

**Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка**

Руслан Хаць

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей
014 «Середня освіта (Математика)», 111 «Математика»

**Дрогобич
2023**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 4 від 23 березня 2023 р.)

Рецензенти:

Дільний Володимир Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”;

Матурін Юрій Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск:

Галь Юрій Михайлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Хаць Р.В.

X 28 Асимптотичні оцінки та їх застосування : тексти лекцій, практичні, індивідуальні завдання : навч. посіб. Дрогобич : ДДПУ ім. Івана Франка, 2023. 130 с.

Навчальний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни “Асимптотичні оцінки та їх застосування” для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями 014 “Середня освіта (Математика)”, 111 “Математика” галузей знань 01 “Освіта/Педагогіка” та 11 “Математика та статистика”, затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Цей курс побудовано за модульним принципом. Він містить лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю.

Бібліографія 27 назв.

Зміст

Вступ	4
1. Верхня і нижня границі послідовності	5
2. Верхня і нижня границі функції	13
3. Нерівності	17
4. Опуклі функції	20
5. O -символіка. Символи Ландау	27
6. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул	32
7. Порядок і тип функції	35
8. Повільно змінні функції	37
9. Уточнений порядок функції	38
10. Інтегрування асимптотичних формул	40
11. Диференціювання асимптотичних формул	41
12. Асимптотичні ряди	44
13. Оцінка нулів функцій та коренів рівнянь	47
14. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь	50
15. Інтеграл Стілтєса та його застосування	54
16. Функції обмеженої варіації і граничний перехід в інтегралах	56
17. Знаходження асимптотики інтегралів зі змінною верхньою межею	59
18. Знаходження асимптотики сум	61
19. Деякі характеристики множин	64
20. Асимптотичні оцінки деяких інтегралів, залежних від параметра	65
21. Знаходження асимптотики розв'язків диференціальних рівнянь	74
22. Числові нескінченні добутки з дійсними членами	76
23. Числові нескінченні добутки з комплексними членами	82
24. Функціональні нескінченні добутки	83
25. Перетворення Фур'є. Згортка функцій	85
26. Запитання для самоконтролю	90
27. Вправи і задачі	90
Література	127

Вступ

Вміння здійснювати найпростіші асимптотичні оцінки лежить в основі успіху математика, який проводить дослідження в будь-якому розділі математики. Техніці отримання таких оцінок та їх застосувань присвячений цей посібник. Розглядуваний тут матеріал є частиною курсу “Асимптотичні оцінки та їх застосування”. Даний посібник включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю.

1. Верхня і нижня границі послідовності. Частковою границею послідовності (x_n) називається таке число $b \in \overline{\mathbb{R}}$, для якого існує послідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

Теорема 1. Кожна послідовність (x_n) має принаймні одну часткову границю $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Кожна обмежена послідовність (x_n) має принаймні одну часткову границю $b \in \mathbb{R}$.

Доведення. Ця теорема є іншим формулюванням теореми Больцано-Вейерштрасса. ►

Верхньою границею послідовності (x_n) називається найбільша в $\overline{\mathbb{R}}$ її часткова границя. Для позначення верхньої границі використовують символи $a = \overline{\lim} x_n$ і $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема 2. Кожна послідовність (x_n) має верхню границю $a \in \overline{\mathbb{R}}$ і $\overline{\lim} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\}$.

Доведення. Оскільки послідовність $(\sup\{x_k : k \geq n\})$ є незростаючою, то існує $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\} = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Нехай спочатку $a = -\infty$. За означенням границі для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке n^* , що $\sup\{x_k : k \geq n\} \leq -\varepsilon$, якщо $n \geq n^*$. Але $\sup\{x_k : k \geq n\} \geq x_n$. Отже, $x_n \leq -\varepsilon$, якщо $n \geq n^*$. Таким чином, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, $-\infty$ – єдина гранична точка послідовності (x_n) і $\overline{\lim} x_n = -\infty = a$. Тому в розглядуваному випадку теорема доведена. Нехай $a > -\infty$. Візьмемо довільну зростаючу послідовність (a_m) , збіжну до a . За означенням границі для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться таке $n_m \in \mathbb{N}$, що $n_m < n_{m+1}$ і $\sup\{x_k : k \geq n_m\} \geq a_m$. Крім цього, за означенням точної верхньої межі знайдеться таке $k_m \geq n_m$, що $k_m < k_{m+1}$ і $x_{k_m} \geq a_m$. Отже, послідовність (x_n) має підпослідовність (x_{k_m}) , всі граничні точки якої є не меншими за a . З іншого боку, $\sup\{x_k : k \geq n\} \geq x_n$. Тому всі граничні точки послідовності (x_n) є не більшими за a і ми приходимо до твердження теореми. ►

Наслідок 1. Для кожної послідовності (x_n) виконується

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_k : k \geq n\} = \inf \{ \sup \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}.$$

Теорема 3. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

1) існує така підпослідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) , що $x_{n_k} \rightarrow a$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$.

Доведення. Справді, умова 1) означає, що число a є частковою границею послідовності, а умова 2) вказує на те, що жодне число $\gamma > a$ не може бути частковою границею послідовності (x_n) . ►

Теорема 4. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

1) існує така підпослідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) , що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : -\varepsilon < x_{n_k} - a$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$.

Доведення. Справді, умови 1) і 2) показують, що число a є частковою границею послідовності, а умова 2) вказує на те, що жодне число $\gamma > a$ не може бути частковою границею послідовності (x_n) . ►

Нижньою границею послідовності (x_n) називається найменша в $\overline{\mathbb{R}}$ її часткова границя. Для позначення нижньої границі використовують символи $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ та $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема 5. Кожна послідовність (x_n) має нижню границю $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ і

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_k : k \geq n\} = \sup \{ \inf \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}.$$

Доведення. Ця теорема впливає безпосередньо з означення і теореми 3. ►

Теорема 6. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови

3) існує така підпослідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) , що $x_{n_k} \rightarrow a$;

$$4) (\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): -\varepsilon < x_n - a.$$

Доведення цієї теореми таке ж як і теореми 4. ►

Теорема 7. $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються

наступні дві умови

3') існує така підпослідовність (x_{n_k}) послідовності (x_n) , що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*): x_{n_k} - a < \varepsilon;$$

$$4) (\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): -\varepsilon < x_n - a.$$

Доведення цієї теореми таке ж як і теореми 5. ►

Теорема 8. Для того щоб $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = a$, необхідно і достатньо,

щоб

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = a. \quad (1)$$

Доведення. Справді, якщо існує $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = a$, то збіжною є будь-

яка підпослідовність (x_{n_k}) і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Тому послідовність (x_n) має в

$\overline{\mathbb{R}}$ єдину граничну точку. Тому виконується (1). Навпаки, нехай виконується (1) і, наприклад, $a \in \mathbb{R}$. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n - a < \varepsilon$$

і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n''): -\varepsilon < x_n - a.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0): |x_n - a| < \varepsilon,$$

тобто послідовність (x_n) є збіжною і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = a$. ►

Наслідок 2. Для того щоб послідовність була збіжною в $\mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою і мала в $\mathbb{R}$ єдину граничну точку. Для того щоб послідовність (x_n) була збіжною в збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$, необхідно і достатньо, щоб вона мала в $\overline{\mathbb{R}}$ єдину граничну.

Приклад 1. Якщо $x_n = (-1)^n + 1/n$, то $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = 1$, $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = -1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ – не існує.

Приклад 2. Нехай (x_n) – послідовність, членами якої всі раціональні числа. Кожне число $a \in \overline{\mathbb{R}}$ є її частковою границею. Тому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ і } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Приклад 3. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо права частина має зміст. Справді, нехай $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq +\infty$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq +\infty$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$. Тоді

$$(\forall a_1 > a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < a_1,$$

$$(\forall b_1 > b)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n''): y_n < b_1.$$

Тому $x_n + y_n < c_1$ для будь-якого $c_1 > a + b$ і всіх достатньо великих n . Отже, $c \leq a + b$, що і потрібно було довести. В інших можливих випадках розглядувана нерівність є очевидною.

Приклад 4. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст. Справді, нехай $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq +\infty$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq +\infty$ і $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$. Тоді

$$(\forall a_1 > a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < a_1,$$

$$(\forall b_1 > b)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n''): y_n < b_1.$$

Тому $x_n + y_n < c_1$ для будь-якого $c_1 > a + b$ і всіх достатньо великих n . Отже, $c \leq a + b$, що і потрібно було довести. В інших можливих випадках розглядувана нерівність є очевидною.

Приклад 5. Якщо $x_n = (-1)^n$ і $x_n = (-1)^{n+1}$, то $x_n + y_n = 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$. Отже,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Приклад 6. Якщо $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$, то

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < 1 + \varepsilon$. З іншого боку, $x_{2k} = \frac{1}{2k} + 1$. Тому

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$. Отже, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Далі, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > -\varepsilon$.

Крім цього, $x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = 0$. Тому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Приклад 7. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ для будь-якої послідовності (x_n) .

Приклад 8. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}$ для будь-якої послідовності (x_n) .

Приклад 9. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}$ для будь-якої послідовності (x_n) .

Приклад 10. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо права частина має зміст і $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ існує. Справді, нехай $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$. Якщо $a \neq -\infty$ і $b \neq -\infty$, то $(\forall a_1 < a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > a_1$ і існує така підпослідовність (y_{n_k}) послідовності (y_n) , що

$$(\forall b_1 < b)(\exists k'' \in \mathbb{N})(\forall k \geq k''): y_{n_k} > b_1.$$

Тому $x_{n_k} + y_{n_k} > c_1$ для будь-якого $c_1 < a + b$ і всіх достатньо великих k . Отже, $c \geq a + b$. В інших можливих випадках остання нерівність є очевидною. Тому, врахувавши попередні приклади, приходимо до потрібної рівності.

Приклад 11. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо права частина має зміст.

Приклад 12. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст.

Приклад 13. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст і $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ існує. для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст.

Приклад 14. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох невід'ємних послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо права частина має зміст.

Приклад 15. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох невід'ємних послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо права частина має зміст

Приклад 16. $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох невід'ємних послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст.

Приклад 17. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ для будь-яких двох невід'ємних послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо ліва частина має зміст і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ існує..

Приклад 18 (теорема Штольца).

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

для будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ і $y_n - y_{n-1} > 0$ для всіх $n \geq n_0$. Справді, нехай $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = c$ і $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = d$. Якщо $d = +\infty$, то нерівність $c \leq d$ є очевидною. Нехай $d \neq +\infty$. Тоді $y_n > 0$ для всіх великих $n \in \mathbb{N}$ і

$$(\forall d_1 > d)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < d_1.$$

Тому

$$x_k - x_{k-1} < d_1(y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n^*,$$

$$x_n - x_{n^*-1} = \sum_{k=n^*}^n (x_k - x_{k-1}) < d_1 \sum_{k=n^*}^n (y_k - y_{k-1}) = d_1(y_n - y_{n^*-1}), \quad n \geq n^*,$$

$$\frac{x_n}{y_n} \leq d_1 - d_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n}, \quad n \geq n^*,$$

і

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(d_1 - d_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n} \right) = d_1.$$

Отже, $c \leq d_1$ для довільного $d_1 > d$. Тому $c \leq d$. Нехай $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$

і $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = b$. Якщо $a = -\infty$, то нерівність $a \leq b$ є очевидною. Нехай $a \neq -\infty$. Тоді $y_n > 0$ для всіх великих $n \in \mathbb{N}$ і

$$(\forall a_1 < a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} > a_1.$$

Тому

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &> a_1(y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n^*, \\ x_n - x_{n^*-1} &= \sum_{k=n^*}^n (x_k - x_{k-1}) > a_1 \sum_{k=n^*}^n (y_k - y_{k-1}) = a_1(y_n - y_{n^*-1}), \quad n \geq n^*, \\ \frac{x_n}{y_n} &\geq a_1 - a_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n}, \quad n \geq n^*, \end{aligned}$$

i

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 - a_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n} \right) = a_1.$$

Отже, $b \geq a_1$ для довільного $a_1 < a$. Тому $a \leq b$

Приклад 19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ для

будь-яких двох послідовностей (x_n) та (y_n) , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ і

$y_n - y_{n-1} < 0$ для всіх $n \geq n_0$. Справді, нехай $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = c$ і

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = d$. Якщо $d = +\infty$, то нерівність $c \leq d$ є очевидною. Нехай

$d \neq +\infty$. Тоді $y_n < 0$ для всіх великих $n \in \mathbb{N}$ і

$$(\forall d_1 > d)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} < d_1.$$

Тому

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &> d_1(y_{k+1} - y_k), \quad n \geq n^*, \\ x_m - x_n &= \sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \geq d_1 \sum_{k=n}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) = d_1(y_m - y_n), \quad m > n \geq n^*, \\ -x_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_m - x_n) \geq d_1 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_m - y_n) = -d_1 y_n, \quad n \geq n^*. \end{aligned}$$

Отже, $x_n / y_n \leq d_1$, якщо $n \geq n^*$, і $c \leq d_1$ для довільного $d_1 > d$. Тому $c \leq d$. Ліва частина розглядуваної нерівності обґрунтовується аналогічно.

Приклад 20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ для кожної

послідовності (u_n) , збіжної в $\overline{\mathbb{R}_0}$. Справді, якщо $x_n = \sum_{k=1}^n u_k$ і $y_n = n$, то

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}, \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = u_n \quad \text{і} \quad \text{за теоремою Штольца}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Приклад 21. Послідовність $u_n = (-1)^n$ є розбіжною в $\overline{\mathbb{R}_0}$, але

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + 1 + \dots + (-1)^n}{n} = 0.$$

Приклад 22. Якщо $x_n = \sum_{k=1}^n k^3$ і $y_n = n^4$ то за теоремою

$$\text{Штольца} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 23. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$,

якщо всі $x_n \neq 0$. Справді, нехай $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| = q$. Якщо $q < +\infty$, то

$$|x_n / x_{n-1}| \leq q_3 \quad \text{для кожного } q_3 > q \text{ і всіх } n \geq n^* - 1, \text{ тобто}$$

$$|x_n| \leq q_3 |x_{n-1}| \leq q_3^2 |x_{n-2}| \leq \dots \leq q_3^{n-n^*} |x_{n^*}|,$$

звідки

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q_3 \sqrt[n]{b}, \quad b := q_3^{-n^*} |x_{n^*}|.$$

Тому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq q_3$. Але $q_3 > q$ є довільним. Отже, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq q$ (у

випадку $q = +\infty$ остання нерівність є очевидною). Далі, нехай

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| = \underline{q} \quad \text{і} \quad \underline{q} > 0. \quad \text{Тоді } |x_n / x_{n-1}| \geq \underline{q}_4 \quad \text{для кожного } \underline{q}_4 \in (0; \underline{q}) \text{ і всіх}$$

$n \geq n^{**} - 1$, тобто

$$|x_n| \geq \underline{q}_4 |x_{n-1}| \geq \underline{q}_4^2 |x_{n-2}| \geq \dots \geq \underline{q}_4^{n-n^{**}} |x_{n^{**}}|,$$

звідки

$$\sqrt[n]{|x_n|} \geq \underline{q}_4 \sqrt[n]{b}, \quad b := \underline{q}_4^{-n^{**}} |x_{n^{**}}|. \quad \text{Отже, } \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \geq \underline{q}_4. \quad \text{Але } \underline{q}_4 \in (0; \underline{q}) \in$$

довільним. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \geq \underline{q}$ (у випадку $\underline{q} = 0$ остання нерівність є очевидною).

Приклад 24. Якщо (x_n) – така послідовність невід’ємних чисел, що $x_{k+n} \leq x_k x_n$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і всіх $n \in \mathbb{N}$, то існує скінченна границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} = \inf \left\{ \sqrt[k]{x_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$. Справді, оскільки

$$x_n \leq x_1 x_{n-1} \leq x_1^2 x_{n-2} \leq \dots \leq x_1^{n-1} x_1 = x_1^n,$$

то $0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} \leq x_1$. Далі, нехай $\inf \left\{ \sqrt[k]{x_k} : k \in \mathbb{N} \right\} = d$. Тоді для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що $\sqrt[n]{\alpha_n} < d_1$, $d_1 := d + \varepsilon$. Крім цього, знайдеться підпослідовність (x_{k_j}) , для якої $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}^{1/k_j}$. Кожне натуральне число j можна подати у вигляді $j = nk_j + l_j$, $0 \leq l_j \leq n-1$. Тоді

$$x_j = x_{nk_j + l_j} \leq x_{nk_j} x_{l_j} = x_{n(k_j-1)+n} x_{l_j} \leq x_{n(k_j-1)} x_n x_{l_j} \leq \dots \leq x_n x_n^{k_j-1} x_{l_j} = x_n^{k_j} x_{l_j},$$

$d \leq \sqrt[j]{x_j} \leq \sqrt[j]{x_n^{k_j} x_{l_j}} = x_n^{k_j/j} x_{l_j}^{1/j} \leq d_1^{nk_j/j} x_{l_j}^{1/j} \rightarrow d_1 = d + \varepsilon$, звідки випливає потрібне.

Зауваження 1. Інколи часткову границю послідовності називають граничною точкою послідовності.

2. Верхня і нижня границі функції. Частковою границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці a ($a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$, $a = +\infty$, $a = -\infty$) називається таке число A ($A \in \mathbb{R}$, $A = \infty$, $A = +\infty$, $A = -\infty$), для якого знайдеться послідовність (x_n) , $x_n \in \mathbb{R}$, така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ і $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Кожна визначена в деякому проколеному околі точки a функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в цій точці принаймні одну часткову границю.

Доведення. Справді, нехай (x_n) – така послідовність, що $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Послідовність $(f(x_n))$ має принаймні одну часткову границю. Вона є і частковою границею функції f . ►

Верхньою границею (пишуть $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$ або $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = A$) функції f в точці a називається найбільша в $\overline{\mathbb{R}}$ її часткова границя в

точці a . Нижньою границею (пишуть $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = A$ або $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = A$) функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці a називається найменша в $\overline{\mathbb{R}}$ її часткова границя в точці a .

Теорема 2. Кожна визначена в деякому проколеному околі точки $a \in \mathbb{R}$ функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в цій точці верхню границю і

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &= \limsup_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} = \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} : x \in \overset{\circ}{U}(a; \delta) \right\} \end{aligned}$$

для деякого $\delta > 0$.

Доведення. Справді, нехай $a \in \mathbb{R}$. Функція $\varphi(x) = \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\}$ є незростаючою. Тому існує границя $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$. Якщо $A = -\infty$, то за означенням границі $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} < -\varepsilon$. Але $f(x) \leq \varphi(x)$. Тому $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, $-\infty$ – єдина гранична точка функції f і $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Нехай $A > -\infty$ і (A_m) – довільна зростаюча послідовність, збіжна до A . За означенням границі для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться таке δ_m , що $0 < \delta_{m+1} < \delta_m$, $\delta_m \rightarrow 0$ і $\sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m) \right\} \geq A_m$. Крім цього, за означенням точної верхньої межі знайдеться таке $x_m \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m)$, що $f(x_m) \geq \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m) \right\} \geq A_m$. Тоді $x_m \rightarrow a$ і послідовність $(f(x_m))$ має граничну точку, яка є не меншою за A . З іншого боку, $f(x) \leq \varphi(x)$. Отже, всі граничні точки функції f не перевищують A і ми приходимо до твердження теореми. ►

Теорема 3. Якщо $a \in \mathbb{R}$, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

1) існує така послідовність (x_n) , що $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $f(x_n) \rightarrow A$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): f(x) - A < \varepsilon$.

Доведення. Справді, умова 1) означає, що число A є частковою границею функції f в точці a , а умова 2) вказує на те, що жодне число $\gamma > A$ не може бути її частковою границею в точці a . ►

Теорема 4. Якщо $a \in \mathbb{R}$, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли виконується 2) і

1') існує така послідовність (x_n) , що $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): -\varepsilon < f(x_n) - A$.

Доведення. Справді, умови 1') і 2) показують, що число A є частковою границею функції f в точці a , а умова 2) вказує на те, що жодне число $\gamma > A$ не може бути її частковою границею в точці a . ►

Теорема 5. Кожна визначена в деякому проколеному околі точки $a \in \mathbb{R}$ функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в цій точці нижню границю і

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &= \liminf_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \mathring{U}(a; x) \right\} = \\ &= \sup \left\{ \inf \left\{ f(t) : t \in \mathring{U}(a; x) \right\} : x \in \mathring{U}(a; \delta) \right\} \end{aligned}$$

для деякого $\delta > 0$.

Доведення цієї теореми таке ж, як і теореми 2. ►

Теорема 6. $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, визначеної в деякому проколеному околі точки a .

Доведення. Ця теорема впливає безпосередньо з відповідних означень. ►

Теорема 7. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є визначеною в деякому проколеному околі точки a , то для існування границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (1)$$

Доведення. Справді, якщо існує $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то згідно з

означенням границі функції на мові послідовностей, функція f має в точці a єдину граничну точку. Тому виконується (1). Навпаки, якщо виконується (1), то $f(x_n) \rightarrow A$ для кожної послідовності (x_n) такої, що $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $f(x_n) \rightarrow A$. Тому згідно з означенням границі функції на мові послідовностей $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. ►

Приклад 1. Проміжок $[-1;1]$ є множиною часткових границь функції $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ у точці $a = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1$ і $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1$.

Приклад 2. $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) + \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) + f_2(x))$ для будь-яких двох функцій $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо права частина має зміст. Справді, нехай $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = A_1 \neq -\infty$ і $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = A_2 \neq -\infty$ і $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) + f_2(x)) = A_3$. Тоді

$$(\forall A'_2 < A_2)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): f(x) > A'_2 - \varepsilon$$

і існує така послідовність (x_n) , що $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$, $f(x_n) \rightarrow A$ і

$$(\forall A'_1 < A_1)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*): f_1(x_k) > A'_1.$$

Приходимо до висновку що для кожного $A'_3 < A_1 + A_2$ і всіх достатньо великих k виконується $f_1(x_k) + f_2(x_k) > A'_3$. Отже, $A_3 \geq A_1 + A_2$.

Приклад 3. $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2'(x)} \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$ для

будь-яких двох функцій $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо виконуються наступні умови:

а) функції f_1 та f_2 є диференційовними на деякому проміжку $(a;b)$;

б) $\lim_{x \rightarrow a+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f_2(x) = 0$;

в) $f_2'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a;b)$.

Розглядувані нерівності доводяться аналогічно до класичних правил Лопіталля. Якщо функції f_1' та f_2' є неперервними на $(a;b)$ і $a \in \mathbb{R}$, то

їх можна отримати і так. Нехай $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = A_1$ і $\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A_2$.

Якщо $A_1 = -\infty$, то нерівність $A_1 \leq A_2$ є очевидною. Нехай $A_1 \neq -\infty$. Тоді

$$(\forall A'_1 > A_1)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a; a + \delta): \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} > A'_1).$$

Функція f'_2 приймає значення одного знаку на $(a; b)$. Нехай, наприклад, $f'_2(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$. Тоді $f_2(x) > 0$, $f'_1(x) > A'_1 f'_2(x)$, $\int_a^x f'_1(t) dt \geq A'_1 \int_a^x f'_2(t) dt$, $f_1(x) > A'_1 f_2(x)$ і $f_1(x)/f_2(x) > A'_1$ для всіх $x \in (a; a + \delta)$. Тому ліва частина розглядуваної нерівності встановлена, а права доводиться аналогічно.

