Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Юрій Матурін,
Леся Комарницька,
Ірина Гордієнко

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Тексти лекцій

Частина 1

Дрогобич – 2023

УДК 519.1(075.8)
Д 48

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка
(протокол № 8 від 15 червня 2023 р.)

Рецензенти:

Дільний В.М., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Національного університету «Львівська Політехніка»;

Хаць Р.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск:

Війчук Т.І., кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та економіки

Д 48 **Дискретна математика :** тексти лекцій. Частина 1 / Матурін Ю.П., Комарницька Л.І., Гордієнко І.В. Дрогобич : ДДПУ ім. І. Франка, 2023. 86 с.

Тексти лекцій написано відповідно до робочої програми навчальної дисципліни “Дискретна математика” першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, галузі знань *12 Інформаційні технології*, спеціальності *122 Комп’ютерні науки,* затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка, містить виклад теоретичного матеріалу до означеної теми, приклади, що ілюструють теорію та вправи для самостійної роботи.

Посібник може бути використаний старшокласниками, які зацікавлені у поглибленому вивченні математики.

Бібліографія 8 назв.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Дискретна математика (дискретний аналіз), яку також часто називають фінітною математикою, є галуззю математичної науки, що вивчає математичні структури, які за своєю суттю є дискретними. До числа таких структур належать скінченні і зліченні множини, скінченні решітки (наприклад, скінченні булеві решітки), скінченні групи, пів групи, кільця і поля (поля Галуа), скінченні та зліченні графи, булеві функції і скінченні автомати, машини Тюрінга тощо.

Доцільно відзначити також, що ця наука включає у себе низку розділів математичної логіки.

Дискретна математика набула широкої популярності протягом останніх десятиліть завдяки застосуванням до комп’ютерних наук. Ідеї дискретної математики є цінними при вивченні комп’ютерних алгоритмів і мов програмування. Тому вивчення цього предмету є обов’язковим для студентів багатьох спеціальностей, що пов’язані з комп’ютерними науками та математикою.

У посібнику міститься виклад елементів теорії множин, елементів комбінаторного аналізу та алгебри висловлень.

Для розуміння наступного викладу передбачається обізнаність читача з основними елементами логіко-математичної символіки.

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$A \subseteq B,\ B \supseteq A$

$\varnothing, U$

$A \bigcup B$

$A \bigcap B$

$A \setminus B$

$\overline{A}$

$P(A)$

2^A

$A \triangle B$

$\bigcup\limits_{i \in I} M_i$

$\bigcap\limits_{i \in I} M_i$

$M_1 \times ... \times M_n,\ \prod\limits_{i=1}^{n} M_i$

M^n

$f(a)$

$f : \begin{cases} A \to B, \\ a \mapsto b\ \ (a \in A) \end{cases}$

$f : A \to B$

$A \xrightarrow{f} B$

1_A

$f(C)$

imf

$f^{-1}(D)$

$\ker f$

B^A

$g \circ f$

Δ_A

f^{-1}

$S(A)$

$|A| \leq |B|,\ |B| \geq |A|$

$|A| = |B|$

$|A| < |B|\ ,\ |B| > |A|$

$aPb,\ a\overline{P}b$

P^{-1}

$P \circ T$

$[a]_P$

M / P

$(M, \geq)$

$\sup_M V, \inf_M V$

χ_X

A_n^m

P_n

$C_n^m, \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$

$P(n_1, ..., n_k)$

$\overline{A_n^m}$

$\overline{C_m^k}$

$P[x]$

$P[[x]]$

$\wedge$

$\vee$

$\to$

$\leftrightarrow$

$\overline{a}$

1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Основи теорії множин заклав геніальний німецький математик ***Георг Кантор (1845–1918)***. Ця теорія вивчає множини, відображення, відношення, кардинальні й ординальні числа, і є фундаментом для усієї сучасної математики.

1.1. Множини

Множина є первісним поняттям, тому для неї не формулюється означення. Уведемо це поняття описово. Під множиною ми розуміємо певну сукупність, набір об'єктів (елементів), що об'єднані деякою ознакою. Об'єкти, з яких складаються множини, називаються елементами множини. Множини здебільшого позначатимемо великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими буквами.

Позначення:

$a \in A \Leftrightarrow$ елемент a належить множині A;

$a \notin A \Leftrightarrow$ елемент a не належить множині A.

Будемо говорити, що множина A є підмножиною множини B, якщо виконується така умова:

$$(\forall a)(a \in A \Rightarrow a \in B).$$

Позначення:

1. $A \subseteq B$ або $B \supseteq A \Leftrightarrow A$ – підмножина множини B або B включає A;

2. $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $\Leftrightarrow$ множина M складається з елементів $a_1, a_2, ..., a_n$ (які є різними).

3. $M = \{a \in K \,|\, p(a)\} \Leftrightarrow$ множина M складається з тих і лише тих елементів множини K, які задовольняють умову p.

4. $\varnothing = \{\}$;

5. $\{M_i | i \in I\}$ множина, що складається з множин, нижні індекси яких належать множині I. Таку множину часто називають родиною множин.

Множина $\varnothing$, яка не містить жодного елемента, називається порожньою.

Множина називається скінченною, якщо вона складається зі скінченної кількості елементів.

Переважно ми розглядаємо множини, що є підмножиною деякої множини U – універсальної множини.

Приклади множин.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел.

Зауваження. Англійський філософ, логік, математик та історик ***Бертран Рассел (1872–1970)*** у 1903 році знайшов очевидний парадокс у наївній теорії множин, розглядаючи множину всіх тих множин, які не є елементами себе. Це привело до побудови аксіоматичної теорії множин.

1.2. Дії над множинами

Уведемо в розгляд дії над множинами.

Об'єднанням множин A і B називається множина

$$A \bigcup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Перетином множин A і B називається множина

$$A \bigcap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Різницею множин A і B називається множина

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

Доповненням множини A називається множина

$$\overline{A} := U \setminus A.$$

Булеаном множини A називається множина

$$P(A) := \{B \mid B \subseteq A\},$$

також часто використовують позначення 2^A.

Симетричною різницею множин A і B називається множина

$$A \triangle B := (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Об'єднанням родини множин $\{M_i \mid i \in I\}$ називається множина

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid (\exists i \in I)(x \in M_i)\}.$$

Перетином родини множин $\{M_i \mid i \in I\}$ називається множина

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid (\forall i \in I)(x \in M_i)\}.$$

Сукупність елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, серед яких можуть бути рівні і в якій визначено, що a_1-її 1-ий елемент, a_2-її 2-ий елемент,…, a_n-її n-ий елемент, називається впорядкованою n-кою і позначається через $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Дві впорядковані n-ки $(a_1, a_2, ..., a_n)$ і $(b_1, b_2, ..., b_n)$ вважаються рівними, якщо виконується така умова:

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})(a_i = b_i).$$

Якщо $n = 2$, то впорядкована 2-ка називається впорядкованою парою.

Декартовим добутком множин $M_1, ..., M_n$ називається множина

$$M_1 \times ... \times M_n := \{(m_1, ..., m_n) \mid m_1 \in M_1, ..., m_n \in M_n\}.$$

n-им декартовим степенем множини M називається множина

$$M_1 \times ... \times M_n (= \prod_{i=1}^{n} M_i),$$

де $(\forall i \in \{1, ..., n\})(M_i = M)$, причому він позначається через M^n.

M^2 називається декартовим квадратом множини M.

Декартові добутки ще називають прямими добутками.

1.3. Властивості дій над множинами

Сформулюємо основні властивості дій над множинами.

Властивості перетину, об’єднання, різниці, доповнення

1. $A\bigcup A = A, A\bigcap A = A$
(ідемпотентність);
2. $A\bigcup B = B\bigcup A, A\bigcap B = B\bigcap A$
(комутативність);
3. $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C), (A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$
(асоціативність)
4. $(A\bigcup B)\bigcap C = (A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C),$
$(A\bigcap B)\bigcup C = (A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$
(дистрибутивність);
5. $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap\overline{B}, \overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcup\overline{B}$
(закони де Моргана);
6. $(A\bigcup B)\bigcap A = A, (A\bigcap B)\bigcup A = A$
(поглинання);
7. $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup\overline{B}) = A, (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap\overline{B}) = A$
(склеювання);
8. $\overline{\overline{A}} = A;$
9. $A\setminus B = A\bigcap\overline{B};$
10. $A\bigcup\overline{A} = U, A\bigcap\overline{A} = \varnothing;$
11. $A\bigcup U = U, A\bigcap U = A, A\bigcup\varnothing = A, A\bigcap\varnothing = \varnothing$
(дії над константами).

Властивості перетину й об’єднання родини множин

1. $\left(\bigcup\limits_{i\in I} M_i\right)\cap K = \bigcup\limits_{i\in I}(M_i\cap K), \left(\bigcap\limits_{i\in I} M_i\right)\cup K = \bigcap\limits_{i\in I}(M_i\cup K)$
(дистрибутивність);

2. $\overline{\bigcup_{i\in I} M_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{M_i}, \overline{\bigcap_{i\in I} M_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{M_i}$

(закони де Моргана).

Властивості симетричної різниці

1. $A \triangle B = B \triangle A$

(комутативність);

2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

(асоціативність);

3. $A \triangle A = \varnothing$;

4. $A \triangle \varnothing = A$;

5. $A \triangle U = \overline{A}$;

6. $(A \triangle B) \bigcap C = (A \bigcap C) \triangle (B \bigcap C)$

(дистрибутивність).

Властивості декартового добутку

1. $(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C)$,

$C \times (A \bigcap B) = (C \times A) \bigcap (C \times B)$;

2. $(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C)$,

$C \times (A \bigcup B) = (C \times A) \bigcup (C \times B)$;

3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,

$C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

4. $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \bigcap (A_2 \times B_2)$;

5. $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

Деякі з цих властивостей легко доводяться на основі логічних міркувань, а інші – на основі вже доведених властивостей.

Доведемо, наприклад, один із законів де Моргана, а саме:

$$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}.$$

Справді, $(\forall x)(x \in \overline{A \bigcap B} \Leftrightarrow x \notin A \bigcap B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \bigcup \overline{B})$.

Родина $\{M_i \mid i \in I\}$ непорожніх підмножин множини M називається розбиттям множини M, якщо виконуються такі умови:

1. $\bigcup\limits_{i \in I} M_i = M$;
2. $(\forall i, j \in I)(i \neq j \Rightarrow M_i \bigcap M_j = \varnothing)$.

1.4. Означення відображення множин

Відображенням множини A у множину B називається правило f, за яким кожному елементу $a \in A$ зіставляється єдиний елемент $b \in B$. У цьому випадку кажуть, що елемент b є образом елемента a, а елемент a – прообразом елемента b; елемент b позначають через $f(a)$.

Позначення відображення:

1. $f : \begin{cases} A \to B, \\ a \mapsto b \ \ (a \in A) \end{cases}$,
2. $f : A \to B$;
3. $A \xrightarrow{f} B$.

Відображення $f : A \to B$ і $g : C \to D$ називаються рівними, якщо виконуються такі умови:

1. $A = C \wedge B = D$;
2. $(\forall a \in A)(f(a) = g(a))$.

Відображення $f : \begin{cases} A \to A, \\ a \mapsto a \ \ (a \in A) \end{cases}$ називається тотожним відображенням множини A і позначається через 1_A.

Нехай $f:A\to B-$ відображення множин, $C\subseteq A, D\subseteq B$.

Позначення:

1. $f(C):=\{f(c)\,|\,c\in C\}$ – образ множини C при відображенні f;

2. $imf := f(A)$ – образ відображення f;

3. $f^{-1}(D):=\{a\in A\,|\,f(a)\in D\}$ – прообраз множини D;

4. $\ker f := \{(a,b)\in A^2\,|\,f(a)=f(b)\}$ – ядро відображення f;

5. B^A – множина всіх відображень з множини A в B.

1.5. Композиція відображень

Композицією відображень $f:A\to B$ і $g:B\to C$ називається відображення

$$g\circ f:\begin{cases} A\to C, \\ a\mapsto g(f(a)) \end{cases}.$$

Композиція відображень має асоціативну властивість.

Справді, нехай $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ відображення. Тоді

$$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f).$$

Доведемо це твердження.

Очевидно, що $(h\circ g)\circ f, h\circ(g\circ f): A\to D$. Крім того,

$$((h\circ g)\circ f)(a)=(h\circ g)(f(a))=h(g(f(a))),$$
$$(h\circ(g\circ f))(a)=h((g\circ f)(a))=h(g(f(a))).$$

Тепер сформулюємо інші властивості композиції, а саме:

Нехай $f:A\to B$. Тоді:

1. $f\circ 1_A = f$;

2. $1_B\circ f = f$.

Ці властивості є тривіальними.

1.6. Основні типи відображень

Відображення $f : A \to B$ називається ін'єктивним, якщо виконується така умова:

$$(\forall a, b \in A)(a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)),$$

тобто якщо

$$\ker f = \Delta_A, \text{ де } \Delta_A := \{(a,a) \mid a \in A\}.$$

Відображення $f : A \to B$ називається сур'єктивним, якщо виконується така умова:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b),$$

тобто якщо

$$imf = B.$$

Відображення $f : A \to B$ називається бієктивним, якщо воно ін'єктивне і сур'єктивне, тобто якщо

$$(\forall b \in B)(\exists! a \in A)(f(a) = b).$$

Бієктивне відображення $f : A \to A$ називається підстановкою на множині A. Сукупність усіх підстановок на множині A позначається через $S(A)$ і є групою відносно композиції.

Приклади.

1. $f : \begin{cases} [0;+\infty) \to R, \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

Назване відображення очевидно є ін'єктивним, але не є сур'єктивним, оскільки $imf = [0,+\infty) \neq R$.

2. $f : \begin{cases} R \to [0,+\infty), \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

Це відображення є сур'єктивним, але не є ін'єктивним, оскільки $f(-1) = f(1)$.

3. $f : \begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty), \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

Таке відображення є бієктивним.

4. $f:\begin{cases} R \to R, \\ x \mapsto \sin x. \end{cases}$

Тут маємо приклад відображення, яке не є ні ін'єктивним, ні сур'єктивним.

1.7. Обернене відображення

Відображення $g: B \to A$ називається оберненим до відображення $f: A \to B$, якщо виконуються такі умови:

$$g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B.$$

Критерій бієктивності. Відображення $f: A \to B$ є бієктивним тоді і тільки тоді, коли має обернене відображення.

Доведення.

1. Нехай $f: A \to B$ є бієктивним відображенням. Розглянемо відображення $g: B \to A$, яке задано так:

$(\forall b \in B)(f(g(b)) = b)$. Зрозуміло, що це правило задає g однозначно в силу бієктивності f. Більше того, з цього отримуємо, що $f \circ g = 1_B$. Далі, $(\forall a \in A)(g(f(a)) = a)$. Припустимо, що $(\exists a_0 \in A)(g(f(a_0)) \neq a_0)$. Тоді $f(g(f(a_0))) \neq f(a_0)$ в силу ін'єктивності f. Але тоді, враховуючи $f \circ g = 1_B$, $f(a_0) \neq f(a_0)$. Суперечність. Таким чином, $g \circ f = 1_A$. Отже, g є оберненим до f.

2. Нехай відображення $g: B \to A$ є оберненим до $f: A \to B$. Доведемо спочатку ін'єктивність f. Нехай $f(a_1) = f(a_2)$. Тоді $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$.

Тепер доведемо сур'єктивність f. Нехай $b \in B$. Тоді $f(g(b)) = b$.

Критерій доведено.

Зауважимо, що у випадку існування для цього відображення оберненого це обернене єдине.

