

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

кафедра фізики

**Роман Лешко,
Ігор Білинський**

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ФІЗИКИ

Частина 1

Навчально-методичний посібник

**Дрогобич
2022**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка як навчальний посібник (протокол № 6 від 19 травня 2022 р.)

Рецензенти:

Павловський Юрій Вікторович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри технологічної та професійної освіти Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка;

Гольський Віталій Богданович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск:

Британ Віктор Богданович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Лешко Роман, Білінський Ігор.

Л 53 Математичні методи фізики. Частина 1 : навч.-метод. посіб. Дрогобич : Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, 2022. 42 с.

Навчально-методичний посібник “**Математичні методи фізики**” написаний відповідно до робочої програми навчальної дисципліни “**Математичні методи фізики**” для підготовки фахівців другого рівня вищої освіти спеціальностей 014 Середня освіта (Фізика) та 104 Фізика та астрономія, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

У посібнику (частині 1) зібрано основні типові рівняння математичної фізики і подано їх класифікацію. Для посібника характерне детальне викладення окремих практичних та фундаментальних фізичних задач, що зводяться до рівнянь математичної фізики. Також після кожного розділу подано приклади розв’язання задач та вправи для самостійного розв’язування.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	4
Розділ 1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних і приведення їх до канонічної форми	5
1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними.....	5
1.2. Канонічний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.....	6
1.3. Канонічні форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами	12
1.4. Задачі та приклади їх розв'язання	14
Розділ 2. Основні рівняння математичної фізики. Постановка крайових задач. Типи крайових умов	19
2.1. Рівняння коливань струни та мембрани. Хвильове рівняння.....	19
2.2. Рівняння теплопровідності.....	23
2.3. Крайові умови першого, другого і третього типів.....	26
2.4. Рівняння Максвелла та рівняння Шредінгера	28
2.5. Початкові та крайові умови	31
2.6. Класифікація крайових задач.....	33
2.7. Задачі та приклади їх розв'язання	34
Список використаних джерел.....	40
Предметний покажчик	41

ПЕРЕДМОВА

Усе, що оточує нас, існує згідно з усталеними фізичними законами і принципами. Розвиток науки, техніки дає змогу нам відкривати закономірності, за якими існує Всесвіт. Тут ключовим виступає поняття «фізика». Більшість фізичних законів та явищ характеризуються особливою гармонією, симетрією, яку не завжди вдається помітити. Одним із таких потужних інструментів, що може привідкрити усю приховану красу природи є математика. Звідси висновок – без серйозних математичних розрахунків неможливо спрогнозувати розвиток складних фізичних процесів, заглянути у таємниці Всесвіту. Так ми підійшли до другого ключового поняття – «математика».

Нас цікавить поєднання фізики і математики. Рівняння, початкові відомості про яких є у цьому посібнику, виникли з практичних потреб людства. Фізики виступали тими, хто дав математикам поштовх до дослідження прикладних проблем, опис яких ви знайдете на сторінках цього посібника у вигляді диференціальних та інтегральних рівнянь і їх розв'язків.

Нові етапи технічного та соціального-економічного прогресу відкривають нові можливості і ставлять нові проблеми. Для часткового (в ідеалі повного) їхнього розв'язання необхідні саме математичні методи фізики.

Цей посібник має за мету донести поняття і розуміння основних математичних методів фізики, дати базовий математичний апарат, який часто використовується у багатьох розділах теоретичної фізики та інших спеціальних розділах фізики.

Розділ 1

Класифікація лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних і приведення їх до канонічної форми

1.1. Диференціальні рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними

Диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП) II порядку лежать в основі класичної теорії рівнянь математичної фізики. Це зумовлено тим, що значне число фізичних явищ та процесів можна описати такими рівняннями. Тому у цьому посібнику значна увага приділена саме їм.

Спочатку розглянемо рівняння, де невідома функція залежить лише від двох незалежних змінних, дамо необхідні визначення.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними II порядку з двома незалежними змінними x, y є співвідношення між невідомою функцією $u(x, y)$ та її частинними похідними включно до II-го порядку. Тобто,

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Тут використано такі позначення частинних похідних:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Рівняння називається *лінійним відносно старших похідних*, якщо воно має такий вигляд:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (1.1)$$

де параметри a_{11} , a_{12} , a_{22} є функціями змінних x, y .

Якщо ж коефіцієнти a_{11} , a_{12} , a_{22} у лінійному рівнянні відносно старших похідних (1.1) залежать ще і від u, u_x, u_y , то таке рівняння зветься *квазілінійним*.

ДРЧП називається **лінійним**, якщо воно лінійне відносно старших похідних u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} та відносно функції $u(x, y)$ і її перших похідних u_x , u_y

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0, \quad (1.2)$$

де a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 , c , f – функції лише змінних x, y .

У випадку, коли коефіцієнти ДРЧП (1.2) не залежать від змінних x, y , то таке рівняння зветься **лінійним ДРЧП зі сталими коефіцієнтами**.

Якщо ж у рівнянні (1.2) $f(x, y) \equiv 0$, то таке рівняння називається **однорідним**.

1.2. Канонічний вигляд диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Уся різноманітність лінійних відносно старших похідних рівнянь може бути розділена на три класи (типи). У кожному класі є найпростіші рівняння, які називаються **канонічними**. Розв'язки рівнянь того чи того типів мають багато загальних властивостей. Тому для вивчення цих властивостей достатньо розглянути лише канонічні рівняння, бо інші рівняння цього класу можуть бути зведені до канонічного вигляду.

Приналежність рівняння до того чи того класу (типу) – класифікація рівнянь – визначається коефіцієнтами біля старших похідних. Отже, будь-яке рівняння (1.1) чи (1.2) може бути зведено до простої канонічної форми шляхом заміни незалежних змінних.

Здійснимо перетворення рівняння (1) шляхом заміни незалежних змінних за формулами:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (1.3)$$

Для такого перетворення обов'язково існує обернене перетворення. Також вважаємо, що функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ є гладкі та неперервні разом зі своїми частинними похідними першого та другого порядків. Таким чином, здійснюючи перетворення рівняння (1.1) за змінними

(1.3), отримаємо інше нове рівняння, яке еквівалентне попередньому. У зв'язку з цим виникає питання: як вибрати функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, так, щоб нове рівняння у змінних ξ та η мало найбільш просту форму? Подальший виклад матеріалу дасть відповідь на це питання.

Перетворюючи похідні до нових змінних, отримаємо:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Підставляючи значення похідних з (1.4) у рівняння (1.1) та вводячи нові коефіцієнти, отримаємо нове рівняння:

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (1.5)$$

де:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2, \\ \bar{a}_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y, \\ \bar{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де нова функція $\bar{F}$ не залежить від похідних другого порядку. Якщо ж початкове рівняння лінійне, тобто:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f,$$

то:

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta$$

і (1.5) залишається лінійним.

Безпосередньою перевіркою з використанням (1.6) встановлюється справедливність тотожності:

$$D = \bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} \equiv a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (1.7)$$

Величина у квадратних дужках визначається за формулою:

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \equiv J = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$$

і називається якобіаном перетворення. Зокрема, якобіан не дорівнює нулю. У протилежному випадку (якщо би так було), то це б суперечило твердженню про незалежні змінні у виразі (1.3).

Тепер можемо ввести таку класифікацію рівнянь виду (1.1). Рівняння (1.1) ми будемо називати в точці $M(x, y)$ рівнянням:

гіперболічного типу, якщо в точці $M(x, y) : D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$;

параболічного типу, якщо в точці $M(x, y) : D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$;

еліптичного типу, якщо в точці $M(x, y) : D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Сукупність точок $M(x, y)$, де зберігається тип рівняння утворюють область. Тому можна говорити також про тип рівняння у певній області D .