Приклад 4. $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} \leq \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}$ для

будь-яких двох функцій $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо виконуються наступні умови:

а) функції f_1 та f_2 є диференційовними на деякому проміжку $(a; b)$;

б) $\lim_{x \rightarrow a+} f_2(x) = \infty$;

в) $f'_2(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$.

Розглядувані нерівності доводяться аналогічно до класичних правил Лопітала. Якщо функції f'_1 та f'_2 є неперервними на $(a; b)$ і $a \in \mathbb{R}$,

то їх можна отримати і так. Нехай $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} = A_1$ і $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = A_2$.

Якщо $A_1 = -\infty$, то нерівність $A_1 \leq A_2$ є очевидною. Нехай $A_1 \neq -\infty$. Тоді

$$(\forall A'_1 < A_1)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a; a + \delta): \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} > A'_1).$$

Функція f'_2 приймає значення одного знаку на $(a; b)$. Нехай, наприклад, $f'_2(x) > 0$ для всіх $x \in (a; b)$. Тоді $f_2(x) < 0$, $f'_1(x) > A'_1 f'_2(x)$,

$$\int_x^{a+\delta} f'_1(t) dt \geq A'_1 \int_x^{a+\delta} f'_2(t) dt \quad i \quad f_1(a + \delta) - f_1(x) > A'_1 (f_2(a + \delta) - f_2(x)) \quad \text{для}$$

всіх $x \in (a; a + \delta)$. Тому $A_2 \geq A_1$ і ліва частина розглядуваної нерівності встановлена, а права доводиться аналогічно.

3. Нерівності. При отриманні асимптотичних оцінок використовуються різноманітні нерівності. Відшукування потрібної елементарної нерівності та її обґрунтування потребує винахідливості і є часто основним елементом далеко неелементарного методу.

Приклад 1. Оскільки

$$a^2 + b^2 \geq 2|a||b|, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R},$$

то

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad \sqrt{ab} \leq \frac{|a|+|b|}{2}, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{|a|+|b|}$$

і

$$a^2 - 2ab \cos x + b^2 \geq (1 - \cos x)(a^2 + b^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Якщо $\varphi(x) = e^x - 1 - x$, то $\varphi'(x) = e^x - 1$, $\varphi(0) = 0$ і функція φ має на $\mathbb{R}$ глобальний строгий мінімум у точці $x = 0$. Тому $\varphi(x) > \varphi(0)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отже, $e^x > 1 + x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Приклад 3. Якщо $\varphi(x) = \arctg x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+x}$, то

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{(1+x)^2(1+x^2)}, \quad \text{функція } \varphi \text{ є зростаючою на } [0; +\infty) \text{ і}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0. \text{ Тому } \varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0, \quad \text{тобто } \arctg x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+x},$$

$x \in [0; +\infty).$

Приклад 4. Оскільки

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k},$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) \leq \frac{1}{2n-1},$$

Приклад 5. Якщо $m \in \mathbb{N}$, $t^{\wedge} = \max\{t; 1\}$ і

$$\ln^+ t = \ln t^{\wedge} = \begin{cases} \ln t, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1, \end{cases}$$

то

$$\ln^+ \left| \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \ln m + \sum_{k=1}^m \ln^+ |a_k|.$$

Справді,

$$\ln^+ \left| \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \ln^+ \sum_{k=1}^m |a_k| \leq \ln \sum_{k=1}^m |a_k|^{\wedge} \leq \ln \left(m \max \{ |a_k|^{\wedge} : k \in \overline{1; n} \} \right),$$

$$= \ln m + \ln \left(\max \left\{ |a_k|^\wedge : k \in \overline{1; n} \right\} \right) \leq \ln m + \sum_{k=1}^m \ln |a_k|^\wedge = \ln m + \sum_{k=1}^m \ln^+ |a_k|.$$

Приклад 6 (лема Гронуолла). Нехай функції v і u – невід’ємні, інтегровні на проміжку $[1; t_0]$ і $c > 0$ – константа. Тоді, якщо для всіх $t \in [1; t_0]$

$$u(t) \leq c + \int_1^t u(s)v(s)ds,$$

то

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_1^t v(s)ds \right), \quad t \in [1; t_0].$$

Справді,

$$\frac{u(\tau)v(\tau)}{c + \int_1^\tau u(s)v(s)ds} \leq v(\tau), \quad \int_1^t d \left(\ln \left(c + \int_1^\tau u(s)v(s)ds \right) \right) \leq \int_1^t v(\tau)d\tau,$$

$$\ln \left(c + \int_1^\tau u(s)v(s)ds \right) - \ln c \leq \int_1^\tau v(\tau)d\tau,$$

$$u(t) \leq c + \int_1^t u(s)v(s)ds \leq c \exp \left(\int_1^t v(\tau)d\tau \right).$$

Таким чином, якщо функції v і u – абсолютно інтегровні на проміжку $[1; t_0]$ і

$$|u(t)| \leq c + \int_1^t |u(s)v(s)|ds, \quad t \in [1; t_0].$$

для деякої сталої $c > 0$, то

$$|u(t)| \leq c \exp \left(\int_1^t |v(s)|ds \right), \quad t \in [1; t_0].$$

Приклад 7 (нерівність Гронуолла-Белмана). Якщо функція $u: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервною на $[a; b]$ і

$$(\exists c_1 \geq 0)(\exists c_2 \geq 0)(\forall x \in [a; b])(\forall x_0 \in [a; b]): |u(x)| \leq c_1 + c_2 \left| \int_{x_0}^x |u(t)|dt \right|,$$

то

$$(\forall x \in [a; b])(\forall x_0 \in [a; b]): |u(x)| \leq c_1 e^{c_2 |x - x_0|}.$$

Справді,

$$|u(t)| \leq c_1 + \int_{x_0}^x |u(s)c_2| ds, \quad a \leq x_0 \leq x \leq b,$$

і залишилось скористатись попереднім прикладом.

Приклад 8 (нерівність Віртингера). Якщо функція $u: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на $[a; b]$ і $u(a) = u(b) = 0$, то

$$\int_a^b u'^2(t) dt \geq \left(\frac{\pi}{b-a} \right)^2 \int_a^b u^2(t) dt.$$

Справді, вважаючи, що $a = 0$ і $b = \pi$, отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi d(u^2(t) \operatorname{ctg} t) \\ &= \int_0^\pi (u'^2(t) - u^2(t) - (u'(t) - u(t) \operatorname{ctg} t)^2) dt \leq \int_0^\pi (u'^2(t) - u^2(t)) dt. \end{aligned}$$

4. Опуклі функції. Функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається опуклою на проміжку $[a; b]$, якщо

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1)$$

для будь-яких $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ і $\alpha \in [0; 1]$.

Теорема 1. Для того щоб функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

для будь-яких x_1, x і x_2 , $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$.

Доведення. Справді, нехай функція є опуклою. Тоді виконується

(1). Нехай $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Тоді $\alpha \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \\ \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 = \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x. \end{aligned}$$

Тому виконується (2). Навпаки, нехай виконується (2), $x_1 < x_2$ і $x = x_2 + \alpha(x_2 - x_1)$. Тоді $x_1 < x < x_2$, $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \alpha$ і $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \alpha$. Тому з

(2) випливає (1). ►

Теорема 1 дає можливість геометрично інтерпретувати опуклі функції. Власне, через точки $(x_1; f(x_1))$ і $(x_2; f(x_2))$, де $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, проведемо пряму. Ця пряма задається рівнянням

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

тобто

$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Бачимо, що функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $[a; b]$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких x_1 і x_2 , $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, її графік на проміжку $[x_1; x_2]$ лежить не вище прямої, яка проходить через точки $(x_1; f(x_1))$ і $(x_2; f(x_2))$. Таким чином, функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на $[a; b]$ тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3)$$

для будь-яких x_1 і x_2 , $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, або, що є те ж саме,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається опуклою на відкритому проміжку $(a; b)$, якщо вона є опуклою на кожному замкненому проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$.

Теорема 2 (достатня умова опуклості). Якщо $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \geq 0$, то функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a; b)$.

Наслідок 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$ і $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою на $[a; b]$.

Функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається вгнутою на проміжку $[a; b]$, якщо

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (4)$$

для будь-яких $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ і $\alpha \in [0; 1]$. Функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається вгнутою на $(a; b)$, якщо вона є вгнутою на кожному проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$.

Теорема 3 (достатня умова вгнутості). Якщо $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \leq 0$, то функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є вгнутою на проміжку $(a; b)$.

Приклад 1. Функція $f(x) = e^x$ є опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$, бо $f'(x) = e^x$ і $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Функція $f(x) = \ln x$ є вгнутою на проміжку $(0; +\infty)$, бо $f'(x) = 1/x$ і $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 3. Функція $f(x) = x$ є вгнутою на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і опуклою на цьому проміжку, бо $f''(x) = 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 4. Функція $f(x) = x^3$ є опуклою на проміжку $[0; +\infty)$ і вгнутою на проміжку $(-\infty; 0]$, бо $f'(x) = 3x^2$ і $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$ і $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (-\infty; 0]$.

Приклад 5. Функція $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0; +\infty), \\ 1, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ є неперервною і опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$, а похідної в точці $x_0 = 0$ не має.

Приклад 6. Функція $f(x) = x^{2/3}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$, вгнутою на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[0; +\infty)$, не є вгнутою на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Приклад 7. Якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ і $f''(x) = 6x$, якщо $x \neq 0$. Тому маємо точки $x_1 = -\infty$, $x_2 = 0$ і $x_3 = +\infty$ та проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. При цьому, $f''(-1) = -6 < 0$ і $f''(1) = 6 > 0$. Отже, розглядувана функція є вгнутою на проміжку $(-\infty; 0)$ і є опуклою на проміжку $(0; +\infty)$.

Приклад 8. Якщо $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $f'(x) = 1/\cos^2 x$, $f''(x) \neq 0$ і $f''(x)$ не існує в точках $x_k = \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому отримуємо проміжки, $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1) + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих

проміжків друга похідна є додатною. Тому проміжки $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1) + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, є проміжками опуклості.

Приклад 9. Якщо $f(x) = e^{x^2}$, то $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$ і $f''(x) \neq 0$. Тому маємо дві точки $x_1 = -\infty$ і $x_2 = +\infty$ та проміжок $(-\infty; +\infty)$. Оскільки $f''(0) = 1 > 0$, то на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функція є опуклою.

Функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається строго опуклою на проміжку $[a; b]$, якщо

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

для будь-яких $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ і $\alpha \in [0; 1]$. Функція $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається строго опуклою на $(a; b)$, якщо вона є строго опуклою на кожному проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$.

Наслідок 2. Якщо $(\forall x \in (a; b)): f''(x) > 0$, то функція f є строго опуклою на $(a; b)$.

Зауваження 1. Опуклі і вгнуті функції мають різноманітні застосування. Зокрема, вони використовуються для доведення різноманітних нерівностей.

Зауваження 2. Інколи опуклу функцію називають опуклою вниз або вгнутою, а вгнуту функцію називають опуклою або опуклою вверх.

Безпосередньо з означення випливає, що опукла функція є неперервною, має в кожній точці $x_0 \in (a; b)$ праву $f'_+(x_0)$ і ліву $f'_-(x_0)$ похідні і при цьому $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$, $f'_+(x_0) \leq f'_-(x_3) \leq f'_+(x_3)$, якщо $a < x_0 < x_3 < b$. Більше того, опукла на $(a; b)$ функція f є абсолютно неперервною на кожному проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$, бо з (2) випливає, що

$$f'_+(a_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2) \leq f'_-(b_1),$$

і тому $|f(x_1) - f(x_2)| \leq c_1 |x_1 - x_2|$ для будь-яких точок x_1 та x_2 з $[a_1; b_1]$, $a < x_1 < x_2 < b$. Як відомо, абсолютно неперервна функція f має майже скрізь похідну і

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt, \quad a < x_1 < x_2 < b.$$

Отож, якщо функція f є опуклою на $(a; b)$, то f'_+ є неспадною функцією і

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt, \quad a < x_1 < x_2 < b. \quad (5)$$

З (3) випливає, що для кожної опуклої на $[a; b]$ функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і кожного $x_1 \in (a; b)$ функція

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

є неспадною на множині $[a; x_1] \cup (x_1; b]$ і при цьому

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq f'_+(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad a < x_1 < x < x_2 < b.$$

Функція F називається опуклою відносно $\ln x$ на $(e^a; e^b)$, якщо функція $f(x) = F(e^x)$ є опуклою на $(a; b)$. Якщо F – опукла відносно $\ln x$ на $(\alpha; \beta)$, то

$$F(x_2) - F(x) = \int_{x_1}^{x_2} t F'_+(t) d \ln t, \quad \alpha < x_1 < x < x_2 < \beta,$$

і функція $t F'_+(t)$ є неспадною.

Опуклі та вгнуті функції мають багато застосувань, зокрема, при доведенні різноманітних нерівностей.

Приклад 10. Якщо функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку

$(a; b)$, то $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ для будь-яких точок $x_1 \in (a; b)$ і $x_2 \in (a; b)$. Для отримання цього досить в означенні опуклості взяти $\alpha = 1/2$.

Приклад 11. Якщо функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку

$(a; b)$, то $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$ для будь-якого

$n \in \mathbb{N}$ і будь-яких точок $x_1 \in (a; b), \dots, x_n \in (a; b)$. Справді, для $n = 1$ і $n = 2$ твердження є справедливим. Припустимо, що воно є справедливим для $n = k$. Тоді

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right) &= f\left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{1}{k+1} x_{k+1}\right) \leq \\ &\leq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{k}{k+1} \cdot \frac{f(x_1 + x_2 + \dots + x_k)}{k} + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \leq \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1})}{k+1}. \end{aligned}$$

і на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку.

Приклад 12. Функція $f(x) = e^x$ є опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Тому $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$.

Приклад 13. Функція $f(x) = \ln x$ є вгнутою на проміжку $(0; +\infty)$.

Тому $\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}$, тобто

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n},$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких $x_j \in [0; +\infty)$, $j \in \overline{1; n}$. Таким чином,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_j \in [0; +\infty), \quad j \in \overline{1; n}.$$

Приклад 14. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на $(a; b)$, то

для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та всіх $x_k \in (a; b)$ і $\alpha_k \in [0; 1]$, для яких $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$

виконується $f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)$.

Приклад 15. Для всіх x і y , $a < x \leq y < b$, виконується $e^{(x+y)/2} \leq (e^x + e^y)/2$.

Приклад 16 (нерівність Єнсена). Нехай μ -зліченно адитивна повна і σ -скінченна міра визначена на деякій σ -алгебрі підмножин вимірної множини A , $f \in L_1(A; \mu)$, $f(A) \subset \mathbb{R}$ і $\mu(A) = 1$, і $\eta: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — опукла функція на деякому проміжку $[a; b]$, який містить множини $f(A)$, то

$$\eta\left(\int_A f(t) d\mu\right) \leq \int_A \eta(f(t)) d\mu.$$

Справді, оскільки функція η є опуклою, то

$$\frac{\eta(t) - \eta(v)}{t - v} \leq \eta'_+(t) \leq \frac{\eta(u) - \eta(t)}{u - t}, \quad a < v < t < u < b,$$

$$\eta(\tau) \geq \eta(t) + \eta'_+(t)(\tau - t), \quad \tau \in (a; b) \quad t \in (a; b),$$

$$\eta(f(x)) - \eta(t) - \eta'_+(t)(f(x) - t) \geq 0, \quad t = \int_A f(x) d\mu,$$

i

$$\int_A \eta(f(x)) d\mu \geq \eta\left(\int_A f(x) d\mu\right) + \eta'_+\left(\int_A f(x) d\mu\right) \left(\int_A f(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu\right) \geq$$

$$\geq \eta\left(\int_A f(t) d\mu\right).$$

Приклад 17. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на $\mathbb{R}$, то

$$\eta\left(\int_{[0;1]} f(t) dt\right) \leq \int_{[0;1]} \eta(f(t)) dt.$$

Приклад 18. Якщо функції $u: [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ і $f: [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ є інтегровними на $[a; b]$ і

$$\int_a^b u(t) dt = \alpha > 0,$$

то

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) \ln f(t) dt \leq \ln \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) f(t) dt \right),$$

Справді,

$$\exp \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) \ln f(t) dt \right) = \exp \left(\int_a^b \ln f(t) d \left(\int_a^t u(\tau) d\tau / \alpha \right) \right) \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b f(t) d \left(\int_a^t u(\tau) d\tau / \alpha \right) \right).$$

Приклад 19. Якщо функції $u: [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ і $f: [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ є інтегровними на $[a; b]$ і

$$\int_a^b u(t) dt = \alpha > 0,$$

то

$$\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) \ln^+ f(t) dt \leq \ln^+ \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) f(t) dt \right) + \ln 2,$$

Справді, якщо $\alpha^+ = \max\{\alpha; 1\}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) \ln^+ f(t) dt &= \frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) \ln(f(t))^+ dt \leq \ln \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) (f(t))^+ dt \right) \leq \\ &\leq \ln \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) (f(t) + 1) dt \right) \leq \ln \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) (f(t) + 1) dt \right) \leq \\ &\leq \ln^+ \left(\frac{1}{\alpha} \int_a^b u(t) f(t) dt \right) + \ln 2. \end{aligned}$$

5. О-символіка. Символи Ландау. Часто при розгляді як теоретичних, так і прикладних задач потрібно на деякій множині E або в деякому околі заданої точки a одну складну функцію f порівняти з іншою або замінити простішою функцією φ з тим, щоб отримати наочний математичний опис відповідної задачі. При цьому виникає питання про те, які функції слід вважати близькими. Відповідь на нього залежить від розглядуваної задачі.

Приклад 1. Для великих $n \in \mathbb{N}$ функції

$$f(t) = \begin{cases} n, & t \in [0; 1/n^3], \\ t, & t \in [1/n^3; 2], \end{cases}$$

та $\varphi(t) = t$ є близьким на проміжку $[0; 2]$ в середньому квадратичному, оскільки

$$\begin{aligned} d(f; \varphi) &:= \|f - \varphi\| := \left(\int_0^2 |f(t) - \varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^{1/n^3} (n - t)^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= (n - 1/n^3)^3 - n^3 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Проте їх важко назвати близькими в $\sup$ -нормі, оскільки

$$d(f; \varphi) := \|f - \varphi\| := \sup \{ |f(t) - \varphi(t)| : t \in [0; 2] \} = n \rightarrow +\infty.$$

Якщо, наприклад, $f(t)$ – це температура й мова йде про середню температуру за час $T = 2$, то можна вважати, що функції f та φ є близькими. Якщо ж $f(t)$ – це сила струму в електричному колі і важливо, щоб сила струму не перевищувала певного значення, то ці функції недоцільно вважати близькими.

Приклад 2. Припустимо, що певне фізичне явище описується функцією

$$y(t) = \frac{t \sin(t + \sqrt{t})}{1 + t^2} \arctg \frac{2 + \sin t}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k+1)^k}$$

і дослідника цікавить характер цього явища, якщо від його початку минуло досить багато часу. В цьому зв'язку доцільно знайти достатньо просту функцію φ , значення якої для великих t мало відрізняються від значень функції y .

Приклад 3. Багато фізичних процесів описується функціям, які є розв'язками лінійних диференціальних рівнянь другого порядку $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = \lambda y(t)$. Розв'язки $y(t; \lambda)$ таких рівнянь не є, як правило, елементарними функціями і задаються, в основному, рядами та інтегралами. У зв'язку з цим виникають наступні задачі. 1. Знайти простішу функцію $\varphi(t; \lambda)$, яка мало відрізняється від функції $y(t; \lambda)$. 2. Замінити коефіцієнти $a_i(t)$ рівняння близькими функціями так, щоб розв'язки обох рівнянь відрізнялися мало.

Якщо функцію f в околі точки a замінюють простішою функцією φ , то $|f(x) - \varphi(x)|$ і $|(f(x) - \varphi(x))/f(x)|$ називають відповідно абсолютною і відносною похибками. При розгляді подібних задач використовуються певні символи (символи Ландау).

1⁰. Символ “ $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$ ” означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

2⁰. Символ “ $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$ ” означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/\varphi(x) = 0$, тобто $f(x)/\varphi(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$.

3⁰. Символ “ $f(x) = O(1)$, $x \rightarrow a$ ” означає, що функція f обмежена в деякому проколеному околі точки a .

4⁰. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$ ” означає, що функція $f(x)/\varphi(x)$ обмежена в деякім проколенім околі точки a , тобто якщо $f(x)/\varphi(x) = O(1)$, $x \rightarrow a$.

5⁰. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \rightarrow a$ ” означає, що $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$ і $\varphi(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow a$.

6⁰. Символ “ $f(x) = O(1)$, $x \in E$ ” означає, що функція f є обмеженою на множині E .

7⁰. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \in E$ ” означає, що $f(x)/\varphi(x) = O(1)$, $x \in E$.

8⁰. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \in E$ ” означає, що $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \in E$ і $\varphi(x) = O(f(x))$, $x \in E$.

9⁰. Символ “ $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \rightarrow a$ ” означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/\varphi(x) = 1$.

Рівності, які містять символи Ландау, називаються асимптотичними формулами або асимптотичними рівностями. В таких формулах символ $o(\varphi(x))$ означає будь-яку функцію f з розглядуваного класу, для якої $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$, або деяку таку функцію. Аналогічне можна сказати про інші розглядувані символи.

Приклад 4. $\operatorname{tg} x = o(1)$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 5. $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 6. $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 7. $\sin x \sim x$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 8. $\cos x = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 9. $\sin x = o(1)$, $x \rightarrow 0$, проте не можна стверджувати, що $o(1) = \sin x$, $x \rightarrow 0$, оскільки символом $o(1)$ позначається довільна нескінченно мала функція (інколи нею може бути і функція $\sin x$).

Приклад 10. $o(1) + o(1) = o(1)$, $x \rightarrow a$ (сума двох нескінченно малих є нескінченно малою).

Приклад 11. $O(1) \cdot o(1) = o(1)$, $x \rightarrow a$ (добуток обмеженої і нескінченно малої є нескінченно малою).

Приклад 12. $(1 + o(1))(1 + o(1)) = 1 + o(1)$, $x \rightarrow a$.

Приклад 13. $\frac{1}{1 + o(1)} = 1 + o(1) + o(o(1)) = 1 + o(1)$, $x \rightarrow a$.

Приклад 14. $O(x^2) + o(x) = o(x) = o(1)$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 15.

$$\begin{aligned} x + O(x^3) + x^2 + o(x^2) &= x + x^2 + o(x^2) = \\ &= x + O(x^2) = x + o(x) = x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Приклад 16.

$$\begin{aligned} x^4 + O(x) + x^2 + o(x^2) &= x^4 + x^2 + o(x^2) = \\ &= x^4 + O(x^2) = x^4 + o(x^4) = x^4(1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Приклад 17. Число $A \in \mathbb{R}$ є границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці a тоді і тільки тоді, коли $f(x) = A + o(1)$, $x \rightarrow a$.