Справді, нехай $g_1 : B \to A, g_2 : B \to A$ – обернені відображення для відображення $f : A \to B$

$$g_1 = g_1 \circ 1_B = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = 1_A \circ g_2 = g_2.$$

Відображення $g : B \to A$, яке є оберненим до відображення $f : A \to B$, позначатимемо через f^{-1}.

1.8. Бієктивні відображення скінченних множин

Твердження. Нехай A, B – скінченні непорожні множини. З множини A у множину B існує бієктивне відображення тоді і тільки тоді, коли $|A| = |B|$.

Доведення.

1. Нехай $f : A \to B$ – бієктивне відображення, $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, ..., b_m\}$. У силу ін'єктивності f елементи $f(a_1), ..., f(a_n)$ попарно різні. Тому $m \geq n$. У силу сур'єктивності f

$$(\exists c_1, ..., c_m \in A)(f(c_1) = b_1, ..., f(c_m) = b_m).$$

Елементи $c_1, ..., c_m$ є попарно різними, тому $n \geq m$. Отже, $m = n$.

2. Нехай $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, ..., b_n\}$. Розглянемо відображення

$$f : \begin{cases} A \to B, \\ a_i \mapsto b_i \ (i \in \{1, ..., n\}). \end{cases}$$

Воно є бієктивним.

1.9. Потужність множин

Будемо говорити, що множина A має потужність не більшу за потужність B (потужність B не менша за потужність A), якщо існує ін'єктивне відображення $f : A \to B$. Позначення: $|A| \leq |B|$ або $|B| \geq |A|$.

Будемо говорити, що дві множини A, B мають однакову потужність, якщо існує бієктивне відображення $f : A \to B$.

Позначення: $|A| = |B|$.

Будемо говорити, що множина A має потужність меншу, ніж B (B має потужність більшу за потужність A), якщо $|A| \le |B|$ і $|A| \ne |B|$. Позначення: $|A| < |B|$ або $|B| > |A|$.

Множина A називається зліченною, якщо її потужність дорівнює потужності множини натуральних чисел.

Зрозуміло, що кожна нескінченна множина містить зліченну підмножину. З цього отримуємо, що кожна нескінченна множина є не менше, ніж зліченною.

У теорії множин доведено, що для довільних множин A, B має місце одне і тільки одне зі співвідношень:

1. $|A| = |B|$;
2. $|A| < |B|$;
3. $|A| > |B|$.

Крім того, знаменита теорема Кантора-Бернштейна стверджує, що для довільних множин A, B має місце таке співвідношення:

$$|A| \ge |B| \wedge |A| \le |B| \Rightarrow |A| = |B|.$$

Твердження попереднього пункту говорить про те, що дві скінченні множини мають однакову потужність тоді й тільки тоді, коли вони мають однакову кількість елементів. Таким чином, поняття потужності узагальнює поняття кількості елементів на нескінченний випадок.

Теорема. Нехай A, B – скінченні непорожні множини. $|A| \le |B|$ тоді й тільки тоді, коли кількість елементів множини A не перевищує кількість елементів множини B.

Доведення. Нехай $|A| \le |B|$. Тоді існує ін'єктивне відображення $f : A \to B$. Покладемо $A = \{a_1, ..., a_n\}$. Тоді в силу ін'єктивності відображення такі елементи $f(a_1), ..., f(a_n)$ попарно різні. Отже, множина B містить принаймні n елементів.

Навпаки. Нехай $A=\{a_1,...,a_n\}$ і $B=\{b_1,...,b_k\}$, де $k\geq n$. Розглянемо відображення

$$f:\begin{cases} A\to B, \\ a_i\mapsto b_i,(i\in\{1,...,n\}). \end{cases}$$

Воно, очевидно, є ін'єктивним.

Теорему доведено.

Теорема. Для довільної множини A справедливе співвідношення:

$$|A|<|P(A)|.$$

Доведення. Очевидно, що відображення

$$g:\begin{cases} A\to P(A); \\ a\mapsto\{a\}(a\in A) \end{cases}$$

є ін'єктивним. Тому $|A|\leq|P(A)|$. Припустимо, що $|A|=|P(A)|$. Тоді існує бієктивне відображення

$$f:A\to P(A).$$

Розглянемо множину B, визначену так:

$$B:=\{b\in A|b\notin f(b)\}.$$

Оскільки f сур'єктивне, то існує елемент $c\in A$, для якого $f(c)=B$. Можливі такі випадки: $c\in B\vee c\notin B$.

Якщо $c\in B$, то $c\notin f(c)=B$.

Якщо $c\notin B$, то $c\in f(c)=B$.

Отже, маємо суперечність. Теорему доведено.

Множина дійсних чисел має більшу потужність за потужність множини натуральних чисел.

Множина A називається множиною потужності континуума, якщо вона має потужність рівну потужності множини дійсних чисел.

Виявляється, що $|P(N)|=|R|$.

У 1877 році Георг Кантор висунув континуум-гіпотезу, яка стверджує, що будь-яка нескінченна підмножина множини дійсних чисел є або зліченною, або множиною потужності континууму. У 1963 році з'ясувалося, що континуум-гіпотеза не залежить від системи аксіом Цермело – Френкеля.

1.10. Основні поняття теорії відношень

n-арним відношенням на множині M називається підмножина множини M^n. При $n = 2$ відношення називається бінарним. Тут ми переважно розглядатимемо бінарні відношення. Тому в подальшому викладі бінарні відношення називатимемо просто відношеннями.

Нехай P – відношення на множині M. Тоді будемо говорити, що елемент $a \in M$ перебуває у відношенні P з елементом $b \in M$, якщо $(a,b) \in P$, також говоримо, що елемент $a \in M$ не перебуває у відношенні P з елементом $b \in M$, якщо $(a,b) \notin P$.

Позначення:

1. $aPb \Leftrightarrow (a,b) \in P$;
2. $a\overline{P}b \Leftrightarrow (a,b) \notin P$.

Відношення P на множині M називається

рефлексивним, якщо виконується така умова:

$$(\forall a \in M)(aPa);$$

симетричним, якщо виконується така умова:

$$(\forall a,b \in M)(aPb \Rightarrow bPa).$$

антисиметричним, якщо виконується така умова:

$$(\forall a,b \in M)(aPb \wedge bPa \Rightarrow a = b);$$

транзитивним, якщо виконується така умова:

$$(\forall a,b,c \in M)(aPb \wedge bPc \Rightarrow aPc).$$

Відношення P на множині M називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Відношення P на множині M називається відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Відношення часткового порядку на множині M називається відношенням лінійного порядку, якщо виконується така умова:

$$(\forall a,b \in M)(aPb \vee bPa).$$

Відношення $\Delta_M := \{(a,a) \mid a \in M\}$ на множині M називається діагоналлю.

Нехай P – відношення на множині M і $V \subseteq M$. Тоді розглянемо відношення

$$P_V := \{(x,y) \in V^2 \mid (x,y) \in P\}$$

на множині V. Це відношення будемо часто також позначати через P, розуміючи відмінності змісту одного позначення залежно від контексту.

Приклади. Нехай $M = \{1,2,3,4\}$,
$P = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,
$T = \{(4,1),(4,2),(4,4),(2,2),(2,1),(3,3),(3,\ \ 1),(1,1)\}$.

Тоді P – відношення еквівалентності, а T – відношення порядку на множині M.

1.11. Обернене відношення, композиція відношень

Нехай P,T – відношення на множині M.

Тоді оберненим до відношення P називається відношення

$$P^{-1} := \{(a,b) \mid (b,a) \in P\}.$$

Композицією відношень P,T називається відношення

$$P \circ T := \{(a,b) \mid (\exists c)((a,c) \in P \wedge (c,b) \in T)\}.$$

Приклади. Нехай $P=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}, T=\{(1,1),(2,1)\}$.

Тоді

$P^{-1}=\{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}, P\circ P=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$, $P\circ T=\{(1,1)\}$, $T\circ P=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

Зрозуміло, що відношення P на множині M є

рефлексивним тоді і тільки тоді, коли $\Delta_M\subseteq P$;

симетричним тоді і тільки тоді, коли $P^{-1}\subseteq P$;

антисиметричним тоді і тільки тоді, коли $P\bigcap P^{-1}\subseteq \Delta_M$;

транзитивним тоді і тільки тоді, коли $P\circ P\subseteq P$.

Твердження (про асоціативність композиції відношень). Нехай P,T,S – відношення на множині M . Тоді

$$(P\circ T)\circ S=P\circ(T\circ S).$$

Доведення. Для довільних $a,b\in M$ маємо

$(a,b)\in(P\circ T)\circ S\Leftrightarrow\exists c\in M:(a,c)\in P\circ T\wedge(c,b)\in S\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists c,d\in M:(a,d)\in P\wedge(d,c)\in T\wedge(c,b)\in S\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\exists d\in M:(a,d)\in P\wedge(d,b)\in T\circ S\Leftrightarrow(a,b)\in P\circ(T\circ S)$.

Твердження доведено.

Твердження (про нейтральність діагоналі відносно композиції). Нехай P – відношення на множині M . Тоді

$$P\circ\Delta_M=\Delta_M\circ P=P.$$

Доведення. Для довільних $a,b\in M$ маємо

$(a,b)\in P\circ\Delta_M\Leftrightarrow\exists c\in M:(a,c)\in P\wedge(c,b)\in\Delta_M\Leftrightarrow(a,b)\in P$,

$(a,b)\in\Delta_M\circ P\Leftrightarrow\exists c\in M:(a,c)\in\Delta_M\wedge(c,b)\in P\Leftrightarrow(a,b)\in P$.

Твердження доведено.

1.12. Відношення еквівалентності, фактормножина і розбиття

Нехай P – відношення еквівалентності на множині M.

Множина $[a]_P := \{b \in M \,|\, (a,b) \in P\}$, де a – деякий елемент множини M, називається класом еквівалентності за відношенням P.

Множина всіх класів еквівалентності за відношенням еквівалентності P на множині M називається фактормножиною множини M за відношенням P і позначається через M/P.

Властивості класів еквівалентності:

1. $\forall a \in M : [a]_P$;
2. $\forall a,b \in M : b \in [a]_P \Rightarrow [b]_P = [a]_P$;
3. $\forall a,b \in M : [a]_P \bigcap [b]_P = \varnothing \vee [a]_P = [b]_P$;
4. $\forall a,b \in M : aPb \Leftrightarrow [a]_P = [b]_P$.

Доведення властивостей.

1. Виконується у силу рефлексивності P.

2. Нехай $a \in M, b \in [a]_P$. З цього маємо, що aPb. Тоді

$(\forall x)(x \in [b]_P \Rightarrow bPx \Rightarrow aPb \wedge bPx \Rightarrow aPx \Rightarrow x \in [a]_P)$;

$(\forall x)(x \in [a]_P \Rightarrow aPx \Rightarrow aPb \wedge aPx \Rightarrow bPa \wedge aPx \Rightarrow$

$\Rightarrow bPx \Rightarrow x \in [b]_P)$.

3. Нехай $a,b \in M, [a]_P \bigcap [b]_P \neq \varnothing$. Тоді існує c, для якого $c \in [a]_P \bigcap [b]_P$. Тоді $c \in [a]_P \wedge c \in [b]_P$. За властивістю 3 маємо, що $[a]_P = [c]_P = [b]_P$.

4. Нехай aPb. Тоді $b \in [a]_P$. За властивістю 2 отримаємо, що $[a]_P = [b]_P$. Навпаки. Нехай $[a]_P = [b]_P$. Тоді $b \in [b]_P = [a]_P$. З цього випливає, що aPb.

Властивості доведено.

З властивостей 1–3 отримуємо, що M/P є розбиттям множини M.

Нехай D – розбиття множини M. Визначимо відношення P_D на множині M так:

$$P_D := \{(x,y) \in M^2 \,|\, \exists V \in D : x, y \in V\}.$$

Очевидно, що означене відношення є рефлексивним і симетричним. Доведемо його транзитивність.

Нехай $xP_D y \wedge yP_D z$. Враховуючи означення розбиття, отримаємо

$$(\exists V, U \in D : x, y \in V \wedge y, z \in U) \Rightarrow y \in V \bigcap U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V \bigcap U \neq \varnothing \Rightarrow V = U \Rightarrow x, z \in U \Rightarrow xP_D z.$$

Таким чином, P_D – відношення еквівалентності. Розглянемо такі відповідності:

$$D \mapsto P_D, P \mapsto M / P$$

між розбиттями множини M і відношеннями еквівалентності на множині M. Зрозуміло, що ці відповідності є взаємно оберненими, а тому бієктивними.

Приклад. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо відношення P на множині $\mathbb{Z}$, що задано так:

$$P := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, (x-y) \vdots n\}.$$

Нескладно побачити, що це відношення є відношенням еквівалентності. Позначимо через $\mathbb{Z}_n$ множину $\mathbb{Z} / P$. Визначимо кількість елементів цієї множини. Зрозуміло, що до одного класу еквівалентності належать ті і тільки ті числа, які при діленні на n дають однакову остачу. Всіх можливих таких остач є n. Тому $|\mathbb{Z}_n| = n$.

1.13. Частково впорядковані множини

Відношення часткового порядку для зручності позначатимемо через $\geq$. Зрозуміло, що відношення, яке є оберненим до відношення часткового порядку, є також відношенням часткового порядку.

Множина M разом з відношенням часткового порядку $\geq$ на ній називається частково впорядкованою. Така множина позначається через $(M, \geq)$.

Приклади.

1. $(\mathbb{Z}, \geq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$;
2. $(\mathbb{N}, \vdots)$;
3. $(P(M), \supseteq), (P(M), \subseteq)$, де M – множина.

Елемент a частково впорядкованої множини $(M, \geq)$ називається найбільшим [найменшим] елементом, якщо виконується така умова:

$$(\forall x \in M)(a \geq x)[(\forall x \in M)(x \geq a)].$$

Елемент a частково впорядкованої множини $(M, \geq)$ називається максимальним [мінімальним] елементом, якщо виконується така умова:

$$(\forall x \in M)(x \geq a \Rightarrow x = a)[(\forall x \in M)(a \geq x \Rightarrow x = a)].$$

Зауважимо, що кожний найбільший [найменший] елемент частково впорядкованої множини є максимальним [мінімальним].

Найбільший [найменший] елемент у разі його існування є єдиним найбільшим [найменшим]. Максимальних [мінімальних] елементів може бути декілька.

Будемо говорити, що елемент a частково впорядкованої множини $(M, \geq)$ покриває її елемент b, якщо виконуються такі умови:

1) $a \neq b$;
2) $a \geq b$;
3) $(\forall x \in M)(a \geq x \wedge x \geq b \Rightarrow x = a \vee x = b)$.

Наприклад, у частково впорядкованій множині $(\{1,2,3,4,5,6\}, \vdots)$ найбільших елементів немає, 4, 5, 6 – максимальні елементи, 1 – найменший (єдиний мінімальний) елемент, 6 покриває 2 і 3.

Нехай $(M, \geq)$ – частково впорядкована множина, тоді будь-яка її підмножина є також частково впорядкованою відносно індукованого відношення часткового порядку.

Нехай $(M, \geq)$ – частково впорядкована множина, V – її підмножина. Будемо говорити, що елемент $a \in M$ є верхньою [нижньою] межею множини V, якщо виконується така умова:

$$(\forall x \in V)(a \geq x)[(\forall x \in V)(x \geq a)].$$

Найменша [найбільша] з верхніх [нижніх] меж множини V називається точною верхньою [нижньою] межею множини V і позначається через $\sup_M V[\inf_M V]$. Точну верхню [нижню] межу також називають супремумом [інфімумом].

Приклади.

