайти, якщо уподібнити їх до атомів одноатомного ідеального газу. Тоді до електронів у металі можна застосувати основні закони ідеального газу. Відомо, що середня кінетична енергія ідеального газу при деякій абсолютній температурі  $T$  дорівнює:

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} k T .$$

Звідси

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot \sqrt{T} .$$

Підставивши числові значення, отримаємо:

$$v = 6,7 \cdot 10^3 \sqrt{T} \text{ м/с} .$$

При  $0^\circ\text{C}$  , тобто при  $273^\circ\text{K}$  , середня швидкість теплового руху електрона  $v = 1,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}$  .

При створенні в провіднику електричного поля стан руху електронів істотно змінюється. Під його впливом кожний вільний електрон набуває додаткову швидкість, напрямлену від нижчого потенціалу до вищого, і електрони починають переміщатися проти електричного поля – у провіднику виникає електричний струм. Електрони, рухаючись під впливом прикладеного електричного поля, у міру просування у провіднику мали би збільшувати швидкість. Однак на практиці нічого подібного не спостерігається, і електрони при заданому електричному полі переміщуються уздовж провідника з деякою сталою середньою швидкістю. Її збільшення або зменшення залежить тільки від збільшення або зменшення напруженості електричного поля. Причина такого стану руху електронів у металі зумовлена тим, що їх напрямлений рух все-таки не є вільним. Як уже зазначалось, електрони зазнають численних зіткнень з атомами кристалічної ґратки і між собою. Тому вони рухаються прискорено тільки на довжині вільного пробігу, тобто на відстані між двома зіткненнями. У момент зіткнення, кінетична енергія електрона істотно

зменшується, а потім електрон знову починає рухатися прискорено і т. д.

Отже, рух вільних електронів, який виникає під дією електричного поля у металевому провіднику, проходить в умовах своєрідного «тертя», зумовленого великим числом зіткнень. Це тертя визначає існування у кожному провіднику електричного опору, або як його ще називають активного опору. Тому при цьому значенні напруженості електричного поля при певній температурі швидкість руху електронів набуває постійного значення. Напрямок руху електронів у провіднику називається дрейфом, а його швидкість – дрейфовою. Отже, при постійній напруженості електричного поля дрейфова швидкість у зв'язку з існуванням опору дрейфу досягає сталого значення.

Однак за величиною дрейфова швидкість у твердих і рідких провідниках при звичайних напругах є дуже малою у порівнянні зі швидкістю теплового руху і розміщується у межах  $10^{-3} - 10^{-5} \text{ м/с}$ .

Між тим відомо, що при ввімкненні рубильника якої-небудь електричної лінії, струм практично миттєво з'являється на її найдовшому кінці. Цей факт, здавалось би, суперечить у край малій швидкості напрямленого руху електронів як носіїв струму в металі. Однак суперечності тут нема. Адже дрейфова швидкість не має стосунку до швидкості поширення електричного струму вздовж провідника.

Розглянемо спочатку розімкнене коло, до якого входить джерело струму, наприклад, гальванічний елемент. Полюси його мають надлишковий заряд – позитивний і негативний (рис. IV.18). Якщо приєднати до них провідники, залишивши між ними розрив АВ, то в точках А і В виникають заряди відповідних знаків, які розміщуються на поверхні провідників. При замиканні розриву АВ, відбувається перехід електронів з В у А. Цей

рух викликає змінне електричне і магнітне поля, тобто електромагнітну хвилю, яка поширюється уздовж всього кола. Електрони в провіднику, до яких доходить електрична хвиля, починають прискорено рухатись, також випромінюючи електромагнітну хвилю, яка накладається із електричною. Результуюча електромагнітна хвиля поширюється уздовж провідника зі швидкістю, що дорівнює швидкості світла в середовищі, яке оточує провідники. Швидкість цієї хвилі і є швидкістю поширення струму в металевому провіднику.

Отже, коли на електростанції вмикають рубильник, то струм у цьому місці появляється у момент приходу електромагнітної хвилі.

Електрони від електростанції, якби їх можна було помітити, дійшли би до цього місця через дуже багато років після ввімкнення рубильника, а у випадку змінного струму не дійшли би взагалі.

Говорячи про вільні електрони в металах, необхідно зробити одне зауваження. Безперечно, що електричний струм у металах створюється вільними електронами. Проте до цих тверджень необхідно внести деякі уточнення. Передовсім не всі вільні електрони у всіх металах беруть участь у створенні електричного струму. В одному металі ця частина більша, в іншому – менша, а у ще іншому – всі вільні електрони. Ця обставина спонукала фізиків називати

ту частину вільних електронів, які утворюють електричний струм, електронами провідності.