Приклад 18. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну в точці $x \in \mathbb{R}$, то $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$, $h \rightarrow 0$.

Приклад 19. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має другу похідну в точці $x \in \mathbb{R}$, то $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + O(h^2)$, $h \rightarrow 0$.

Приклад 20. $\sin(x+h) - \sin x = h \cos x + O(h^2)$, $h \rightarrow 0$.

Приклад 21. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$, то $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$.

Приклад 22. Якщо $0 < \lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$, то $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \rightarrow a$.

Приклад 23. Якщо $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$, то $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$.

Приклад 24. Якщо $0 < \underline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$, то $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \rightarrow a$.

Зауваження 1. Інколи розглядувані символи вживаються і в трохи загальнішому сенсі. Наприклад, вважають, що $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \in E$, якщо існує така обмежена на E функція η , що $f(x) = \eta(x)\varphi(x)$, $x \in E$ і вважають, що $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$, якщо існує така функція η , що $f(x) = \eta(x)\varphi(x)$ і $\eta(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$.

Якщо функції f і φ є нескінченно малими в точці a і $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$, то кажуть, що нескінченно мала f є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала φ . Якщо функції f і φ є нескінченно малими в точці a і $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \rightarrow a$, то кажуть, що нескінченно малі f і φ мають однаковий порядок в точці a . Якщо функції f і φ є нескінченно малими в точці a і $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \rightarrow a$, то кажуть, що нескінченно мала f і φ є еквівалентними..

Приклад 25. Нескінченно мала в точці $a=0$ функція $f(x) = x^3$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала в цій точці функція $\varphi(x) = x^2$, бо $x^3 = o(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

Приклад 26. Нескінченно малі в точці $a=0$ функції $f(x) = x^3$ і

$\varphi(x) = \sin 2x^3$ мають однаковий порядок.

Приклад 27. Нескінченно малі в точці $a=0$ функції $f(x)=x^2$ і $\varphi(x)=\operatorname{tg}^2 x$ є еквівалентними.

Приклад 28. Нескінченно малі в точці $a=0$ функції $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \in (0; +\infty), \\ x, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ і $\varphi(x)=\begin{cases} x, & x \in (0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ є не порівняльними в

тому розумінні, що жодна з них не нескінченно малою вищого порядку, ніж інша, вони не є еквівалентними і не є нескінченно малими однакового порядку.

Якщо функції f і φ є нескінченно великими в точці a і $f(x)=o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$, то кажуть, що нескінченно велика φ є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно мала f .

Приклад 29. Нескінченно мала в точці $a=\infty$ функція $\varphi(x)=x^3$ є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція $f(x)=x^2$, бо $x^2=o(x^3)$, $x \rightarrow \infty$.

Приклад 30. Нескінченно велика в точці $a=+\infty$ функція $\varphi(x)=e^x$ є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція $f(x)=x^3$, бо $x^3=o(e^x)$, $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 31. Якщо $f \in C^{(1)}[0; +\infty)$ і $f'(x)+f(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$, то $f(x) \rightarrow 0$ і $f'(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$. Справді, нехай $f' + f = \varepsilon$. Тоді $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$, і функція f є розв'язком рівняння $f' + f = \varepsilon$. Розв'язуючи останнє рівняння методом варіації

довільних сталих приходимо до висновку, що $f(x) = ce^{-x} + e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t)e^t dt$.

Звідси, скориставшись, наприклад, правилами Лопіталля, отримуємо, що $f(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$. Тоді $f'(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Зауваження 2. Часто зустрічаються функції $f(x; \lambda)$ двох змінних x та λ . При цьому змінну λ називають параметром. Запис " $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow a$ ", $\lambda \in G$, означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x; \lambda) = 0$ для кожного $\lambda \in G$. Коли кажуть, що " $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow a$ ", рівномірно за $\lambda \in G$, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x; \lambda) = 0$ рівномірно за $\lambda \in G$, тобто що (у випадку $a \in \mathbb{R}$)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, |x - a| < \delta)(\forall \lambda \in G) : |f(x; \lambda)| < \varepsilon.$$

Аналогічно модифікуються означення інших розглядуваних символів.

Приклад 32. Якщо $f(x; \lambda) = \lambda x^2$ і $G = [0; 1]$, то “ $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow 0$ ”, $\lambda \in G$, і “ $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow 0$ ”, рівномірно за $\lambda \in G$.

Приклад 33. Якщо $f(x; \lambda) = \lambda x^2$ і $G = [0; +\infty)$, то “ $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow 0$ ”, $\lambda \in G$, але “ $f(x; \lambda) = o(1)$, $x \rightarrow 0$ ”, нерівномірно за $\lambda \in G$.

6. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну порядку $n \in \mathbb{Z}_+$ в точці $a \in \mathbb{R}$, то справедлива формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано, яку тепер можна записати у формі

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Якщо всі $f^{(k)}(a) \neq 0$, то в сумі $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ кожний наступний доданок є нескінченно малою вищого порядку в точці a , ніж попередній. Цю формулу зручно використовувати для знаходження границь та знаходження різноманітних асимптотичних формул.

Приклад 1.
$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \text{ для}$$

кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Приклад 2.

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{2n+3}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Приклад 3.

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Приклад 4.

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Приклад 5.

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k} x^k + O(x^{n+1}) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,\end{aligned}$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ і кожного $\alpha \in \mathbb{R}$, де $\prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1$.

Приклад 6.
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Приклад 7.

$$\begin{aligned}\sin x - \frac{x}{1-x} &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2 - x^3 + o(x^3) = \\ &= -x^2 - \frac{7x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Приклад 8. $\ln(1+x) - \sin x + O(x^3) + o(x^2) =$

$$\begin{aligned}&= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) + O(x^3) + o(x^2) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + O(x^3) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Приклад 9.
$$\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1) + o(o(1)) = 1 + o(1), \quad x \rightarrow a.$$

Приклад 10.

$$\begin{aligned}\ln(1+x+o(x^2)) &= x + o(x^2) - \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + o((x+o(x^2))^2) = \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Приклад 11. Якщо

$$f(x) = x + 2x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f(\varphi(x)) = 3x + 4x^2 + o(x^2) + 2(3x + 4x^2 + o(x^2))^2 + \\ + o((3x + 4x^2 + o(x^2))^2) = 3x + 22x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Приклад 12. Якщо $\alpha \in \mathbb{R}$, то $(1+x)^\alpha = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})$, $x \rightarrow +\infty$, бо

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left((1+1/x)^\alpha - 1 \right) = \\ = x^\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

При знаходженні границь за допомогою формули Тейлора слід вдало вибрати n . Бажано його вибирати як можна меншим (якщо в даній ситуації підходить якесь n , то підходить і будь-яке, більше за нього, але не навпаки).

Приклад 13. Для знаходження границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

скористаємось формулою Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

взявши $n=2$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Якщо взяти $n=3$, то знову отримаємо потрібний результат:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x}{x^2} = \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x) \right) = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж ми б взяли $n=1$, то в кінці б отримали границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^2}$, яку знайти не можна без додаткової інформації про $o(x)$ (можна думати, що $o(x)=|x|^{3/2}$, $o(x)=5x^2$, $o(x)=7x^3$ і т.д.). Ця додаткова інформація здобувається шляхом збільшення вибору n у формулі Тейлора.

Приклад 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2}}{1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - (1 + x^2 - x^4 + o(x^4))} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{24} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

7. Порядок і тип функції. Нехай $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ – неспадна функція. Порядком функції η називається число $\rho = \rho[\eta]$, визначене формулою

$$\rho = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \eta(t)}{\ln t}.$$

Іншими словами, порядком функції η називається точна нижня межа тих чисел $\rho_1 \in (0; +\infty]$, для яких

$$(\exists c_1)(\forall t \in [1; +\infty)): |\eta(t)| \leq c_1 t^{\rho_1},$$

тобто, для яких

$$(\exists t_0)(\forall t \in [t_0; +\infty)): |\eta(t)| \leq t^{\rho_1},$$

Порядок функції η дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли $(\forall \rho_1 \in (0; +\infty))(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): |\eta(t)| \leq t^{\rho_1}$. Порядок функції η дорівнює $+\infty$ тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність (t_k) , $0 < t_k \uparrow +\infty$, що $(\forall \rho_1 \in (0; +\infty))(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |\eta(t_k)| \geq t_k^{\rho_1}$. Порядок функції η дорівнює числу $\rho \in (0; +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:

$$1) (\forall \rho_1 > \rho)(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): |\eta(t)| \leq t^{\rho_1};$$

2) існує така послідовність (t_k) , $0 < t_k \uparrow +\infty$, що $(\forall \rho_2 < \rho)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |\eta(t_k)| \geq t_k^{\rho_2}$.

Якщо $\rho \in (0; +\infty)$ – порядок функції η , то число $\sigma = \sigma[\eta] = \sigma[\eta; \rho]$, визначене формулою

$$\sigma = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(r)}{r^\rho},$$

називається типом функції η при порядку ρ .

Тип функції η порядку $\rho \in (0; +\infty)$ дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли $(\forall \sigma_1 \in (0; +\infty))(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): |\eta(t)| \leq \sigma_1 t^\rho$. Тип функції η порядку $\rho \in (0; +\infty)$ дорівнює $+\infty$ тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність (t_k) , $0 < t_k \uparrow +\infty$, що $(\forall \sigma_1 \in (0; +\infty))(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |\eta(t_k)| \geq \sigma_1 t_k^\rho$. Тип функції η порядку $\rho \in (0; +\infty)$ дорівнює числу $\sigma \in (0; +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:

$$1) (\forall \sigma_1 > \sigma)(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): |\eta(t)| \leq \sigma_1 t^\rho;$$

2) існує така послідовність (t_k) , $0 < t_k \uparrow +\infty$, що $(\forall \sigma_2 < \sigma)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |\eta(t_k)| \geq \sigma_2 t_k^\rho$.

Зауваження 1. Інколи доцільно розглядати тип $\sigma = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta(r)}{r^{\rho_1}}$

функції η відносно довільного числа $\rho_1 \in (0; +\infty)$, яке не обов'язково дорівнює її порядку. Тоді кажуть, що тип функції η дорівнює σ відносно формального порядку ρ_1 . Як правило розглядають формальний порядок, який не є меншим за порядок.

Приклад 1. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$, $\beta \in (0; +\infty)$, $\gamma \in (0; +\infty)$ і $\eta(t) = \gamma t^\beta + \ln(t+3)$. Тоді $\eta(t) = \gamma t^\beta (1 + o(1))$ і $\ln \eta(t) = \beta(1 + o(1)) \ln t$, якщо $t \rightarrow +\infty$. Тому $\rho[\eta] = \beta$ і $\sigma[\eta] = \gamma$.

Приклад 2. Нехай $\beta \in (0; +\infty)$ і $\eta(t) = t^\beta \ln(t+3)$. Тоді $\ln \eta(t) = \beta(1 + o(1)) \ln t$, якщо $t \rightarrow +\infty$. Тому $\rho[\eta] = \beta$ і $\sigma[\eta] = +\infty$.

Приклад 3. Нехай $\eta(t) = e^{\ln^2 t}$. Тоді $\ln \eta(t) = \ln^2 t$, якщо $t \rightarrow +\infty$. Тому $\rho[\eta] = +\infty$ і $\sigma[\eta] = +\infty$.

Приклад 4. Якщо функція $\eta:[0;+\infty)\rightarrow(0;+\infty)$ є неперервною на $[0;+\infty)$, для деякого $\beta>-\rho$ функція $t^\beta\eta(t)$ є неспадною на $[1;+\infty)$ і

$$\int_1^{+\infty} \frac{\eta(t)}{t^{\rho+1}} < +\infty,$$

то $\eta(t)=o(t^\rho)$, $t\rightarrow+\infty$. Справді,

$$0\leftarrow\int_x^{+\infty}\frac{\eta(t)}{t^{\rho+1}}dt\geq x^\beta\eta(x)\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{\rho+\beta+1}}dt\geq\frac{\eta(x)}{(\rho+\beta)x^\rho},\quad x\rightarrow+\infty.$$

Таким чином, порядок функції η не перевищує ρ , а її тип відносно формального порядку ρ дорівнює нулеві.

Приклад 5. Якщо функція $\eta:[0;+\infty)\rightarrow(0;+\infty)$ є неспадною на $[1;+\infty)$ і $f(x)=\int_1^x\frac{\eta(t)}{t}dt$, то

$$f(x)=\int_1^x\frac{\eta(t)}{t}dt\leq\eta(x)\ln x,\quad x\in[1;+\infty),$$

$$f(x)=\int_{x/e}^x\frac{\eta(t)}{t}dt\geq\eta(x/e),\quad x\in[1;+\infty).$$

Тому $\ln f(x)\leq\ln\eta(x)+\ln\ln x$ і $\rho[f]\leq\rho[\eta]$. Крім цього,

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x}\geq\frac{\ln\eta(x/e)}{\ln(x/e)}\cdot\frac{\ln(x/e)}{\ln x}$$

і $\rho[f]\geq\rho[\eta]$. Отже, $\rho[f]=\rho[\eta]$. Далі,

$$\frac{f(x)}{x^\rho}\geq\frac{\eta(x/e)}{(x/e)^\rho}e^{-\rho}$$

і $\sigma[\eta;\rho]e^{-\rho}\leq\sigma[f;\rho]$. Якщо $\sigma[\eta;\rho]<+\infty$, то

$$\frac{\eta(t)}{t^\rho}\leq\sigma_1$$

для кожного $\sigma_1>\sigma[\eta;\rho]$ і всіх $t\geq t_0$. Отже,

$$f(x)=\int_{t_0}^x\frac{\eta(t)}{t}dt+O(1)\leq\sigma_1\int_{t_0}^xt^{\rho-1}dt+O(1)=\frac{\sigma_1x^\rho}{\rho}+O(1),\quad x\geq t_0.$$

Таким чином, $\sigma[\eta;\rho]e^{-\rho}\leq\sigma[f;\rho]\leq\sigma[\eta;\rho]/\rho$.

8. Повільно змінні функції. Функція $\omega:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ називається повільно змінною, якщо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega(c_1 t)}{\omega(t)} = 1$$

для кожної додатної сталої c_1 , причому прямування до границі рівномірне за c_1 на кожному проміжку $[a; b] \in \mathbb{R}$. Якщо при цьому ω є неспадною, то ω називається повільно зростаючою функцією.

Приклад 1. Функція $\omega(t) = \ln t$ є повільно змінною, бо

$$\frac{\ln c_1 t}{\ln t} = \frac{\ln c_1 + \ln t}{\ln t} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty.$$

рівномірно за $c_1 \in [a; b]$. Функції $\omega(t) = \ln^2 t$, $\omega(t) = \ln \ln t$, $\omega(t) = \arctg t$, $\omega(t) = e^{1/t}$ та $\omega(t) = e^{\ln^\alpha t}$, де $\alpha \in [0; 1)$, також є повільно змінними. Функції $\omega(t) = t$, $\omega(t) = \sqrt{t}$, $\omega(t) = 1/t^2$, $\omega(t) = e^t$, $\omega(t) = e^{\sqrt{t}}$ та $\omega(t) = e^{\ln^2 t}$ не є повільно змінними.

Приклад 2. Якщо функція $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною на $[0; +\infty)$ і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t\omega'(t)/\omega(t) = 0, \quad (1)$$

то ω є повільно змінною функцією, бо за теоремою Лагранжа

$$\ln \omega(c_1 t) - \ln \omega(t) = \frac{\xi \omega'(\xi) (c_1 - 1)t}{\omega(\xi) \xi} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

рівномірно по $c_1 \in [a; b]$, де ξ лежить між t та $c_1 t$.

Приклад 3. Якщо функція $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною на $[0; +\infty)$ і виконується (1), то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} = 0,$$

бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \omega(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \omega(0)}{\ln x} + \frac{\int_0^x \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} dt}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = 0.$$

9. Уточнений порядок функції. Уточненим або точним порядком називається така неперервно диференційовна на деякому проміжку $[x_0; +\infty)$ функція $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, для якої

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \rho \in [0; +\infty),$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t\rho'(t)\ln t = 0.$$

Приклад 1. Стала функція $\rho(t) \equiv \rho \in [0; +\infty)$ є уточненим порядком.

Приклад 1. Функція $\rho(t) = \rho + 1/\ln(2+t)$ є уточненим порядком.

Приклад 3. Якщо функція $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є уточненим порядком, то функція $\omega(t) = t^{\rho(t)-\rho}$ є повільно змінною, бо

$$t\omega'(t)/\omega(t) = \rho(t) - \rho + t\rho'(t)\ln t.$$

Приклад 4. Якщо $\rho \in [0; +\infty)$, функція $\omega: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ є неперервно-диференційовною на $[0; +\infty)$ і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t\omega'(t)/\omega(t) = 0,$$

то функція $\rho(t) = \frac{\ln(t^\rho \omega(t))}{\ln t}$ є уточненим порядком, бо

$$\rho(t) = \rho + \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} \rightarrow \rho, t \rightarrow +\infty,$$

і

$$t\rho'(t)\ln t = \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} - \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$$

Уточнений порядок $\rho: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ називається уточненим порядком функції $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, якщо

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{t^{\rho(t)}} = \sigma \in (0; +\infty).$$

Для будь-якої функції η , яка має порядок $\rho \in (0; +\infty)$, існує такий її уточнений порядок $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що:

а) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \rho;$

б) $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta(r)}{r^{\rho(r)}} = \sigma \in (0; +\infty);$

в) $\frac{\eta(r)}{r^{\rho(r)}} \leq \sigma, r \geq r_0;$

г) $\frac{\eta(r_n)}{r_n^{\rho(r_n)}} = \sigma$ на деякій послідовності (r_n) , $0 < r_n \uparrow +\infty$.

Уточнений порядок $\rho:[0;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$ називається формальним уточненням порядком функції η , якщо існують числа σ_1 і c_1 такі, що

$$\eta(t) \leq \sigma_1 t^{\rho(t)} + c_1, \quad r \geq 0. \quad (1)$$

При цьому число σ_1 називається формальним типом функції при уточненому порядку $\rho:[0;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$, а точна нижня межа σ тих σ_1 , для яких існує стала c_1 така, що виконується (1), називається типом функції η при формальному уточненому порядку $\rho:[0;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$, тобто

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\overline{\eta(r)}}{r^{\rho(r)}}$$

Приклад 1. Стала функція $\rho(t) \equiv \rho \in [0;+\infty)$ є уточненням порядком функції $\eta(t) = 2t^\rho + t^{\rho/2}$.

Приклад 2. Функція $\rho(t) = \rho + \frac{\ln \ln t}{\ln t}$ є уточненням порядком функції $\eta(t) = 2t^\rho \ln t + t^\rho$.

10. Інтегрування асимптотичних формул. Асимптотичні рівності можна, як правило, почленно інтегрувати, якщо виконуються природні умови. Обґрунтування можливості почленного інтегрування базується на означеннях символів Ландау.

Приклад 1. Якщо функція $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[0;+\infty)$, $\alpha > -1$ і $f(t) \sim t^\alpha$, $t \rightarrow +\infty$, то

$$\int_0^x f(t)dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, $f(t) \sim t^\alpha$, $t \rightarrow +\infty$, тоді і тільки тоді, коли $f(t) = t^\alpha + o(t^\alpha)$, $t \rightarrow +\infty$ (тут символом $o(t^\alpha)$ позначену деяку функцію $\eta:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\eta(t) = o(t^\alpha)$ при $t \rightarrow +\infty$). Оскільки

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \geq \delta): |o(t^\alpha)| \leq \varepsilon t^\alpha$, то

$$\left| \int_\delta^x o(t^\alpha)dt \right| \leq \varepsilon \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \geq \delta.$$

Отож, з рівності

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^\delta f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = O(1) + \int_\delta^x t^\alpha dt + \int_\delta^x o(t^\alpha)dt = \\ &= O(1) + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_\delta^x o(t^\alpha)dt, \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

отримуємо, що

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = o(x^{\alpha+1}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

що і потрібно було показати.

Приклад 2. Якщо функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;1], \\ t^\alpha, & t > 1, \end{cases}$$

і $\alpha < -1$, то

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &\geq 1, \quad x \geq 1, \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= o(1), \quad x \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Отже, розглядуване в попередньому прикладі співвідношення не є справедливим.

11. Диференціювання асимптотичних формул. Асимптотичні формули можна почленно диференціювати тільки, як правило, при виконанні певних додаткових умов. Обґрунтування можливості почленного диференціювання є досить складною мало дослідженою проблемою, яка пов'язана з тауберовими теоремами. Наприклад, ми не знаємо задовільних достатніх умов, за яких можна почленно диференціювати асимптотичну формулу $f(t) = t^\rho + o(t^{\rho_1})$, $t \rightarrow +\infty$, де ρ і ρ_1 , $0 < \rho_1 < \rho < +\infty$, – задані числа.

Приклад 1. Якщо $f(t) = t + \sin t$, то $f(t) \sim t$, $t \rightarrow +\infty$, і $f'(t) = 1 + \cos t$. Тому співвідношення $f'(t) \sim 1$, $t \rightarrow +\infty$, не виконується. Отже, асимптотичну рівність $f(t) \sim t$, $t \rightarrow +\infty$, почленно не можна, взагалі кажучи, диференціювати.