1. Розглянемо частково впорядковану множину $(\mathbb{N}, \vdots)$ і $a, b \in \mathbb{N}$. Тоді завжди існують $\sup_{\mathbb{N}}\{a,b\}, \inf_{\mathbb{N}}\{a,b\}$, причому

$$\sup_{\mathbb{N}}\{a,b\} = LCM(a,b), \inf_{\mathbb{N}}\{a,b\} = GCD(a,b).$$

2. Нехай маємо частково впорядковану множину $(P(M), \supseteq)$, де M – множина і $A, B \in P(M)$. Тоді також завжди існують $\sup_{P(M)}\{A,B\}, \inf_{P(M)}\{A,B\}$, причому

$$\sup_{P(M)}\{A,B\} = A \bigcup B, \inf_{P(M)}\{A,B\} = A \bigcap B.$$

Крім того, якщо $\{M_i \mid i \in I\} \subseteq P(M)$, то

$$\sup_{P(M)}\{M_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} M_i, \inf_{P(M)}\{M_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} M_i.$$

3. Тепер розглянемо частково впорядковану множину $(\mathbb{R}, \geq)$.

За відомою теоремою Вейєрштрасса будь-яка непорожня обмежена зверху (знизу) підмножина множини дійсних чисел має супремум (інфімум). Нехай $a, b \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\sup_{\mathbb{R}}\{a,b\} = \max(a,b), \inf_{\mathbb{R}}\{a,b\} = \min(a,b).$$

4. Ще один приклад частково впорядкованої множини, а саме: $(\mathbb{Q}, \geq)$. Очевидно, що $\sup_{\mathbb{Q}}[0;1) = 1$, проте не існує

$$\sup_{\mathbb{Q}}\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}.$$

Зауважимо, що якщо елементи у фігурних дужках множин збігаються, то можна з декількох рівних залишати лише по одному.

Непорожня частково впорядкована множина $(M, \geq)$ називається решіткою, якщо виконується така умова:

$$(\forall a, b \in M)(\exists \sup_M \{a, b\}) \wedge (\forall a, b \in M)(\exists \inf_M \{a, b\}).$$

Таким чином, $(\mathbb{N}, \vdots), (P(M), \supseteq)$, $(\mathbb{R}, \geq)$ – решітки.

Решітка $(M, \geq)$ називається булевою (на честь англійського математика Дж. Буля), якщо виконуються такі умови:

1. $\exists 1 \in M \forall x \in M : 1 \geq x$;
2. $\exists 0 \in M \forall x \in M : x \geq 0$;
3. $\forall x, y, z \in M : \sup_M \{x, \inf_M \{y, z\}\} = \inf_M \{\sup_M \{x, y\}, \sup_M \{x, z\}\}$;
4. $\forall x, y, z \in M : \inf_M \{x, \sup_M \{y, z\}\} = \sup_M \{\inf_M \{x, y\}, \inf_M \{x, z\}\}$;
5. $\forall x \in M \exists y \in M : \inf_M \{x, y\} = 0 \wedge \sup_M \{x, y\} = 1.$

Зрозуміло, що $(P(M), \supseteq)$ є булевою решіткою, в якій $M = 1, \varnothing = 0$.

1.14. Ланцюги та цілком упорядковані множини

Частково впорядкована множина $(M, \geq)$ називається ланцюгом (chain), якщо $\geq$ є відношенням лінійного порядку.

Ланцюг $(M, \geq)$ називається цілком упорядкованою множиною, якщо будь-яка її непорожня підмножина має найменший елемент.

Приклади.

1. Зрозуміло, що $(\mathbb{R}, \geq)$ є ланцюгом, проте не є цілком упорядкованою множиною.
2. $(\mathbb{N}, \geq), (2\mathbb{N}, \geq)$ є цілком упорядкованими множинами.

У математиці досить часто використовується таке твердження:

Лема Куратовського-Цорна. Якщо в непорожній частково впорядкованій множині $(M, \geq)$ кожний непорожній ланцюг має верхню межу, то в M є принаймні один максимальний елемент.

Зокрема, це твердження використовується для доведення існування бази Гамеля у будь-якому лінійному просторі над полем.

Теорема Цермело. На будь-якій множині можна задати відношення часткового порядку, яке перетворить її на цілком упорядковану множину.

Зауваження. Остання теорема є дуже важливим результатом, оскільки дає змогу доводити багато теорем за допомогою узагальнення методу математичної індукції (трансфінітна індукція).

Принцип трансфінітної індукції. Нехай $(M, \geq)$ – цілком упорядкована множина і для кожного $m \in M$ визначене твердження $P(m)$, причому виконуються такі умови:

1. $P(m_0)$ істинне, де m_0 – найменший елемент M;
2. $P(m)$ істинне, якщо істинним є $P(t)$ для всіх $t \in M$, для яких $m \geq t, t \neq m$.

Тоді $P(m)$ істинне для всіх $m \in M$.

Зазначимо, що Ф. Гаусдорф отримав свій знаменитий принцип максимуму, який є альтернативним і більш раннім формулюванням леми Цорна.

1.15. Поняття про алгебраїчні структури

n-арною алгебраїчною операцією (дією) на множині M називається відображення M^n в M. 0-арною алгебраїчною операцією на множині M вважається (виділений) елемент цієї множини.

Алгебраїчною структурою (системою) називається множина M (носій) із заданим на ній набором алгебраїчних операцій та відношень (сигнатура), для яких мають місце визначені властивості. Алгебраїчна структура з порожньою множиною відношень називається алгеброю, а з порожньою множиною операцій – моделлю.

Групоїд – це множина з однією бінарною алгебраїчною операцією.

Півгрупа – це групоїд, алгебраїчна операція якого є асоціативною.

Моноїд – це півгрупа, що має нейтральний елемент.

Група – це моноїд, кожний елемент якого має симетричний до себе.

Абелева група – це група, алгебраїчна операція якої є комутативною.

Кільце – це алгебраїчна структура з двома бінарними алгебраїчними операціями, що називаються додаванням та множенням, яка є абелевою групою відносно додавання, напівгрупою відносно множення, для якої мають місце дистрибутивні закони множення відносно додавання.

Кільце з одиницею – це кільце, яке містить нейтральний відносно множення елемент.

Тіло – це кільце з одиницею, яке при вилученні одиниці з нього є групою відносно множення.

Поле – це тіло, яке має комутативне множення.

Таким чином, маємо, наприклад, лінійно упорядкована множина – модель, а група та моноїд – алгебри.

Приклади.

1. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ – кільце.
2. $(\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Q}\},+,\cdot)$ – поле.

3. $(\{f \mid f \in M^M, \ker f = \Delta_M, \operatorname{Im} f = M\}, \circ)$ – група, де M – непорожня множина.

4. Множина H всіх кватерніонів Гамільтона відносно додавання і множення є тілом.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке множина та підмножина?
2. Сформулюйте означення дій над множинами.
3. Які властивості мають дії над множинами?
4. Що таке відображення?
5. Як класифікують відображення?
6. Сформулюйте означення та властивості композиції відображень.
7. Сформулюйте критерій бієктивності відображення.
8. Що таке потужність множини?
9. Сформулюйте означення відношення.
10. Які види відношень ви знаєте?
11. Сформулюйте означення та властивості композиції відношень.
12. Сформулюйте властивості класів еквівалентності.
13. Як пов’язані фактормножини та розбиття?
14. Що таке найменший, найбільший, мінімальний та максимальний елементи частково впорядкованої множини? Які є особливості цих елементів?
15. Що таке решітка? Які види решіток ви знаєте? Назвіть відповідні приклади.
16. Наведіть означення та приклади цілком упорядкованої множини.
17. Наведіть означення та приклади алгебраїчних структур.

2. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Правило суми й добутку та формула включень і вилучень

Правило суми

Твердження (правило суми). Нехай $A_1,\ldots,A_n$ – скінченні множини. Якщо $\forall i,j\in\{1,\ldots,n\}: i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$, то

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

Доведення. Використаємо індукцію за кількістю множин.

При $n=1$ і при $n=2$ твердження очевидне. Нехай воно правильне при $n=k, k\geq 2$. Доведемо це твердження при $n=k+1$. Справді,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k+1}A_i\right|=\left|\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)\cup A_{k+1}\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|+|A_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|+|A_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i|.$$

Твердження доведено.

Тепер розглянемо одне важливе застосування правила суми.

Принцип Діріхле

Надзвичайно важливим у математиці є так званий

Принцип Діріхле. Нехай A,B – скінченні множини і $f:A\to B$ – відображення. Якщо $|A|>n|B|$, де $n\in N$, то $\exists b\in B:\left|f^{-1}(b)\right|\geq n+1$.

Доведення. Припустимо, що $\forall b\in B:\left|f^{-1}(b)\right|\leq n$. Тоді оскільки

$$\bigcup_{b\in B}f^{-1}(b)=A \text{ і } \forall b_1,b_2\in B: b_1\neq b_2\Rightarrow f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=\varnothing,$$

за правилом суми

$$n|B| < |A| = \left|\bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)\right| = \sum_{b\in B}\left|f^{-1}(b)\right| \le \sum_{b\in B} n = n|B|.$$

Тоді $n|B| < n|B|$. Суперечність.

Твердження доведено.

Зокрема, цей принцип можна використати при доведенні того, що множина $\{\{na\} | n \in \mathbb{Z}\}$ є всюди щільною у множині $[0,1]$, де a – ірраціональне число, тобто $\forall x \in [0,1] \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z} : |\{na\} - x| < \varepsilon$.

Доведемо це твердження.

Справді, покажемо спочатку, що $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{Z} : \{na\} < \varepsilon$. Нехай маємо довільне $\varepsilon > 0$, тоді розглянемо натуральне число $M > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Покладемо: $i_z := [\{z\}M]$, коли $z \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $0 \le \{z\}M < 1 \cdot M = M$. Тому $0 \le i_z \le M - 1$. Тоді за принципом Діріхле

$$\exists n_1, n_2 \in \{1, ..., M+1\} : n_1 \ne n_2 \wedge i_{n_1 a} = i_{n_2 a}.$$

Покладемо:

$$i := i_{n_1 a}, p := [n_1 a], q := [n_2 a].$$

З визначення i_z маємо, що $i_z \le \{z\}M < i_z + 1$. Тоді $\dfrac{i_z}{M} \le \{z\} < \dfrac{i_z + 1}{M}$. Отже, $[z] + \dfrac{i_z}{M} \le z < [z] + \dfrac{i_z + 1}{M}$.

Тому $p + \dfrac{i}{M} \le n_1 a < p + \dfrac{i+1}{M}, q + \dfrac{i}{M} \le n_2 a < q + \dfrac{i+1}{M}$.

Враховуючи ірраціональність числа a, отримаємо, що

$$p + \frac{i}{M} < n_1 a < p + \frac{i+1}{M}, q + \frac{i}{M} < n_2 a < q + \frac{i+1}{M}.$$

Тоді $(p - q) - \dfrac{1}{M} < (n_1 - n_2)a < (p - q) + \dfrac{1}{M}$.

Покладемо:

$$n:=\begin{cases} n_1-n_2, (p-q)<(n_1-n_2)a<(p-q)+\dfrac{1}{M}, \\ n_2-n_1, (p-q)-\dfrac{1}{M}<(n_1-n_2)a<(p-q) \end{cases}$$

Тоді $\{na\}<\dfrac{1}{M}<\varepsilon$, де $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оскільки $n_1\neq n_2$. Зауважимо, що очевидно $\{na\}\neq 0$, оскільки a – ірраціональне число.

Розглянемо тепер $x\in(0,1]$. Тоді

$$x\in\left(0,\frac{1}{M}\right]\vee x\in\bigcup_{j=1}^{M-1}\left(\frac{j}{M},\frac{j+1}{M}\right].$$

Якщо $x\in\left(0,\dfrac{1}{M}\right]$, то $\left|\{na\}-x\right|<\dfrac{1}{M}<\varepsilon$, оскільки $\{na\}<\dfrac{1}{M}\wedge\dfrac{1}{M}<\varepsilon$.

Якщо ж $x\in\bigcup\limits_{j=1}^{M-1}\left(\dfrac{j}{M},\dfrac{j+1}{M}\right]$, то

$$\exists s\in\{1,\dots,M-1\}: x\in\left(\frac{s}{M},\frac{s+1}{M}\right].$$

Розглянемо множину $L:=\{t\,|\,t\{na\}<\dfrac{s}{M}, t\in\mathbb{N}\}$. Ця множина непорожня, оскільки $1\cdot\{na\}=\{na\}<\dfrac{1}{M}\leq\dfrac{s}{M}$. Крім того, L – скінченна множина, оскільки $\forall y\in L: y<\dfrac{s}{M\{na\}}$. Оскільки L – скінченна непорожня множина, то вона містить найбільший елемент, позначимо цей елемент через k. Тоді $k\{na\}<\dfrac{s}{M}\wedge(k+1)\{na\}\geq\dfrac{s}{M}$. Звідси

$$(k+1)\{na\}=k\{na\}+\{na\}<\frac{s}{M}+\frac{1}{M}=\frac{s+1}{M}.$$

Тому $\dfrac{s}{M} \le (k+1)\{na\} < \dfrac{s+1}{M}$. З цього, враховуючи $x \in \left(\dfrac{s}{M}, \dfrac{s+1}{M}\right]$, отримаємо, що $\left|(k+1)\{na\} - x\right| < \dfrac{1}{M}$.

Далі, $(k+1)\{na\} < \dfrac{s+1}{M} \le \dfrac{(M-1)+1}{M} = 1$. З цього отримуємо, що

$$(k+1)[na] \le (k+1)na = (k+1)([na] + \{na\}) =$$
$$= (k+1)[na] + (k+1)\{na\} < (k+1)[na] + 1.$$

Тому $(k+1)[na] = [(k+1)na]$. Звідси

$$(k+1)\{na\} = (k+1)(na - [na]) = (k+1)na - (k+1)[na] =$$
$$= (k+1)na - [(k+1)na] = \{(k+1)na\}.$$

Тоді $\left|\{(k+1)na\} - x\right| < \dfrac{1}{M} < \varepsilon$.

Формула включень та вилучень

Твердження (формула включень та вилучень для двох множин). Нехай A, B – скінченні множини. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Доведення. Покладемо:

$$A_1 := A \cap B, A_2 := A \setminus B, A_3 := B \setminus A.$$

Зрозуміло, що множини A_1, A_2, A_3 задовольняють умови попереднього твердження і

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A \cup B, A_1 \cup A_2 = A, A_1 \cup A_3 = B.$$

Тоді

$$|A \cup B| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |B \setminus A| =$$
$$= (|A \cap B| + |A \setminus B|) + (|A \cap B| + |B \setminus A|) - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Твердження доведено.

Наступне твердження узагальнює правило суми.

Твердження (формула включень та вилучень).