Із тотожності (1.7) випливає, що при заміні незалежних змінних за формулами (1.3) тип рівняння (1.1) не змінюється.

Надалі скористаємося заміною незалежних змінних для спрощення вигляду рівняння (1.1) і приведення його до канонічної форми. Для кожного типу рівнянь існує своя канонічна форма.

А. Гіперболічний тип рівнянь

Для рівняння гіперболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ існують такі $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, які перетворюються на рівняння (1.1) до вигляду:

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.8)$$

де $\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}$. (1.8) – це канонічна форма рівнянь гіперболічного типу.

Часто користуються іншою канонічною формою. Нехай:

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

тоді:

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

де α і β – нові незалежні змінні. Тоді похідні набудуть вигляду:

$$u_{\xi} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} + u_{\beta}), \quad u_{\eta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha} - u_{\beta}), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

і (1.8) зведеться до такого рівняння:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1, \quad (1.9)$$

де $\Phi_1 = 4\Phi$.

Опишемо процедуру пошуку функцій $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$.

1. Якщо $a_{11} = a_{22} = 0$ і $a_{12} \neq 0$ в області D , то після ділення обидвох частин рівняння (1.1) на $2a_{12}$ отримуємо одразу канонічну форму (1.8).
2. Нехай $a_{11}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ у всіх точках області D . Обмежимося розглядом випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів a_{11} , a_{22} тотожно не дорівнює нулю. Нехай це буде a_{11} .

Виберемо як $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ такі функції, що перетворюють на нуль коефіцієнти $\bar{a}_{11}$ та $\bar{a}_{22}$ у системі рівнянь (1.6). Ці два рівняння є однотипними. Розглянемо одне із них.

Виберемо $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ так, щоб коефіцієнт $\bar{a}_{11} = 0$. Для цього розглянемо таке дифрівняння першого порядку:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \quad (1.10)$$

Нехай $z = \varphi(x, y)$ – який-небудь частинний розв'язок рівняння (1.10). Якщо ж вважати, що $\xi = \varphi(x, y)$, то $\bar{a}_{11}$ буде дорівнювати нулю. Отже, завдання про вибір нових незалежних змінних полягає у пошуку розв'язків (1.10).

Щоб функція $z = \varphi(x, y)$ була частинним розв'язком (1.10), необхідно і достатньо, щоб співвідношення $\varphi(x, y) = c$, де $c = \text{const}$, було б загальним інтегралом звичайного диференціального рівняння

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0. \quad (1.11)$$

Нехай $y = f(x, c)$ є такою функцією. Тоді:

$$\frac{dy}{dx} = - \left[\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right]_{y=f(x,c)}, \quad (1.12)$$

Зважаючи на це перше рівняння (1.6) можна переписати у такій формі:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \left[a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,c)} = 0 \quad (1.13)$$

або:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0. \quad (1.13')$$

Розв'язуючи квадратне рівняння, одержимо два розв'язки:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \lambda_1(x, y), \quad (1.14)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \lambda_2(x, y). \quad (1.15)$$

Знак виразу під коренем у (1.14), (1.15) визначає тип рівняння, про що вже було сказано вище. Для гіперболічного типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

Нехай $\varphi(x, y) = C_1$ та $\psi(x, y) = C_2$ є загальними інтегралами (1.14) та (1.15). Тоді ліві частини цих інтегралів і є шуканими функціями $\xi = \varphi(x, y)$ та $\eta = \psi(x, y)$. Таким чином у наведеному прикладі (гіперболічний тип рівняння) ми знаходимо функції, що перетворюють на нуль коефіцієнти $\bar{a}_{11}$ та $\bar{a}_{22}$ у системі рівнянь (1.6). При цьому $\bar{a}_{12} \neq 0$ у жодній точці області D (області, у якій тип рівняння зберігається), що безпосередньо впливає із тотожності (1.7). Поділивши рівняння, що перетворюється, на $\bar{a}_{12}$ і замінивши змінні x та y новими змінними $\xi = \varphi(x, y)$ та $\eta = \psi(x, y)$, отримаємо шукану канонічну форму (1.8), або після перетворень $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ іншу канонічну форму (1.9).

Б. Параболічний тип рівнянь

Для цього типу рівнянь $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Зважаючи на це рівняння (1.14), (1.15) стають однаковими. Загальним інтегралом рівняння (1.11) є $\varphi(x, y) = \text{const}$. Покладемо тоді $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, де $\eta(x, y)$ – довільна функція, яка не залежить від $\varphi(x, y)$. Тоді справедлива така рівність:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2 = 0,$$

бо $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ і звідси $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Також автоматично впливає:

$$\begin{aligned}\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = \\ &= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0.\end{aligned}$$

Далі ділимо рівняння (1.5) на коефіцієнт біля $u_{\eta\eta}$ і отримаємо канонічну форму для ДРЧП параболічного типу:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad (1.16)$$

де $\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}$.

В. Еліптичний тип рівнянь

Для такого типу $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. Відповідно $\lambda_{1,2}(x, y)$ різні, але комплексно спряжені. Нехай $\varphi(x, y) = \text{const}$ – комплексний інтеграл рівняння (1.14). Тоді $\varphi^*(x, y) = \text{const}$, де $\varphi^*(x, y)$ – комплексно спряжена функція до $\varphi(x, y)$, є загальним інтегралом спряженого рівняння (1.15). У такому випадку заміною змінних переходять до комплексних величин

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

Тоді ДРЧП еліптичного типу зведеться до такого виду, як і гіперболічне. Однак, у цьому посібнику розглядатиметься рівняння з дійсними коефіцієнтами, тому введемо інші нові дійсні змінні α і β за формулами

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}, \quad (1.17)$$

тобто,

$$\xi = \varphi(x, y) = \alpha + i\beta, \quad \eta = \varphi^*(x, y) = \alpha - i\beta.$$

Тоді на основі (1.17) отримаємо, що

$$\alpha = \zeta(x, y), \quad \beta = \omega(x, y),$$

де:

$$\varsigma(x, y) = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \omega(x, y) = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i}.$$

Отже, рівняння (1.1) зведеться до вигляду:

$$\bar{a}_{11}^{(\alpha, \beta)} \cdot u_{\alpha\alpha} + 2\bar{a}_{12}^{(\alpha, \beta)} \cdot u_{\alpha\beta} + \bar{a}_{22}^{(\alpha, \beta)} \cdot u_{\beta\beta} + \bar{F}^{(\alpha, \beta)} = 0, \quad (1.18)$$

де:

$$\bar{a}_{11}^{(\alpha, \beta)} = a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2,$$

$$\bar{a}_{12}^{(\alpha, \beta)} = a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y,$$

$$\bar{a}_{22}^{(\alpha, \beta)} = a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2,$$

а $\bar{F}^{(\alpha, \beta)}$ не залежить від похідних II порядку. Тоді:

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 &= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - \\ &- (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) + 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = \\ &= \bar{a}_{11}^{(\alpha, \beta)} - \bar{a}_{22}^{(\alpha, \beta)} + 2i\bar{a}_{12}^{(\alpha, \beta)} = 0. \end{aligned}$$

Тобто, $\bar{a}_{11}^{(\alpha, \beta)} = \bar{a}_{22}^{(\alpha, \beta)}$ і $\bar{a}_{12}^{(\alpha, \beta)} = 0$. Це отримується з умови рівності комплексних чисел: два комплексні числа дорівнюють один одному, якщо їхні дійсні та уявні частини дорівнюють одна одній відповідно. Після цього рівняння (1.18) набуде вигляду:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (1.19)$$

$$\text{де } \Phi = -\frac{\bar{F}^{(\alpha, \beta)}}{\bar{a}_{11}^{(\alpha, \beta)}}.$$

Отже, у цьому підрозділі наведені основні канонічні форми для ДРЧП II порядку, продемонстровані алгоритми їхнього зведення до канонічних форм.