Приклад 2. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною на $[0; +\infty)$ і

$$f(x) = o(x), \quad x \rightarrow +\infty,$$

то за теоремою Лагранжа

$$f(x) - f(0) = f'(c)x, \quad 0 < c < x,$$

і тому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

Приклад 3. Нехай $\Delta \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, і функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ подається у вигляді

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t^\alpha} dt,$$

де $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, яка є монотонною на $[1; +\infty)$. Тоді умови

$$f(t) \sim \Delta t^\rho, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (1)$$

і

$$\eta(t) \sim \rho \Delta t^{\rho+\alpha-1}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

є еквівалентними. Справді, якщо виконується (2), то

$$f(x) \sim \rho \Delta \int_1^x t^{\rho-1} dt \sim \Delta x^\rho, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Навпаки, нехай виконується (1). Оскільки функція η є монотонною, то досить розглянути випадок, коли η є неспадною і $\eta(t) \geq 0$. Нехай спочатку $\alpha = 1$. Тоді

$$\eta(r) \ln \frac{R}{r} \leq f(R) - f(r) = \int_r^R \frac{\eta(t)}{t} dt \leq \eta(R) \ln \frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Взявши $R = (1 + \delta)r$, де $\delta > 0$, отримуємо

$$\eta(r) \leq \frac{f(R) - f(r)}{\ln(R/r)} = \frac{\Delta r^\rho \left((1 + \delta)^\rho - 1 \right) + o(r^\rho)}{\ln(1 + \delta)}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тому

$$\gamma := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \eta(r) / r^\rho \leq \frac{\Delta \left((1 + \delta)^\rho - 1 \right)}{\ln(1 + \delta)},$$

тобто $\gamma \leq \rho \Delta$. Аналогічно, взявши $r = R(1 - \delta)$, знаходимо

$$\eta(R) \geq \frac{f(R) - f(r)}{\ln(R/r)} \geq \frac{-\Delta R^\rho \left((1 - \delta)^\rho - 1 \right) + o(R^\rho)}{-\ln(1 - \delta)}, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Таким чином,

$$\gamma_1 := \lim_{R \rightarrow +\infty} \eta(R) / R^\rho \geq \Delta \rho.$$

Тому $\lim_{r \rightarrow +\infty} \eta(r)/r^\rho = \rho\Delta$, що і потрібно було показати. Нехай тепер $\alpha \neq 1$. Тоді

$$\eta(r) \frac{1}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}) \leq f(R) - f(r) = \int_r^R \frac{\eta(t)}{t^\alpha} dt \leq \eta(R) \frac{1}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}).$$

Візьмемо $R = (1+\delta)r$, де $\delta \in (0;1)$. Тоді

$$\begin{aligned} \eta(r) &\leq \frac{(1-\alpha)(f(R) - f(r))}{(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha})} = \\ &= \frac{(1-\alpha)\Delta r^\rho ((1+\delta)^\rho - 1) + o(r^\rho)}{(1+\delta)^{1-\alpha} - 1}, \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому $\gamma \leq \rho\Delta$. Аналогічно, взявши $r = (1-\delta)R$, $\delta \in (0;1)$, знайдемо, що $\gamma_1 \geq \Delta\rho$. Таким чином, і в цьому випадку отримуємо потрібне. Отже, якщо $\Delta \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, і функція $t^\alpha f'(t)$ є неперервною і монотонною, то асимптотичну формулу $f(t) \sim \Delta t^\rho$, $t \rightarrow +\infty$, можна почленно диференціювати: $f'(t) \sim \Delta \rho t^{\rho-1}$, $t \rightarrow +\infty$.

Приклад 4. Нехай і функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ подається у вигляді

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt,$$

де $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, яка є монотонною на $[1; +\infty)$. Тоді умови

$$\frac{f(t)}{\ln t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \tag{1}$$

і

$$\eta(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \tag{2}$$

є еквівалентними. Справді, якщо виконується (2), то

$$-\varepsilon \ln x < \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt < \varepsilon \ln x$$

для всякого $\varepsilon > 0$ і всіх $x \geq x_0(\varepsilon)$. Тому виконується (1). Навпаки, нехай виконується (1). Оскільки функція η є монотонною, то досить розглянути випадок, коли η є незростаючою і $\eta(t) \geq 0$. Припустимо, що (1) не виконується. Тоді $\eta(t) \geq \varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$ і всіх $t \geq x_0(\varepsilon)$. Тому

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt \geq O(1) + \varepsilon \ln x$$

для всіх достатньо великих x , а це суперечить (1).

Приклад 5. Нехай

$$\Delta \in [0; +\infty), \rho \in (0; +\infty) \text{ і } f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt,$$

де $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – монотонна функція на $[1; +\infty)$. Тоді для того, щоб для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$

$$f(x) = \Delta x^\rho + o(x^{\rho_2}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

необхідно й достатньо, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$

$$\eta(t) = \rho \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Справді, необхідність випливає з того, що $f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt$. Доведемо достатність. Оскільки

$$\eta(r) \ln \frac{R}{r} \leq f(R) - f(r) = \int_r^R \frac{\eta(t)}{t^\alpha} dt \leq \eta(R) \ln \frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty,$$

то, взявши $R = r + r^\alpha$, де $1 + \rho_2 - \rho < \alpha < 1$ і $\max\{\rho_2 - \alpha + 1; \rho + \alpha - 1\} < \rho_1 < \rho$, отримуємо

$$\begin{aligned} \eta(r) &\leq \frac{\Delta r^\rho \left((1 + r^{\alpha-1})^\rho - 1 \right) + o(r^{\rho_2})}{\ln(1 + r^{\alpha-1})} = \\ &= \frac{\Delta r^\rho \left(\rho r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)}) \right) + o(r^{\rho_2})}{r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)})} = \Delta \rho r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

З іншого боку, взявши $r = R - R^\alpha$, знаходимо, що

$$\begin{aligned} \eta(R) &\geq \frac{\Delta R^\rho \left(1 - (1 - R^{\alpha-1})^\rho \right) + o(R^{\rho_2})}{-\ln(1 - R^{\alpha-1})} = \\ &= \frac{\Delta \rho R^\rho + O(R^{\rho-1+\alpha}) + o(R^{\rho_2+1-\alpha})}{1 + O(R^{\alpha-1})} = \Delta \rho R^\rho + o(R^{\rho_1}), \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо потрібне твердження.

12. Асимптотичні ряди. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (1)$$

називається асимптотичним рядом функції f у точці a (цей факт позначають символом $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, $x \rightarrow a$), якщо для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) = o(\varphi_n(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Асимптотичний ряд не обов'язково є поточково збіжним. Разом із цим, якщо в деякому околі точки a функція розвивається у поточково збіжний ряд (1), то цей ряд може і не бути її асимптотичним рядом у цій точці.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$ є асимптотичним рядом функції f і

записується у вигляді $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$, $x \rightarrow \infty$, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$

виконується $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^{-k} = o(x^{-n})$, $x \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Для того щоб функція f розвивалась в асимптотичний ряд $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$, $x \rightarrow \infty$, необхідно й достатньо, щоб

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{-k} \right) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 1. Для заданої функції f і області $(a; +\infty) \subset \mathbb{R}$ існує не більше одного асимптотичного ряду виду $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$, $x \rightarrow \infty$.

Зауваження 1. Кожному асимптотичному ряду відповідає не одна функція, а цілий клас функцій.

Приклад 2. Нехай функція f розвивається в деякому околі точки a в ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^{k\tau+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Тоді цей ряд є її

асимптотичним рядом у точці a , оскільки

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x-a)^{k\tau+\alpha} = O\left((x-a)^{n\tau+\alpha+1}\right), \quad x \rightarrow a.$$

Приклад 3. Нехай функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$ розвивається в деякому

околі точки $a=1/2$ в степеневий ряд $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Проте висловлення

$\frac{1}{1-x} - 1 = o(x)$, $x \rightarrow 1/2$, є хибним. Тому цей ряд не є асимптотичним

рядом функції $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в точці $a=1/2$.

Приклад 4. Якщо функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною на проміжку $[a; b]$, то для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$I(x) := \int_a^b e^{itx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n \left(\frac{i}{x} \right)^{k+1} \left(e^{iax} \eta^{(k)}(a) - e^{ibx} \eta^{(k)}(b) \right) + o\left(\frac{1}{x^{n+1}} \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Справді, інтегруванням частинами отримуємо

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_a^b e^{itx} \eta(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{i}{x} \right)^{k+1} \left(e^{iax} \eta^{(k)}(a) - e^{ibx} \eta^{(k)}(b) \right) + \left(\frac{i}{x} \right)^{n+1} \int_a^b e^{itx} \eta^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

і за теоремою Рімана-Лебега останній інтеграл прямує до нуля, якщо $x \rightarrow \infty$.

Приклад 5. Якщо функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною на проміжку $[a; +\infty)$ і всі її похідні абсолютно інтегровні на $[a; +\infty)$, то для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$I(x) := \int_a^{+\infty} e^{itx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n e^{iax} \eta^{(k)}(a) \left(\frac{i}{x} \right)^{k+1} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}} \right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Справді, спрямувавши в рівності

$$\int_a^b e^{itx} \eta(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{i}{x}\right)^{k+1} \left(e^{iax} \eta^{(k)}(a) - e^{ibx} \eta^{(k)}(b) \right) + \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1} \int_a^b e^{itx} \eta^{(n+1)}(t) dt$$

b до $+\infty$ переконаємось, що для кожного $x \in \mathbb{R}$ і кожного $k \in \mathbb{Z}_+$ існує скінченна границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{ibx} \eta^{(k)}(b) = \gamma_k(x)$. Скориставшись означенням границі на мові послідовностей, переконаємось, що $\gamma_k(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і кожного $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому

$$\int_a^{+\infty} e^{itx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n e^{iax} \eta^{(k)}(a) \left(\frac{i}{x}\right)^{k+1} + \left(\frac{i}{x}\right)^{n+1} \int_a^{+\infty} e^{itx} \eta^{(n+1)}(t) dt$$

Залишилось скористатись теоремою Рімана-Лебега.

Зауваження 2. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$$

називається асимптотичним рядом функції f у точці a з точністю $\{\psi_k(x) : k \in \mathbb{Z}_+\}$, якщо для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x) = o(\psi_n(x)), \quad x \rightarrow a.$$

Останні два приклади вказують на доцільність такого означення.

13. Оцінка нулів функцій та коренів рівнянь. При розгляді багатьох проблем потрібно вміти дослідити наявність у функції нулів, їхню кратність та знайти їх з достатньою точністю. Нулем функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається таке число $a \in \mathbb{R}$, що $f(a) = 0$, тобто нуль функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — це корінь рівняння $f(x) = 0$. Кажуть, m раз неперервно диференційовна в точці $a \in \mathbb{R}$ функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в цій точці нуль, порядку $m \in \mathbb{N}$, або нуль, кратності $m \in \mathbb{N}$, якщо

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (1)$$

Нуль, порядку $m = 1$, називається простим нулем.

Теорема 1. Нехай f — багаточлен степеня n і $m \leq n$. Тоді еквівалентними є наступні умови: 1) в точці $a \in \mathbb{R}$ багаточлен f має нуль, порядку m ; 2) $f(x) = (x - a)^m g(x)$, де g — багаточлен степеня $n - m$ і $g(a) \neq 0$; 3) $f(x) = \sum_{k=m}^n A_k (x - a)^k$, де $A_m \neq 0$.

Приклад 1. Багаточлен $f(x) = (x-1)^4(x+3)$ є багаточленом степеня $n=5$, має нуль порядку $m=4$ у точці $a_1=1$ і має нуль, порядку $m=1$, у точці $a_2=-3$.

Зауваження 1. Згідно з основною теоремою алгебри (її доводять в інших розділах математики) кожний поліном, степеня n , має не більше, ніж n дійсних нулів (має рівно n комплексних нулів, якщо кожен нуль, порядку m , враховувати m раз).

Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[a;b]$ і на кінцях проміжку $[a;b]$ приймає значення протилежних знаків, то за теоремою Больцано-Коші рівняння

$$f(x) = 0 \quad (2)$$

має корінь на $[a;b]$. Питання полягає в тому як його знайти з достатньою точністю. Є ряд методів. Розглянемо суть деяких з них.

1⁰. Метод вилки. Суть його така. Ділимо проміжок $[a;b]$ на два рівні точкою $c_1 = (b+a)/2$. Можливі два випадки: а) $f(c_1) = 0$ і б) $f(c_1) \neq 0$. В першому випадку задача розв'язана, а в другому – ділимо той з двох одержаних проміжків, на кінцях якого функція приймає значення протилежних знаків, точкою c_2 на два рівних. Продовжуючи цей процес, можемо з наперед заданою точністю знайти розв'язок рівняння. Але цей базується на першій теоремі Больцано-Коші і є досить трудомістким.

2⁰. Метод дотичних, метод Ньютона. Нехай $x_0 = b$ і $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$. За виконання певних умов ця послідовність (x_n) збігається до кореня рівняння (1).

3⁰. Метод хорд. Нехай $x_0 = a$ і $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(b-x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}$. За виконання певних умов ця послідовність (x_n) збігається до кореня рівняння (1).

4⁰. Метод послідовних наближень. Запишемо рівняння (2) у вигляді

$$x = F(x). \quad (3)$$

Нехай $x_0 = a$ і $x_n = F(x_{n-1})$. За виконання певних умов ця послідовність (x_n) збігається до кореня рівняння (2).

Перш ніж вибрати певний наближений метод потрібно з'ясувати скільки коренів має рівняння, знайти кратність кожного кореня та проміжки, які містять єдиний корінь.

Приклад 2. Функція $f(x) = x^3 + x + 1$ є неперервною на $\mathbb{R}$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ і $f'(x) = 3x^2 + 1$. Тому вона є зростаючою на $\mathbb{R}$. Отже, рівняння $x^3 + x + 1 = 0$ має єдиний дійсний корінь. Крім цього, $f''(x) = 6x$ і $f(0) = 1 \neq 0$. Тому цей корінь є простим. Оскільки $f(-1) = -1 < 0$ і $f(0) = 1 > 0$, то корінь міститься на проміжку $(-1; 0)$.

Приклад 3. Знайдемо ті $a \in \mathbb{R}$, для яких рівняння $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0$ має дійсні корені, кратності $m \geq 2$. Нехай $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1$. Тоді $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$. Якщо таке $a \in \mathbb{R}$ існує, то сумісною є система $\begin{cases} f(x) = 0, \\ f'(x) = 0, \end{cases}$ тобто система

$$\begin{cases} x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0, \\ 3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння випливає, що $x = a$ і тому $a^3 - 3aa^2 + 3a^2a - 1 = 0$. Отже, $a = 1$. Тоді $f(x) = (x-1)^3$. Отже, рівняння має дійсні корені тільки у випадку $a = 1$ і тоді воно має єдиний дійсний корінь $x = 1$, кратності $m = 3$.

Приклад 4. Дослідимо рівняння $x^3 - 3ax + 1 = 0$. Нехай $f(x) = x^3 - 3ax + 1$. Ця функція є неперервною на $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ і $f'(x) = 3x^2 - 3a$. Отже, рівняння $x^3 - 3ax + 1 = 0$ має принаймні один дійсний корінь. Якщо $a \leq 0$, то функція є зростаючою і тому має єдиний дійсний корінь. Якщо $a > 0$, то функція є зростаючою на проміжках $(-\infty; -\sqrt{a})$ та $(\sqrt{a}; +\infty)$ і є спадною на проміжку $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$. В точці $-\sqrt{a}$ вона має максимум, а в точці $\sqrt{a}$ — мінімум. При цьому, $f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + 1$ і $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + 1$. Маємо $f(\sqrt{a/3})f(-\sqrt{a/3}) < 0$, якщо $a > 1/\sqrt[3]{4}$. Отже, якщо $a \in (1/\sqrt[3]{4}; +\infty)$,

то рівняння має три дійсні корені, які належать проміжкам $(-\infty; -\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$ та $(\sqrt{a}; +\infty)$ і всі ці корені є простими. Якщо $a \in (0; 1/\sqrt[3]{4})$, то рівняння має єдиний корінь, він є простим і належить проміжку $(-\infty; -\sqrt{a})$, другий $x_2 = \sqrt{a}$ має кратність $m_2 = 2$.

14. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь. Для знаходження формули $y = f^{-1}(x)$, якою задається функція $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, обернена до функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, потрібно з рівняння $y = f(x)$ знайти $x = f^{-1}(y)$, а потім поміняти місцями x та y . В результаті прийдемо до потрібної формули. При цьому використовуються відомі тотожності

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D(f).$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in E(f).$$

Проте, часто рівняння $y = f(x)$ розв'язати важко. В зв'язку з цим, в багатьох випадках доцільніше знайти асимптотичну формулу. Подібним чином поступають і при розв'язуванні рівнянь $f(x) = a$. Якщо таке рівняння має нескінченну кількість коренів, то в багатьох випадках, подавши $\mathbb{R}$ у вигляді об'єднання зліченної кількості попарно неперетинних проміжків, на кожному з яких функція f є оборотною, можна знайти асимптотику коренів, які належать розглядуваним проміжкам.

Приклад 1. Якщо $f(x) = 3x + 6$, то маємо рівняння $y = 3x + 6$, із якого знаходимо, що $x = \frac{1}{3}y - 2$. Тому $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$ і $y = \frac{1}{3}x - 2$ – шукана формула.

Приклад 2. З, наприклад, геометричних міркувань випливає, що для всіх $x \geq x_0$ рівняння $\ln t = x - 1 + 1/t$ має єдиний корінь $t = f^{-1}(x) > 1$. При цьому, $t = f^{-1}(x) > 1$, $x \rightarrow +\infty$. Тому $f^{-1}(x) = \exp(x - 1 + o(1))$, $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 3. Якщо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – дві оборотні функції і

$$f(x) = (1 + o(1))\varphi(x), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f^{-1}(x) = \varphi^{-1}((1 + o(1))x), \quad x \rightarrow 0,$$

Зокрема, якщо

$$f(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow 0.$$

Приклад 4. Якщо функція $f : (0;1) \rightarrow \mathbb{R}$ є оборотною і

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x/a, \quad x \rightarrow 0,$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a^3}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

якщо $a \neq 0$ і

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))\sqrt{x/b}, \quad x \rightarrow +0,$$

якщо $a = 0$ і $b \neq 0$. Справді, якщо $a \neq 0$, то

$$y = ax + bx^2 + o(x^2), \quad y = a(1 + o(1))x, \quad x = (1 + o(1))y/a, \quad y \rightarrow 0,$$

і тому $y \rightarrow 0$ тоді і тільки тоді, коли $x \rightarrow 0$. Крім цього,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \left((1 + o(1)) \frac{1}{a}y \right)^2 + \\ &+ o \left(\left((1 + o(1)) \frac{1}{a}y \right)^2 \right) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + o(y^2), \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Якщо ж $a = 0$ і $b \neq 0$, то

$$y = bx^2 + o(x^2), \quad y = b(1 + o(1))x^2, \quad x = (1 + o(1))\sqrt{y/b}, \quad y \rightarrow 0.$$

Приклад 5. Функція $f(x) = x + \ln x$ є зростаючою і неперервною на $(0; +\infty)$. Тому має обернену функцію. При цьому $f(x) \rightarrow +\infty$, якщо $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$, якщо $x \rightarrow 0+$. Для знаходження оберненої функції маємо рівняння $y = x + \ln x$. Його розв'язати не вміємо. Проте,

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

....

Ці цих асимптотичних формул приходимо наступним чином.

$$\begin{aligned}
 y &= x + \ln x, \quad y = (1 + o(1))x, \quad x = (1 + o(1))y, \quad y \rightarrow +\infty; \\
 x &= y - \ln x = y - \ln((1 + o(1))y) = y - \ln y + o(1), \quad y \rightarrow +\infty; \\
 x &= y - \ln x = y - \ln\left(y - \ln y + o(1)\right) = y - \ln y - \ln\left(1 - \frac{\ln y + o(1)}{y}\right) = \\
 &= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o\left(\frac{\ln y}{y}\right), \quad y \rightarrow +\infty; \\
 x &= y - \ln x = y - \ln\left(y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o\left(\frac{\ln y}{y}\right)\right) = \\
 &= y - \ln\left(y - \ln y + \frac{\ln y}{y}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) = \\
 &= y - \ln(y - \ln y) - \ln\left(1 + \frac{\ln y}{y(y - \ln y)}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) = \\
 &= y - \ln y - \ln\left(1 - \frac{\ln y}{y}\right) - \ln\left(1 + \frac{\ln y}{y(y - \ln y)}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) = \\
 &= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2\right) + o\left(\frac{\ln y}{y^2}\right) + o\left(\frac{\ln y}{y^2}\right) = \\
 &= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2\right), \quad y \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

....

Асимптотичні формули

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(x) &= e^{x+o(1)}, \quad x \rightarrow -\infty, \\
 f^{-1}(x) &= e^x + O(e^{2x}), \quad x \rightarrow -\infty.
 \end{aligned}$$

отримуємо наступним чином.

$$y = x + \ln x, \quad y = \ln x + o(1), \quad x = e^{y+o(1)}, \quad y \rightarrow -\infty;$$

$$x = e^{y-x} = e^{y-e^{y+o(1)}} = e^y e^{-e^{y+o(1)}} = e^y (1 + O(e^y)) = e^y + O(e^{2y}), \quad y \rightarrow -\infty.$$

Таким чином, якщо $x = x(y)$ корінь рівняння $x + \ln x = y$, то $x = y - \ln y + o(1)$, $y \rightarrow +\infty$, і $x = e^y + O(e^{2y})$, $y \rightarrow -\infty$.