Нехай $A_1,...,A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - ...$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{i_1<i_2<...<i_m}\left|\bigcap_{s=1}^{m} A_{i_s}\right| + ... + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{s=1}^{n} A_s\right|.$$

Доведення. Нехай $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Для довільної множини $X \subseteq U$ визначимо характеристичне відображення

$$\chi_X : \begin{cases} U \to \{0,1\}; \\ u \mapsto \chi(u) = \begin{cases} 1, u \in X; \\ 0, u \notin X \end{cases} \end{cases}$$

Зрозуміло, що для довільних множин $A, B \subseteq U$

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B, \chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A,$$

$$|A| = \sum_{u\in U}\chi_A(u).$$

Але $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \overline{\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}}$. Тому

$$\chi_U = 1 - \chi_{\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}\chi_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i} -$$

$$-\sum_{1\le i<j\le n}\chi_{A_i}\chi_{A_j} + ... + (-1)^{m-1}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_m\le n}\chi_{A_{i_1}}\chi_{A_{i_2}}...\chi_{A_{i_m}} + ...$$

$$+(-1)^{n-1}\chi_{A_1}\chi_{A_2}...\chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i} - \sum_{1\le i<j\le n}\chi_{A_i\cap A_j} + ...$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_m\le n}\chi_{\bigcap_{s=1}^{m}A_{i_s}} + ... + (-1)^{n-1}\chi_{\bigcap_{s=1}^{n}A_s}.$$

Далі,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{u\in U}\chi_U(u) = \sum_{u\in U}(\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(u) - \sum_{1\le i<j\le n}\chi_{A_i\cap A_j}(u) + ...$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n}\chi_{\bigcap\limits_{s=1}^{m}A_{i_s}}(u)+\ldots+(-1)^{n-1}\chi_{\bigcap\limits_{s=1}^{n}A_s}(u))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{u\in U}\chi_{A_i}(u)-\sum_{1\le i<j\le n}\sum_{u\in U}\chi_{A_i\cap A_j}(u)+\ldots$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le n}\sum_{u\in U}\chi_{\bigcap\limits_{s=1}^{m}A_{i_s}}(u)+\ldots+(-1)^{n-1}\sum_{u\in U}\chi_{\bigcap\limits_{s=1}^{n}A_s}(u)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\ldots+(-1)^{m-1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_m}\left|\bigcap_{s=1}^{m}A_{i_s}\right|+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{s=1}^{n}A_s\right|.$$

Твердження доведено.

Правило добутку

Твердження (правило добутку). Нехай $A_1,\ldots,A_n$ – скінченні множини. Тоді

$$|A_1\times\ldots\times A_n|=|A_1|\ldots|A_n|.$$

Доведення. Доводимо індукцією по числу множин. При $n=1$ твердження очевидне. Припустимо, що твердження істинне при $n=k$. Покажемо, що воно істинне при $n=k+1$. Справді, розглянемо множини

$$D_a:=\{(a_1,\ldots,a_k,a)\,|\,(a_1,\ldots,a_k,a)\in A_1\times\ldots\times A_k\times A_{k+1}\},$$

де $a\in A_{k+1}$.

Розглянемо також відображення

$$f_a:\begin{cases}D_a\to A_1\times\ldots\times A_k;\\(a_1,\ldots,a_k,a)\mapsto(a_1,\ldots,a_k),(a_1,\ldots,a_k,a)\in A_1\times\ldots\times A_{k+1}\end{cases}.$$

Зрозуміло, що це відображення f_a бієктивне. Тому

$|D_a|=|A_1\times\ldots\times A_k|$. За індукційним припущенням маємо, що $|A_1\times\ldots\times A_k|=|A_1|\ldots|A_k|$. Але

$$A_1 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1} = \bigcup_{a \in A_{k+1}} D_a \text{ і } \forall a,b \in A_{k+1} : a \neq b \Rightarrow D_a \cap D_b = \varnothing .$$

За правилом суми маємо, що

$$\left| A_1 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1} \right| = \left| \bigcup_{a \in A_{k+1}} D_a \right| = \sum_{a \in A_{k+1}} \left| D_a \right| = \sum_{a \in A_{k+1}} \left| A_1 \times \ldots \times A_k \right| =$$

$$= \left| A_1 \times \ldots \times A_k \right| \left| A_{k+1} \right| = \left| A_1 \right| \ldots \left| A_k \right| \left| A_{k+1} \right| .$$

Твердження доведено.

2.2. Розміщення і перестановки

Ін’єктивне відображення з m-елементної множину в n-елементну називається розміщенням з n елементів до m елементів. Кількість усіх їх позначається через A_n^m.

Твердження. При $m \leq n$

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) .$$

Доведення. Нехай A – m-елементна, а B – n-елементна множина. Розглядаємо ін’єктивні відображення з A в B. Доводимо твердження індукцією по m. При $m=1$ очевидно маємо, що $A_n^m = n$. Нехай твердження правильне при $m = k, n-1 \geq k \geq 1$, Покажемо, що воно правильне при $m = k+1$. Нехай $In(W,V)$ – множина ін’єктивних відображень з W в V, x – деякий елемент множини A. Покладемо:

$$D_c := \{ f \mid f \in In(A,B), f(x) = c \},$$

де $c \in B$.

Розглянемо відображення

$$G_c : \begin{cases} D_c \to In(A \setminus \{x\}, B \setminus \{c\}), \\ f \mapsto G_c(f), \forall v \in A \setminus \{x\} : G_c(f)(v) = f(v) \end{cases} .$$

Зрозуміло, що таке відображення бієктивне. Тому $\left| D_c \right| = \left| In(A \setminus \{x\}, B \setminus \{c\}) \right|$. Але тоді за індукційним припущенням $\left| D_c \right| = A_{n-1}^k$. Отже, для довільного $c \in B$ $\left| D_c \right| = A_{n-1}^k$. Зрозуміло, що

$\forall c,d \in B : c \neq d \Rightarrow D_c \cap D_d = \varnothing$. Тому за правилом суми отримаємо, що $A_n^{k+1} = |In(A,B)| = \left|\bigcup_{c\in B} D_c\right| = |B| A_{n-1}^k = n(n-1)...(n-k)$. Твердження доведено.

Зауваження. Очевидно, що при $m > n$ $A_n^m = 0$.

Отриману для кількості розміщень формулу можна записати в компактному вигляді, а саме:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

при $m \leq n$.

Бієктивне відображення n-елементної множини A в себе називається перестановкою n елементів. Нагадаємо, що множина всіх таких відображень позначається через $S(A)$.

Кількість всіх перестановок n даних елементів позначається через P_n. З попереднього маємо, що $P_n = A_n^n$. Отже,

$$P_n = n!$$

2.3. Комбінації

Комбінацією з n елементів до m елементів називається m-елементна підмножина n-елементної множини. Кількість всіх комбінацій з n даних елементів до m елементів позначається через C_n^m.

Твердження. При $m \leq n$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m}.$$

Доведення. Нехай A – m-елементна множина, B – n-елементна множина. Нехай V – множина всіх m-елементних підмножин множини B. Позначимо через G_K множину

$$\{f \mid f \in In(A,B), f(A) = K\},$$

де $K \in V$. Оскільки $|A| = |K|$, то існує бієктивне відображення $g : A \to K$. Визначимо відображення $h : K \to B$ так:

$$\forall x \in K : h(x) = x.$$

Покажемо, що $G_K = \{h \circ w \circ g \mid w \in S(K)\}$. Очевидно, що $G_K \supseteq \{h \circ w \circ g \mid w \in S(K)\}$. Покажемо тепер, що

$$G_K \subseteq \{h \circ w \circ g \mid w \in S(K)\}.$$

Нехай $f \in G_K$. Визначимо відображення $w \in S(K)$ так:

$$\forall k \in K : w(k) = f(g^{-1}(k)).$$

Покажемо, що $f = h \circ w \circ g$. Справді, для довільного $a \in A$ $(h \circ w \circ g)(a) = h(w(g(a))) = h(f(g^{-1}(g(a)))) = h(f(a)) = f(a)$. Тому

$$G_K = \{h \circ w \circ g \mid w \in S(K)\}.$$

Покажемо, що

$$\forall w_1, w_2 \in S(K) : h \circ w_1 \circ g = h \circ w_2 \circ g \Rightarrow w_1 = w_2 .$$

Нехай k – довільний елемент множини K. В силу бієктивності g існує $a \in A$, для якого $g(a) = k$.

Тоді $(h \circ w_1 \circ g)(a) = (h \circ w_2 \circ g)(a)$.

Звідси $h(w_1(g(a))) = h(w_2(g(a)))$. Використовуючи ін'єктивність h, маємо $w_1(g(a)) = w_2(g(a))$. Тоді $w_1(k) = w_2(k)$. Звідси $w_1 = w_2$.

Таким чином, $|G_K| = |S(K)| = P_m$. Далі, кількість всіх множин G_K, де $K \in V$, дорівнює $|V| = C_n^m$. Зрозуміло, що $In(A,B) = \bigcup_{K \in V} G_K$ і $\forall K, T \in V : K \neq T \Rightarrow G_K \cap G_T = \varnothing$. За правилом суми маємо

$$A_n^m = |In(A,B)| = \sum_{K \in V} |G_K| = \sum_{K \in V} P_m = |V| P_m = C_n^m P_m.$$

Тоді $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$. Твердження доведено.

Формулу для C_n^m, очевидно, можна переписати у вигляді

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Числа C_n^m позначають також через $\binom{n}{m}$.

2.4. Основні властивості чисел C_n^m

Твердження. Нехай $n, m \in N \bigcup \{0\}$.

1. Якщо $n \geq m$, то

$C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. Якщо $n \geq m+1$, то

$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

3. Якщо $p \geq q+1$, то

$C_{p+1}^{q+1} = C_p^{q+1} + C_{p-1}^{q} + \ldots + C_{p-q}^{1} + C_{p-q-1}^{0}$.

Доведення.

1. $C_n^{n-m} = \dfrac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \dfrac{n!}{(n-m)!m!} = C_n^m$,

2. $C_n^m + C_n^{m+1} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} + \dfrac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$

$= \dfrac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \dfrac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \dfrac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!} =$

$= \dfrac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1}$.

3. Використаємо другу властивість. Отримаємо

$C_{p+1}^{q+1} = (C_{p+1}^{q+1} - C_p^q) + (C_p^q - C_{p-1}^{q-1}) + \ldots + (C_{p-q+1}^{1} - C_{p-q}^{0}) + 1 =$

$= C_p^{q+1} + C_{p-1}^{q} + \ldots + C_{p-q}^{1} + C_{p-q-1}^{0}$.

Твердження доведено.

2.5. Перестановки з повтореннями

Відображення $f : A \to B$ називається перестановкою з повтореннями складу $(n_1, \ldots, n_k)$ відносно $b_1, \ldots, b_k$, де $A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, якщо виконується така умова:

$$\forall i \in \{1,...,k\} : n_i = \left| f^{-1}(\{b_i\}) \right|.$$

(Зрозуміло, що в цьому випадку $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ і $\forall i \in \{1,...,k\} : 0 \le n_i \le n$).

Кількість усіх таких відображень позначається через $P(n_1,...,n_k)$.

Твердження. $P(n_1,...,n_k) = \dfrac{(n_1 + ... + n_k)!}{n_1!...n_k!}$.

Доведення. Доведемо це твердження індукцією по k. При $k = 1$ воно очевидне. Бо тоді $P(n_1,...,n_k) = 1$. Припустимо, що твердження правильне для $k = q, q \ge 1$. Покажемо, що воно істинне при $k = q + 1$. Нехай D – множина всіх перестановок $f : A \to B$ з повтореннями складу $(n_1,...,n_{q+1})$ відносно $b_1,...,b_{q+1}$, де $A = \{a_1,...,a_n\}, B = \{b_1,...,b_{q+1}\}$. Нехай також V – множина всіх n_{q+1}-елементних підмножин множини A, $S \in V$. Позначимо через E_S множину всіх відображень $h : A \setminus S \to B \setminus \{b_{q+1}\}$, для яких $\forall i \in \{1,...,q\} : \left| h^{-1}(\{b_i\}) \right| = n_i$. За індукційним припущенням $\left| E_S \right| = \dfrac{(n_1 + ... + n_q)!}{n_1!...n_q!}$. Визначимо множину D_S так:

$$D_S := \{ f \in D \,|\, f^{-1}(\{b_{q+1}\}) = S \}.$$

Розглянемо відображення $\Psi : D_S \to E_S$, де

$\forall a \in A \setminus S : [\Psi(f)](a) = f(a)$.

Очевидно, що воно бієктивне. Тому $\left| D_S \right| = \left| E_S \right|$. Далі, зрозуміло, що

$$\forall S,T \in V : S \ne T \Rightarrow D_S \cap D_T = \varnothing \text{ і } D = \bigcup_{S \in V} D_S.$$

За правилом суми маємо

$$\left| D \right| = \left| \bigcup_{S \in V} D_S \right| = \sum_{S \in V} \left| D_S \right| = \frac{(n_1 + ... + n_q)!}{n_1!...n_q!} \left| V \right| = \frac{(n_1 + ... + n_q)!}{n_1!...n_q!} C_{n_1 + ... + n_q + n_{q+1}}^{n_{q+1}} =$$

$$= \frac{(n_1 + ... + n_q)!}{n_1!...n_q!} \frac{(n_1 + ... + n_q + n_{q+1})!}{n_{q+1}!(n_1 + ... + n_q + n_{q+1} - n_{q+1})!} = \frac{(n_1 + ... + n_q + n_{q+1})!}{n_1!...n_q!n_{q+1}!}.$$

Твердження доведено.

2.6. Розміщення з повтореннями

Відображення $f : A \to B$ з m-елементної множину в n-елементну називається розміщенням з повтореннями з n елементів по m елементів. Кількість всіх їх позначається через $\overline{A_n^m}$.

Твердження. $\overline{A_n^m} = n^m$.

Доведення. Доводимо індукцією по m. При $m = 1$ очевидно твердження істинне, оскільки тоді $\overline{A_n^m} = n$. Припустимо, що твердження істинне при $m = k, k \geq 1$. Доведемо твердження при $m = k + 1$. Нехай $|A| = k + 1, |B| = n$. Нехай x – деякий елемент множини A. Розглянемо множину $D_y = \{ f \in B^A \mid f(x) = y\}$, де $y \in B$, і відображення

$$\Psi : D_y \to B^{A \setminus \{x\}}, \forall a \in A \setminus \{x\} : [\Psi(f)](a) = f(a), (f \in D_y).$$

Зрозуміло, що це відображення є бієктивним, тому $|D_y| = |B^{A \setminus \{x\}}|$. За індукційним припущенням $|B^{A \setminus \{x\}}| = n^k$. Тоді $|D_y| = n^k$.

Далі, мають місце співвідношення:

$$B^A = \bigcup_{y \in B} D_y,$$

$$\forall t, q \in B : t \neq q \Rightarrow D_t \cap D_q = \varnothing.$$

Отже, за правилом суми

$$|B^A| = \sum_{y \in B} |D_y| = |B| n^k = nn^k = n^{k+1}.$$

Твердження доведено.

Наслідок. $\forall m,k \in N: \sum\limits_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in(N\bigcup\{0\})^m \\ k_1+\ldots+k_m=k}} P(k_1,\ldots,k_m) = m^k$.

2.7. Комбінації з повтореннями

Комбінацією з повтореннями з m по k називається впорядкована m-ка $(k_1,\ldots,k_m)$, для якої $k_1+\ldots+k_m=k$, де $k_1,\ldots,k_m \in N\bigcup\{0\}$. Число всіх комбінацій з повтореннями з m по k позначається через $\overline{C_m^k}$.

Твердження. $\overline{C_m^k} = C_{m+k-1}^k$.

Доведення. Доведемо твердження індукцією по m. При $m=1$ отримуємо рівняння $k_1=k$. Очевидно, що воно має точно один розв'язок. Тому $\overline{C_1^k}=1$. Припустимо, що наше твердження істинне при $m=s, s\geq 1$. Покажемо, що воно істинне при $m=s+1$.

Очевидно, що

$$k_1+\ldots+k_s+k_{s+1}=k \Leftrightarrow$$
$$(k_1+\ldots+k_s=k \wedge k_{s+1}=0)\vee(k_1+\ldots+k_s=k-1\wedge k_{s+1}=1)\vee\ldots$$
$$\vee(k_1+\ldots+k_s=0\wedge k_{s+1}=k).$$

З цього отримаємо, що

$$\overline{C_{s+1}^k} = \overline{C_s^k} + \overline{C_s^{k-1}} + \ldots + \overline{C_s^0}.$$

За індукційним припущенням тоді

$$\overline{C_{s+1}^k} = C_{s+k-1}^k + C_{s+k-2}^{k-1} + \ldots + C_{s-1}^0 = C_{s+k-1}^{(k-1)+1} + C_{(s+k-1)-1}^{k-1} + \ldots + C_{(s+k-1)-(k-1)-1}^0$$

За властивістю 3 чисел C_n^m маємо, що останній вираз дорівнює $C_{(s+k-1)+1}^{(k-1)+1} = C_{s+k}^k$. Отже, $\overline{C_{s+1}^k} = C_{s+k}^k$.