1.3. Канонічні форми лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо випадок, що у рівнянні (1.1) усі коефіцієнти є сталими. Тоді за допомогою відповідних перетворень змінних це рівняння можна звести до таких канонічних виглядів:

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ або}$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (гіперболічний тип);} \quad (1.20)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (параболічний тип);} \quad (1.21)$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f = 0 \text{ (еліптичний тип).} \quad (1.22)$$

Для того, щоб спростити, зручно провести заміну $u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\lambda\xi + \mu\eta}$, де $v(\xi, \eta)$ – нова невідома функція, λ, μ – невідомі константи, які ми визначимо пізніше. Тоді:

$$u_\xi = (v_\xi + \lambda v)e^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

$$u_\eta = (v_\eta + \mu v)e^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

$$u_{\xi\xi} = (v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v)e^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

$$u_{\xi\eta} = (v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v)e^{\lambda\xi + \mu\eta},$$

$$u_{\eta\eta} = (v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v)e^{\lambda\xi + \mu\eta}.$$

Знайдені похідні підставимо у рівняння (1.20)-(1.22). Для прикладу розглянемо рівняння (1.22). Після підстановок похідних поділимо на множник $e^{\lambda\xi + \mu\eta} \neq 0$. Отримаємо:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_\xi + (b_2 + 2\mu)v_\eta + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

Невідомі параметри λ, μ виберемо так, щоб обидва коефіцієнти при перших похідних стали нулями. Тобто, $\lambda = -\frac{b_1}{2}$, $\mu = -\frac{b_2}{2}$. У результаті цих дій отримаємо

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

$$\text{де } \gamma = -\frac{b_1^2}{4} - \frac{b_2^2}{4} + c, \quad f_1 = f \cdot e^{\frac{b_1\xi + b_2\eta}{2}}.$$

Аналогічно для рівнянь (1.20) та (1.21) можна тримати такі канонічні форми ДРЧП II порядку:

$$v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \text{ або } v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \text{ (гіперболічний тип);}$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 \text{ (параболічний тип);}$$

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \text{ (еліптичний тип).}$$

1.4. Задачі та приклади їх розв'язання

Задача 1. Отримати канонічний вигляд рівняння в областях, де тип рівняння зберігається

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \quad (3д.1.1)$$

Розв'язання

Згідно з (1.1), коефіцієнти $a_{11}=1, a_{12}=0, a_{22}=x$. «Дискримінант» відповідного рівняння згідно з (1.7) буде $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - x = -x$. Таким чином, можливі випадки:

1) $D > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ рівняння (3д.1.1) – це ДРЧП II порядку гіперболічного типу. Відповідне характеристичне рівняння запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} (dy)^2 + x(dx)^2 &= 0, \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (-x) &= 0, \\ \frac{dy}{dx} - \sqrt{-x} &= 0 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} + \sqrt{-x} = 0, \\ y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} &= \text{const}, \quad y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = \text{const}. \end{aligned}$$

У рівнянні (3д.1.1) проводимо заміну змінних:

$$\xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}. \quad (3д.1.2)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi} \left(-(-x)^{1/2} \right)^2 + 2u_{\xi\eta} \left(-(-x)^{1/2} \right) (-x)^{1/2} + u_{\eta\eta} \left((-x)^{1/2} \right)^2 + \\ &+ u_{\xi} \frac{1}{2} (-x)^{1/2} + u_{\eta} \left(-\frac{1}{2} (-x)^{1/2} \right) = -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - \\ &- xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2} u_{\xi} (-x)^{-1/2} - \frac{1}{2} u_{\eta} (-x)^{-1/2}; \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \cdot (1)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot 1 \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot (1)^2 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Знайдені частинні похідні підставляємо у рівняння (3д.1.1). Отримаємо:

$$\begin{aligned}
& -xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} - xu_{\eta\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} + \\
& + xu_{\xi\xi} + 2xu_{\xi\eta} + xu_{\eta\eta} = 0, \\
& 4xu_{\xi\eta} + \frac{1}{2}u_{\xi}(-x)^{1/2} - \frac{1}{2}u_{\eta}(-x)^{-1/2} = 0, \\
& u_{\xi\eta} - \frac{1}{8(-x)^{3/2}}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.
\end{aligned} \tag{Зд.1.3}$$

Із (Зд.2) маємо:

$$\xi - \eta = \frac{4}{3}(-x)^{3/2} \Rightarrow (-x)^{3/2} = \frac{3}{4}(\xi - \eta). \tag{Зд.1.4}$$

Вираз (Зд.1.3) підставляємо в (Зд.1.4). Отримаємо канонічний вигляд рівняння в області його гіперболічності:

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}) = 0.$$

2) $D < 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ рівняння (Зд.1.1) – це ДРЧП еліптичного типу. Відповідне характеристичне рівняння має такий самий вигляд, як і для гіперболічного типу (однак $D < 0$):

$$\begin{aligned}
& (dy)^2 + x(dx)^2 = 0, \\
& \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0, \\
& \frac{dy}{dx} - i\sqrt{x} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} + i\sqrt{x} = 0, \\
& y + \frac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}, \quad y - \frac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}.
\end{aligned}$$

У рівнянні (Зд.1.1) проводимо ще одну заміну змінних

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

де:

$$\varphi = y + \frac{2}{3}ix^{3/2}, \quad \varphi^* = y - \frac{2}{3}ix^{3/2}.$$

Тоді:

$$\alpha = y, \quad \beta = \frac{2}{3}x^{3/2};$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \cdot 0 + 2u_{\alpha\beta} \cdot 0 + u_{\beta\beta} \left(x^{1/2}\right)^2 + u_{\alpha} \cdot 0 + u_{\beta} \frac{1}{2}x^{-1/2} = xu_{\beta\beta} + \frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha}.$$

Із (Зд.1.1) отримаємо:

$$u_{\beta\beta} + \frac{1}{2}u_{\beta}x^{-1/2} + xu_{\alpha\alpha} = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{2x^{3/2}}u_{\beta} = 0. \quad (Зд.1.5)$$

Оскільки $x^{3/2} = \frac{3}{2}\beta$, у результаті отримаємо канонічний вигляд ДРЧП II порядку

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \frac{1}{3\beta}u_{\beta} = 0.$$

3) Якщо $D=0 \Rightarrow x=0$, то рівняння (Зд.1.1) перетворюється на рівняння $u_{xx}=0$, що є автоматичною канонічною формою рівняння параболічного типу.