Приклад 6. Нехай x_n – корінь рівняння $\operatorname{tg} x = 1/x$, який належить проміжку $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$. Із, наприклад, геометричних міркувань випливає, що для $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ на такому проміжку розглядуване рівняння має єдиний корінь $x_n = \pi n + \Delta_n$, $\Delta_n \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Крім цього, $\operatorname{tg} \Delta_n = \frac{1}{x_n}$ і $x_n = \pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}$. Таким чином,

$$x_n = \pi n + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

Але

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Тому

$$\begin{aligned} x_n &= \pi n + \frac{1}{\pi n + o(1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty, \\ x_n &= \pi n + \frac{1}{\pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \\ &= \pi n + \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\pi n} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 7. Нехай x_{2k} і x_{2k+1} – корені рівняння $\sin \pi x = 1/x$, які належать, відповідно, проміжкам $(2k; 1/2 + 2k)$ та $(1/2 + 2k; 2(k+1))$. Із, наприклад, геометричних міркувань випливає, що для великих k на кожному з цих проміжків рівняння $\sin x = 1/x$ має єдиний корінь:

$x_{2k} = 2k + \Delta_{2k}$, $x_{2k+1} = 2k + 1 - \Delta_{2k+1}$. Крім цього, $\Delta_n \in (0; \pi/2)$ і $\sin \pi \Delta_{2k} = \frac{1}{x_{2k}}$, і $x_{2k} = 2k + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x_{2k}}$. Таким чином, $x_{2k} = 2k + o(1)$, $k \rightarrow +\infty$. Але $\arcsin x = x + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$. Тому

$$\begin{aligned} x_{2k} &= 2k + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2k + o(1)} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = \\ &= 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

Аналогічно, $x_{2k+1} = 2k + 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x_{2k+1}}$,

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= 2k + 1 + o(1), \quad k \rightarrow +\infty, \\ x_{2k+1} &= 2k + 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1 + o(1)} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = \\ &= 2k + 1 - \frac{1}{(2k + 1)\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

15. Інтеграл Стільтєса та його застосування. Нехай на проміжку $[a; b]$ задано дві функції f і F . Розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta F(x_k),$$

де $\Delta F(x_k) = F(x_{k+1}) - F(x_k)$ і ξ_k – довільна точка проміжку $[x_k; x_{k+1}]$. Інтегралом Стільтєса функції f по функції F на $[a; b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \lim_{\lambda_k \rightarrow 0} \sigma, \quad \lambda_k = \max_{0 \leq k \leq n-1} \{x_{k+1} - x_k\}.$$

Якщо $F(x) = x$, то інтеграл Стільтєса збігається з інтегралом Рімана

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Якщо функція f є неперервною на $[a; b]$, а F – абсолютно неперервною, то

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^b f(x) F'(x) dx.$$

Якщо функція f є неперервною на $[a; b]$, а F – кусково диференційовна на $[a; b]$ і c_k , $a = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n = b$, – її точки розриву, то

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dF(x) &= \int_a^b f(x) F'(x) dx + f(a)(F(a+) - F(a)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} f(c_k)(F(c_k+) - F(c_k-)) + f(b)(F(b) - F(b-)). \end{aligned} \quad (1)$$

Приведене вище означення інтеграла є означенням інтеграла Стільтєса по $[a; b]$. Зустрічаються також інтеграли Стільтєса по $(a; b]$, $[a; b)$ і $(a; b)$. В першому випадку точки ξ_k вибираються із $[x_k; x_{k+1}]$ і тоді другий доданок в правій частині (1) відсутній. Аналогічна ситуація і в двох інших випадках. За означенням

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dF(x) &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dF(x), \\ \int_{-\infty}^0 f(x) dF(x) &= \int_{-\infty}^0 f(x) dF(x) + \int_0^{+\infty} f(x) dF(x). \end{aligned}$$

Приклад 1. Нехай (λ_k) – неспадна послідовність додатних чисел, $n(t) = \sum_{\lambda_k \leq t} 1$ – кількість її членів, які належать проміжку $[0; t]$ і

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt. \text{ Тоді}$$

$$\sum_{\lambda_k \leq r} \ln \frac{r}{\lambda_k} = \int_0^r \ln \frac{r}{t} dn(t) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = N(r),$$

і для довільної неперервної на $[0; +\infty)$ функції $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ маємо

$$\sum_{\lambda_k \leq r} f(\lambda_k) = \int_0^r f(t) dn(t), \quad \sum_{\lambda_k > r} f(\lambda_k) = \int_r^{+\infty} f(t) dn(t).$$

Приклад 2. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ і $n(t) = \sum_{0 < k^{1/\rho} \leq t} 1$. Якщо

$$m^{1/\rho} \leq t < (m+1)^{1/\rho}, \text{ то } n(t) = m \leq t^\rho, \quad n(t) = m = (m+1) - 1 > t^\rho - 1 \text{ і}$$

$$n(r) = r^\rho + O(1), \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$N(r) := \sum_{0 < k^{1/\rho} \leq r} \ln \frac{r}{k^{1/\rho}} = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r^\rho}{\rho} + O(\ln r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Приклад 3. Нехай $\lambda_k = q^{k-1}$, $|q| > 1$. Тоді $n(t) = \frac{\log t}{\log |q|} + O(1)$,

$t \rightarrow +\infty$ і $N(r) = \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + O(1)$, $r \rightarrow +\infty$. Справді, нехай $t > 1$. Тоді

знайдеться таке m , що $|q|^{m-1} \leq t < |q|^m$. Тому $n(t) = m$, $m > \frac{\log t}{\log |q|}$,

$m < \frac{\log t}{\log |q|} + 1$ і $n(t) = \frac{\log t}{\log |q|} + O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Далі, якщо $r > 1$, то

знайдеться таке m , що $|q|^{m-1} \leq r < |q|^m$. Отже, $r = \alpha |q|^{m-1}$, $1 \leq \alpha < |q|$. Тоді

$$\begin{aligned} N(r) &= \sum_{k=1}^m \ln \frac{r}{|q|^{k-1}} = m \ln r - \ln |q| \sum_{k=0}^{m-1} k = \\ &= m \left(\ln r - \frac{m-1}{2} \ln |q| \right) = \frac{\ln r - \ln \alpha + \ln |q|}{2 \ln |q|} (\ln r + \ln \alpha) = \\ &= \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} - \frac{\ln^2 \alpha}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + \frac{\ln |q| \ln \alpha}{2 \ln |q|} = \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + O(1), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

16. Функції обмеженої варіації і граничний перехід в інтегралах. При отриманні асимптотичних оцінок часто потрібно почленно інтегрувати ряди та переходити до границі під знаком суми та інтеграла. При цьому використовуються відомі факти з аналізу, на деякі з них звертаємо увагу нижче. Функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається функцією обмеженої варіації на $[a; b]$, якщо існує стала c_1 така, що для будь-якого розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ проміжка $[a; b]$ виконується

$$\sigma_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} |F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)| \leq c_1.$$

При цьому, число

$$V_{[a; b]}(F) = \sup_{\tau} \sigma_\tau$$

називається повною варіацією F на $[a;b]$. Для того щоб функція $F:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ була функцією обмеженої варіації на $[a;b]$, необхідно й достатньо, щоб F подавалась у вигляді різниці $F = F_1 - F_2$ двох неспадних на $[a;b]$ функцій F_1 і F_2 . Функція F називається функцією обмеженої варіації на $(-\infty; +\infty)$, якщо вона є функцією обмеженої варіації на скінченному проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ і

$$(\exists c_1)(\forall a \in \mathbb{R}): V_{[-a;a]}(F) \leq c_1.$$

При цьому, число

$$V_{(-\infty; +\infty)}(F) = \sup_a \left\{ V_{[-a;a]}(F) \right\}$$

називається повною варіацією F на $(-\infty; +\infty)$. Подібно визначається варіація функції на проміжках $(-\infty; a]$ і $[a; +\infty)$. Для того щоб функція F була функцією обмеженої варіації на $(-\infty; +\infty)$, необхідно й достатньо, щоб вона подавалась у вигляді різниці $F = F_1 - F_2$ двох неспадних обмежених функцій F_1 і F_2 . При цьому за F_1 можна взяти функцію

$$F_1(x) = V_{(-\infty; x]}(F).$$

Кожну функцію обмеженої варіації можна подати у вигляді $F = F_0 + \sigma$, де F – абсолютно неперервна функція, причому $F'_0 \in L_1[a;b]$, а σ – функція обмеженої варіації, похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь. Якщо F – неспадна, то F_0 і σ також неспадні функції.

Теорема 1 (Хеллі). *Якщо (F_n) – послідовність функцій обмеженої варіації на $[a;b]$ і послідовність їх повних варіацій на $[a;b]$ є рівномірно обмеженою на $[a;b]$, то існує підпослідовність (F_{n_k}) , яка поточно на $[a;b]$ збігається до деякої функції F обмеженої варіації на $[a;b]$. Якщо послідовність (F_{n_k}) функцій обмеженої варіації на $[a;b]$ поточно на $[a;b]$ збігається до функції F обмеженої варіації на $[a;b]$, то для будь-якої неперервної на $[a;b]$ функції g*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) dF_{n_k}(t) = \int_a^b g(t) dF(t). \quad (1)$$

Це твердження залишається справедливим і якщо $a = -\infty$ і $b = +\infty$. Правда (1) виконується для неперервних на $(-\infty; +\infty)$ функцій g , для яких $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$.

Теорема 2. Для того щоб для збіжної майже скрізь на $[a;b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, послідовності невід'ємних сумовних на $[a;b]$ функцій виконувалось

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt, \quad (2)$$

необхідно й достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існувало $\delta > 0$ таке, що для кожної вимірної за Лебегом множини $e \subset [a;b]$ такої, що

$$\int_e dt < \delta, \quad (3)$$

при всіх n виконувалось

$$\int_e f_n(t) dt < \varepsilon, \quad (4)$$

тобто, щоб сім'я функцій

$$\int_a^x f_n(t) dt$$

була одностайно абсолютно неперервною на $[a;b]$.

Останню теорему як і теорему Лебега, Б. Лев, Фату та інші можна застосовувати до обґрунтування можливості почленного інтегрування ряду. Часто можна скористатись і простішими твердженнями.

Теорема 3 (про почленне інтегрування функціонального ряду). Якщо всі функції $f_k : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a;b]$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (5)$$

є рівномірно збіжним на $[a;b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

В цій теоремі вимога замкненості і скінченності проміжку є istotною. До інших проміжків можна застосовувати наступні твердження.

Теорема 4. Якщо всі функції $f_k : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a;b]$, ряд (1) є рівномірно збіжним на кожному замкнутому проміжку $[a;\eta] \subset [a;b]$ і $(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\forall x \in [a;b]) : |S_n(x)| \leq c_1$, то сума ряду (5) є інтегрованою в

невласному розумінні на $[a; b]$ і

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Теорема 5. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними і невід'ємними на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b]$ і

$$\int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx$$

для кожного $\eta \in [a; b)$. Тоді

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx,$$

якщо принаймні одна із частин цієї рівності є скінченною.

Теорема 6. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними і на будь-якому проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$

$$\int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx \quad \text{для кожного } \eta \in [a; b). \quad \text{Тоді}$$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx, \quad \text{якщо принаймні одно з чисел}$$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right) dx \quad \text{або} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_k(x)| dx \quad \text{є скінченним.}$$

$$\text{Приклад 1.} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k!, \quad \text{якщо}$$

останній ряд є збіжним в $\mathbb{R}$.

17. Знаходження асимптотики інтегралів зі змінною верхньою межею. Для знаходження асимптотики інтеграла

$$\int_a^x f(t) dt = (1 + o(1)) \eta(x), \quad x \rightarrow a,$$

відшукування функції η можна здійснювати методом проб та помилок із використанням правил Лопітала або інших прийомів.

$$\text{Приклад 1.} \quad \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = (1 + o(1)) \frac{e^x}{x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^t}{t} dt}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)'}{\left(\frac{e^x}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{e^x x - e^x}{x^2}} = 1.$$

Приклад 2. Для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu > -1$ і $\varepsilon > 0$ виконується

$$\int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du = o(1/x^\alpha), \quad x \rightarrow +\infty,$$

бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du \right)'}{\left(\frac{1}{x^\alpha} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\varepsilon e^{-\varepsilon x} (\varepsilon x)^\mu}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0.$$

Приклад 3. Якщо функція $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ двічі неперервно диференційовна на $[0; +\infty)$ і

$$h(x) \rightarrow +\infty, \quad h''(x) = o(h'^2(x)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

то

$$\int_x^{+\infty} e^{-h(t)} dt = (1 + o(1)) \frac{e^{-h(x)}}{h'(x)}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, $-\frac{1}{2}h(x) - c_1 \leq \ln h'(x) \leq \frac{1}{2}h(x) + c_1$, а тому інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-h(t)} dh(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-h(t)} dh(t)}{h'(t)}$$

є збіжним і

$$\frac{e^{-h(x)}}{h'(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_x^{+\infty} e^{-h(t)} dt}{\frac{e^{-h(x)}}{h'(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'^2(x)}{h'^2(x) + h''(x)} = 1.$$

18. Знаходження асимптотики сум. Асимптотику сум

$$\sum_{k=1}^n a(k), \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k),$$

знаходять шляхом порівняння їх з інтегралами

$$\int_1^n a(t)dt, \quad \int_{n+1}^{+\infty} a(t)dt,$$

запису суми у вигляді інтеграла Стілтєа, використання теореми Штольца та різноманітних інших прийомів.

Приклад 1. Нехай функція $a : (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ є неспадною на $(0; +\infty)$. Тоді

$$a(k) \leq \int_k^{k+1} a(t)dt \leq a(k+1).$$

Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a(k) &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} a(t)dt = \int_1^{n+1} a(t)dt, \\ \sum_{k=1}^n a(k) &= a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k) \leq a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t)dt = a(n) + \int_1^n a(t)dt, \\ \sum_{k=1}^n a(k) &= a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k+1) \geq a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t)dt = a(1) + \int_1^n a(t)dt. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^n a(k) = \int_1^n a(t)dt + O(a(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Приклад 2. Нехай функція $a : (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ є незростаючою на $(0; +\infty)$. Тоді

$$a(k+1) \leq \int_k^{k+1} a(t)dt \leq a(k).$$

Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a(k) &= a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k+1) \leq a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t)dt = a(1) + \int_1^n a(t)dt, \\ \sum_{k=1}^n a(k) &= a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k) \geq a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t)dt = a(n) + \int_1^n a(t)dt, \end{aligned}$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^n a(k) = \int_1^n a(t)dt + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Приклад 3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t} dt = \frac{1}{n} + \ln n.$

Таким чином,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t} dt + O(1) = \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Можна отримати і точнішу асимптотику. Зокрема, існує границя

$$\gamma_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right). \quad (1)$$

Більше того,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \frac{\theta_n}{n}, \quad \theta < \theta_n < 1, \quad n > 1. \quad (2)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} - \ln n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \ln \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

звідки випливає (1). Крім цього,

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right).$$

Оскільки

$$\frac{1}{2k(2k+1)} \leq \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} \leq \frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)},$$

$$\frac{1}{2n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) \leq \frac{1}{2n-1},$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n-1)} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n+1)},$$

то

$$\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n+1} \right) < s_n < \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2n-1} \right),$$

звідси отримуємо (2). Стала $\gamma_0 = \ln\sqrt{2\pi} = 0,57\dots$ називається сталою Ейлера.

Приклад 4. Нехай функція $a : (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ є незростаючою на $(0; +\infty)$. Тоді

$$a(k+1) \leq \int_k^{k+1} a(t) dt \leq a(k).$$

Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) &= \sum_{k=n}^{\infty} a(k+1) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} a(t) dt = \int_n^{+\infty} a(t) dt, \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) &= -a(n) + \sum_{k=n}^{\infty} a(k) \geq -a(n) + \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} a(t) dt = -a(n) + \int_n^{+\infty} a(t) dt \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) = \int_n^{+\infty} a(t) dt + O(a(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Зокрема,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt + O(1/n^3) = \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3), \quad n \rightarrow \infty.$$

Приклад 5. $\sum_{k=1}^n e^{\sqrt{k}} = 2(1+o(1))\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty$, бо

$$\sum_{k=1}^n e^{\sqrt{k}} = \int_1^n e^{\sqrt{t}} dt + O(e^{\sqrt{n}}) = 2(1+o(1))\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Приклад 6. Нехай $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha} q^k$, $y_n = n^{\alpha} q^n$, $q > 1$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді

$$y_n \rightarrow +\infty, \quad x_n - x_{n-1} = (n-1)^{\alpha} q^{n-1},$$

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= n^{\alpha} q^n - (n-1)^{\alpha} q^{n-1} = \\ &= n^{\alpha} q^n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\alpha} / q \right) = n^{\alpha} q^{n-1} (q-1)(1+o(1)) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{q-1} (1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

і за теоремою Штольца

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{q-1}(1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha q^k = \frac{n^\alpha q^n}{q-1}(1+o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

19. Деякі характеристики множин. Кажуть, що множина $E_0 \subset [0; +\infty)$ має нульову відносну міру, якщо

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E_0 \cap [0; r])}{r} = 0,$$

де μ – лінійна міра Лебега на $\mathbb{R}$. Число

$$\tau_0 = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E_0 \cap [0; r])}{r}$$

називається верхньою лінійною щільністю множини $E_0 \subset [0; +\infty)$. Кажуть, що множина кругів $U(a_n; \rho_n) \subset \mathbb{C}$ має нульову відносну щільність, якщо

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{|a_n| \leq r} \rho_n = 0.$$

Число

$$\beta_0 = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{|a_n| \leq r} \rho_n$$

називається верхньою щільністю множини кругів $\{U(a_n; \rho_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$. Множина $U \subset \mathbb{C}$ називається C^0 -множиною, якщо U міститься в об'єднанні кругів, множина яких має нульову відносну щільність.

Приклад 1. Нехай $a_n = n^3$, $b_n = n^3 + 1$, $E_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n; b_n)$ і

$a_m \leq r < a_{m+1}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mu(E_0 \cap [0; r]) &\leq (b_{m+1} - a_{m+1}) + \sum_{a_n \leq r} (b_n - a_n) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^m 1 = m + 1 = (1 + o(1))r^{1/3}, \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому така множина E_0 має нульову відносну міру.

Приклад 2. Нехай $a_n = e^n$, $\rho_n = n$ і $e^m \leq r < e^{m+1}$. Тоді

$$\sum_{|a_n| \leq r} \rho_n = \sum_{e^n \leq r} n = \sum_{n=1}^m n = ((1+o(1)) \frac{m^2}{2} = O(\ln^2 r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тому множина кругів $\{U(e^n; n) : n \in \mathbb{N}\}$ має нульову відносну щільність.

20. Асимптотичні оцінки деяких інтегралів, залежних від параметра. Асимптотичні оцінки багатьох інтегралів виду

$$I(x) = \int_a^b \eta(t) e^{-xS(t)} dt \quad (1)$$

та інших, можна знайти інтегруванням частинами. У складніших випадках доцільно скористатись методом Лапласа. Основна ідея методу Лапласа полягає в тому, що для заданої функції S , яка має одну точку t_0 мінімуму на $[a; b]$, для великих додатних x підінтегральна функція має в точці t_0 великий максимум і тому цей інтеграл мало відрізняється від її інтеграла по малому околі Δ_x точки t_0 , а останній інтеграл мало відрізняється від $\eta(t_0) e^{-xS(t_0)} \int_{\Delta_x} dt$, точніше кажучи від вкладу точки t_0 .

Обґрунтування цих двох моментів складає суть методу Лапласа. Вдалою заміною змінної інтегрування подібним методом можна знаходити асимптотику інших типів інтегралів. При використанні цього методу

часто використовується гамма-функція $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ та її

властивості: $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(1+n) = n!$ для всіх $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Приклад 1. Для будь-якого $x > 0$ виконується

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = 1/x.$$

Приклад 2. Для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$ виконується

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} + e^{-\varepsilon x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 3.

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \operatorname{arctg} t dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}, \quad x \in [0; +\infty).$$

Приклад 4. Для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$ виконується

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} t^{\alpha} dt = \frac{1}{x} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x} + \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} e^{-\varepsilon x} \right) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 5.

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}}, \quad x > 0, \quad \mu > -1.$$

Приклад 6. Для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mu > -1$ і $\varepsilon > 0$ виконується

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{1}{x^{\mu+1}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\mu} du - \int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^{\mu} du \right) = \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 7. Якщо функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною на $[0; +\infty)$ і

$$(\forall k \in \mathbb{Z}_+)(\exists c_1)(\forall t \in [0; +\infty): |\eta^{(k)}(t)| \leq e^{c_1 t},$$

то

$$I(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta(t) dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^{(k)}(0)}{x^{k+1}}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

тобто для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{\eta^{(k)}(0)}{x^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, інтегруючи n разів частинами, отримуємо

$$I(x) = \frac{\eta(0)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta'(t) dt = \dots = \sum_{k=0}^n \frac{\eta^{(k)}(0)}{x^{k+1}} + \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta^{(n+1)}(t) dt$$

і

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx+c_1 t} dt = \frac{1}{x-c_1}.$$

Приклад 8. Якщо інтеграл

$$I(x) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta(t) dt$$

є збіжним для всіх $x \geq x_0$ і ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\tau+\alpha}, \quad t \rightarrow 0+, \quad \tau > 0, \quad \alpha > -1,$$

є асимптотичним рядом функції $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k\tau + \alpha + 1)}{x^{k\tau + \alpha + 1}}$$

є асимптотичним рядом функції I в $+\infty$, тобто для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\Gamma(k\tau + \alpha + 1)}{x^{k\tau + \alpha + 1}} + o\left(\frac{1}{x^{n\tau + \alpha + 1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, формально, останній асимптотичний ряд отримується підстановкою асимптотичного ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k\tau+\alpha}$ в інтеграл I , а

обґрунтування виглядає так. Якщо $\eta_n(t) = \eta(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^{k\tau+\alpha}$, то

$$(\exists c_n > 0)(\exists t_n > 0)(\forall t \in (0; t_n]): |\eta_n(t)| \leq c_n t^{n\tau+\alpha+1}.$$

Тому

$$\int_0^{t_n} e^{-tx} \eta_n(t) dt \leq c_n \int_0^{t_n} e^{-tx} t^{n\tau+\alpha+1} dt \leq c_n \frac{\Gamma(n\tau + \alpha + 2)}{x^{n\tau + \alpha + 2}}.$$

Крім цього, якщо

$$\beta_n(t) = \int_{t_n}^t e^{-tx_0} \eta_n(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{+\infty} e^{-tx} \eta_n(t) dt &= \int_{t_n}^{+\infty} e^{-t(x-x_0)} e^{-tx_0} \eta_n(t) dt = \\ &= (x-x_0) \int_{t_n}^{+\infty} e^{-t(x-x_0)} \beta_n(t) dt, \quad x \geq x_0. \end{aligned}$$

Функція β_n є неперервною і обмеженою на $[t_n; +\infty)$ і тому для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та деякої сталої v_n маємо

$$\left| \int_{t_n}^{+\infty} e^{-tx_0} \eta_n(t) dt \right| \leq (x - x_0) v_n \int_{t_n}^{+\infty} e^{-t(x-x_0)} dt = \\ = v_n e^{-v_n(x-x_0)} = o\left(\frac{1}{x^{\tau n + \alpha + 1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 9. Якщо функція $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою, неперервно диференційовною на $(a; b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ і існує $\lim_{t \rightarrow a+} S(t) =: S(a) \in \mathbb{R}$,

то

$$\int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt = e^{-S(a)x} \int_0^{S_1(b)} e^{-ux} \frac{\eta(S_1^{-1}(u))}{S_1'(S_1^{-1}(u))} du,$$

де $S_1(t) = S(t) - S(a)$. Тому, застосувавши до другого інтеграла асимптотичну формулу із прикладу 8, отримаємо асимптотику першого інтеграла.

Приклад 10. Якщо:

1) функція $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою $[a; b)$, неперервно диференційовною на деякому $(a; c] \subset [a; b)$, то для деяких $\nu > 0$ і $\mu > 0$ виконується

$$S(t) - S(a) = (\nu + o(1))(t - a)^\mu, \quad t \rightarrow a+,$$

$$S'(t) = (\nu + o(1))\mu(t - a)^{\mu-1}, \quad t \rightarrow a+;$$

2) функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервною на $(a; c]$, то для деяких $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\lambda > 0$ виконується

$$\eta(t) = (\alpha + o(1))(t - a)^{\lambda-1}, \quad t \rightarrow a+;$$

3) для $x \geq x_0$ інтеграл $\int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt$ є абсолютно збіжним, то

$$\int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt = (1 + o(1)) \frac{\alpha}{\mu} \Gamma(\lambda/\mu) \frac{e^{-xS(a)}}{(vx)^{\lambda/\mu}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, можемо вважати, що $a = 0$ і $S(a) = 0$. Тоді

$$S(t) = (\nu + o(1))t^\mu, \quad t \rightarrow 0+,$$

$$S'(t) = (\nu + o(1))\mu t^{\mu-1}, \quad t \rightarrow 0+,$$

$$\begin{aligned}
S^{-1}(u) &= (u / (\nu + o(1)))^{1/\mu}, \quad u \rightarrow 0+, \\
\frac{\eta(S^{-1}(u))}{S'(S^{-1}(u))} &= \frac{(\alpha + o(1))(S^{-1}(u))^{\lambda-1}}{S'(S^{-1}(u))} = \frac{(\alpha + o(1))((u / (\nu + o(1))))^{(\lambda-1)/\mu}}{(\nu + o(1))\mu(u / (\nu + o(1)))^{(\mu-1)/\mu}} = \\
&= \frac{(\alpha + o(1))(u/\nu)^{(\lambda-\mu)/\mu}}{\nu\mu} = \frac{\alpha(u/\nu)^{(\lambda-\mu)/\mu}}{\nu\mu} + o(u^{(\lambda-\mu)/\mu}), \quad u \rightarrow 0+, \\
\int_0^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt &= \int_0^{S(b)} e^{-ux} \frac{\eta(S^{-1}(u))}{S'(S^{-1}(u))} du = \\
&= \frac{\alpha}{\mu} \Gamma(\lambda/\mu) \frac{1}{(\nu x)^{\lambda/\mu}} + o\left(\frac{1}{x^{\lambda/\mu}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Приклад 11.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{x \cos t} dt &= e^x \int_0^{\pi/2} e^{-x(1-\cos t)} dt = \\
&= (1 + o(1)) \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \frac{e^x}{(x)^{1/2}} = (1 + o(1)) \frac{e^x}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Приклад 12. Якщо функція $\eta: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на $[0; +\infty)$ і існує границя

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_0^r \eta(t) dt = l \in [0; +\infty),$$

то

$$I(x) := \int_0^{\pi/2} e^{x \cos t} \eta(x \sin t) dt = (l + o(1)) e^x \sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, нехай

$$\Delta(x) = I(x) - l \int_0^{\pi/2} e^{x \cos t} dt, \quad \alpha(t) = \frac{e^{x \cos t}}{x \cos t}, \quad \Phi(t) = \int_0^{x \sin t} \eta(t) dt - l x \sin t,$$

Тоді $\alpha'(t) < 0$ для всіх $t \in [x^{-2/3}; x^{-1/4}]$ та достатньо великих x , і рівномірно за $t \in [x^{-2/3}; x^{-1/4}]$

$$\begin{aligned}
x \sin t &\geq (1 + o(1)) x^{1/3}, \quad x \rightarrow +\infty, \\
\Phi(t) &= o(x \sin t), \quad x \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x^{2/3}} e^{x \cos t} dt = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty, \\
& \int_0^{x^{2/3}} e^{x \cos t} \eta(x \sin t) dt = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty, \\
& \int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{x \cos t} dt = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty, \\
& \int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{x \cos t} \eta(x \sin t) dt = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty, \\
& \int_{x^{-2/3}}^{\pi/3} e^{x \cos t} (\eta(x \sin t) - l) dt = \int_{x^{-2/3}}^{\pi/3} \alpha(t) d\Phi(t) = \\
& = o(e^x x^{-2/3}) + o(e^{x/2}) - \int_{x^{-2/3}}^{\pi/3} \alpha'(t) \Phi(t) dt = \\
& = o(e^x / \sqrt{x}) + o(1) \int_{x^{-2/3}}^{\pi/3} \alpha'(t) x \sin t dt = \\
& = o(e^x / \sqrt{x}) + o(1) \int_{x^{-2/3}}^{\pi/3} \alpha(t) x \cos t dt = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Тому

$$\Delta(x) = o(e^x / \sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

що і потрібно було показати.