Твердження доведено.

2.8. Кількість всіх підмножин даної множини

Твердження. Нехай M – скінченна множина. Тоді $\left|P(M)\right| = 2^{|M|}$.

Доведення.

Для довільної множини $X \subseteq M$ визначимо характеристичне відображення

$$\chi_X : \begin{cases} M \to \{0,1\}; \\ u \mapsto \chi(u) = \begin{cases} 1, u \in X; \\ 0, u \in M \setminus X \end{cases} \end{cases}$$

Розглянемо відображення

$$\Psi : \begin{cases} P(M) \to \{0,1\}^M; \\ X \mapsto \chi_X \end{cases}$$

Очевидно, що дане відображення бієктивне. Тому $\left|P(M)\right| = \left|\{0,1\}^M\right|$, але раніше ми довели, що $\left|\{0,1\}^M\right| = 2^{|M|}$.

Твердження доведено.

Наслідок. $\forall n \in N \bigcup \{0\} : C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

2.9. Поліноміальна формула та формула бінома Ньютона

Твердження (поліноміальна формула).

Якщо $k, m \in N, x_1, \ldots, x_m \in R$, то

$$(x_1 + \ldots + x_m)^k = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m) \in (N \bigcup \{0\})^m \\ k_1 + \ldots + k_m = k}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}.$$

Доведення. Проведемо доведення індукцією по k. При $k = 1$ маємо, що

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m) \in (N \bigcup \{0\})^m \\ k_1 + \ldots + k_m = k}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m} = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m) \in (N \bigcup \{0\})^m \\ k_1 + \ldots + k_m = 1}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m} =$$

$$= P(1,\ldots,0) x_1^1 \ldots x_m^0 + \ldots + P(0,\ldots,1) x_1^0 \ldots x_m^1 = 1 x_1^1 \ldots x_m^0 + \ldots + 1 x_1^0 \ldots x_m^1 =$$

$$= x_1 + \ldots + x_m = (x_1 + \ldots + x_m)^k.$$

Припустимо, що твердження правильне при $k = q, q \ge 1$. Доведемо його при $k = q+1$.

Зрозуміло, що

$$(x_1 + \ldots + x_m)^{q+1} = (x_1 + \ldots + x_m)^q (x_1 + \ldots + x_m) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ k_1+\ldots+k_m=q}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m} \right) (x_1 + \ldots + x_m) =$$

$$= \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ k_1+\ldots+k_m=q}} P(k_1,\ldots,k_m)(x_1^{k_1+1} \ldots x_m^{k_m} + \ldots + x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m+1}) =$$

$$= \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ k_1+\ldots+k_m=q}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1+1} \ldots x_m^{k_m} + \ldots$$

$$+ \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ k_1+\ldots+k_m=q}} P(k_1,\ldots,k_m) x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m+1} =$$

$$= \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_1+\ldots+r_m=q+1, r_1\ge 1}} P(r_1-1,\ldots,r_m) x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} + \ldots$$

$$+ \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_1+\ldots+r_m=q+1, r_m\ge 1}} P(r_1,\ldots,r_m-1) x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} =$$

$$= \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_1+\ldots+r_m=q+1, r_1\ge 1,\ldots,r_m\ge 1}} (P(r_1-1,\ldots,r_m) + \ldots + P(r_1,\ldots,r_m-1)) x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} +$$

$$+ \sum_{\substack{(0,r_2,\ldots,r_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_2+\ldots+r_m=q+1, r_2\ge 1,\ldots,r_m\ge 1}} (P(0,r_2-1,\ldots,r_m) + \ldots + P(0,r_2,\ldots,r_m-1)) x_1^0 x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m} + \ldots$$

$$+ \sum_{\substack{(r_1,r_2,\ldots,0)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_1+\ldots+r_{m-1}=q+1, r_1\ge 1,\ldots,r_{m-1}\ge 1}} (P(r_1-1,\ldots,r_{m-1},0) + \ldots + P(r_1,\ldots,r_{m-1}-1,0)) x_1^{r_1} \ldots x_{m-1}^{r_{m-1}} x_m^0 =$$

$$= \sum_{\substack{(r_1,\ldots,r_m)\in(N\cup\{0\})^m \\ r_1+\ldots+r_m=q+1, r_1\ge 1,\ldots,r_m\ge 1}} \left(\frac{(r_1+\ldots+r_m-1)!}{(r_1-1)!\ldots r_m!} + \ldots + \frac{(r_1+\ldots+r_m-1)!}{r_1!\ldots(r_m-1)!} \right) x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} +$$

$$+\sum_{\substack{(0,r_2,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_2+...+r_m=q+1,r_2\ge1,...,r_m\ge1}}\left(\frac{(r_2+...+r_m-1)!}{(r_2-1)!...r_m!}+...+\frac{(r_2+...+r_m-1)!}{r_2!...(r_m-1)!}\right)x_1^0x_2^{r_2}...x_m^{r_m}+...$$

$$+\sum_{\substack{(r_1,r_2,...,0)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_{m-1}=q+1,r_1\ge1,...,r_{m-1}\ge1}}\left(\frac{(r_1+...+r_{m-1}-1)!}{(r_1-1)!...r_{m-1}!}+...+\frac{(r_1+...+r_{m-1}-1)!}{r_1!...(r_{m-1}-1)!}\right)x_1^{r_1}...x_{m-1}^{r_{m-1}}x_m^0=$$

$$=\sum_{\substack{(r_1,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_m=q+1,r_1\ge1,...,r_m\ge1}}\frac{(r_1+...+r_m-1)!(r_1+...+r_m)}{r_1!...r_m!}x_1^{r_1}...x_m^{r_m}+$$

$$+\sum_{\substack{(0,r_2,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_2+...+r_m=q+1,r_2\ge1,...,r_m\ge1}}\frac{(r_2+...+r_m-1)!(r_2+...+r_m)}{r_2!...r_m!}x_1^0x_2^{r_2}...x_m^{r_m}+...$$

$$+\sum_{\substack{(r_1,r_2,...,0)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_{m-1}=q+1,r_1\ge1,...,r_{m-1}\ge1}}\frac{(r_1+...+r_{m-1}-1)!(r_1+...+r_{m-1})}{r_1!...r_{m-1}!}x_1^{r_1}...x_{m-1}^{r_{m-1}}x_m^0=$$

$$=\sum_{\substack{(r_1,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_m=q+1,r_1\ge1,...,r_m\ge1}}P(r_1,...,r_m)x_1^{r_1}...x_m^{r_m}+$$

$$+\sum_{\substack{(0,r_2,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_2+...+r_m=q+1,r_2\ge1,...,r_m\ge1}}P(0,r_2,...,r_m)x_1^0x_2^{r_2}...x_m^{r_m}+...$$

$$+\sum_{\substack{(r_1,r_2,...,0)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_{m-1}=q+1,r_1\ge1,...,r_{m-1}\ge1}}P(r_1,...,r_{m-1},0)x_1^{r_1}...x_{m-1}^{r_{m-1}}x_m^0=$$

$$=\sum_{\substack{(r_1,...,r_m)\in(N\cup\{0\})^m\\ r_1+...+r_m=q+1}}P(r_1,...,r_m)x_1^{r_1}...x_m^{r_m}.$$

(Тут ми для зручності викладу вважали $a^0=1$).

Твердження доведено.

Наслідок (формула бінома Ньютона). Якщо $k\in N, x_1, x_2\in R$, то

$$(x_1+x_2)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i x_1^{k-i}x_2^i.$$

Доведення. Відповідно до попереднього твердження, маємо

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(N\cup\{0\})^2 \\ k_1+k_2=k}} P(k_1,k_2)x_1^{k_1}x_2^{k_2} = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(N\cup\{0\})^2 \\ k_1+k_2=k}} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}x_1^{k_1}x_2^{k_2} =$$

$$= \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(N\cup\{0\})^2 \\ k_1+k_2=k}} \frac{k!}{k_1!k_2!}x_1^{k_1}x_2^{k_2} = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(N\cup\{0\})^2 \\ k_1+k_2=k}} C_k^{k_2}x_1^{k_1}x_2^{k_2} =$$

$$= \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(N\cup\{0\})^2 \\ k_1+k_2=k}} C_k^{k_2}x_1^{k-k_2}x_2^{k_2} = \sum_{k_2=0}^{k} C_k^{k_2}x_1^{k-k_2}x_2^{k_2} = \sum_{i=0}^{k} C_k^{i}x_1^{k-i}x_2^{i}.$$

Наслідок доведено.

2.10. Формальні степеневі ряди та рекурентні співвідношення

Формальні степеневі ряди відіграють надзвичайно велику роль у багатьох галузях математики (алгебра, аналіз, дискретна математика). Тут ми коротко зупинимося на основних фактах цієї теорії, розглянувши найважливіші приклади обчислень в області цих рядів та застосувань.

Нехай $(P, +, \cdot)$ – поле (для простоти можна припускати, що P – множина комплексних чисел).

Формальним степеневим рядом над полем P називається вираз $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$, де $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \in P$.

Будемо говорити, що формальні степеневі ряди

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (1)$$

і

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots (2)$$

є рівними, якщо:

$$a_0 = b_0;$$
$$a_1 = b_1;$$
$$\ldots$$
$$a_n = b_n$$
$$\ldots$$

Сумою формальних степеневих рядів над полем P (1) і (2) називається формальний степеневий ряд

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots$$

Добутком формальних степеневих рядів над полем P (1) і (2) називається формальний степеневий ряд

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots +$$
$$+ a_kb_{n-k} + \ldots + a_nb_0)x^n + \ldots.$$

Нехай $(P,\ +,\ \cdot)$ – поле. Множина всіх формальних степеневих рядів над полем P позначається через $P[[x]]$.

З алгебри відомо, що через $P[x]$ позначають множину всіх поліномів від x з коефіцієнтами з поля P. Легко бачити, що $P[x] \subseteq P[[x]]$

Відомо, що $(P[[x]],\ +,\ \cdot)$ – комутативне кільце без дільників нуля.

Означення: Нехай $f(x),\ g(x) \in P[[x]]$, де P – поле, $g(x) \neq 0$, $l(x) \in P[[x]]$ називається часткою при діленні $f(x)$ на $g(x)$ якщо $f(x) = g(x) \cdot l(x)$.

Таку частку позначають через $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Якщо частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ існує, то вона єдина. Це випливає з того, що $(P[[x]],\ +,\ \cdot)$ – кільце без дільників нуля.

Теорема. Нехай $(P,\ +,\ \cdot)$ – поле,

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + \ldots \in P[[x]]$, частка $\dfrac{1}{f(x)}$ існує тоді і тільки тоді, коли $a_0 \neq 0$.

Доведення.

($\Rightarrow$) Нехай частка $\dfrac{1}{f(x)}$ існує, тоді існує формальний степеневий ряд

$$l(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + \ldots \in P[[x]],$$

для якого $1 = f(x) \cdot l(x)$.

Звідси

$$1 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + ... + (a_0 b_n + \ldots + a_n b_0)x^n + \ldots$$

З рівності маємо, що $1 = a_0 b_0$, тому $a_0 \neq 0$.

($\Leftarrow$) Нехай тепер $a_0 \neq 0$.

Розглянемо систему рівнянь з невідомими $b_0, b_1, ..., b_n, ...$

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1; \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0; \\ \quad .... \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = 0 \\ \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

Тоді, враховуючи $a_0 \neq 0$, поступово однозначно визначимо всі невідомі

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{a_0}; \\ b_1 = -\dfrac{1}{a_0}(a_1 b_0); \\ \quad .... \\ b_n = -\dfrac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0); \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Таким чином, дана система має розв’язок, причому єдиний. Тепер розглянемо формальний степеневий ряд

$l(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + \ldots$, де $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, \ldots$ – розв’язки системи. Тоді $f(x) \cdot l(x) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + ... + 0 \cdot x^n + \ldots = 1$

Отже, $l(x)$ – частка $\dfrac{1}{f(x)}$.

Теорему доведено.

Формальний степеневий ряд (1) іноді зручно записувати з використанням символу суми, а саме у такому вигляді:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Приклади:

1. Обчислити частку $\dfrac{1}{1-ax}$, де $a \in P$.

Оскільки нульовий коефіцієнт виразу $1-ax$ дорівнює 1, то за попередньою теоремою така частка існує.

Покладемо

$$\frac{1}{1-ax} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + \ldots .$$

Тоді $(1-ax)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n + \ldots) = 1.$

Звідси

$$1 = b_0 + (b_1 - ab_0)x + (b_2 - ab_1)x^2 + ... + (b_n - ab_{n-1})x^n + \ldots .$$

Використовуючи означення рівності двох формальних степеневих рядів і рівність

$$1 = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n + \ldots,$$

отримаємо відповідну систему, а з неї однозначно визначимо невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 - ab_0 = 0 \\ b_2 - ab_1 = 0 \\ \quad ..... \\ b_n - ab_{n-1} = 0 \\ \quad \ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = a \\ b_2 = a^2 \\ \quad ...... \\ b_n = a^n \\ \quad \ldots\ldots \end{cases}.$$

Отже, $\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + ... + a^nx^n + \ldots.$ Можна записати отримане співвідношення і у вигляді $\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^nx^n$, де вважаємо, що $a^0 = 1$.

2. Обчислити частку $\frac{1}{(1-ax)^2}$.

$$+\left(a^2 + a^2 + a^2\right)x^2 + ... + \left(a^n + a^n + \ldots + a^n\right)x^n + \ldots = 1 + 2ax + 3a^2x^2 + \ldots +$$

$$+(n+1)a^nx^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a^kx^k.$$

3. Обчислити частку $\frac{1}{(1-ax)^3}$.

$$\frac{1}{(1-ax)^3} = \left(1 + ax + a^2x^2 + ... + a^nx^n + \ldots\right)^2\left(1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^nx^n + \ldots\right) =$$

$$= (1 + 2ax + 3a^2x^2 + ... + (n+1)a^nx^n + \ldots)(1 + ax + a^2x^2 + \ldots + a^nx^n + \ldots) =$$

$$= 1 + 3ax + 6a^2x^2 + ... + (1 + 2 + ... + (n+1))a^nx^n + ... =$$

$$= 1 + 3ax + 6a^2x^2 + ... + \frac{(n+1)(n+2)}{2}a^nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}a^nx^n$$

.

4. Обчислити частку $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Перший спосіб.

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}\left(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}x^2+\ldots+\frac{1}{2^n}x^n+\ldots\right)=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}+1\right)x+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1\right)x^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+1\right)x^n+\ldots\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}x+\ldots+\left(2-\frac{1}{2^n}\right)x^n+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Другий спосіб.

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{2(1-x)\left(1-\frac{1}{2}x\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-x}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}\right)=*$$

Зобразимо дріб $\dfrac{1}{(1-x)\left(1-\frac{1}{2}x\right)}$ у вигляді суми двох елементарних дробів.

Справді, покладемо:

$$\frac{1}{(1-x)\left(1-\frac{1}{2}x\right)}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}x}.$$

Знайдемо тепер A, B, звівши дроби правої частини рівності до спільного знаменника та використавши умову рівності формальних степеневих рядів для чисельників лівої та правої сторони.

$$\begin{cases}A+B=1\\ -\frac{1}{2}A-B=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{A}{2}=1\\ B=-\frac{1}{2}A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\ B=-1\end{cases}.$$

$$* = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}x^n + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n + \ldots$$

5. Перетворити ряд $f(x) = 1 + 4x + 7x^2 + \ldots + \left(3n+1\right)x^n + \ldots$ у частку двох поліномів.