Задача 2. Звести до канонічного вигляду ДРЧП II порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x + 4u_y + u = 0. \quad (Зд.2.1)$$

Розв'язання

Тут $D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = -1 < 0$, $a_{11}=2, a_{12}=1, a_{22}=1$. Отже, (Зд.2.1) – це ДРЧП II порядку еліптичного типу. Відповідне характеристичне рівняння запишеться у вигляді:

$$2(dy)^2 - 2dx dy + (dx)^2 = 0,$$

$$2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+i}{2} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1-i}{2}.$$

Отримали два звичайні диференціальні рівняння. Їхній розв'язок має вигляд:

$$2y - (1+i)x = \text{const},$$

та:

$$2y - (1-i)x = \text{const}.$$

Щоб позбутися комплексних величин (отримати рівняння з дійсними коефіцієнтами), слід замінити змінні:

$$\alpha = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2},$$

де $\varphi = 2y - (1+i)x$, $\bar{\varphi} = 2y - (1-i)x$. Тоді

$$\alpha = 2y - x, \quad \beta = -x.$$

Далі замінимо похідні:

$$u_x = u_\alpha \alpha_x + u_\beta \beta_x = -u_\alpha - u_\beta;$$

$$u_y = u_\alpha \alpha_y + u_\beta \beta_y = 2u_\alpha;$$

$$u_{xx} = u_{\alpha\alpha} \alpha_x^2 + 2u_{\alpha\beta} \alpha_x \beta_x + u_{\beta\beta} \beta_x^2 + u_\alpha \alpha_{xx} + u_\beta \beta_{xx} = u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta};$$

$$u_{yy} = u_{\alpha\alpha} \alpha_y^2 + 2u_{\alpha\beta} \alpha_y \beta_y + u_{\beta\beta} \beta_y^2 + u_\alpha \alpha_{yy} + u_\beta \beta_{yy} = u_{\alpha\alpha};$$

$$u_{xy} = u_{\alpha\alpha} \alpha_x \alpha_y + (\alpha_x \beta_y + \beta_x \alpha_y) u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta} \beta_x \beta_y + u_\alpha \alpha_{xy} + u_\beta \beta_{xy} = -2u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta}.$$

Підставимо отримані похідні в (Зд.2.1) і матимемо:

$$2(u_{\alpha\alpha} + 2u_{\alpha\beta} + u_{\beta\beta}) - 2(-2u_{\alpha\alpha} - 2u_{\alpha\beta}) - 4u_{\alpha\alpha} + 4(-u_\alpha - u_\beta) + 8u_\beta + u = 0,$$

$$2u_{\alpha\alpha} + 2u_{\beta\beta} + 4u_\alpha - 4u_\beta + u = 0,$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + 2u_\alpha - 2u_\beta + \frac{1}{2}u = 0. \quad (\text{Зд.2.2})$$

Щоб спростити (Зд.2.2) введемо заміну як у підрозділі 1.3:

$$u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta) e^{\lambda\alpha + \mu\beta},$$

де $v(\alpha, \beta)$ – нова невідома функція; λ, μ – параметри, які слід визначити.

Тоді:

$$u_\alpha = (v_\alpha + \lambda v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_\beta = (v_\beta + \mu v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_{\alpha\alpha} = (v_{\alpha\alpha} + 2\lambda v_\alpha + \lambda^2 v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta};$$

$$u_{\beta\beta} = (v_{\beta\beta} + 2\mu v_\beta + \mu^2 v) e^{\lambda\alpha + \mu\beta}.$$

Після заміни у рівнянні (Зд.2.2) отримаємо:

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + (2\lambda + 2)v_\alpha + (2\mu + 2)v_\beta + (\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda - 2\mu + \frac{1}{2})v = 0. \quad (\text{Зд.2.3})$$

Параметри λ та μ виберемо з умови рівності нулю коефіцієнтів біля похідних v_x та v_y . Отримаємо:

$$\begin{cases} 2\lambda + 2 = 0, \\ 2\mu - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

При знайдених параметрах λ та μ з (Зд.2.3) отримаємо канонічну форму ДРЧП II порядку еліптичного типу:

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} - \frac{3}{2}v = 0.$$

Завдання для самостійного розв'язання.

Звести рівняння до канонічного вигляду:

1. $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$
2. $u_{xx} - 6u_{xy} + 13u_{yy} = 0.$
3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$
4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 44 = 0.$
5. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$
6. $y^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0.$
7. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$
8. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} - 2xu_x = 0.$
9. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0.$
10. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^{y/x} = 0.$

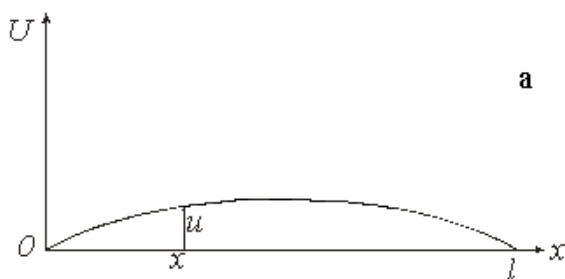
Розділ 2

Основні рівняння математичної фізики.

Постановка крайових задач. Типи крайових умов

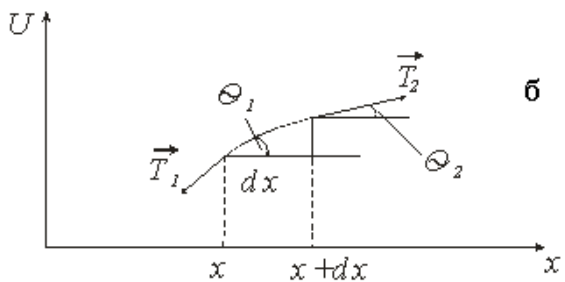
2.1. Рівняння коливань струни та мембрани. Хвильове рівняння

Вважаємо, що струна – це тонка, гнучка натягнута нитка, яка закріплена у двох точках. Якщо струну відхилити від положення рівноваги (яке на мал. а збігається з віссю x), то вона буде здійснювати



поперечні коливання. Позначимо зсув точок струни через u . Зрозуміло, що u є функцією координати x і часу t :

$$u = u(x, t). \quad (2.1)$$



Завдання полягає у тому, щоб знайти положення струни (кожної її точки) у будь-який момент часу, тобто визначити явний вигляд функції (2.1).

Ми покажемо, що при малих відхиленнях від рівноваги функція $u(x, t)$ задовольняє конкретному лінійному ДРЧП II порядку. Для цього виділимо малий елемент струни ds , який у початковий момент часу мав довжину dx (мал. б). Згідно з формулою квадрата довжини елемента дуги маємо:

$$ds^2 = dx^2 + du^2 \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}.$$

Оскільки ми розглядаємо малі коливання, для яких $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, то під знаком кореня можна знехтувати квадратом похідної і в першому наближенні вважати, що $ds \approx dx$. У цьому наближенні струна не є розтяжною, тому ми вправі вважати натяг струни T незмінним за абсолютною величиною. Отже, в описаній моделі зміна сили натягу струни, яка відбувається під час її коливань, можна знехтувати у порівнянні з її натягом у початковий момент часу або у положенні рівноваги.

Застосуємо тепер до розглянутого елемента струни II закон Ньютона: добуток маси $dm = \rho \cdot dx$ на прискорення $\frac{\partial^2 u}{dt^2}$ дорівнює сумі сил, прикладених до елемента. Тут ρ – лінійна густина (маса одиниці довжини струни). Вважаючи струну дуже тонкою, нехтуємо вагою будь-якого її елемента і враховуємо тільки сили натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, які діють з обидвох сторін. При цьому слід мати на увазі, що хоча натяг вздовж струни за модулем сталий, однак він у відхиленій струні міняється за напрямом від точки до точки. Оскільки розглядаються поперечні коливання (уздовж осі u), то нас цікавить лише сума вертикальних проєкцій сил (сума горизонтальних складових, очевидно, дорівнює нулю):

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{dt^2} = T_{2u} + T_{1u}. \quad (2.2)$$

З рисунка видно, що $T_{1u} = -T \sin \theta_1$ і $T_{2u} = T \sin \theta_2$. Для малих коливань кути θ_1 і θ_2 малі й можна приблизно (з точністю до малих II порядку) вважати

$$\sin \theta_1 \approx \operatorname{tg} \theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x, \quad \sin \theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx}.$$

Отже, права частина рівняння (2.2) зводиться до виразу:

$$T_{2u} + T_{1u} = T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right].$$