Приклад 13.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}.$$

Приклад 14. Для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-t^2 x} dt = \int_0^{\varepsilon^2} u^{1/2} e^{-ux} du = \frac{\Gamma(3/2)}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 15. $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-t^2 x} t^{2k+1} dt = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \varepsilon > 0.$

Приклад 16. Для будь-яких $\varepsilon > 0$, $\mu > -1$ і $\alpha \in \mathbb{R}$, виконується

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-t^2 x} |t|^\mu dt = \int_0^{\varepsilon^2} u^{(\mu-1)/2} e^{-ux} du = \frac{\Gamma(1 + (\mu-1)/2)}{x^{1 + (\mu-1)/2}} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 17. Якщо $-\infty \leq a < t_0 < b \leq +\infty$, інтеграл

$$\int_a^b e^{-(t-t_0)^2 x} \eta(t) dt$$

є збіжним для всіх $x \geq x_0$ і ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k,$$

є асимптотичним рядом функції $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці t_0 , то для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$\int_a^b e^{-(t-t_0)^2 x} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{a_{2k} \Gamma(2k+1/2)}{(2k)! x^{2k+1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{2n+1/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді, можемо вважати, що $t_0 = 0$, $a = -\infty$ і $b = +\infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x} \eta(t) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} \eta(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} \eta(-t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\eta(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} dt - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\eta(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\eta(\sqrt{t}) - \eta(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{a_k \Gamma(k+1/2)}{2(k)! x^{k+1/2}} + (-1)^k \frac{a_k \Gamma(k+1/2)}{2(k)! x^{k+1/2}} \right) + o\left(\frac{1}{x^{2n+1/2}}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_{2k} \Gamma(2k+1/2)}{(2k)! x^{2k+1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{2n+1/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 18. Якщо $-\infty \leq a < t_0 < b \leq +\infty$ і:

1) функція $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою $[t_0; b)$, спадною на $[a; t_0]$, неперервно диференційовною на деякому $[t_0 - c; t_0 + c] \subset (a; b)$ і для деяких $\nu > 0$ і $\mu \in \mathbb{N}$ виконується

$$S(t) - S(t_0) = (\nu + o(1))(t - t_0)^\mu, \quad t \rightarrow t_0,$$

$$S'(t) = (\nu + o(1))\mu(t - t_0)^{\mu-1}, \quad t \rightarrow t_0,$$

2) функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервною на $[t_0 - c; t_0 + c]$ і для деяких $\alpha \in \mathbb{R}$ і $\lambda \in \mathbb{N}$ виконується

$$\eta(t) = (\alpha + o(1))(t - t_0)^{\lambda-1}, \quad t \rightarrow t_0,$$

3) для $x \geq x_0$ інтеграл $\int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt$ є абсолютно збіжним, то

$$\int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt = (1 + o(1)) \frac{\alpha}{\mu} \Gamma(\lambda / \mu) \frac{e^{-xS(t_0)}}{(vx)^{\lambda/\mu}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді,

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt &= \int_{-t_0}^a e^{-S(-t)x} \eta(-t) dt + \int_{t_0}^b e^{-S(t)x} \eta(t) dt = \\ &= (1 + o(1)) \frac{2\alpha}{\mu} \Gamma(\lambda / \mu) \frac{e^{-xS(t_0)}}{(vx)^{\lambda/\mu}}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 19.

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi x} (x/e)^x (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi x} x^{x-1} e^{-x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

Справді,

$$\Gamma(1+x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du = \int_0^{+\infty} e^{-u+x \ln u} du.$$

Підінтегральна функція має максимум у точці $u = x$. Нехай $u = tx$. Тоді

$$\Gamma(1+x) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(t - \ln t)} dt$$

В цьому інтегралі $S(t) = t - \ln t$, $t_0 = 1$, $\eta(t) = 1$, $\alpha = 1$, $\lambda = 1$,

$$S(t) - S(t_0) = \frac{1}{2} (1 + o(1)) (t - 1)^2, \quad t \rightarrow 1.$$

$$S'(t) = (1 + o(1)) (t - 1), \quad t \rightarrow 1.$$

$\nu = 1/2$ і $\mu = 2$. Тому

$$\Gamma(1+x) = (1 + o(1)) 2\Gamma(1/2) \frac{e^{-x}}{(2x)^{1/2}} x^{x+1} = \sqrt{2\pi x} (x/e)^x (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Крім цього,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \sqrt{2\pi(x-1)} \left(\frac{x-1}{e} \right)^{x-1} (1 + o(1)) = \sqrt{2\pi x} x^{x-1} \left(\frac{1-1/x}{e} \right)^{x-1} (1 + o(1)) = \\ &= \sqrt{2\pi x} x^{x-1} e^{-x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Приклад 20. Оскільки $n! = \Gamma(1+n)$, то

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + o(1)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Докладніший аналіз показує, що справедливою є точніша асимптотична формула

$$n! = \sqrt{nc_0} (n/e)^n e^{-\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Справді, нехай

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - 1 - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(1+1/x) = \\ &= x\ln n(1+1/x) - 1 + \frac{1}{2}\ln(1+x) = \\ &= (x+1)\ln(x+1) - x\ln x - 1 + \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln x) - \ln(x+1). \end{aligned}$$

Тоді ряд

$$s_0 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \psi(\kappa)$$

є збіжним і

$$\frac{1}{12x(x+1)} - \psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{6(k-1)}{k(k+1)} \right) x^{-k} > 0$$

якщо $x > 0$. Отже,

$$\psi(x) < \frac{1}{x(x+1)}, \quad x > 0.$$

Крім цього,

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} \psi(\kappa) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n - 1 - \ln n!, \quad 0 < \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) < \frac{1}{12} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{12n},$$

$$0 < s_0 - \sum_{k=1}^{n-1} \psi(k) < \frac{1}{12n}.$$

Таким чином, існує така стала c_0 , що

$$n! = \sqrt{nc_0} (n/e)^n e^{-\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

і

$$\sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + o(1)) = \sqrt{nc_0} (n/e)^n e^{-\frac{\theta_n}{12n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому $c_0 = 2\pi$.

Приклад 21. Розглянемо інтеграл

$$I(x) := \int_0^{+\infty} e^{ux - u \ln u + u} du.$$

Підінтегральна функція має максимум у точці $u = e^{x+1}$. Нехай $u = te^{x+1}$. Тоді

$$I(x) := e^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-e^{x+1}t \ln t} dt.$$

В цьому інтегралі $S(t) = t \ln t$, $t_0 = 1/e$, $\eta(t) = 1$, $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ і

$$S(t) - S(t_0) = e(t - 1/e)^2(1 + o(1))/2, \quad t \rightarrow 1.$$

$$S'(t) = e(t - 1/e)(1 + o(1)), \quad t \rightarrow 1.$$

$\nu = e/2$ і $\mu = 2$. Тому

$$\begin{aligned} I(x) &:= e^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-e^{x+1}t \ln t} dt = e^{x+1}(1 + o(1)) \frac{1}{2} \Gamma(1/2) \frac{e^{e^x}}{(ex/2)^{1/2}} = \\ &= (1 + o(1)) \sqrt{\frac{e\pi}{2x}} \exp(e^x + x), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

21. Знаходження асимптотики розв'язків диференціальних рівнянь. Припустимо, що ми знаємо фундаментальну систему $\{y_1(x); y_2(x)\}$ розв'язків рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

на проміжку $[\alpha; \beta]$ і функція $Q: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ близька до нуля на $[\alpha; \beta]$.

Тоді природно очікувати, що рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x; y) \quad (2)$$

має розв'язки $\tilde{y}_1(x)$ і $\tilde{y}_2(x)$, які мало відрізняються від $y_1(x)$ та $y_2(x)$.

Для відшукування підходів до дослідження такої задачі доцільно зауважити, що функція y є розв'язком рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x; y) \quad (3)$$

тоді і тільки тоді, коли вона подається у вигляді

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int_{x_0}^x K_-(x; t) Q(t; y(t)) dt, \quad (4)$$

де

$$K_-(x; t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{w(t)}, \quad w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Із означення випливає, що $K_-(x;t) = -K_-(t;x)$. Інтегральне рівняння (4) за певних умов є еквівалентним рівнянню (2).

Приклад 1. Якщо функція $q:[0;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[a;b]$, то рівномірно за $x \in [a;b]$ виконується

$$q(x) + \mu^2 = (1 + o(1))\mu^2, \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Тому природно очікувати, що для великих μ рівняння

$$y'' + (-q(x) + \mu^2)y = 0 \quad (5)$$

має фундаментальну систему $\{\tilde{y}_1(x); \tilde{y}_2(x)\}$ розв'язків, яка мало відрізняється від фундаментальної системи $\{y_1(x); y_2(x)\}$ розв'язків рівняння

$$y'' + \mu^2 y = 0. \quad (6)$$

Система $\{\cos \mu x; \sin \mu x\}$ є фундаментальною системою розв'язків останнього рівняння і кожний його розв'язок подається у вигляді

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x.$$

Перепишемо рівняння (5) у вигляді

$$y'' + \mu^2 y = q(x)y. \quad (7)$$

Функція $y_1(x; \mu) = \cos \mu x$ задовольняє початкові умови

$$y_1(0; \mu) = 1, \quad y_1'(0; \mu) = 0, \quad (8)$$

а функція $y_2(x; \mu) = \sin \mu x$ задовольняє початкові умови

$$y_2(0; \mu) = 0, \quad y_2'(0; \mu) = \mu. \quad (9)$$

Функція y , яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$\tilde{y}_1(x) = y_1(x) + \int_0^x K_-(x;t)q(t)\tilde{y}_1(t)dt, \quad (10)$$

є і розв'язком рівняння (6). В нашому випадку

$$K_-(x;t) = -\frac{\sin(\mu(x-t))}{\mu}.$$

Тому рівняння (10) перепишеться у вигляді

$$\tilde{y}_1(x; \mu) = \cos \mu x - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x-t))q(t)\tilde{y}_1(t; \mu)dt. \quad (11)$$

Аналогічно,

$$\tilde{y}_2(x; \mu) = \sin \mu x - \frac{1}{\mu} \int_0^x \sin(\mu(x-t))q(t)\tilde{y}_2(t; \mu)dt.$$

Отже, якщо $\omega(\mu) = \sup \{ |\tilde{y}_2(x; \mu)| : x \in [0; b] \}$ і функція $q : [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[0; b]$, то $\omega(\mu) \leq 1 + c_1 \omega(\mu) / \mu$, де $c_1 = \sup \{ |q(x)| : x \in [0; b] \}$. Тому $\omega(\mu) = O(1)$, $\mathbb{R} \ni \mu \rightarrow \infty$. Отже, рівняння (7) має таку фундаментальну систему $\{ \tilde{y}_1(x); \tilde{y}_2(x) \}$ розв'язків, що рівномірно за $x \in [a; b]$ виконується

$$y_1(x; \mu) = \cos \mu x + O(1/\mu), \quad \mathbb{R} \ni \mu \rightarrow \infty,$$

$$y_2(x; \mu) = \sin \mu x + O(1/\mu), \quad \mathbb{R} \ni \mu \rightarrow \infty,$$

Зауваження 1. Інколи зручнішими є інші подання розв'язків рівнянь (2) та (3). Зокрема,

$$y(x) = c_1 + c_2(x - x_0) + (a_1 y + \eta) + \int_{x_0}^x (x-t)(a_1' y + \eta' + Q(t; y(t))) dt,$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int_{x_0}^x \omega(x; t) Q(t; y(t)) dt,$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon(x; t) Q(t; y(t)) dt,$$

де $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – довільна функція, абсолютно неперервна на розглядуваному проміжку, $y = \omega(x; t)$ – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови

$$\begin{cases} \omega(t; t) = 0, \\ \omega'(t; t) = 1, \end{cases}$$

$$\varepsilon(x; t) = \frac{1}{w(\alpha)} \begin{cases} y_1(x) \overline{z_2(t)}, \alpha \leq x \leq t \leq \beta, \\ y_2(x) \overline{z_1(t)}, \alpha \leq t \leq x \leq \beta, \end{cases}$$

$$z_j = \overline{y_j(x)} \exp \left(\int_{\alpha}^x \overline{a_1(t)} dt \right).$$

22. Числові нескінченні добутки з дійсними членами. Нехай $(u_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка послідовність дійсних чисел. Символ

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \dots \quad (1)$$

називається добутком членів послідовності (u_k) або нескінченним числовим добутком зі загальним членом u_k і позначається

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k . \quad (2)$$

Цей символ також називається нескінченним добутком. При цьому

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

називається n -им частинним добутком добутку (1). Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = p \neq 0, \infty , \quad (3)$$

то добуток (1) називається збіжним, а число p – його значенням і цей факт записують так

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} u_k . \quad (4)$$

Зауваження 1. Наше означення нескінченного добутку досить формальне. Правильніше, напевно, нескінченним числовим добутком називати послідовність (π_n) або функцію, яка послідовності (u_k) ставить у відповідність число p за описаною вище процедурою, або границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$. Далі, під терміном "нескінченний добуток" ми, інколи, розуміємо і його значення. Це не приводить до непорозумінь, оскільки з тексту завжди зрозуміло, який саме аспект терміну мається на увазі.

Приклад 1. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots$ є збіжним і $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1$, бо

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

Приклад 2. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ є розбіжним, бо

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n (-1)^k = (-1)^n \text{ і границя (3) не існує.}$$

Приклад 3. Добуток $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 1/(m+1)^2)$ є збіжним і

$$\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = 1/2, \text{ бо}$$

$$\prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Теорема 1. Якщо добуток (2) є збіжним, то $u_n \rightarrow 1$, якщо $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Це так, бо $u_n = \pi_n / \pi_{n-1}$. ►

Наслідок 1. Якщо добуток (1) є збіжним, то $u_k > 0$ для всіх $k \geq k^*$.

Приклад 4. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k+10}{k^2}$ є розбіжним, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+10}{k^2} = 0$.

Приклад 5. Оскільки $k^2(e^{1/k} - 1) \rightarrow +\infty$, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} k^2(e^{1/k} - 1)$ є розбіжним.

Добуток $r_s = \prod_{k=s+1}^{\infty} u_k = \prod_{k=1}^{\infty} u_{k+s}$ називається залишком добутку (2).

Теорема 2. Якщо всі $u_k \neq 0$, то добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є кожний його залишок і при цьому $r_s \rightarrow 1$, якщо $s \rightarrow \infty$.

Доведення. Справді, нехай $\pi_n = \prod_{k=1}^n u_k = \left(\prod_{k=1}^s u_k \right) \left(\prod_{k=s+1}^n u_k \right)$. Тому

збіжність добутку (2) рівносильна збіжності кожного його залишку. При цьому,

$$p = \left(\prod_{k=1}^s u_k \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=s+1}^n u_k \right) = r_s \prod_{k=1}^s u_k$$

і $\lim_{n \rightarrow \infty} r_s = p / \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^s u_k = p / p = 1$. ►

Теорема 3. Добуток (2), в якому всі $u_k > 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k. \quad (5)$$

Доведення. Справді, це впливає з рівності

$$\pi_n = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln u_k\right), \quad \sum_{k=1}^n \ln u_k = \ln \pi_n. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 4. Добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$ і $a_k > 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (6)$$

Доведення. Справді, якщо добуток є збіжним, то $u_k \rightarrow 1$, $a_k \rightarrow 0$ і $\ln(1 + a_k) \sim a_k$, якщо $k \rightarrow \infty$. Ряди (5) і (6) є додатними. Тому збіжність ряду (6) впливає зі збіжності ряду (5). Навпаки, якщо ряд (6) є збіжним, то $a_k \rightarrow 0$ і $\ln u_k = \ln(1 + a_k) \sim a_k$. Тому збіжність ряду (5) і, отже, збіжність добутку (2) впливає зі збіжності ряду (6). $\blacktriangleright$

Теорема 5. Добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$ і $a_k < 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд (6).

Доведення цієї теореми таке ж як і попередньої. $\blacktriangleright$

Теорема 6. Добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$, є збіжним, якщо збіжними є ряд (6) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (7)$$

Доведення. Справді,

$$\frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Тому разом з рядом (5) збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \ln(1 + a_k)),$$

а тому і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$. Отже, добуток (2) є збіжним. $\blacktriangleright$

Приклад 6. Якщо ряд (7) є розбіжним, а ряд (6) є збіжним, то добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$, є розбіжним. Справді, згідно з (8) $a_k - \ln(1 + a_k) \leq a_k^2 \leq 4(a_k - \ln(1 + a_k))$ для достатньо великих k . Тому, якщо б добуток був збіжним, то ми б мали суперечність.

Добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$, називається абсолютно збіжним, якщо збіжним абсолютно є ряд (6).

Теорема 7. Якщо добуток (2) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Доведення. Справді, нехай $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + |a_k|)$. Тоді ряд

$$P_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1}) \text{ є збіжним,}$$

$$P_n - P_{n-1} = |a_n| \prod_{k=1}^{n-1} (1 + |a_k|), \quad \pi_n - \pi_{n-1} = a_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 + a_k),$$

$$|\pi_n - \pi_{n-1}| \leq P_n - P_{n-1},$$

ряд $q = \pi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\pi_n - \pi_{n-1})$ є збіжним і

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi_1 + \sum_{k=2}^n (\pi_n - \pi_{n-1}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n. \text{ Тому достатньо довести, що } q \neq 0,$$

а це так, бо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| / (1 + a_k)$ є збіжним, добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k / (1 + a_k))$ є

збіжним і $\pi_n = \left(\prod_{k=1}^n (1 - a_k / (1 + a_k)) \right)^{-1} \blacktriangleright$

Приклад 7. Оскільки $\frac{k^2}{k^2 + 1} = 1 - \frac{1}{k^2 + 1}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$ є збіжним,

то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1}$ є збіжним абсолютно.

Приклад 8. Оскільки $\frac{k^3}{k^3 + 1} = 1 - \frac{1}{k^3 + 1}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 1}$ є збіжним,

то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^3}{k^3 + 1} \right|$ є збіжним, а добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{k^3 + 1}$ є

розбіжним, оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k^3}{k^3 + 1}$ не існує. Ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^3}{k^3 + 1} \right|$ також є розбіжним. Тому абсолютна збіжність

добутку (2) не є рівносильною збіжності добутку $\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Приклад 9. Якщо $u_k = (-1)^k$, то добуток (2) є розбіжним, а добуток $\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|$ є збіжним.

Зауваження 2. Інколи збіжність добутку розуміють трохи загальніше. Власне, добуток (2) називається збіжним (в узагальненому розумінні), якщо для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\pi}_n = r_{n_0} \neq 0, \infty, \quad \tilde{\pi}_n := \prod_{k=n_0+1}^n u_k$$

При цьому число $p = r_{n_0} \prod_{k=1}^{n_0} u_k$ називається значенням нескінченного добутку (2) і цей факт записують у вигляді (1). Таким чином, в цьому розумінні добуток може бути збіжним і якщо скінченна кількість його співмножників дорівнюють нулеві і тоді значення добутку дорівнює нулеві.

Приклад 10. Якщо $u_1 = 2$, $u_2 = u_3 = 0$ і $u_k = \frac{k^2}{k^2 + 1}$, якщо $k \geq 3$, то добуток (2) є збіжним у вказаному в зауваженні 2 розумінні і $\prod_{k=1}^{\infty} u_k = 0$.

Теорема 8. Добуток (2), в якому всі $u_k \geq 0$, є збіжним (в узагальненому розумінні) тоді і тільки тоді, коли для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ є збіжним ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k. \quad (9)$$

Аналогічно формулюються і доводяться аналоги інших теорем, наведених вище.

Приклад 11. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/k) e^{1/k}$ є збіжним, бо

$$\ln\left((1 - 1/k) e^{1/k}\right) = \frac{1}{k} + \ln(1 - 1/k) = \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{і тому ряд}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left((1 - 1/k) e^{1/k}\right) \text{ є збіжним.}$$

23. Числові нескінченні добутки з комплексними членами.

Добутком членів послідовності $(u_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ або нескінченним числовим добутком з загальним членом u_k називають символ

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \dots, \quad (1)$$

який позначають також так:

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (2)$$

Добуток (1) називають збіжним, якщо для деякого n_0 існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n_0+1}^n u_k = q \neq 0, \infty. \quad (3)$$

При цьому, число $p = q \prod_{k=n_0}^{n_0} u_k$ називають значенням нескінченного

добутку (2) і цей факт записують у вигляді $p = \prod_{k=1}^{\infty} u_k$.

Теорема 1. Якщо добуток (2) є збіжним, то $u_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k, \quad (4)$$

за деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ та значення $\ln u_k := \ln|u_k| + i \arg u_k \in \mathbb{C}$.

Теорему 2 можна сформулювати так: добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд (4), в якому $\ln u_k := \ln|u_k| + i \arg u_k$ і $\arg u_k \in [-\pi; \pi)$ для всіх достатньо великих k .