Очевидно, що

$$f\left(x\right) - x \cdot f\left(x\right) = 1 + 3x + 3x^2 + 3x^n + \ldots = \frac{3}{1-x} - 2.$$

Тоді

$$f\left(x\right)\left(1-x\right) = \frac{1+2x}{1-x}; \;\; f\left(x\right) = \frac{1+2x}{\left(1-x\right)^2}.$$

6. Коренем квадратним з $f(x) \in P[[x]]$ називається $g(x) \in P[[x]]$, для якого $f(x) = (g(x))^2$.

Знайти необхідні та достатні умови існування квадратних коренів з $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \in \mathbb{C}[[x]]$.

Визначимо степінь формального степеневого ряду $f(x)$: $\deg(f(x)) = \min\{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \,|\, a_n \neq 0\}$. Покажемо, що у випадку існування квадратних коренів з ряду число $\deg(f(x))$ є парним. Припустимо протилежне. Нехай

$$\deg(f(x)) = 2k+1, k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \text{ і}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots \in \mathbb{C}[[x]], (g(x))^2 = f(x).$$

Тоді

$$\begin{cases} b_0^2 = a_0; \\ 2b_0 b_2 + b_1^2 = a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2b_0 b_{2k} + 2b_1 b_{2k-1} + \ldots + 2b_{k-1} b_{k+1} + b_k^2 = a_{2k} \end{cases},$$

але $a_0 = a_2 = \ldots = a_{2k} = 0$. Тоді

$$\begin{cases} b_0^2 = 0; \\ 2b_0b_2 + b_1^2 = 0; \\ \text{...} \\ 2b_0b_{2k} + 2b_1b_{2k-1} + \ldots + 2b_{k-1}b_{k+1} + b_k^2 = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння системи отримуємо, що $b_0 = 0$. З другого – $b_1 = 0$, …, з $(k+1)$-го – $b_k = 0$.

Тоді $a_{2k+1} = 2b_0b_{2k+1} + 2b_1b_{2k} + \ldots + 2b_{k-1}b_{k+2} + 2b_kb_{k+1} = 0$, а це суперечить тому, що $\deg(f(x)) = 2k+1$.

Отже, парність степеня формального степеневого ряду є необхідною умовою існування коренів квадратних з нього. Покажемо тепер, що вона є й достатньою умовою.

Нехай $\deg(f(x)) = 2k, k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Тоді формальний степеневий ряд $f(x)$ можна зобразити у такому вигляді:

$$f(x) = x^{2k}t(x), t(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots \in \mathbb{C}[[x]].$$

Зрозуміло, що $c_0 \neq 0$. Якщо ми покажемо, що існує $h(x) \in \mathbb{C}[[x]]$, який є коренем квадратним з $t(x)$, то тоді $x^k h(x)$ буде коренем квадратним з $f(x)$. Розглянемо систему рівнянь відносно невідомих $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$:

$$\begin{cases} d_0^2 = c_0; \\ 2d_0d_1 = c_1; \\ 2d_0d_2 + d_1^2 = c_2; \\ 2d_0d_3 + 2d_1d_2 = c_3; \\ \text{...} \\ 2d_0d_{2k} + 2d_1d_{2k-1} + \ldots + 2d_{k-1}d_{k+1} + d_k^2 = c_{2k}; \\ \text{...} \end{cases}$$

Ця система є рівносильною до наступної (тут беремо до уваги $c_0 \neq 0$)

$$
\begin{cases}
d_0 = \pm\sqrt{c_0}; \\
d_1 = \dfrac{1}{2d_0}c_1; \\
d_2 = \dfrac{1}{2d_0}(c_2 - d_1^2); \\
d_3 = \dfrac{1}{2d_0}(c_3 - 2d_1d_2); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_{2k} = \dfrac{1}{2d_0}(c_{2k} - 2d_1d_{2k-1} - \ldots - 2d_{k-1}d_{k+1} - d_k^2); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Таким чином, система має розв'язки. Розглянемо якийсь розв'язок $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots \in \mathbb{C}$ цієї системи. Нехай $h(x) = d_0 + d_1x + \ldots + d_nx^n + \ldots$. Зрозуміло, що $(h(x))^2 = t(x)$. Тоді $(x^k h(x))^2 = f(x)$.

Зауваження. Можна довести, що

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \pm\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k2^{2k-1}} C_{2k-2}^{k-1} x^k\right).$$

Нехай $(P, +, \cdot)$ – поле, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – послідовність елементів поля P.

Формальний степеневий ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ над полем P називається породжувальною функцією для послідовності $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (або породжувальним формальним степеневим рядом).

Кажуть, що послідовність $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ елементів поля P є лінійною рекурентною послідовністю, якщо існує натуральне число m і елементи $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots,\ c_m \in P$ такі, що для $n \geq m$

$$a_n = c_m a_{n-m} + c_{m-1} a_{n-m+1} + \ldots + c_1 a_{n-1} \quad (1).$$

Співвідношення такого виду називаються лінійними рекурентними співвідношеннями.

Розглянемо поліном

$$1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_m x^m \qquad (2)$$

для лінійної рекурентної послідовності $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$, що задовольняє співвідношення (1).

Твердження. Добуток породжувального лінійну рекурентну послідовність $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$ формального степеневого ряду $f(x)$ і полінома (2) для цієї послідовності є поліномом.

Доведення. Справді,

$$f(x)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_m x^m) =$$

$$= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)(1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_m x^m) =$$

$$= a_0 + (-a_0 c_1 + a_1)x + ... + (-a_0 c_{m-1} - ... + a_{m-1})x^{m-1} +$$

$$+(-a_0 c_m - a_1 c_{m-1} - ... - a_{m-1} c_1 + a_m)x^m + ...$$

$$+(-a_s c_m - a_{s+1} c_{m-1} - ... - a_{s+m-1} c_1 + a_{s+m})x^{m+s} + ... =$$

$$= a_0 + (-a_0 c_1 + a_1)x + ... + (-a_0 c_{m-1} - ... + a_{m-1})x^{m-1} + 0 \cdot x^m + ...$$

$$+0 \cdot x^{m+s} + ... = a_0 + (-a_0 c_1 + a_1)x + ... + (-a_0 c_{m-1} - ... + a_{m-1})x^{m-1}.$$

Твердження доведено.

Отже,

$$f(x) = \frac{a_0 + (-a_0 c_1 + a_1)x + ... + (-a_0 c_{m-1} - ... - a_{m-2} c_1 + a_{m-1})x^{m-1}}{1 - c_1 x - c_2 x^2 - \ldots - c_m x^m} - \quad (3)$$

породжувальна функція для послідовності $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$, заданої співвідношенням (2).

Приклад.

Розглянемо послідовність чисел $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$ яка задається таким співвідношенням

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $a_0 = a_1 = 1$, тобто $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ Числа цієї послідовності називаються числами Фібоначчі. Потрібно представити a_n у вигляді аналітичного виразу від n.

Розглянемо породжувальний формальний степеневий ряд для такої послідовності $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

Перетворимо цей формальний степеневий ряд на частку поліномів. Використаємо формулу (3), тоді

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Розглянемо відповідне рівняння:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Визначимо його корені:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Далі,

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = -\frac{1}{x^2 + x - 1} = -\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} = \frac{1}{(1 + x_2 x)} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(1 + x_1 x)} = \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}, \text{ де}$$

$$\alpha = -x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\beta = -x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Тоді $f(x) = \dfrac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$.

Представимо дріб у вигляді суми елементарних дробів, а саме:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}.$$

Тоді

$$1=A(1-\beta x)+(1-\alpha x)+B(1-\alpha x).$$

Звідси

$$\begin{cases}A+B=1\\ -\beta A-\alpha B=0\end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему.

$$A=-\frac{\alpha}{\beta}B,$$

$$B=\frac{\beta}{\beta-\alpha}.$$

Далі,

$$B=\frac{\beta}{\frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\beta}{-\frac{2\sqrt{5}}{2}},$$

$$B=\frac{\beta}{-\sqrt{5}}=-\frac{\beta}{\sqrt{5}},$$

$$A=-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}.$$

Тоді

$$f(x)=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\beta x}.$$

Звідси отримаємо

$$f(x)=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}\left(1+\alpha x+\alpha^2x^2+\ldots+\alpha^nx^n+\ldots\right)-\frac{\beta}{\sqrt{5}}\left(1+\beta x+\beta^2x^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\beta^n x^n+\ldots\right)=\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}x+\ldots+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}x^n+\ldots$$

Тоді

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right).$$

Підставимо значення α, β. Тоді матимемо

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Звідси отримаємо цікавий побічний результат

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте правило суми та принцип Діріхле.
2. Сформулюйте правило включень та вилучень.
3. Сформулюйте правило добутку.
4. Сформулюйте означення розміщення, перестановки та комбінації. Запишіть відповідні формули.
5. Сформулюйте означення розміщення з повтореннями, перестановки з повтореннями та комбінації з повтореннями. Запишіть відповідні формули.
6. Запишіть властивості біноміальних коефіцієнтів.
7. Запишіть формулу бінома Ньютона та поліноміальну формулу.
8. Що таке формальний степеневий ряд? Сформулюйте означення суми та добутку формальних степеневих рядів.
9. Як розв’язати лінійні рекурентні співвідношення за допомогою формальних степеневих рядів?
10. Виведіть формулу для обчислення чисел Фібоначчі за їх порядковим номером.

3. АЛГЕБРА ВИСЛОВЛЕНЬ

3.1. Висловлення та операції над ними

Висловлення належить до первісних понять і тому не означується. Уведемо це поняття описово. Під висловленням розуміємо таке речення (твердження), яке є істинним (приписуємо такому висловленню значення 1) або хибним (0). Висловлення не може бути одночасно істинним і хибним. Значення істинності висловлень називають також істиннісними значеннями.

Означення. Запереченням висловлення A називається таке висловлення $\overline{A}$, яке є хибним тоді й тільки тоді, коли A є істинним.

Це означення можна записати за допомогою таблиці:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

0 – хибне, а 1 – істинне значення.

Інколи заперечення позначають ще й так: $\neg A$ (не A).

Означення. Диз'юнкцією висловлень A і B називається висловлення $A \vee B$, яке є хибним тоді й тільки тоді, коли A і B є хибними.

Це можна записати за допомогою таблиці:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диз'юнкцію інколи записують так: A або B.

Означення. Кон'юнкцією висловлень A і B називається висловлення $A \wedge B$, яке є істинним тоді й тільки тоді, коли A і B істинні.

Таблично це означення записують так:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Кон'юнкцію ще позначають так: A і B.

Означення. Імплікацією висловлень A і B називається висловлення $A \to B$, яке є хибним тоді й тільки тоді, коли A є істинним, а B – хибним.

Це можна записати у вигляді таблиці:

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Інколи імплікацію записують так: якщо A, то B.

Означення. Еквіваленцією висловлень A і B називається висловлення $A \leftrightarrow B$, яке є істинним тоді й тільки тоді, коли обидва висловлення A і B мають однакове значення істинності, тобто вони є або одночасно істинними, або одночасно хибними.

Таблично це записують так:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.2. Формули алгебри висловлень

Означення. Змінні, єдиними можливими значеннями яких є висловлення, називаються пропозиційними.

Пропозиційні змінні (букви) будемо позначати малими латинськими літерами з індексами або без них (у вправах допускатимемо вживання великих латинських букв).

Будемо використовувати позначення $|A| = 1$ тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а $|A| = 0$ тоді і тільки тоді, коли A – хибне.

Означення. Формулою алгебри висловлень називається один з таких виразів:

1) пропозиційна буква;
2) $\overline{A}$;
3) $(A \vee B)$;
4) $(A \wedge B)$;
5) $(A \to B)$;
6) $(A \leftrightarrow B)$, де A і B – формули алгебри висловлень.

Приклади.

1) p, q, r – формули алгебри висловлень;

2) $(p \to q)$, $(q \wedge r)$, $\overline{p}$ – формули;

3) $\left(\overline{p} \wedge (p \to q)\right)$ – формула;

4) $\left(\overline{p} \wedge (p \to q)\right)$ – формула;

5) $\overline{p}$ – формула.

Формули, що збігаються з пропозиційними буквами, будемо називати атомарними. Усі інші формули називаються складними. Формули алгебри висловлень будемо позначати великими буквами латинського алфавіту. Дужки у формулах іноді будемо опускати, якщо не втрачається можливість їх відновлення. При цьому використовуємо таку пріоритетність логічних дій у порядку її спадання: $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Якщо формула U алгебри висловлень не містить у своєму записі пропозиційних змінних, відмінних від $p_1, p_2, ...p_s$, то її іноді позначають через $U(p_1, p_2, ...p_s)$.

Означення. Формула алгебри висловлень $U(p_1, p_2, ...p_s)$ називається тотожноістинною формулою (тавтологією), якщо при будь-яких наборах істиннісних значень пропозиційних змінних $p_1, p_2, ...p_s$ вона набуватиме істиннісне значення 1.

Означення. Формула алгебри висловлень $U(p_1, p_2, ...p_s)$ називається тотожнохибною формулою (суперечністю), якщо при будь-яких наборах істиннісних значень пропозиційних змінних $p_1, p_2, ...p_s$ вона набуватиме значення істинності 0.

Означення. Формула алгебри висловлень, яка не є суперечністю, називається виконуваною, а формула, яка не є ні суперечністю, ні тавтологією, називається нейтральною.

Приклади.

1) $\left(a \to (b \to a)\right)$ – тавтологія;

2) $\left(\overline{a} \wedge a\right)$ – суперечність;

3) $\left(\overline{a} \to b\right)$ – нейтральна і виконувана формула.

3.3. Рівносильність формул алгебри висловлень

Означення. Формули алгебри висловлень $F(x_1, x_2, ... x_n)$ і $G(x_1, x_2, ... x_n)$ називаються рівносильними (еквівалентними), якщо для будь-яких наборів значень істинності пропозиційних змінних $x_1, x_2, ... x_n$ вони набувають однакових значень істинності.

Рівносильність формул позначають так:

$$F(x_1, x_2, ... x_n) \equiv G(x_1, x_2, ... x_n).$$

Позначення. 0 – суперечність, 1 – тавтологія, $\vdash T$ – T є тавтологією.

Теорема. Формули алгебри висловлень F і G є рівносильними тоді й тільки тоді, коли $\vdash \left(F \leftrightarrow G\right)$

Основні рівносильності

1. $x \vee y \equiv y \vee x$,
   $x \wedge y \equiv y \wedge x$

(комутативність);

2. $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$,
   $(x \wedge y) \wedge z \equiv x \wedge (y \wedge z)$

(асоціативність);

3. $(x \vee y) \wedge z \equiv (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
   $(x \wedge y) \vee z \equiv (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

(дистрибутивність);

4. $(x \wedge y) \vee x \equiv x$,

$(x \vee y) \wedge x \equiv x$

(поглинання);

5. $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) \equiv x$,

$(x \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) \equiv x$

(склеювання);

6. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$;

7. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;

8. $\overline{\overline{x}} \equiv x$

(рівносильність подвійного заперечення);

9. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$,

$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$

(рівносильності де Моргана);

10. $x \vee x \equiv x$,

$x \wedge x \equiv x$

(рівносильності ідемпотентності);

11. $x \vee \overline{x} \equiv 1$

(рівносильність виключення третього);

12. $x \wedge \overline{x} \equiv 0$

(рівносильність несуперечності) ;

13, 14. $\left.\begin{array}{l} x \vee 1 \equiv 1, \\ x \wedge 1 \equiv x, \\ x \wedge 0 \equiv 0, \\ x \vee 0 \equiv x \end{array}\right\}$ – властивості констант;

15. $x \to y \equiv \overline{y} \to \overline{x}$

(рівносильність контрапозиції).