Розкладемо тепер у ряд Тейлора функцію $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx}$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x \cdot dx + \dots$$

Тоді з точністю до малих величин II порядку:

$$T_{2u} + T_{1u} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.3)$$

Підставляючи вираз (2.3) у рівняння (2.2), отримаємо:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Ввівши позначення:

$$\frac{T}{\rho} = v^2, \quad (2.5)$$

одержуємо *рівняння вільних коливань струни*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4')$$

У механіці одного лише рівняння руху (2.4') для визначення форми струни у будь-який момент часу недостатньо. Необхідно ще задати *початкові умови*, тобто положення її точок і їхні швидкості у момент $t = 0$:

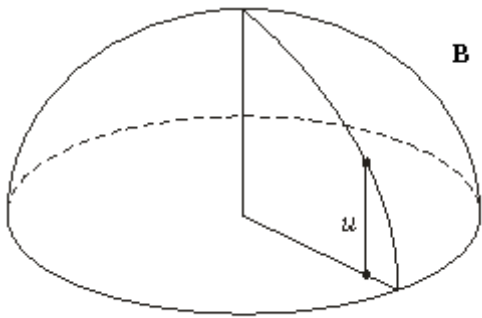
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \quad (2.6)$$

Крім того, потрібно ще вказати, що відбувається на кінцях струни, тобто задати граничні умови. Для струни, закріпленої з обидвох кінців, граничні умови мають вигляд:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (2.7)$$

Таким чином, коливання струни описуються *одновимірним* хвильовим рівнянням (2.4).

Якщо поперечні коливання робить натягнута пружна плівка (мембрана) (мал. **В**), то відповідне хвильове рівняння є *двовимірним*:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2.4'')$$

Тоді початкові умови, що визначають положення і швидкості точок мембрани, мають вигляд:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Що стосується граничної умови, то вона набуде вигляду (оскільки мембрана уздовж контуру L закріплена):

$$u|_L = 0.$$

Ще більш загальний випадок можна отримати, коли подовжні коливання здійснюють частинки суцільного середовища. Це – випадок акустичних коливань. Диференціальне рівняння для таких коливань стає *тривимірним* хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.4''')$$

або (у скороченому записі з використанням оператора Лапласа):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \Delta u. \quad (2.5)$$

Тут $u = u(x, y, z)$ – потенціал швидкостей руху точок середовища, v – швидкість звуку в цьому середовищі. Початкові умови записують у такій формі:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

Гранична ж умова виражає той факт, що на межі з твердою непроникною поверхнею S посудини, у якій знаходиться пружне середовище, нормальна складова швидкості частинок дорівнює нулю:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = 0.$$

Слід зазначити, що тривимірним хвильовим рівнянням описуються не лише акустичні, але й електромагнітні хвилі, що поширюються у вакуумі. А саме для напруженостей електричного і магнітного полів існують рівняння:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.6)$$

де c – швидкість світла у вакуумі.

2.2. Рівняння теплопровідності

Якщо температура тіла у різних його точках неоднакова, то у ньому відбувається перерозподіл тепла відповідно до емпіричного закону Фур'є, відповідно до якого кількість тепла dQ , що протікає через малу площадку площею dS за короткий проміжок часу, прямо пропорційна площі dS , тривалості проміжку часу dt і похідної від температури за нормаллю до площадки:

$$dQ = -k \frac{\partial T}{\partial n} dS dt, \quad (2.7)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності (внутрішньої) речовини.

Уведемо поняття вектора густини теплового потоку $\vec{q}$, що співпадає за напрямом із градієнтом температури, а за модулем дорівнює кількості тепла, що протікає за одиницю часу через одиничну площадку, розташовану перпендикулярно до градієнта температури. Тоді закон теплопровідності матиме вектору форму:

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad} T \quad (2.8)$$

Походження знаку мінус у (2.7) і (2.8) зрозуміле: градієнт спрямований у бік зростання температури, а тепло тече від тепліших до більш холодних точок тіла.

Перейдемо тепер до виведення диференціального рівняння поширення тепла. Нехай є однорідне тіло, температура усередині якого є функцією координат x, y, z і часу t : $T = T(x, y, z, t)$. Для загальності припустимо, що у тілі існують джерела тепла, потужність яких дорівнює $Q(x, y, z, t)$. Виділимо у тілі деякий малий об'єм ΔV і складемо його тепловий баланс. За час dt у ньому виділиться кількість теплоти:

$$\Delta Q = dt \int_{\Delta V} Q(x, y, z, t) dV. \quad (2.9)$$

Частина цього тепла $\Delta Q'$ йде на підвищення температури елементу об'єму ΔV , а інша частина тепла $\Delta Q''$ через теплопровідність піде у навколишні ділянки тіла.

Спочатку визначимо $\Delta Q'$. Кількість тепла, що необхідна для підвищення температури нескінченно малого елемента dV від $T(t)$ до $T(t+dt)$, дорівнює:

$$dQ' = c\rho dV [T(t+dt) - T(t)] = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dt dV, \quad (2.10)$$

де c – питома теплоємність тіла, ρ – його густина. Інтегруючи цю рівність за об'ємом ΔV , одержимо:

$$\Delta Q' = dt \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV. \quad (2.11)$$

Щоб визначити $\Delta Q''$, урахуємо, що за одну секунду через поверхню dS , що обмежує об'єм ΔV , протікає кількість теплоти:

$$\oint_{\Delta S} q_n dS.$$

Тому:

$$\Delta Q'' = dt \oint_{\Delta S} q_n dS. \quad (2.12)$$

Прирівнюючи ΔQ сумі $\Delta Q'$ і $\Delta Q''$, одержуємо:

$$\int_{\Delta V} Q dV = \int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{\Delta S} q_n dS. \quad (2.13)$$

У цій рівності стоять інтеграли за різними змінними. Тому застосуємо до останнього з них теорему Остроградського-Гаусса:

$$\oint_{\Delta S} q_n dS = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV.$$

Тоді рівняння (2.13) набуде вигляду:

$$\int_{\Delta V} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV = \int_{\Delta V} Q dV,$$

або

$$\int_{\Delta V} \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q \right] dV = 0.$$

Оскільки це співвідношення справедливе для довільного об'єму ΔV , то підінтегральний вираз має дорівнювати нулю:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - Q = 0.$$

Підставляючи сюди значення $\vec{q}$ з (2.8), одержуємо:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = Q. \quad (2.14)$$

Якщо тіло однорідне, то коефіцієнт теплопровідності k є величиною сталою (не залежить від координат). Тоді:

$$\operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} T) = k \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} T = k \Delta T.$$

З огляду на це, приходимо до наступного диференціального рівняння поширення тепла:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \Delta T + Q(x, y, z, t). \quad (2.14')$$

Розглянемо окремі випадки цього рівняння.

1. Поширення тепла без тепловиділення. Якщо всередині розглянутої області немає джерел тепла, тобто $Q = 0$, то рівняння (2.14') набуде більш простого вигляду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T, \quad (2.14'')$$

де $a = k / (c\rho)$ – коефіцієнт температуропроводності.

2. Сталий потік тепла. Для стаціонарного процесу теплообміну, коли температура у кожній точці тіла не змінюється з часом $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, рівняння теплопровідності набуває форму рівняння Пуассона:

$$\Delta T = -\rho, \quad (2.14''')$$

де $\rho = Q / k$.

3. Сталий потік тепла без тепловиділення. У цьому випадку і $Q = 0$, і $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, тому розподіл температури у тілі підлягає рівнянню Лапласа:

$$\Delta T = 0. \quad (2.14''''')$$

Рівняння нестационарної теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$$

містить похідні другого порядку за координатами x, y, z і похідну першого порядку за часом t . Тому для однозначності його розв'язку повинні бути задані одна початкова і дві граничні умови для кожної координати.