Добуток (2) називається абсолютно збіжним, якщо збіжним абсолютно є ряд (4). Абсолютно збіжний добуток є збіжним. Водночас, абсолютна збіжність добутку (2) не є рівносильною збіжності добутку

$$\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|.$$

Теорема 3. Для того щоб добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$, був абсолютно збіжним, необхідно і достатньо, щоб був збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad (5)$$

Добуток $r_p = \prod_{k=p+1}^{\infty} u_k$ називається залишком добутку (2). Якщо всі

$u_k \neq 0$, то добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є кожний його залишок і при цьому $r_p \rightarrow 1$, $p \rightarrow \infty$.

Приклад 1. Оскільки $\frac{k^2}{k^2+1} = 1 - \frac{1}{k^2+1}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ є збіжним,

то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1} \right|$ є збіжним, а добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1}$ є

розбіжним, оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1}$ не існує.

Приклад 2. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2+i} \right)$ є збіжним, бо

$\left| \frac{1}{k^2+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ є збіжним.

Приклад 3. Оскільки $k^2(e^{1/k}-1) \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, то добуток

$\prod_{k=1}^{\infty} k^2(e^{1/k}-1)$ є розбіжним.

24. Функціональні нескінченні добутки. Нехай (u_k) – послідовність функцій, голоморфних в області D . Тоді добуток

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k(z) \quad (1)$$

називається функціональним добутком. Для кожного $z \in D$ функціональний добуток (1) є числовим. Функціональний добуток (1) називається збіжним (абсолютно збіжним) на множині $E \subset D$, якщо для кожного $z \in E$ є збіжним (абсолютно збіжним) відповідний числовий добуток. Добуток (1) називається рівномірно збіжним на множині $E \subset D$, якщо за деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ послідовність

$$\pi_n(z) = \prod_{k=n_0+1}^n u_k(z)$$

рівномірно збігається на E до функції $r_{n_0}(z)$. При цьому

$p(z) = r_{n_0}(z) \prod_{k=1}^{n_0} u_k(z)$ називається значенням добутку (1) і цей факт

записують так: $p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} u_k(z)$. Таким чином, поведінка скінченного числа співмножників u_k не впливає на характер збіжності добутку.

Теорема 1. Якщо функції $u_k(z)$ є голоморфними в області $D \subset \mathbb{C}$, і за деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ та деякому виборі значень $\ln u_k(z)$ ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k(z) \quad (2)$$

рівномірно збігається на компактній $E \subset D$, то добуток (1) на E збігається рівномірно.

Наслідок 1. Якщо існує такий збіжний додатний числовий ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, що істинним є хоч би одне з висловлень

$$\begin{aligned} (\forall z \in E)(\forall k): |\ln u_k(z)| &\leq b_k, \\ (\forall z \in E)(\forall k): |a_k(z)| &\leq b_k, \end{aligned}$$

то добуток (1), в якому $u_k(z) = 1 + a_k(z)$, на компактній $E \subset D$ збігається абсолютно і рівномірно.

Приклад 1. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + 1/k^x)$ є збіжним, якщо $x > 1$, і є розбіжним, якщо $x \leq 1$.

Приклад 2. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + (-1)^k / k^x)$ є збіжним абсолютно, якщо $x > 1$, є збіжним, якщо $1/2 < x \leq 1$, і є розбіжним, якщо $x \leq 1/2$.

Приклад 3. Нехай $\{p_k\}$ – множина всіх простих чисел: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, Оскільки кожне натуральне число $k > 1$ подається єдиним чином у вигляді добутку $k = p_{v_1(k)} \cdot \dots \cdot p_{v_m(k)}$ простих чисел,

$$\frac{1}{1 - 1/p_j^x} = \sum_{k=0}^{\infty} p_j^{-kx} \text{ для кожного } x \geq 1 \text{ і кожного простого числа } p_j, \text{ то}$$

$$\prod_{p_j \leq m} \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^x} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \right)',$$

де “'” означає, що сумування поширюється тільки на ті $k \geq m+1$, які подаються у вигляді добутку простих чисел, які є меншими за m . Якщо

$x > 1$, то $\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \right)' \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \rightarrow 0$, якщо $m \rightarrow \infty$. Тому

$$\prod_j \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad x > 1.$$

Якщо $x=1$, то

$$\prod_{p_j \leq m} \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \right)' \geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тому множина всіх простих чисел є нескінченною. Функція

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

називається дзета-функцією Рімана. Отже,

$$\zeta(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1-1/p_j^x)}, \quad x > 1.$$

Приклад 4. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ є збіжним, то добуток

$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - ze^{-\sqrt{k}})$ є абсолютно і рівномірно збіжним в кожному крузі $\overline{U(0;R)}$, $0 < R < +\infty$.

Приклад 5. Оскільки рівномірно за z в кожному крузі $\overline{U(0;R)}$,

$0 < R < +\infty$, виконується $\cos \frac{z}{k} - 1 = (1 + o(1)) \frac{|z|^2}{2k^2}$, $k \rightarrow \infty$, і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$

є збіжним, то в кожному такому крузі добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \cos z/k$ є збіжним абсолютно і рівномірно.

25. Перетворення Фур'є. Згортка функцій. Перетворенням Фур'є функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ називається функція

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (1)$$

Оператор F , який функції f ставить у відповідність функцію $\hat{f}$ за формулою (1) називається оператором Фур'є. Формулу (1) можна переписати у вигляді $\hat{f} = F(f)$. Оберненим перетворенням Фур'є $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ називається функція

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (2)$$

Оператор F^{-1} , який функції $\hat{f}$ ставить у відповідність функцію f за формулою (2) називається оберненим оператором Фур'є. Формулу (2) можна переписати у вигляді $f = F^{-1}(\hat{f})$. За певних умов справедлива інтегральна формула Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy. \quad (3)$$

Останню формулу можна переписати у вигляді $f = F^{-1}(F(f))$.

Приклад 1. Якщо $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$ то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iyt} dt = \frac{e^{iy\sigma} - e^{-iy\sigma}}{iy\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \frac{\sin \sigma y}{y}, & y \neq 0, \\ \sigma\sqrt{2/\pi}, & y = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Для кожної функції $f \in L_1(\mathbb{R})$ і кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ виконується $\hat{f}(y - y_0) = e^{iy_0 t} \hat{f}(t)$. Справді,

$$\hat{f}(y - y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(y-y_0)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy_0 t} e^{-iyt} dt.$$

Приклад 3. Для кожної функції $f \in L_1(\mathbb{R})$ і кожного $t_0 \in \mathbb{R}$ виконується $f(t - t_0) = e^{-it_0 y} \hat{f}(t)$. Справді,

$$f(t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-iyt} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iy(u+t_0)} du = e^{-iyt_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iyu} du.$$

Приклад 4. Нехай $f(x) = e^{-\alpha|x|}$. Тоді

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-iyt} dt = \sqrt{2/\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos ytdt = \sqrt{2/\pi} \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}.$$

Приклад 5. Нехай $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді за теоремою про лишки

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \alpha^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha|y|}.$$

Приклад 6. Нехай $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha \in (0; +\infty)$. Тоді за теоремою Коші

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-iy}^{+\infty-iy} e^{-\alpha \zeta^2} e^{-iy\zeta} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-y^2/4\alpha}, \end{aligned}$$

бо $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Таким чином, $\hat{f}(y) = \lambda f(y)$, якщо $\lambda = 1$ і $f(x) = e^{-x^2/2}$.

Згорткою функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ і $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ називають функцію $f * \varphi$, визначену рівністю $f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) \varphi(\tau) d\tau$.

Приклад 7. Нехай $f(x) = x$ і $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 (x-\tau) d\tau = 2x.$$

Приклад 8. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = - \int_{x+1}^{x-1} f(u) du = \int_{x-1}^{x+1} u du = 2x, \quad x \geq 1,$$

$$f * \varphi(x) = \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = - \int_{x+1}^{x-1} f(u) du = \int_{x-1}^{x+1} f(u) du = 0, \quad x \leq -1,$$

$$\begin{aligned} f * \varphi(x) &= \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = \int_{x-1}^{x+1} f(u) du = \int_{x-1}^0 f(u) du + \int_0^{x+1} f(u) du = \\ &= \int_0^{x+1} u du = \frac{(x+1)^2}{2}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Приклад 9. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x-\tau) d\tau = \int_0^x d\tau = x, \quad x > 0,$$

$$f * \varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x-\tau) d\tau = 0, \quad x \leq 0.$$

Наведені вище формули справедливі за певних умов.

Теорема 1. Якщо $f \in L_1(\mathbb{R})$, то функція $\hat{f}$ є неперервною і обмеженою на $\mathbb{R}$ та $\hat{f}(y) \rightarrow 0$, якщо $y \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Якщо $f \in L_1(\mathbb{R})$ і $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, то $f * \varphi = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{\varphi}$.

Доведення. За теоремою Фубіні

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f * \varphi(x) e^{-iyx} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) e^{-iyx} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-iyu} du. \end{aligned}$$

Звідси випливає потрібне. ►

Теорема 3. Якщо функція $f \in L_1(\mathbb{R})$ є неперервною на $\mathbb{R}$ і є функцією обмеженої варіації на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива формула Фур'є (3), в якій зовнішній інтеграл є інтегралом в розумінні головного значення.

Через $S(\mathbb{R})$ або $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ позначаємо множину тих функцій f , які мають на $\mathbb{R}$ всі похідні і

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\forall p \in \mathbb{Z}_+): \|f\|_{p,n} := \sup \left\{ |x|^p |f^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R} \right\} < +\infty.$$

Простір $S(\mathbb{R})$ називають простором швидко спадних функцій. Йому належить, наприклад, функція $f(x) = \exp(-x^2)$.

Теорема 4. Оператор Фур'є є взаємно однозначним відображенням $S(\mathbb{R})$ на $S(\mathbb{R})$. Для кожної функції $f \in S(\mathbb{R})$ в кожній

точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива двоїста формула $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dx$,

інтегральна формула Фур'є (3) та рівність Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Якщо $f \in L_2(\mathbb{R})$, то функція $\varphi_y(t) = f(t)e^{-iyt}$ не обов'язково належить до $L_1(\mathbb{R})$. Так буде, наприклад, якщо $f(t) = 1/(1+|t|)$. В зв'язку з цим, означення перетворення Фур'є в просторі $L_2(\mathbb{R})$ вводиться іншим чином. Перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ або L_2 -перетворенням Фур'є функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ зветься така функція $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$, для якої

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{-iyt} dt \right|^2 dy = 0.$$

Оберненим перетворенням Фур'є функції $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ називається така функція $f \in L_2(\mathbb{R})$, для якої

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(y) e^{iyx} dy \right|^2 dx = 0.$$

Теорема 5 (Планшереля). Для кожної функції $f \in L_2(\mathbb{R})$ існує її L_2 -перетворення Фур'є і при цьому справедлива рівність Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Якщо $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, то її L_2 -перетворення Фур'є співпадає з її перетворенням Фур'є як функції $L_1(\mathbb{R})$.

26. Запитання для самоконтролю.

- Поясніть зміст символів: а) “ $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow a$ ”; б) “ $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$ ”; в) “ $f(x) = O(1)$, $x \rightarrow a$ ”; г) “ $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \rightarrow a$ ”; д) “ $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \rightarrow a$ ”; е) “ $f(x) = O(1)$, $x \in E$ ”; є) “ $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \in E$ ”; ж) “ $f(x) \asymp \varphi(x)$, $x \in E$ ”; з) “ $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \rightarrow a$ ”.
- Сформулюйте означення: а) верхньої границі послідовності; б) нижньої границі послідовності; в) верхньої границі функції; г) нижньої границі функції.
- Запишіть нерівність Єнсена.
- Сформулюйте теореми Хеллі.
- Сформулюйте теореми про граничний перехід в інтегралах.
- Сформулюйте означення уточненого порядку.
- Сформулюйте означення множини нульової відносної міри (E_0 -множини).
- Сформулюйте означення множини нульової лінійної щільності (C^0 -множини).
- Сформулюйте означення перетворення Фур'є функцій з $L_1(\mathbb{R})$.
- Сформулюйте означення перетворення Фур'є в просторі $L_2(\mathbb{R})$.
- Сформулюйте теорему Планшереля.
- Сформулюйте означення згортки функцій.

27. Вправи і задачі.

1. Знайдіть

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\cos \frac{\pi n}{2} \right)^{n-1}.$
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n n) / n.$
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \cos^2 \frac{x\pi}{2} \right).$
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \cos \frac{x\pi}{4} \right).$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}} \left(2 + \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right).$
6. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо (x_n) – послідовність, членами якої є всі раціональні числа.
7. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо (x_n) – послідовність, членами якої є всі раціональні числа.
2. Знайдіть $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ і $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$ та з'ясуйте, чи існує границя

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1. $f(x) = x^2 \sin x, a = 0.$

2. $f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = \infty.$

3. $f(x) = x + \sin \frac{1}{x}, a = 0.$

4. $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x}, a = \infty.$

5. $f(x) = e^{\frac{\cos 1}{x^2}}, a = 0.$

6. $f(x) = e^{\frac{\cos 1}{x^2}}, a = \infty.$

7. $f(x) = \arctg \frac{1}{x}, a = 0.$

8. $f(x) = \arctg \frac{1}{x}, a = \infty.$

9. $f(x) = \arctg x, a = 0.$

10. $f(x) = e^{-x^2}, a = \infty.$

11. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x, a = 0.$

12. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}, a = 0.$

13. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}, a = 0.$

14. $f(x) = \operatorname{arccctg} x, a = \infty.$

15. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1+2x} \right)^x, a = \infty.$

16. $f(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{2x+1}{2x+2}}, a = 0.$

17. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}, a = 0.$

18. $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x, a = \infty.$

19. $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x+1}, a = \infty.$

20. $f(x) = \left(\frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}, a = \infty.$

21. $f(x) = 2^x, a = \infty.$

22. $f(x) = 2^{1/x}, a = 0.$

$$23. f(x) = \left(\frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x}, a = \infty. \quad 24. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), a = 0.$$

$$25. f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = 0. \quad 26. f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = \infty.$$

$$27. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = \infty. \quad 28. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = 0.$$

$$29. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = \pi/2. \quad 30. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$31. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = \infty. \quad 32. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = \frac{4}{\pi}.$$

$$33. f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x + 1}}, a = \infty.$$

$$34. f(x) = \operatorname{sgn}(\arcsin x), a = 0.$$

$$35. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x), a = 0.$$

$$36. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x - \pi/2), a = 0.$$

$$37. f(x) = \operatorname{sgn}(\arccos x - \pi/2), a = 0.$$

3. Доведіть твердження (4) – (6) справедливими, якщо в правій частині відсутня невизначеність “ $\infty - \infty$ ”)

$$1. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k\}.$$

$$2. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$3. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}.$$

$$4. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$5. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$6. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$7. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

4. Доведіть нерівності за умови, що послідовності (x_n) і (y_n) є невід’ємними і в правій частині відсутня невизначеність “ $0 \cdot \infty$ ”

$$1. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$2. \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$3. \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

$$4. \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

5. Доведіть твердження (тут $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ і $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ – деякі функції, для яких в правих частинах немає невизначеностей “ $0 \cdot \infty$ ”)

$$1. \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

$$2. \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) \geq \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \underline{\lim}_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

$$3. \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

$$4. \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) \geq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \underline{\lim}_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

6. Доведіть рівності

$$1. \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \geq x} f(t) \right).$$

$$2. \quad \underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\inf_{t \geq x} f(t) \right).$$

7. Доведіть нерівності

$$1. \quad \ln x > \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

$$2. \quad \ln(1+x) > x - x^2/2, \quad x > 0.$$

$$3. \quad \ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \quad x > 0.$$

$$4. \quad \ln x \leq \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

$$5. \quad 1 - 2\ln x \leq 1/x^2, \quad x > 0.$$

$$6. \quad 1 + 2\ln x \leq x^2, \quad x > 0.$$

$$7. \quad \ln(1-x) > \frac{-x}{1-x}, \quad 0 < x < 1.$$

$$8. \quad \ln x < x/e, \quad x > 0.$$

$$9. \quad \frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}, \quad 0 < y < x.$$

$$10. \quad e^x > ex, \quad x > 0.$$

$$11. \quad e^{2x} > 2x^2, \quad x > 0.$$

$$12. e^{2x} > \frac{1+x}{1-x}, \quad 0 < x < 1.$$

$$13. e^x > 1 + \ln(1+x), \quad x > 0.$$

$$14. \operatorname{ch} x \leq e^{x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$15. 2\sqrt{x} > 3 - 1/x, \quad x > 1.$$

$$16. \cos x \geq 1 - x^2/2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$17. \sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad x \in [0; \pi/2].$$

$$18. \cos x \geq 1 - 2x/\pi, \quad x \in [\pi/2; \pi].$$

$$19. \sin x \geq x - x^3/6, \quad x > 0.$$

$$20. \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

$$21. |\sin nx| \leq n |\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$22. x^\alpha - 1 \geq \alpha(x-1), \quad \alpha \geq 2, \quad x > 1.$$

$$23. \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x-a}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq a \geq 0.$$

$$24. \ln^+ \left| \prod_{k=1}^m a_k \right| \leq \prod_{k=1}^m \ln^+ |a_k|, \quad a^+ := \max(a; 0).$$

$$25. \left| \ln^+ |a_1| - \ln^+ |a_2| \right| \leq \left| \ln^+ \frac{|a_1|}{|a_2|} \right|.$$

$$26. \left| \ln^+ |a_1| - \ln^+ |a_2| \right| \leq \left| \ln^+ |a_1 - a_2| \right|.$$

$$27. \left| \prod_{k=1}^n b_k - \prod_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \left(\left| \prod_{j=1}^{k-1} b_j \right| \left| \prod_{i=k+1}^n a_i \right| |b_k - a_k| \right) \quad \text{для будь-яких чисел}$$

$n \in \mathbb{N}, \quad a_s \in \mathbb{C} \text{ та } b_m \in \mathbb{C}.$

8. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ опишіть такі дійсні числа λ_i та μ_j , що

$$\sum_{k=1}^n [\mu_j x + \lambda_j] = \sum_{k=1}^n [\mu_j x] \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}, \text{ де } [y] - \text{ціла частина числа } y \in \mathbb{R}.$$

9. Дослідіть на збіжність нескінченні добутки

$$1. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n) e^{1/n}.$$

$$2. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) e^{-1/n}.$$

$$3. \prod_{k=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{k}) e^{-1/\sqrt{k}}.$$

$$5. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}}.$$

$$7. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n\sqrt{n}}}.$$

$$9. \prod_{n=1}^{\infty} (1-1/n^2) e^{1/n}.$$

$$11. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1+1/n}.$$

$$13. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{1+1/n}.$$

$$15. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(e^{1/n} - 1 - 1/n\right)\right).$$

$$17. \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2 \frac{1}{k}.$$

$$19. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}.$$

$$21. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n) \cos \frac{1}{n}.$$

$$23. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n) \sin \frac{1}{n}.$$

$$25. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n / \ln n).$$

$$27. \prod_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^2.$$

$$29. \prod_{n=1}^{\infty} \left(n \ln(e^{1/n} - 1)\right)^2.$$

$$31. \prod_{n=1}^{\infty} 1/n.$$

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} (1-1/\sqrt{n}) e^{1/\sqrt{n}}.$$

$$6. \prod_{n=1}^{\infty} (1-1/\sqrt{k}) e^{\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}}.$$

$$8. \prod_{n=1}^{\infty} (1-1/\sqrt{n}) e^{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n\sqrt{n}}}.$$

$$10. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n) e^{-1/n^2}.$$

$$12. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{1-1/n^2}.$$

$$14. \prod_{k=2}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{1-1/k^2}.$$

$$16. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\sin 1/n - 1/n\right)\right).$$

$$18. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\cos \frac{1}{n^4}}.$$

$$20. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+1/n}.$$

$$22. \prod_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt[n]{n}.$$

$$24. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(1+n) - \ln n}.$$

$$26. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n / \sqrt[3]{n}).$$

$$28. \prod_{n=1}^{\infty} (n \ln(1+1/n))^3.$$

$$30. \prod_{n=1}^{\infty} (1+1/n)^{1/(n+1)}.$$

$$32. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{2 + 3^n}.$$

$$33. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k^4 + 2}{k^4 + 1}.$$

$$35. \prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n}.$$

$$37. \prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}.$$

$$39. \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^4}.$$

$$41. \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/2^n).$$

$$43. \prod_{k=2}^{\infty} (1 + (-1)^k / \ln^3 k).$$

$$34. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{2^k + 1}$$

$$36. \prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}.$$

$$38. \prod_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}.$$

$$40. \prod_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{1}{n^2}$$

$$42. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/3^n).$$

$$44. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + (-1)^{k+1}}.$$

10. З'яуйте, чи істинними є висловлення

1. $xo(x) = o(x^2), x \rightarrow 0.$

2. $x^3 o(1/x) = o(x^2), x \rightarrow 0.$

3. $x + o(x) = O(x), x \rightarrow 0.$

4. $x + o(x^2) = O(x), x \rightarrow 0.$

5. $x^2 + o(x) = O(x^2), x \rightarrow \infty.$

6. $o(O(x)) = o(x), x \rightarrow 0.$

7. $O(o(x^2)) = o(x^2), x \rightarrow 0.$

8. $o(x^2) + O(x^3) = o(x^2), x \rightarrow 0.$

9. $\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = 1 + o(1), x \rightarrow 0.$

10. $x^2 + o(x) = O(x^2), x \rightarrow \infty.$

11. $x = o(x^2), x \rightarrow 0.$

12. $x = o(x^2), x \rightarrow \infty.$

13. $(O(x))^3 = O(x^3), x \rightarrow 0.$

14. $O(x^3) = o(x^2), x \rightarrow 0.$

15. $(O(x))^3 = O(x^3) = o(x^4), x \rightarrow \infty.$

16. $e^{O(x)} = 1 + O(x), x \rightarrow 0.$

17. $x + o(x^2) \sim x, x \rightarrow 0.$
18. $(1+x)^5 = O(x^5), x \rightarrow \infty.$
19. $\sin x = O(1), x \in \mathbb{R}.$
20. $\sin z = O(1), z \in \mathbb{C}.$
21. $\sin x \sim x, x \rightarrow 0.$
22. $\sin x \sim x, x \rightarrow \infty.$
23. $\sin x \sim x, x \rightarrow \pi/2.$
24. $\sin x = o(x), x \rightarrow 0.$
25. $\sin x = o(x^2), x \rightarrow 0.$
26. $\sin x = o(x^2), x \rightarrow \infty.$
27. $x^3 = o(e^x), x \rightarrow +\infty.$
28. $x^3 = o(e^x), x \rightarrow -\infty.$
29. $\ln x = o(x^2), x \rightarrow +\infty.$
30. $\ln x = o(x^2), x \rightarrow 0+.$
31. $\ln x = o(x^{1/2}), x \rightarrow 0+.$
32. $\ln x = o(x), x \rightarrow 0+.$
33. $\ln x = o(x^\alpha), x \rightarrow +\infty, \alpha > 0.$
34. $\ln x = o(x^\alpha), x \rightarrow +\infty, \alpha \leq 0.$
35. $\ln x = o(x^\alpha), x \rightarrow 0+, \alpha < 0.$
36. $\ln x = o(x^\alpha), x \rightarrow 0+, \alpha > 0.$
37. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow 0, \alpha > \beta.$
38. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow 0, \alpha < \beta.$
39. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow 0, \alpha = \beta.$
40. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow +\infty, \alpha > \beta.$
41. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow +\infty, \alpha < \beta.$
42. $x^\alpha = o(x^\beta), x \rightarrow +\infty, \alpha = \beta.$
43. $x^\alpha = o(e^x), x \rightarrow +\infty, \alpha \in \mathbb{R}.$
44. $x^\alpha = o(e^x), x \rightarrow -\infty, \alpha \in \mathbb{R}.$
45. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty.$