Приклад. $\left((x \to y) \wedge (\bar{z} \to \bar{x})\right) \vee \left(z \vee \bar{x}\right) \equiv z \vee \bar{x}$ (за рівносильностями 6, 8, 4).

Властивості відношення рівносильності на множині формул алгебри висловлень

Сформулюємо кілька важливих, проте очевидних тверджень.

1. $F \equiv F$ для будь-якої формули F (рефлексивність).

2. Якщо $F \equiv G$, то $G \equiv F$ для будь-яких формул F і G (симетричність).

3. Якщо $F \equiv G$ і $G \equiv T$, то $F \equiv T$ для будь-яких формул F, G і T (транзитивність).

Теорема. Відношення рівносильності на множині всіх формул алгебри висловлень є відношенням еквівалентності.

Зауваження 1. Нехай U – множина усіх формул алгебри висловлень від змінних, що належать сукупності $\{x_1, x_2, ...\}$. Розглянемо факторможину $U/\equiv$. Задамо на ній відношення таким способом:

$$[A]_{\equiv} \geq [B]_{\equiv} \overset{def}{\Leftrightarrow} B \to A \text{ є тавтологією.}$$

Легко бачити, що так задане відношення визначене коректно, тобто не залежить від представників класів еквівалентності. Нескладна перевірка показує, що це відношення є відношенням часткового порядку. Далі, можна побачити, що $\exists \sup\{[C]_{\equiv},[D]_{\equiv}\}, \inf\{[C]_{\equiv},[D]_{\equiv}\}$ для довільних $[C]_{\equiv},[D]_{\equiv} \in U/\equiv$. Більше того, $\sup\{[C]_{\equiv},[D]_{\equiv}\} = [C]_{\equiv} \vee [D]_{\equiv}$, $\inf\{[C]_{\equiv},[D]_{\equiv}\} = [C]_{\equiv} \wedge [D]_{\equiv}$. Тому $(U/\equiv, \geq)$ є решіткою. Перевірка умов показує, що $(U/\equiv, \geq)$ є булевою решіткою (алгеброю). Цю булеву алгебру називають алгеброю Лінденбаума – Тарського.

Зауваження 2. Доведення рівносильностей 1–15 можна провести за допомогою таблиць істинності. Наприклад, доведемо одну з рівносильностей де Моргана.

Доведення рівносильності 9.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Зауваження 3. За допомогою основних рівносильностей можна спрощувати вигляд формул, якщо взяти до уваги таке: якщо $F_1 \equiv F_2, F_2 \equiv F_3, ..., F_{n-1} \equiv F_n$, то $F_1 \equiv F_n$.

Зауваження 4. Використовуючи рівносильності 1–15, можна отримати цілу низку тавтологій. Наприклад, з рівносильності 8 маємо $x \leftrightarrow \overline{\overline{x}}$.

3.4. Логічне слідування на базі алгебри висловлень

Означення. Будемо говорити, що формула $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ логічно слідує на базі алгебри висловлень з формул $F_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., F_k(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо формула G набуває значення істинності 1 при будь-яких наборах істиннісних значень пропозиційних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, при яких формули $F_1, ..., F_k$ одночасно набувають значення істинності 1.

Формули $F_1, ..., F_k$ називаються посилками, а G – логічним висновком.

Позначення. $F_1, ..., F_k \vdash G$.

Теорема. Нехай $F_1,...,F_k$, G – формули, причому G – тавтологія. Тоді $F_1,...,F_k \vdash G$.

Теорема. Нехай $F_1,...,F_k$, G – формули. $F_1,...,F_k \vdash G$ тоді й тільки тоді, коли $\vdash F_1 \wedge ... \wedge F_k \to G$.

Доведення.

Нехай $F_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1,...,k$; $G = G(x_1, x_2, ..., x_n)$.

($\to$) Нехай $F_1,...,F_k$. Припустимо, що формула $F_1 \wedge ... \wedge F_k \to G$ не є тавтологією. Тоді при деякому наборі істиннісних значень пропозиційних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ матимемо, що $|F_1 \wedge ... \wedge F_k \to G| = 0$. Тоді при цьому ж наборі $|F_1 \wedge ... \wedge F_k| = 1$, $|G| = 0$. Остаточно при цьому ж наборі $|F_1| = ... = |F_k| = 1$, $|G| = 0$, що суперечить тому, що G є логічним висновком з формул $F_1,...,F_k$. Отже, припущення не є правильним, тому формула $F_1 \wedge ... \wedge F_k \to G$ є тавтологією.

($\leftarrow$) Нехай $F_1 \wedge ... \wedge F_k \to G$ – тавтологія (1).

Розглянемо довільний набір істиннісних значень пропозиційних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, при якому $|F_1| = ... = |F_k| = 1$. Тоді при тому ж наборі істиннісних значень пропозиційних змінних $|F_1 \wedge ... \wedge F_k| = 1$. Враховуючи тепер (1), при тому ж наборі істиннісних значень пропозиційних змінних маємо, що $|G| = 1$. Ми довели, що $F_1,...,F_k \vdash G$.

Теорему доведено.

Наслідок. Нехай A і B – довільні формули алгебри висловлень. Тоді маємо, що $A, A \to B \vdash B$.

Доведення.

Згідно з попередньою теоремою, ми повинні довести, що формула $A \wedge (A \to B) \to B$ тотожноістинна.

Справді,

$$A \wedge (A \to B) \to B \equiv A \wedge (\overline{A} \vee B) \to B \equiv (A\overline{A} \vee AB) \to B \equiv AB \to B \equiv$$
$$\equiv \overline{AB} \vee B \equiv (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee B \equiv \overline{A} \vee (\overline{B} \vee B) \equiv \overline{A} \vee 1 \equiv 1.$$

Наслідок доведено.

3.5. Види теорем. Необхідна і достатня умови

Більшість теорем у математиці мають логічну структуру вигляду

$$A \to B \qquad (1),$$

яку словами можна записати так: якщо виконується A, то виконується B. При цьому кажуть, що A є достатньою умовою для B, а B – необхідна умова для A.

У таких теоремах A називають умовою, а B – висновком.

Розглянемо тепер теореми з такими логічними структурами: $B \to A$ (2), $\overline{B} \to \overline{A}$ (3), $\overline{A} \to \overline{B}$ (4).

Теорему (1) будемо називати прямою теоремою. Тоді

теорема (2) називається оберненою до теореми (1);

теорема (3) називається спряженою до теореми (1);

теорема (4) називається протилежною до теореми (1).

За законом контрапозиції маємо, що пряма та спряжена теореми є рівносильними.

Зауважимо, що якщо пряма теорема має місце, то протилежна і обернена не завжди істинні.

3.6. Методи доведення теорем

У математиці існують два основних методи доведення теорем, а саме: прямий метод та метод доведення від супротивного.

Прямий метод доведення теореми ґрунтується на логічному слідуванні наступного вигляду:

$$A \to A_1, A_1 \to A_2, ..., A_n \to A_{n+1} (= B) \vdash A \to B.$$

Метод доведення від супротивного використовується для доведення теореми $A \to B$. Для цього припускають, що ця імплікація місця не має, отримують суперечність. Отже, імплікація $A \to B$ має місце.

3.7. Нормальні форми формул алгебри висловлень

3.7.1. Елементарні кон'юнкції [диз'юнкції]

Означення. Елементарною кон'юнкцією [диз'юнкцією] називається вираз вигляду:

$$x_1^* \wedge x_2^* \wedge ... \wedge x_n^* \quad \left(x_1^* \vee x_2^* \vee ... \vee x_n^*\right),$$

де $x_i^* = x_i$ або $x_i^* = \overline{x}_i, \left(i = 1, 2, ..., n\right)$, $x_1, x_2, ...x_n$ – пропозиційні змінні.

Означення. Елементарна кон'юнкція [диз'юнкція] називається правильною, якщо кожна пропозиційна змінна входить до неї не більше ніж один раз, включаючи входження змінної під знаком заперечення.

Приклади.

$a \wedge \overline{a}$ – елементарна кон'юнкція, яка не є правильною;

$a \vee \overline{a}$ – елементарна диз'юнкція, яка не є правильною;

$a \vee b \vee a$ – елементарна диз'юнкція, яка не є правильною;

$a \vee \overline{b}$ – правильна елементарна диз'юнкція.

Означення. Елементарна кон'юнкція [диз'юнкція] називається повною відносно пропозиційних змінних $x_1, x_2, ...x_n$, якщо кожна з цих пропозиційних змінних входить до неї або із знаком заперечення, або без нього.

Приклад. $x_1 \wedge \overline{x_1} \wedge x_2$ – повна елементарна кон'юнкція відносно змінних x_1, x_2, яка не є правильною.

3.7.2. Диз'юнктивні та кон'юнктивні нормальні форми (днф [кнф])

Означення. Диз'юнктивною [кон'юнктивною] нормальною формою (днф [кнф]) називається диз'юнкція [кон'юнкція] декількох елементарних кон'юнкцій [диз'юнкцій].

Приклади.

1) $x, \overline{x}$ – кнф, днф;

2) $x_1 \wedge \overline{x_2}$ – днф, кнф;

3) $x_1 \vee \overline{x_2}$ – днф, кнф;

4) $\left(x_1 \vee \overline{x_2}\right) \wedge x_3$ не є днф, але є кнф;

5) $\left(x_1 \vee x_3\right) \wedge \left(x_2 \vee \overline{x_4}\right)$ – кнф;

6) $x_1 \wedge x_3 \vee x_2 \wedge \overline{x_4}$ – днф.

Означення. Формула алгебри висловлень $F\left(x_1, x_{2,\ldots,} x_n\right)$ називається досконалою диз'юнктивною [кон'юнктивною] нормальною формою (ддиф [дкнф]) відносно пропозиційних змінних $x_1, x_{2,\ldots,} x_n$, якщо вона є диз'юнкцією [кон'юнкцією] декількох попарно різних правильних і повних відносно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ елементарних кон'юнкцій [диз'юнкцій].

3.7.3. Алгоритм зведення формули до рівносильної днф [кнф]

1. Позбуваємось у цій формулі імплікації та еквіваленції, використовуючи такі рівносильності: $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$ і $x \leftrightarrow y \equiv \left(\overline{x} \vee y\right) \wedge \left(x \vee \overline{y}\right)$.

2. В отриманій формулі в разі потреби досягаємо рівносильними перетвореннями того, щоби знак заперечення або був відсутній, або стосувався лише пропозиційних змінних. Для цього використовуємо такі рівносильності:

$$\overline{x \vee y} \equiv \bar{x}\bar{y};\ \overline{xy} \equiv \bar{x} \vee \bar{y};\ \bar{\bar{x}} \equiv x.$$

3. До отриманої формули в разі потреби застосовуємо дистрибутивну рівносильність кон'юнкції [диз'юнкції] відносно диз'юнкції [кон'юнкції].

Приклад. Звести формулу $\bar{x} \leftrightarrow \left(x \vee \bar{y}\right)$ до рівносильної днф.

$$\bar{x} \leftrightarrow \left(x \vee \bar{y}\right) \equiv \left(\bar{\bar{x}} \vee x \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee \left(\overline{x \vee \bar{y}}\right)\right) \equiv \left(x \vee x \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee \bar{x}y\right) \equiv$$

$$\equiv \left(x \vee \bar{y}\right)\left(\bar{x} \vee \bar{x}y\right) \equiv x\bar{x} \vee x\bar{x}y \vee \bar{y}\bar{x} \vee \bar{y}\bar{x}y.$$

3.7.4. Алгоритм зведення днф [кнф] до досконалої днф [кнф]

Якщо днф [кнф] не є суперечністю [тавтологією], то її можна звести рівносильними перетвореннями до ддиф [дкнф].

1. У разі необхідності в елементарних кон'юнкціях використовуємо такі рівносильності:

$x \wedge y \equiv y \wedge x$ [$x \vee y \equiv y \vee x$];

$x \wedge \left(y \wedge z\right) \equiv \left(x \wedge y\right) \wedge z$ [$x \vee \left(y \vee z\right) \equiv \left(x \vee y\right) \vee z$];

$x \wedge x \equiv x$ [$x \vee x \equiv x$];

$x \wedge \bar{x} \equiv 0$ [$x \vee \bar{x} \equiv 1$];

$0 \wedge x \equiv 0$ [$1 \vee x \equiv 1$].

2. При потребі використовуємо рівносильність: $0 \vee x \equiv x$ [$1 \wedge x \equiv x$].

3. При необхідності доповнюємо елементарні кон'юнкції пропозиційними змінними. Для цього використовуємо таку рівносильність: $k \equiv (k \wedge x_i) \vee (k \wedge \bar{x}_i)$ [$k \equiv (k \vee x_i) \wedge (k \vee \bar{x}_i)$].

4. Використовуємо рівносильність $x \vee x \equiv x$ $[x \wedge x \equiv x]$, якщо в отриманій формулі є хоча би дві однакові елементарні кон'юнкції [диз'юнкції].

Ми отримали алгоритм зведення формули до рівносильної ддноф [дкнф]. Він складається з двох виписаних алгоритмів.

Приклад. Звести $xy\overline{x} \vee \overline{x} \vee \overline{y}$ до ддноф.

$$xy\overline{x} \vee \overline{x} \vee \overline{y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y} \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}x \vee \overline{y}\,\overline{x} \equiv \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee x\overline{y}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть приклади висловлень, які зустрічаються у математиці.
2. Сформулюйте означення логічних дій над висловленнями (заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція).
3. Запишіть таблиці істинності для логічних дій над висловленнями.
4. Запишіть означення формули алгебри висловлень.
5. Сформулюйте означення тавтології, суперечності, виконуваної формули та нейтральної формули в алгебрі висловлень.
6. Наведіть приклади тавтологій, суперечностей, виконуваних та нейтральних формул.
7. Сформулюйте означення рівносильних формул алгебри висловлень.
8. Наведіть приклади рівносильних формул алгебри висловлень та поясність, чому вони рівносильні.
9. Сформулюйте означення логічного слідування на базі алгебри висловлень.
10. Наведіть приклади логічного слідування.
11. Сформулюйте теорему, що є оберненою до теореми Піфагора. Чи має вона місце?
12. Які методи доведення теорем ви знаєте? Відповідь поясніть.

13. Запишіть означення елементарної кон'юнкції та диз'юнкції.

14. Сформулюйте означення днф та кнф.

15. Сформулюйте означення ддфн та дкнф.

16. Наведіть приклади днф, кнф, ддфн, кнф. Відповідь поясніть.

17. Запишіть алгоритми для зведення формули алгебри висловлень до рівносильної днф і рівносильної кнф. У чому їх відмінність?

4. ВПРАВИ

1. Довести властивості дій над множинами, які сформульовані в 1.3.

2. Довести, що

$$\forall A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_n : (A_1\bigcap\ldots\bigcap A_n)\triangle(B_1\bigcap\ldots\bigcap B_n)\subseteq$$
$$\subseteq(A_1\triangle B_1)\bigcup\ldots\bigcup(A_n\triangle B_n).$$

3. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A\setminus X = B, \\ X\setminus A = C \end{cases},$$

де A,B,C – множини, для яких $B\subseteq A, A\bigcap C=\varnothing$.

4. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A\bigcup X = B\bigcap X, \\ A\bigcap X = C\bigcup X \end{cases},$$

де A,B,C – множини. При яких A,B,C система має розв’язок?

5. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A\setminus X = X\setminus B, \\ X\setminus A = C\setminus X \end{cases},$$

де A,B,C – множини. При яких A,B,C система має розв’язок?

6. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A\bigcap X = B\setminus X, \\ C\bigcup X = X\setminus A \end{cases},$$

де A,B,C – множини. При яких A,B,C система має розв’язок?

7. Нехай $f : A\to B$ – відображення. Довести, що f ін’єктивне тоді і тільки тоді, коли існує відображення $g : B\to A$ таке, що

$$g\circ f = 1_A.$$

8. Нехай $f : A\to B$ – відображення. Довести, що f сур’єктивне тоді і тільки тоді, коли існує відображення $g : B\to A$ таке, що

$$f\circ g = 1_B.$$

9. Нехай $f : A\to B$ – відображення. Довести, що f ін’єктивне тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\forall C\neq\varnothing\right)\left(\forall g,s\in A^C\right)\left(f\circ g=f\circ s\Rightarrow g=s\right).$$

10. Нехай $f:A\to B$ – відображення. Довести, що f сур'єктивне тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\forall C\neq\varnothing\right)\left(\forall g,s\in C^B\right)\left(g\circ f=s\circ f\Rightarrow g=s\right).$$

11. Нехай $f:A\to A$ – відображення, де A – скінченна множина. Довести, що наступні умови еквівалентні:

(1) f бієктивне;

(2) f сур'єктивне;

(3) f ін'єктивне.

12. Довести, що у випадку нескінченності множини A умови (1)–(3) вправи 11 не є еквівалентними.

13. Нехай $f:A\to A$ – бієктивне відображення, де A – скінченна множина. Показати, що родина множин $\{\{f^n(a)|n\in N\bigcup\{0\}\}|a\in A\}$, де $f^0=1_A$, є розбиттям множини A.

14. Чи для довільної нескінченної множини A і довільного бієктивного відображення $f:A\to A$ родина множин $\{\{f^n(a)|n\in N\bigcup\{0\}\}|a\in A\}$ є розбиттям множини A? Навести приклади таких нескінченних множин, для яких ця родина є розбиттям і не є розбиттям.

15. Нехай A – нескінченна множина. Тоді для довільного відображення $f:A\to A$ існують непорожні множини B,C, для яких $B\bigcap C=\varnothing, B\bigcup C=A, f(B)\subseteq B$. Довести.

16. Довести, що потужності цих множин рівні:

(1) $\left(A\times B\right)^C, A^C\times B^C$;

(2) $\left(A^B\right)^C, A^{B\times C}$;

(3) $A^{B\bigcup C}, A^B\times A^C$, де $B\bigcap C=\varnothing$.

17. Довести, що $\left|[0,1]\right|=\left|[0,1)\right|$, установивши бієктивне відображення з однієї множини в іншу.

18. Навести 10 різних прикладів бієктивних відображень з множини натуральних чисел в себе.

19. Довести, що для кожного відображення $f: A \to B$ і для довільних множин $A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$ справедливі такі співвідношення:

(1) $f(A_1 \bigcup A_2) = f(A_1) \bigcup f(A_2)$;

(2) $f(A_1 \bigcap A_2) \subseteq f(A_1) \bigcap f(A_2)$;

(3) $f^{-1}(B_1 \bigcup B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcup f^{-1}(B_2)$;

(4) $f^{-1}(B_1 \bigcap B_2) = f^{-1}(B_1) \bigcap f^{-1}(B_2)$;

(5) $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$;

(6) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

20. Довести, що для довільних відношень:

$$\left(R_1 \bigcup R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \bigcup R_2^{-1},$$

$$\left(R_1 \bigcap R_2\right)^{-1} = R_1^{-1} \bigcap R_2^{-1}.$$

21. Довести, що для довільних відношень:

$$T \circ \bigcap_{i \in I} R_i \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i),$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right) \circ T \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ T).$$

22. Довести, що якщо відношення R_1, R_2 рефлексивні, то і відношення $R_1 \bigcup R_2, R_1 \bigcap R_2, R_1^{-1}, R_1 \circ R_2$ також рефлексивні.

23. Довести, що якщо відношення R_1, R_2 симетричні, то і відношення $R_1 \bigcup R_2, R_1 \bigcap R_2, R_1^{-1}, R_1 \circ R_1^{-1}$ також симетричні.

24. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1, R_2 симетрична тоді і тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

25. Довести, що:

(1) якщо відношення R_1, R_2 антисиметричні, то антисиметричні також $R_1 \bigcap R_2, R_1^{-1}$;

(2) об’єднання $R_1 \bigcup R_2$ антисиметричних на A відношень R_1, R_2 антисиметричне тоді і тільки, коли $R_1 \bigcap R_2^{-1} \subseteq \triangle_A$.

26. Довести, що перетин відношень еквівалентності на A є відношенням еквівалентності на A.

27. Довести, що об'єднання $R_1 \bigcup R_2$ відношень еквівалентності є відношенням еквівалентності тоді і тільки тоді, коли $R_1 \bigcup R_2 = R_1 \circ R_2$.

28. Скільки відношень еквівалентності існує на триелементній множині? Побудувати всі такі відношення на деякій триелементній множині.

29. Нехай $f : A \to B$ – відображення. Показати, що для f існує факторизація

$$f = f \circ \varepsilon,$$

де ε – природнє відображення A в фактормножину $A/\ker f$, тобто $\varepsilon(x) = [x]_{\ker f}$, а f – ін'єктивне відображення $A/\ker f$ в B.

30. Довести, що в решітці будь-який максимальний елемент є найбільшим, а будь-який мінімальний елемент – найменшим.

31. Довести, що в скінченній решітці існують найбільший і найменший елементи.

32. Довести, що для будь-якого часткового порядку P на множині A існує лінійний порядок L на цій же множині, для якого $P \subseteq L$.

33. У школі 1400 учнів. З них 1250 вміють кататися на лижах, а 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки школярів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах?

34. Скільки чисел серед перших 100 натуральних чисел не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5?

35. У відділі науково-дослідного інституту кожний із співробітників володіє хоча б однією з наступних іноземних мов: англійською, французькою або німецькою, причому 6 – англійською, 6 – німецькою, 7 – французькою, 4 – англійською і німецькою, 3 – німецькою і французькою, 2 – французькою і англійською, 1 особа знає всі три мови. Скільки людей працює у відділі? Скільки з них володіють лише англійською? Скільки осіб володіють лише однією мовою?

36. Скількома способами в групі, в якій 25 студентів, можна вибрати старосту та його заступника?

37. 4 автори повинні написати книжку з 17 розділів, причому перший і третій повинні написати по 5 розділів, другий – 4, четвертий – 3. Скількома способами можна розподілити розділи між авторами?

38. Для проведення екзаменів треба утворити комісію з двох викладачів кафедри математики. Скількома способами можна це зробити, якщо на кафедрі працює 5 осіб?

39. Скількома способами можна розподілити 5 різних цукерок між 7 дітьми?

40. Скількома способами можна укомплектувати подарунок з 20 цукерок, якщо є можливість вибирати лише з 5-ти назв цукерок?

41. Скільки «слів» можна утворити зі слова «математика»?

42. Скільки діагоналей в опуклому n-кутнику?

43. На одній із двох паралельних прямих вибрали 10 точок, на іншій – 20. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

44. Скількома способами можна розподілити три путівки між 5 співробітниками, якщо кожний із них має отримати не більше однієї путівки? Розглянути два такі випадки:

(1) всі путівки різні;

(2) всі путівки однакові.

45. Скількома способами можна розташувати в ряд 5 чорних і 4 білі кулі, щоб жодні дві білі не лежали поруч? Розглянути два такі випадки:

(1) кулі одного кольору не відрізняються;

(2) усі кулі різні.

46. Скільки існує відношень на n-елементній множині?

47. Обчислити

$$\frac{1}{2^{50}}\left(C_{100}^{0}-C_{100}^{2}+C_{100}^{4}-C_{100}^{6}+\ldots+C_{100}^{100}\right).$$

48. Обчислити коефіцієнт полінома $(x-\frac{1}{\sqrt{2}}x^{5})^{10}$ при x^{42}.

49. Обчислити коефіцієнт полінома $(a-2b+3c-d+e)^{10}$ при $a^2bc^3d^2e^2$.

50. Представити у вигляді частки двох поліномів формальний степеневий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}$.

51. Довести, що формальний степеневий ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ неможливо представити у вигляді частки двох поліномів.

52. За допомогою формальних степеневих рядів розв'язати рекурентне співвідношення

$$a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2}, \forall n \geq 2, a_0 = 5, a_1 = -13.$$

53. У групі навчається 29 студентів. Під час контрольної роботи один студент зробив 13 помилок, а всі інші – менше. Довести, що в групі є принаймні три студенти, які зробили однакову кількість помилок.

54. У 500 ящиках лежать яблука, причому кожний може містити не більше 240 яблук. Довести, що є три ящики, які містять однакову кількість яблук.

55. Чи існують такі висловлення A, B, C, щоб одночасно були виконані наступні умови:

a) $|B \to A| = 1, |A \to C| = 0, |(\overline{A} \to C) \wedge B| = 0$;

b) $|\overline{B} \to A| = 0, |C \to A| = 1, |A \wedge B \wedge C| = 1$;

c) $|A \leftrightarrow C| = 0, |A \vee \overline{B} \vee C| = 0, |A \to C| = 0$.

56. Доведіть теорему про оборотність системи двох імплікацій: якщо істинні висловлення $A_1 \to B_1,\ A_2 \to B_2, A_1 \vee A_2, \overline{B_1 \wedge B_2}$, то істинні також і висловлення $B_1 \to A_1,\ B_2 \to A_2$.

57. Доведіть теорему про оборотність системи m імплікацій: якщо істинні висловлення $A_1 \to B_1, \ldots, A_m \to B_m, A_1 \vee \ldots \vee A_m$, $\overline{B_i \wedge B_j}$, $i \neq j, i, j = 1, \ldots, m$, то істинні також висловлення $B_1 \to A_1, \ldots$, $B_m \to A_m$.

58. Доведіть основні рівносильності, наведені в п. 1.3.

59. Доведіть, що формули нижче є тавтологіями:

a) $\left(\overline{P}\to\left(Q\wedge\overline{Q}\right)\right)\to P$;

b) $\left(\left(P\to Q\right)\wedge\left(Q\to R\right)\right)\to\left(P\to R\right)$;

c) $\left(\left(P\to Q\right)\vee R\right)\leftrightarrow\left(P\to\left(Q\vee R\right)\right)$.

60. Доведіть, що якщо формули $P, P\to Q$ є тавтологіями, то формула Q також – тавтологія.

61. Доведіть, що якщо формули $\overline{G}\wedge\overline{H}, F\vee G$ є тавтологіями, то формула $\overline{F}\to H$ також – тавтологія.

62. Чи має місце логічне слідування:

a) $P\to Q, P\to\overline{Q}\vdash\overline{P}$;

b) $\overline{P}\to\overline{Q}, P\vdash Q$;

c) $\overline{P}\to\overline{Q}, Q\vdash P$.

63. Перетворити наступні формули алгебри висловлень на рівносильні, звівши число логічних дій до m:

a) $\overline{A\to B}\wedge\overline{AB}\vee B,\ m=1$;

b) $AB\vee\overline{B}C\vee B,\ m=1$;

c) $\overline{A}B\vee A\overline{B}\vee AB,\ m=1$;

d) $(A\vee B)(B\to A)\vee AC, m=0$;

e) $(A\to B)\to\overline{B},\ m=1$;

f) $(A\to B)(A\vee BC)(A\to C)\vee\overline{C}, m=1$;

g) $\overline{A\to B}\vee\overline{C\to B}\vee B, m=2$;

h) $(A\vee B)(B\to A)\vee BC\vee A\overline{B}\vee B\overline{C}, m=1$;

i) $AB\vee\overline{A}\overline{B}\vee A\overline{B}, m=1$;

j) $AC\vee\overline{B}C\vee\overline{A}B\vee A\overline{C}, m=2$;

k) $(A\vee(B\to C))(A\vee B\vee C)(A\vee C\vee D), m=1$;

l) $\overline{A}BC\vee A\overline{B}C\vee ABC,\ m=2$;

m) $((\overline{B\vee C})\to BCD)\vee\overline{B}D,\ m=2$;

n) $AB\vee A\overline{C}\vee(\overline{A}\to B)\vee A\vee B\overline{C},\ m=1$;

o) $\overline{C \to \overline{B}} \vee \overline{B}A \vee B\overline{C} \to \overline{B},\ m=1.$

64. Звести наступні формули алгебри висловлень до рівносильних днф і кнф:

a) $(A \to B) \to (B \to A)$;

b) $(A \leftrightarrow B) \vee A$;

c) $\left(A \vee \overline{B}\right) \wedge (B \to A)$.

65. Звести наступні формули алгебри висловлень до рівносильних дднф і дкнф відносно пропозиційних змінних A_1, A_2, A_3:

a) $(A_1 \wedge A_2) \to A_3$;

b) $\left(A_1 \to \overline{A_2}\right) \leftrightarrow A_3$;

c) $\left(A_1 \leftrightarrow \overline{A_2}\right) \vee A_3$.

66. Знайдіть з точністю до рівносильності всі можливі формули $F(X,Y,Z)$ від трьох змінних X,Y,Z, щоб мало місце таке логічне слідування:

$$X \to Y \vdash (X \leftrightarrow F) \leftrightarrow (Y \vee Z).$$

67. Дано таблиці істинності для формул алгебри висловлень $Y_1(A_1,A_2)$, $Y_2(A_1,A_2)$, $Y_3(A_1,A_2)$. Записати відповідні дднф та дкнф, рівносильні до даних формул.

A_1	A_2	$Y_1(A_1,A_2)$	$Y_2(A_1,A_2)$	$Y_3(A_1,A_2)$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

68. Дано таблиці істинності для формул алгебри висловлень $F(A_1,A_2,A_3)$, $G(A_1,A_2,A_3)$. Записати відповідні дднф та дкнф, рівносильні до даних формул.

A_1	A_2	A_3	$F(A_1, A_2, A_3)$	$G(A_1, A_2, A_3)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

69. Дано такі таблиці істинності для формул $F_1(A_1, A_2, A_3)$, $F_2(A_1, A_2, A_3)$, $F_3(A_1, A_2, A_3)$, $G_1(A_1, A_2, A_3)$, $G_2(A_1, A_2, A_3)$ алгебри висловлень:

A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3	G_1	G_2
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0

При яких i має місце логічне слідування $F_1, F_2, F_3 \vdash G_i$?

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

БІБЛІОГРАФІЯ

Базова

1. Андрійчук В.І., Комарницький М.Я., Іщук Ю.Б. Вступ до дискретної математики. Львів : Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. 254 с.
2. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Київ : Видавнича група BHV, 2007. 368 с.

Допоміжна

3. Дрозд Ю.А. Дискретна математика. Київ : РВЦ Київського університету, 2004. 70 с.
4. Оленко А.Я., Ядренко М.Й. Дискретна математика : навчально-методичний посібник. Київ : Видавництво НаУКМА, 1996.
5. Ядренко М.Й. Дискретна математика : навчально-методичний посібник. Київ : Вид.-поліграф. центр «Експрес», 2003. 244 с.
6. Hrbacek K., Jech T. Introduction to set theory. New York – Basel : Marcel Dekker, Inc., 1999. 292 p.
7. Lipschutz S., Lipson M.L. Schaum’s outline of theory and problems of discrete mathematics. McGraw – Hill, 2007. 474 p.
8. Sierpinski W. Cardinal and ordinal numbers. Warszawa : PWN, 1965. 491 p.

Електронне навчальне видання

Юрій Матурін,
Леся Комарницька,
Ірина Гордієнко

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Редактор
Ірина Невмержицька
Технічний редактор
Лужецька Ольга
Коректор
Артимко Ірина

Здано до набору 22.06.2023 р. Формат 60x90/16. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 5,375. Зам. 54.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.