Стаціонарні рівняння Пуассона і Лапласа не містять змінної t , тому у цьому випадку необхідні лише граничні умови.

2.3. Крайові умови першого, другого і третього типів

Розглянемо початкові та крайові умови на основі рівняння теплопровідності. *Початкова* умова звичайно полягає в тому, що температура всіх точок тіла в момент $t = 0$ є визначеною функцією координат:

$$T|_{t=0} = f(x, y, z). \quad (2.15)$$

Що стосується *граничних* умов, то при розв'язанні фізичних задач вони бувають трьох видів. У випадку крайових умов *першого* роду задається температура на поверхні S тіла у будь-який момент часу:

$$T|_S = \varphi(x, y, z). \quad (2.16)$$

У загальному випадку функція φ може ще залежати і від t , але температура на поверхні стала.

Для крайових умов *другого* роду температура на поверхні невідома, але вказується тепловий потік q або його нормальна складова, що входить чи виходить через поверхню, як функція координат точок поверхні:

$$q_n = \psi(x, y, z),$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні. З урахуванням з (2.8) граничні умови мають диференціальний характер:

$$\frac{dT}{d\vec{n}} = \psi(x, y, z). \quad (2.16')$$

Крайові умови *третього* роду є узагальненням умов першого і другого роду:

$$\frac{dT}{d\vec{n}} - hT|_s = F(x, y, z). \quad (2.16'')$$

Стала h називається *коефіцієнтом зовнішньої теплопровідності*. Рівність (2.16'') застосовується у випадку процесу тепловіддачі (охолодження), тобто переносу тепла від тіла до навколишнього середовища. Відповідно до емпіричного закону Ньютона кількість тепла, що віддається елементом поверхні dS з температурою T_1 за час dt у навколишнє середовище з температурою T_0 , прямо пропорційна різниці $T_1 - T_0$ і величинам dS і dt :

$$dQ = \alpha(T_1 - T_0)dSdt.$$

Множник пропорційності α називається *коефіцієнтом тепловіддачі*. Таким чином, тепловий потік q , що виходить з тіла назовні, дорівнює:

$$q = \alpha(T_1 - T_0) \quad (2.17)$$

З іншого боку, такий же тепловий потік повинен підводитися зсередини шляхом теплопровідності. Тому:

$$q = -k \frac{dT}{d\vec{n}}. \quad (2.17')$$

Прирівнюючи праві частини (2.17) і (2.17'), одержуємо:

$$\frac{dT}{d\vec{n}} = -\frac{\alpha}{k}(T_1 - T_0).$$

Позначивши відношення $\alpha/k = h$ і з огляду на те, що $T_1 = T|_s$, остання рівність зведеться до вигляду:

$$\frac{dT}{dn} - hT|_s = hT_0.$$

Температура середовища T_0 і коефіцієнт h у різних точках поверхні поділу середовищ, узагалі кажучи, різні. Якщо відома їхня залежність від координат, то добуток hT_0 є певною функцією координат $F(x, y, z)$. У зв'язку з цим, одержуємо граничні умови третього роду (2.16'').

2.4. Рівняння Максвелла та рівняння Шредінгера

Як відомо з електродинаміки, заряди і струми створюють у просторі електричне й магнітне поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$, між якими існує складний функціональний зв'язок. Найважливішою задачею електродинаміки є визначення вигляду цих функцій $\vec{E}(x, y, z, t)$ і $\vec{H}(x, y, z, t)$ за заданим розподілом нерухомих зарядів і струмів (зарядів, що рухаються).

Уперше показав Максвелл, що основні дослідні закони, які описують властивості електромагнітного поля, мають диференціальний характер, тобто дають змогу безпосередньо визначити вигляд тільки похідних від векторних полів $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Але через те, що кожне векторне поле має дві просторові похідні (скалярну – *дивергенцію* і векторну – *ротор*), для повного опису електромагнітного поля мають бути задані IV диференціальних рівняння, які називають рівняннями Максвелла. У вакуумі вони мають такий вигляд (в абсолютній системі одиниць):

$$a) \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$b) \operatorname{div} \vec{H} = 0,$$

$$б) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$г) \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Тут ρ – густина зарядів, j – густина струмів, c – швидкість світла.

Розглянемо фізичний зміст кожного рівняння. Рівняння (а) означає, що джерелами електричного поля є заряди, причому «потужність» джерела дорівнює $4\pi\rho$. Рівняння (в) означає, що магнітне поле не має джерел, тобто є вихровим векторним полем. Рівняння (б) є законом електромагнітної індукції у диференціальній формі. І рівняння (г)

узагальнює закон Біо-Савара-Лапласа, відрізняючись від нього доданком $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, що характеризує так званий *струм зміщення*.

Останні два рівняння показують, що причинами виникнення і зміни електромагнітного поля є не тільки наявність електричних зарядів, але і рух цих зарядів, а також зміна самого поля. Завдяки цьому можливе існування магнітного поля, хоча у природі немає магнітних зарядів, а також існування *вільного* електромагнітного поля в просторі, позбавленому як зарядів, так і струмів.

Інтегруючи рівняння Максвела, можна визначати електричне і магнітне поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ і $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Але як це можна зробити практично? Адже це складна система взаємозалежних векторних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Виявляється, що задача значно спрощується введенням двох допоміжних величин – скалярного потенціалу φ і векторного потенціалу $\vec{A}$ за формулами:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \quad (2.18)$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Накладаючи ще додаткову умову Лоренца (умова калібрування):

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.20)$$

і підставляючи (2.18)-(2.20) у рівняння Максвела, одержуємо два диференціальних рівняння для кожного з потенціалів:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (2.21)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.22)$$

Розглянемо рівняння (2.21), яке ще можна записати так:

$$\square \varphi = -4\pi\rho, \quad (2.23)$$

де $\square$ – оператор Даламбера. Це рівняння називають *рівнянням Даламбера*. Видно, що в окремому випадку стаціонарного (сталого в

часі) поля даламберіан перетворюється на звичайний лапласіан Δ і рівняння Даламбера переходить у відоме нам уже рівняння Пуассона: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. В іншому частинному випадку, коли у змінному електричному полі відсутні заряди ($\rho = 0$), рівняння Даламбера зводиться до тривимірного хвильового рівняння $\Delta\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$, що описує хвилі, які поширюються зі швидкістю c . І якщо поле з часом не змінюється й у ньому відсутні заряди, рівняння Даламбера вироджується у рівняння Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Вивчення фізичних властивостей молекул, атомів і складових їхніх частинок привело на початку ХХ ст. дослідників до переконання, що у мікросвіті існують свої закони, якісно відмінні від законів макросвіту. Поступово сутність цих законів була розкрита, і до кінця 20-х рр. ХХ ст. у атомній фізиці склалася логічна система – *квантова механіка*.

Основне твердження квантової механіки полягає у тому, що поведінка будь-якої мікрочастинки (наприклад, електрона) описується деякою (можна сказати комплексною) функцією координат і часу $\psi(x, y, z, t)$. Причому квадрат модуля цієї функції $|\psi|^2$ характеризує *густину ймовірності*, тобто ймовірність перебування частинки в одиниці об'єму простору.

У стаціонарних випадках, тобто коли функція ψ , яку звичайно називають *хвильовою функцією*, не залежить від часу, її можна визначити, розв'язавши так зване рівняння Шредінгера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad (2.24)$$

де m – маса частинки, $\hbar$ стала Планка, U – потенціальна енергія, яка повинна бути задана умовами задачі, E – повна енергія частинки, яка відіграє роль параметра.