Якщо в провіднику створити однорідне електричне поле напруженістю  $E$ , то вільні електрони набувають додаткової швидкості  $v$  проти

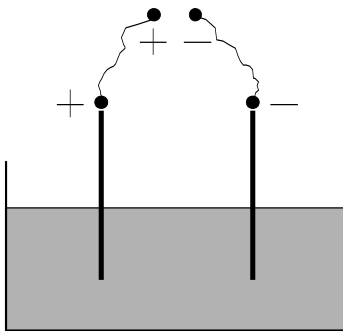


Рис. IV.18



електричного поля. Результуюча швидкість електронів буде складатися із швидкості їх хаотичного і напрямленого руху. Тобто

$$\vec{v}_p = \vec{v}_T + \vec{v}.$$

Проте швидкість теплового руху  $\vec{v}_T$  напрямлена то по полю, то проти поля, і тому її середнє значення дорівнює нулю. А тому результуюча швидкість дорівнює середньому значенню дрейфової швидкості електронів. Тобто

$$\vec{v}_p = \vec{v}.$$

Розглянемо відрізок провідника з поперечним перерізом  $S$ . Спрямуємо вектор напруженості електричного поля  $\vec{E}$  вздовж провідника. Кожен із вільних електронів у середині провідника набуде дрейфову швидкість  $v$ . За час  $dt$  через поперечний переріз провідника  $S$  прийдуть всі ті електрони, які розміщуються на відстані від  $S$ , не більшій  $v dt$ , тобто ті електрони, розміщені в об'ємі циліндра  $Sv dt$ . Якщо концентрація електронів  $n$ , то заряд, який переноситься ними через поперечний переріз провідника за час  $dt$ , буде дорівнювати

$$dq = enSvdt.$$

Звідси густина струму, яка протікає провідником

$$j = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{S} = env \quad (53.1)$$

Враховуючи векторний характер швидкості, формулу (53.1) зафіксуємо у векторній формі

$$\vec{j} = en\vec{v}. \quad (53.2).$$

Остання формула виражає густину струму в провіднику, записану через концентрацію електронів, і швидкість їх напрямленого руху.

Формула (53.1) дає можливість оцінити величину дрейфової швидкості електронів у металі. Візьмемо, наприклад, сильний електричний струм, густина якого

$$j = 10 \frac{A}{\text{мм}^2} = 10^7 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Тоді для мідного провідника, концентрація електронів в якому  $n = 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$

$$v = \frac{j}{en} = \frac{10^7 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}} \approx 8 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0,8 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

Отже, навіть при досить значних струмах, дрейфова швидкість електронів у металі набагато менша від швидкості їх теплового хаотичного руху.

Дрейфова швидкість пропорційна напруженості електричного поля в провіднику  $v \approx E$ , або  $\vec{v} = U\vec{E}$ . Із цього рівняння  $U = \frac{\vec{v}}{E}$ , де  $U$  – вимірюється в  $\text{В}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$  і називається рухливістю електронів. Отже, рухливість електронів чисельно дорівнює середній дрейфовій швидкості під дією зовнішнього електричного поля одиничної напруженості. Величина рухливості електронів залежить від будови кристала, його дефектності, температури, тиску, тощо.

Це одна із важливих величин, яка введена для характеристики руху носіїв заряду в провідниках під дією електричного поля.

**Список використаних джерел**

1. Кучерук І.М. Загальний курс фізики. В 3-х т. / І.М. Кучерук, І.Т. Горбачук. Київ : Техніка, 2005.
2. Антоняк О.Т. Загальна фізика. Основи електрики і магнетизму. Львів, 2009. 240 с.
3. Бушок Г.Ф. Курс фізики. Кн. 1. Оптика. Фізика атома і атомного ядра / Г.Ф. Бушок, Є.Ф. Венгер. Київ : Вища школа, 2003. 278 с.
4. Яворський Б.М. Курс фізики. В 3-х т. / Б.М. Яворський, А.А. Детлаф, Л.В. Милковська. Київ : Вища школа, 1978.
5. Богацька І.Г. Загальні основи фізики. Кн. 2. Електродинаміка і атомна фізика / І.Г. Богацька, Д.Б. Головка. Київ : Либідь, 1998. 245 с.
6. Курс фізики : навчальний підручник / за ред. І.Е. Лопатинського. Львів : Бескид-Біт, 2002. 376 с.
7. Нечволод М.К. Курс фізики. Запитання і задачі : навчальний посібник / М.К. Нечволод, М.М. Голоденко, А.Ф. Прун. Київ : Просвіта, 2001. 232 с.
8. Богацька І.Г. Загальні основи фізики. Кн. 2. Електродинаміка і атомна фізика / І.Г. Богацька, Д.Б. Головка. Київ : Либідь, 1998. 245 с.

Електронне навчальне видання

*Віктор Британ*

# ЕЛЕКТРИКА ТА МАГНЕТИЗМ

**Частина 1**

Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка

**Редактор**

*Ірина Невмержицька*

**Технічний редактор**

*Лужецька Ольга*

**Коректор**

*Артимко Ірина*

Здано до набору 22.06.2023 р. Формат 60x90/16. Гарнітура Times.  
Ум. друк. арк. 15,75. Зам. 59.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.