Пояснимо докладніше останнє твердження. Оскільки квадрат хвильової функції $|\psi|^2$ має зміст густини ймовірності, то хвильова функція має ще задовольняти природні фізичні умови: вона повинна бути неперервною, однозначною і скінченою; інтеграл же по заданій

області визначення від $|\psi|^2$ за змістом цієї величини є імовірністю достовірної події, тобто $\int |\psi|^2 dV = 1$ (умова нормування).

При тому виявляється, що в багатьох випадках не при будь-яких значеннях повної енергії E розв'язок рівняння Шредінгера може задовольняти зазначені фізичні умови. Розв'язуючи це рівняння і накладаючи на ψ стандартні умови, ми визначаємо усі значення енергії E , якими може володіти мікрочастинка при заданих умовах.

Рівняння Шредінгера є основним диференціальним рівнянням квантової механіки і, отже, одним із найпоширеніших типів рівнянь у частинних похідних математичної фізики.

2.5. Початкові та крайові умови

ДРЧП II порядку мають нескінченну кількість розв'язків. Тому, для встановлення однозначного фізичного процесу чи явища, до ДРЧП слід додати ще конкретні фізичні умови, які поділяються на:

1. **Початкові умови** – ті, що характеризують початковий стан процесу. Для хвильового рівняння (2.4''') вони набувають вигляду:

$$u(x, y, z, t)|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad (2.25)$$

де $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ – конкретні функції. Початкові умови (2.25) задаються в усій області визначення D розв'язку рівняння (2.4'''). Перша з умов (2.25) задає початкове відхилення, а інша – початкову швидкість.

2. **Граничні умови** – це умови, що задаються на межі S області визначення D розв'язку рівняння (2.4'''). Для рівнянь математичної фізики існують такі типи граничних умов:

$$u|_S = \mu(x, y, z, t), (x, y, z) \in S \quad (\text{гранична умова I роду}); \quad (2.26)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \nu(x, y, z, t), (x, y, z) \in S \quad (\text{гранична умова II роду}); \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y, z, t)u \right) \Big|_S = \beta(x, y, z, t), (x, y, z) \in S \quad (\text{гранична умова III роду}). \quad (2.28)$$

У граничних умовах (2.26) – (2.28) $\mu(x, y, z, t)$, $\nu(x, y, z, t)$, $h(x, y, z, t)$, $\beta(x, y, z, t)$ – конкретні задані функції; $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot n^{(x)} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot n^{(y)} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot n^{(z)}$ – оператор похідної за зовнішньою нормаллю до межі S області визначення D ; $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ – складові вектора напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі S області визначення D .

Розглянемо коливання скінченної струни в області $0 \leq x \leq l$. Якщо кінці струни рухаються за певними законами $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, тоді на кінцях струни для функції $u(x, t)$ задаються граничні умови I роду:

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t). \quad (2.29)$$

У випадку, коли кінці струни закріплено, то $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$.

Якщо задано закон зміни сили, прикладеної до кінців струни, яка діє у напрямі коливань, то для функції $u(x, t)$ задаються граничні умови II роду:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \nu_2(t). \quad (2.30)$$

Якщо ж кінці струни здійснюють вільні коливання, то функції $\nu_1(t) = \nu_2(t) \equiv 0$.

Якщо ж до кінців струни прикріплені пружини, які рухаються за власними законами $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, то на кінцях струни для функції $u(x, t)$ слід задати граничні умови III роду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - \gamma_1(t)) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + h(u - \gamma_2(t)) \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (2.31)$$

де $h = \frac{\alpha}{E}$; E – модуль Юнга; α – коефіцієнт жорсткості пружини.

2.6. Класифікація крайових задач

ДРЧП II порядку, початкові і граничні умови є математичним записом фізичної задачі, яке називають **крайовою задачею математичної фізики**.

Як видно з попередніх параграфів, коливання струни залежить від часу. ДРЧП, де невідома функція залежить від часу називаються **нестационарними**. Досить багато рівнянь математичної фізики описують процеси, які не залежать від часу. Такі рівняння називаються **стационарними**. Відповідно для стационарних ДРЧП наявні лише граничні умови, бо немає залежності від часу.

Більшість крайових задач математичної фізики для стационарних ДРЧП можна поділити на такі типи:

- ДРЧП + граничні умови I роду = перша крайова задача;
- ДРЧП + граничні умови II роду = друга крайова задача;
- ДРЧП + граничні умови II роду = третя крайова задача.

Для нестационарних ДРЧП до граничних умов слід додати ще і початкові умови. Крайові задачі, у яких є початкові та граничні умови називаються **мішаними**. Тоді для нестационарних ДРЧП маємо таку класифікацію основних крайових задач:

- ДРЧП + початкові умови + граничні умови I роду = перша мішана крайова задача. Область визначення невідомої функції обмежена;
- ДРЧП + початкові умови + граничні умови II роду = друга мішана крайова задача. Область визначення невідомої функції обмежена;
- ДРЧП + початкові умови + граничні умови III роду = третя мішана крайова задача. Область визначення невідомої функції необмежена;
- ДРЧП + початкові умови = задача Коші. Область визначення невідомої функції – увесь простір.

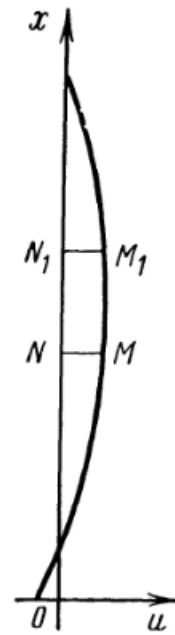
2.7. Задачі та приклади їх розв'язання

Задача 1. Сформулювати крайову задачу про малі коливання важкої однорідної нитки довжиною l під дією сили тяжіння, що одним кінцем закріплена. Лінійна густина матеріалу стержня ρ .

Розв'язання

Розглянемо важку однорідну гнучку нитку довжиною l . Нитка закріплена верхнім кінцем у точці $x = l$ і здійснює коливання під дією сили тяжіння. Максимальне відхилення її нижнього кінця $x=0$ від вертикалі h . За вісь x оберемо вертикальний напрям, вздовж якого розташується нитка, коли під дією своєї ваги вона займе прямолінійне положення. Позначимо через $u = u(x, t)$ відхилення точок нитки від положення рівноваги в момент часу t .

Будемо розглядати такі малі коливання такі, що можна знехтувати квадратом похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ порівнянні з одиницею. Тоді:



$$\sin \alpha(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

де α – кут між дотичною до нитки в точці M з абсцисою осі x у момент часу t та додатнім напрямом осі Ox . Натяг T нитки у точці N з абсцисою x дорівнює вазі частини нитки, що розташована нижче точки N , тобто $T = g\rho x$, де ρ – лінійна густина нитки, g – прискорення вільного падіння. Виділимо довільний елемент нитки MM_1 , довжиною dx , який при рівновазі займав положення NN_1 (див. рис.). Горизонтальна складова рівнодійної сил натягу, що діють на кінці елемента MM_1 виражається різницею, яка з точністю до нескінченно малих величин вищого порядку зведеться до вигляду (див задачу про струну):

$$\left(g\rho x \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{M_1} - \left(g\rho x \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_M \approx g\rho \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx. \quad (3д.1.1)$$

Вертикальна складова набуде вигляду:

$$(g\rho x \cos \alpha(x))\Big|_{M_1} - (g\rho x \cos \alpha(x))\Big|_M \approx g\rho dx,$$

бо через малість коливань

$$\cos \alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx 1.$$

Рух елемента нитки MM_1 можна розглядати як вільний. Якщо врахувати сили натягу, що діють у точках M і M_1 , а також врахувати силу тяжіння, що напрямлена вниз і має величину $-g\rho dx$, то вертикальна складова рівнодійної сил натягу та сила тяжіння взаємно знищуються. Тому вважаємо, що елемент нитки MM_1 рухається під впливом горизонтальної складової сили (3д.1.1). Прирівнявши цю силу з добутком маси ρdx елемента нитки з його прискоренням, отримаємо шукане диференціальне рівняння малих коливань підвішеної нитки:

$$g\rho \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3д.1.2)$$

де $a = \sqrt{g}$. Якщо нитка одним кінцем підвішена, то гранична умова матиме вигляд:

$$u(x, t)\Big|_{x=l} = 0.$$

Початкові ж умови мають вигляд:

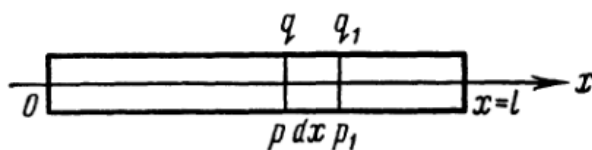
$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x),$$

де $f(x)$ задає початкове положення нитки, а $F(x)$ – початкові швидкості кожної точки нитки.

Задача 2. Сформулювати крайову задачу про малі поперечні коливання довгого стержня довжиною l сталого поперечного перерізу S . Густина матеріалу стержня ρ .

Розв'язання

Розглянемо однорідний стержень довжини l , тобто тіло циліндричної або будь-якої іншої форми, для розтягування чи згинання якого треба докласти певного зусилля. Остання обставина і відрізняє навіть найтонший стержень від струни, яка, як ми знаємо, гнеться вільно.



Обмежимося випадком коливань, при яких поперечні перерізи ρq переміщуються вздовж стержня і залишаються плоскими і паралельними один одному (див. рис). Таке припущення є справедливим, бо стержень є довгим. А це означає, що поперечні розміри стержня малі порівняно з його довжиною.

Якщо трохи розтягнути або стиснути стержень вздовж поздовжньої осі, а потім залишити його, то у ньому виникнуть поздовжні коливання. Направимо вісь Ox вздовж осі стержня і вважатимемо, що у стані спокою кінці стержня перебувають у точках $x=0$ і $x=l$. Нехай x – абсциса деякого перерізу стержня, коли він перебуває у стані спокою. Позначимо через $u(x, t)$ зміщення цього перерізу в момент часу t , тоді зсув перерізу з абсцисою $x+dx$ буде:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Звідси зрозуміло, що відносне видовження стержня в перерізі з абсцисою x виражається похідною:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Вважаючи, що стержень здійснює малі коливання, можна визначити у цьому перерізі натяг T . Застосовуючи закон Гука, отримаємо:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow T/S = E \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow T = ES \frac{\partial u}{\partial x},$$

де E – модуль Юнга матеріалу стержня.

Розглянемо елемент об'єму стержня, що обмежений двома перерізами, абсциси яких у стані спокою дорівнюють x і $x+dx$ відповідно. На цей елемент діють сили натягу T_x і T_{x+dx} , що прикладені до перерізів і напрямлені вздовж осі Ox . Рівнодійна цих сил запишеться у формі:

$$T_{x+dx} - T_x = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \approx ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.$$

Вона напрямлена також вздовж осі Ox . З іншого боку прискорення елемента об'єму дорівнює $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Отже, згідно з II законом Ньютона отримаємо рівняння:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де ρ – густина матеріалу стержня. Якщо ввести параметр $a = \sqrt{E/\rho}$, то отримаємо ДРЧП, що описує поздовжні малі коливання однорідного стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Форма цього рівняння показує, що поздовжні коливання стержня носять хвильовий характер. Початкові умови матимуть форму:

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x),$$

де $f(x)$ задає початкове положення точок стержня, а $F(x)$ – початкові швидкості кожної точки. Ці функції мають бути визначені на відрізку $[0, l]$.

Що ж стосується граничних умов, то можливі декілька варіантів:

1) стержень закріплений на обох кінцях:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0;$$

2) один кінець стержня закріплений, інший – вільний:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

тобто на вільному кінці натяг $ES \frac{\partial u}{\partial x} = T = 0$;

3) обидва кінці – вільні

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Верхній кінець однорідного вертикально підвішеного важкого стержня довжиною l жорстко підвішений до стелі ліфта, що вільно падає. Ліфт, досягнувши швидкості V_0 , раптово зупиняється. Сформулювати крайову задачу про поздовжні коливання цього стержня.
2. Сформулювати крайову задачу про малі поперечні коливання закріпленої струни у середовищі з опором, що пропорційний швидкості.
3. По струні з нерухомо закріпленими кінцями і нескінченно малим електричним опором тече струм I . Струна перебуває у постійному магнітному полі з індукцією B . Сформулювати крайову задачу про малі поперечні коливання струни.
4. Сформулювати крайову задачу про визначення температури в стержні, по якому протікає сталий електричний струм I . На поверхні стержня відбувається конвективний теплообмін з середовищем, яке має температуру 0°C . Кінці стержня зажаті масивними клемами із заданою теплоємністю і дуже великою температурою.

5. Сформулювати крайову задачу про нагрівання напівнескінченного стержня, який горить. Фронт горіння поширюється зі швидкістю V і має температуру $\varphi(t)$.
6. Сформулювати крайову задачу про поперечні коливання струни із закріпленими кінцями, яка навантажена в точці x_0 із зосередженою масою m .

Список використаних джерел

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1969. 288 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. Москва : Наука, 1984. 313 с.
3. Бойко Б.Т., Курпа Л.В., Сенчук Ю.Ф. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. Харків : НТУ «ХП», 2001. 288 с.
4. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. Москва : Наука, 1982. 256 с.
5. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики : учеб. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов. Москва : Высш. шк., 1970. 712 с.
6. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. Москва : Наука, 1975. 125 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1977. 736 с.

Предметний покажчик

Г

гіперболічний тип рівнянь	9
гранична умова.....	35
граничні умови	29
граничні умови I роду.....	29, 35
граничні умови II роду	29, 35
граничні умови III роду	30, 35

Д

двовірне хвильове рівняння.....	23
диференціальне рівняння поширення тепла	28
диференціальне рівнянням з частинними похідними	5

Е

еліптичний тип рівнянь	12
------------------------------	----

З

закону Фур'є.....	25
-------------------	----

К

канонічна форма.....	6
квазілінійне рівняння.....	6

Л

лінійне ДРЧП.....	6
лінійне ДРЧП зі сталими коефіцієнтами	6

О

ознака рівняння гіперболічного типу ...	8
ознака рівняння еліптичного типу	8
ознака рівняння параболічного типу	8
оператора Лапласа	24

П

параболічний тип рівнянь	11
початкова умова.....	35
початкові умови	29

Р

рівняння вільних коливань струни.....	23
---------------------------------------	----

С

сталий потік тепла	28
сталий потік тепла без тепловиділення	29

Т

типи крайових задач	37
тримірне хвильове рівняння	24

Електронне навчальне видання

**Роман Лешко,
Ігор Білинський**

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ФІЗИКИ

Частина 1

**Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного університету
імені Івана Франка**

Головний редактор
Ірина Невмержицька

Технічний редактор
Лужецька Ольга

Коректор
Уляна Куцик

Здано до набору 26.05.2022 р. Підписано до друку 02.06.2022 р. Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 50 прим. Ум. друк. арк. 2,625. Зам. 64.

Редакційно-видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 42.