46. $\operatorname{arctg} x = x - 2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
47. $\sin(x + o(x^2)) = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$
48. $\cos(x + o(x^2)) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
49. $\sin(x + o(x^2)) = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$
50. $\operatorname{tg}(x + o(x^2)) = x + o(x^2), x \rightarrow 0.$
51. $e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + o(x), x \rightarrow 0.$
52. $e^{\sin x} = 1 + x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$

11. Покажіть, що

1. $e^x \sim 1 + x, x \rightarrow 0.$
2. $e^x + x^3 = O(e^x), x \in [0; +\infty).$
3. $x^2 = o(e^x), x \rightarrow +\infty.$
4. $\frac{1}{1+x} = O(1), x \in [0; +\infty).$
5. $x^2 = o(x^3), x \rightarrow +\infty.$
6. $x^3 = o(x^2), x \rightarrow 0.$
7. $x^2 + \operatorname{arctg}(x^7 + 1) = x^2 + O(1), x \in \mathbb{R}.$
8. $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{2x}{e^x}\right)\right) \sim x, x \rightarrow 0.$
9. $\ln(1 + 2x) \simeq x, x \rightarrow 0.$
10. $\sqrt{1+x^2} - x = O(1/x), x \rightarrow +\infty.$
11. $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1), x \rightarrow 0.$
12. $x^2 + \sin x = O(x^2), x \in [1; +\infty).$

12. Знайдіть числа a_j , для яких справедливі асимптотичні формули

1. $\ln(1 + 2x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^4), x \rightarrow 0.$
2. $\sin 2x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^5), x \rightarrow 0.$
3. $\cos 2x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + O(x^6), x \rightarrow 0.$
4. $e^{2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$

5. $(1+2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
6. $\frac{1+x}{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
7. $\frac{e^x - 1}{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
8. $\frac{\sin x}{1-2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
9. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
10. $\frac{\sin x}{1+x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
11. $\sin(\sin x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
12. $\ln(1+\sin x) = a_0 + a_1x + o(x), x \rightarrow 0.$
13. $\sin(\ln(1+x)) = a_0 + a_1x + o(x), x \rightarrow 0.$
14. $\operatorname{tg} x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
15. $\operatorname{arctg} x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
16. $\arcsin x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
17. $\arccos x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
18. $\operatorname{arctg} x = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty.$
19. $\arccos x = a_0 + a_1(x-1/2) + a_2(x-1/2)^2 + o(x-1/2)^2, x \rightarrow 1/2.$

13. Знайдіть такі числа $c_0, c_1, c_2, \dots$, що

1. $\frac{1}{2+x} = c_0 + c_1(1+x) + c_2(1+x)^2 + o((1+x)^2), x \rightarrow -1.$
2. $1+x^2+x^5 = c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + c_3(x-2)^3 + c_4(x-2)^4 + c_5(x-2)^5, x \rightarrow 2.$
3. $2+x+x^4 = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + c_4(x-1)^4, x \rightarrow 1.$
4. $e^{x \sin x} = c_0 + c_1x + o(x), x \rightarrow 0.$
5. $\sin(x^2-2x+3) = c_0 + c_1(x+1) + o(x+1), x \rightarrow -1.$

$$6. \frac{x}{1+x} = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + o((x-1)^2), \quad x \rightarrow 1.$$

14. Знайдіть такі числа m і c_0 , що $f(x) = c_0(x-a)^m + o((x-a)^m)$, $x \rightarrow a$

1. $f(x) = \sin(\cos x)$, $a = 0$.
2. $f(x) = \cos(\sin x)$, $a = 0$.
3. $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x)$, $a = 0$.
4. $f(x) = \operatorname{tg}^2(\sin x)$, $a = 0$.
5. $f(x) = \sin(\ln \cos x)$, $a = 0$.
6. $f(x) = \cos(\arcsin^2 x)$, $a = 0$.
7. $f(x) = \arcsin^2(\operatorname{tg} x)$, $a = 0$.
8. $f(x) = \operatorname{tg}^2(\arccos x)$, $a = 0$.
9. $f(x) = \arcsin^2(x + x^2 + o(x^2))$, $a = 0$.
10. $f(x) = \operatorname{tg}^2(x + O(x^3))$, $a = 0$.

15. З'ясуйте, чи $f(2x) \sim f(x)$, $x \rightarrow +\infty$

1. $f(x) = \sqrt{x}$.
2. $f(x) = x^2$.
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = e^{2x}$.
5. $f(x) = \ln x$.
6. $f(x) = \ln \ln x$.
7. $f(x) = \ln^2 x$.
8. $f(x) = \ln^3 x$.
9. $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
10. $f(x) = \ln^3 \sqrt{x}$.
11. $f(x) = \ln^p x$, $p \in \mathbb{R}$.
12. $f(x) = e^{\ln^p \ln x}$, $p \in \mathbb{R}$.
13. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$.
14. $f(x) = e^{\ln^p x}$, $p \in \mathbb{R}$.
15. $f(x) = \ln^p \ln^q x$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$.

16. З'ясуйте, чи $f(2x) = O(f(x))$, $x \rightarrow +\infty$

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = e^x$.
5. $f(x) = e^{e^x}$.
6. $f(x) = e^{x^2}$.
7. $f(x) = \ln^2 x$.
8. $f(x) = \ln^3 x$.
9. $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
10. $f(x) = \ln^3 \sqrt{x}$.

17. З'ясуйте, чи $f(x) = o(f(2x))$, $x \rightarrow +\infty$

1. $f(x) = x^2$.
2. $f(x) = \sqrt{x}$.
3. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.
4. $f(x) = e^x$.
5. $f(x) = e^{e^x}$.
6. $f(x) = e^{x^2}$.
7. $f(x) = \ln x$.
8. $f(x) = \ln \ln x$.

$$9. f(x) = \ln^2 x.$$

$$10. f(x) = \ln^3 x.$$

18. З'ясуйте, чи $f(x+1) \sim f(x)$, $x \rightarrow +\infty$

$$1. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$2. f(x) = x^2.$$

$$2. f(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

$$4. f(x) = e^{2x}.$$

$$5. f(x) = \ln x.$$

$$6. f(x) = \ln \ln x.$$

$$7. f(x) = \ln^2 x.$$

$$8. f(x) = \ln^3 x.$$

$$9. f(x) = \sqrt{\ln x}.$$

$$10. f(x) = \ln^3 \sqrt{x}.$$

$$11. f(x) = \ln^p x, \quad p \in \mathbb{R}.$$

$$12. f(x) = \ln^p \ln^q x, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

$$13. f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}.$$

$$14. f(x) = e^{\ln^p x}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

$$15. f(x) = e^{\ln^p \ln x}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

19. З'ясуйте, чи $f(x+1) = O(f(x))$, $x \rightarrow +\infty$

$$1. f(x) = x^2.$$

$$2. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$3. f(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

$$4. f(x) = e^x.$$

$$5. f(x) = e^{e^x}.$$

$$6. f(x) = e^{x^2}.$$

$$7. f(x) = \ln x.$$

$$8. f(x) = \ln \ln x.$$

$$9. f(x) = \ln^2 x.$$

$$10. f(x) = \ln^3 x.$$

20. З'ясуйте, чи $f(x) = o(f(x+1))$, $x \rightarrow +\infty$

$$1. f(x) = x^2.$$

$$2. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$3. f(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

$$4. f(x) = e^x.$$

$$5. f(x) = e^{e^x}.$$

$$6. f(x) = e^{x^2}.$$

$$7. f(x) = \ln x.$$

$$8. f(x) = \ln \sqrt{x}.$$

$$9. f(x) = \sqrt{\ln x}.$$

$$10. f(x) = \ln^2 x.$$

21. Порівняйте нескінченно малі в точці a функції f і φ та з'ясуйте, чи вони є еквівалентними, чи вони мають однаковий порядок, чи одна з них має вищий порядок, чи одна вони є не порівняльними

$$1. f(x) = e^{\sin x} - e^x, \quad \varphi(x) = x^3, \quad a = 0.$$

$$2. f(x) = \sin x - x, \quad \varphi(x) = x^4, \quad a = 0.$$

$$3. f(x) = 1 - \cos x, \quad \varphi(x) = x^2, \quad a = 0.$$

4. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$.
5. $f(x) = e^{\operatorname{tg} x} - 1$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
6. $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$.
7. $f(x) = \arcsin 2x$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
8. $f(x) = 4(1 - x^4) - 5(1 - x^5)$, $\varphi(x) = (1 - x)^2$, $a = 1$.
9. $f(x) = (1 - x^4)(1 - x^5)$, $\varphi(x) = (1 - x)^3$, $a = 1$.
10. $f(x) = 2^x - x^2$, $\varphi(x) = x - 2$, $a = 2$.
11. $f(x) = x^3 - 3^x$, $\varphi(x) = x - 3$, $a = 3$.
12. $f(x) = x^3 - 3^x$, $\varphi(x) = (x - 3)^2$, $a = 3$.
13. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 + 1}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $a = +\infty$.
14. $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}$, $\varphi(x) = x^8$, $a = 0$.
15. $f(x) = \arcsin 2x - 2\arcsin x$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$.
16. $f(x) = x^4 - 4^x$, $\varphi(x) = x - 4$, $a = 4$.
17. $f(x) = 2^x - 16$, $\varphi(x) = (x - 4)^2$, $a = 4$.
18. $f(x) = \frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^4}$, $a = +\infty$.
19. $f(x) = \ln^2(1 + x)$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
20. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $\varphi(x) = 1/\sqrt{x}$, $a = +\infty$.
21. $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$, $\varphi(x) = x^3$, $a = 0$.
22. $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$.
23. $f(x) = \sqrt{9 - x} - 3$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
24. $f(x) = \sqrt{4 + x} - 2$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
25. $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $\varphi(x) = x^4$, $a = 0$.
26. $f(x) = e^x - 1$, $\varphi(x) = x$, $a = 0$.
27. $f(x) = \sin 2x^2$, $\varphi(x) = x^2$, $a = 0$.

$$28. f(x) = \sin x - x, \varphi(x) = x^4, a = 0.$$

$$29. f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

$$30. f(x) = x - \operatorname{tg} x, \varphi(x) = x^3, a = 0.$$

$$31. f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

$$32. f(x) = \begin{cases} \sin^3 x, & x < 0, \\ 1 - \cos \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

22. Доведіть, що рівняння мають єдиний дійсний корінь

$$1. x3^x = 1.$$

$$2. x - \frac{1}{2} \sin x = \pi.$$

$$3. x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$

$$4. 3^x + 4^x = 5^x.$$

$$5. 2e^x + x^3 + 18x - 6 = 0.$$

23. Знайдіть кількість дійсних коренів рівняння

$$1. x \ln x = 1.$$

$$2. \ln x = x.$$

$$3. x \ln x = a, a \in \mathbb{R}.$$

$$4. \ln x = ax, a \in \mathbb{R}.$$

$$5. 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0.$$

$$6. 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

$$7. x^4 - 4ax^2 - 2 = 0, a \in \mathbb{R}.$$

24. За якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння має n різних дійсних коренів, порядку $m=1$

$$1. 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + a = 0, n = 2.$$

$$2. 2x^3 - 13x^2 - 20x + a = 0, n = 1.$$

$$3. 3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + a = 0, n = 4.$$

$$4. x^2 - x - \ln x + a = 0, n = 0.$$

25. За якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння $2x^3 - 4x^2 - 30x + a = 0$ має рівно два різні дійсні корені x_1 і x_2 , порядку $m_1 = 1$ і $m_2 = 2$, відповідно?

26. За якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння $6 \operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$ має рівно два різні дійсні корені x_1 і x_2 , порядку $m_1 = 1$ і $m_2 = 2$, відповідно?

27. За якого $a \in \mathbb{R}$ рівняння $2x^3 - 4x^2 - 30x + a = 0$ має єдиний дійсний корінь, порядку $m = 2$?

28. Вкажіть проміжки, $[a_k; b_k]$, $b_k - a_k \leq 1$, кожний з яких містить рівно один корінь рівняння

$$1. x^2 + 3x - 4 = 0.$$

$$2. x^3 + 2x^2 + x = 0.$$

$$3. x^3 - 27x - 17 = 0.$$

$$4. x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$$

$$5. x^4 - 4x^3 - 6x + 23 = 0.$$

$$6. x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$$

29. Знайдіть таку функцію φ , що для кореня $x = x(y)$ рівняння $x + e^x = y$ виконується $x = \varphi(y) + o(1)$, $y \rightarrow +\infty$.

30. Знайдіть таку функцію φ , що для кореня $x = x(y)$ рівняння $x + e^x = y$ виконується $x = \varphi(y) + o(1)$, $y \rightarrow -\infty$.

31. Знайдіть таку функцію φ , що для кореня $x = x(y)$ рівняння $xe^x = y$ виконується $x = \varphi(y) + o(1)$, $y \rightarrow +\infty$.

32. Знайдіть таку функцію φ , що для кореня $x = x(y)$ рівняння $xe^x = y$ виконується $x = \varphi(y) + o(1)$, $y \rightarrow -\infty$.

33. Нехай x_{2k} – корінь рівняння $\sin \pi x = 1/x$, який належить проміжку $(2k; 1/2 + 2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$x_{2k} = 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

34. Нехай x_{2k+1} – корінь рівняння $\sin \pi x = 1/x$, який належить проміжку $(1/2 + 2k; 2(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$. Доведіть, що

$$x_{2k+1} = 2k + 1 - \frac{1}{(2k+1)\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

35. Знайдіть порядок і тип функції η

$$1. \quad \eta(x) = 2x^2 + x.$$

$$2. \quad \eta(x) = 3x^4 + \ln(1+x).$$

$$3. \quad \eta(x) = \ln(1 + e^{3x}).$$

$$4. \quad \eta(x) = \ln(x + e^{3x}).$$

$$5. \quad \eta(x) = \ln(x + e^{3x}) + \ln(1 + x^2).$$

$$6. \quad \eta(x) = \sqrt{x} + \ln(x^2 + 2x^3).$$

$$7. \quad \eta(x) = \ln(x^5 + e^x).$$

$$8. \quad \eta(x) = \ln\left(1 + e^{3x^2}\right).$$

$$9. \quad \eta(x) = \ln\left(1 + 2^{x/\ln(1+x)}\right).$$

$$10. \quad \eta(x) = \sqrt{x} \ln(1 + 1/x).$$

$$11. \eta(x) = x \ln(1+x^2) \ln(1+1/x^{3/2}).$$

$$12. \eta(x) = x \ln(1+1/\ln(1+x)).$$

$$13. \eta(x) = 2x^2 + x \ln(1+e^x).$$

$$14. \eta(x) = x^3 + \sqrt{x} \ln(1+e^x).$$

$$15. \eta(x) = x \ln(1+1/\sqrt{x}).$$

36. Нехай (x_n) , $x_1 < x_2 < \dots$, – послідовність додатних розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = x$. Доведіть, що $x_n = (2n-1)\pi/2 + O(1/n)$, $n \rightarrow +\infty$.

37. Обгрунтуйте асимптотичні формули

$$1. \int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$2. \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$3. \int_0^x \frac{t^2 \ln t}{1+t} dt = (1+o(1)) \frac{x^3 \ln x}{3}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$4. \int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt \sim \sqrt{x}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$5. \int_0^x \frac{\ln t}{t^3} dt = (1+o(1)) \frac{x^3 \ln x}{3}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$6. \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = -\frac{\sin x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$7. \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$8. \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{4x^2} + o\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$9. \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$10. \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3} + O\left(\frac{e^x}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

11. $\int_0^x \sqrt[3]{1+t^3} dt = \frac{x^2}{2} + O(1), x \rightarrow +\infty.$
12. $\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t} dt \sim \frac{1}{2} \ln x, x \rightarrow +\infty.$
13. $\int_0^x \sqrt{t^2 + 1} e^t \sin t dt \sim \frac{1}{2} x e^x (\sin x - \cos x), x \rightarrow +\infty.$
14. $\int_x^{+\infty} \sqrt{t^2 + 1} \sin e^t dt \sim x e^{-x} \cos e^x, x \rightarrow +\infty.$
15. $\int_x^{+\infty} \cos t^2 dt = -\frac{\sin x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty.$
16. $\int_x^{+\infty} \sin t^2 dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty.$

38. Доведіть асимптотичні формули (тут функція $f:[0;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0;+\infty)$ і $f(x) \sim x^\alpha, x \rightarrow +\infty$)

1. $\int_0^x f(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, x \rightarrow +\infty, \alpha > -1.$
2. $\int_0^x f(t) dt = O(1), x \rightarrow +\infty, \alpha < -1.$
3. $\int_0^x f(t) dt \sim \ln x, x \rightarrow +\infty, \alpha = -1.$
4. $\int_x^{+\infty} f(t) dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, x \rightarrow +\infty, \alpha < -1.$

39. Доведіть, що якщо функція $\varphi:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$ є диференційовною на $[0;+\infty)$ і $x\varphi'(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow +\infty$, то для кожного $a > 0$ виконується $\varphi(ax) \sim \varphi(x), x \rightarrow +\infty$ і $\varphi(x) = o(x^\varepsilon), x \rightarrow +\infty$, для кожного $\varepsilon > 0$.

40. Доведіть, що якщо функція $\varphi:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$ є неперервно диференційовною на проміжку $[0;+\infty)$ і $x\varphi'(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow +\infty$, то

$$1. \int_0^x \varphi(t) t^{\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0.$$

$$2. \int_x^{+\infty} \varphi(t) t^{\alpha-1} dt \sim -\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 0.$$

41. Нехай $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ – уточнений порядок, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \rho \in [0; +\infty)$,
 $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ – неспадна функція на $[0; +\infty)$ і

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt. \text{ Доведіть твердження:}$$

$$1. \int_1^x t^{\rho(t)-q} dt \sim \frac{x^{\rho(x)+1-q}}{\rho+1-q}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad q < \rho+1.$$

$$2. \int_x^{+\infty} t^{\rho(t)-q} dt \sim \frac{x^{\rho(x)+1-q}}{q-\rho+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad q > \rho+1.$$

$$3. e^{-\rho} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\rho(x)}}(x) \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho(x)}} \leq \frac{1}{\rho} \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\rho(x)}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho(x)}} = \frac{1}{\rho} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta(x)}{x^{\rho(x)}}, \text{ якщо одна з цих границь існує.}$$

5. Існує функція η , для якої у лівій частині третього прикладу досягається рівність.

6. Існує функція η , для якої у правій частині третього прикладу досягається рівність.

42. Доведіть асимптотичні формули

$$1. \sum_{n^2 \leq x} \ln n = (1 + o(1)) \sqrt{x} \ln \sqrt{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$2. \sum_{n^2 \geq x} \frac{1}{n^2} = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$3. \sum_{e^n \leq x} 1 = \ln x + O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$5. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$6. \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

43. Доведіть, що функції

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{1+e^{-x}}{1+x}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1+e^{-\sqrt{x}}+x},$$

розвиваються при $x \rightarrow \infty$ в асимптотичний ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{x^{k+1}}$.

44. Доведіть, що функції $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \ln x$, не

розвиваються в асимптотичний ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$ при $x \rightarrow \infty$.

45. Знайдіть верхню лінійну щільність множини

$$1. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1/2).$$

$$2. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2^n; 2^n + n).$$

$$3. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n^2; n^2 + n).$$

$$4. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n^3; n^3 + n^2).$$

$$5. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1/n).$$

$$6. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1/n^2).$$

$$7. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (e^n; e^n + e^{\sqrt{n}}).$$

$$8. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n + e^{-\sqrt{n}}).$$

$$9. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1).$$

$$10. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (e^n; e^n + 2^n).$$

$$11. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (e^n; e^n + e^n/2).$$

$$12. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1/\sqrt[3]{n}).$$

$$13. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n^2; n^2 + n^2/2).$$

$$14. \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n^2 + \ln n).$$

$$15. E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n; n+1/\sqrt{n}).$$

46. Знайдіть верхню щільність множини кругів

1. $\{U(2^n; e^{\sqrt{n}}) : n \in \mathbb{N}\}.$
2. $\{U(in; 1/2) : n \in \mathbb{N}\}.$
3. $\{U(i3^n; e^n) : n \in \mathbb{N}\}.$
4. $\{U(i2^n; n) : n \in \mathbb{N}\}.$
5. $\{U(i3^n; 2^n) : n \in \mathbb{N}\}.$
6. $\{U(in^2; n) : n \in \mathbb{N}\}.$
7. $\{U(in^3; n^2) : n \in \mathbb{N}\}.$
8. $\{U(in^2; e^{-\sqrt{n}}) : n \in \mathbb{N}\}.$
9. $\{U(in; 1/n) : n \in \mathbb{N}\}.$
10. $\{U(n; \ln n) : n \in \mathbb{N}\}.$
11. $\{U(3^n; n^2) : n \in \mathbb{N}\}.$
12. $\{U(i + i3^n; 1/2n) : n \in \mathbb{N}\}.$
13. $\{U(2^n + i3^n; e^n) : n \in \mathbb{N}\}.$
14. $\{U(n + in^2; n) : n \in \mathbb{N}\}.$
15. $\{U(n^3 + in; n) : n \in \mathbb{N}\}.$

47. Нехай множина $E_0 \subset \mathbb{R}$ має нульову відносну міру. Покажіть, що існує послідовність (r_n) така, що $r_n \notin E_0$ і $r_n / r_{n+1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

48. Нехай множина $U \subset \mathbb{C}$ є C^0 -множиною. Тоді існує множина $E_0 \subset \mathbb{R}$ нульової відносної міри така, що для кожного $R \notin E_0$ множини $\partial U(0; R)$ і U не перетинаються.

49. Знайдіть числа a_j , для яких справедливі асимптотичні формули

1. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} (1+t)^{10} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sqrt{1+t} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$
3. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$

4. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \ln(1+t) dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty.$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{1+t} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty.$
6. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), x \rightarrow +\infty.$
7. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow +\infty.$
8. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \ln t dt = a_0 \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right), x \rightarrow +\infty.$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} \ln t dt = \frac{a_0}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty.$
10. $\int_0^{+\infty} e^{-itx} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{a_0}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty.$

50. Нехай $0 < a < +\infty$, $0 < \varepsilon \leq a$, β – неперервна на $(0; a]$ функція, яка на проміжку $(0; a]$ розвивається в поточково збіжний ряд

$$\beta(t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k. \text{ Покажіть, що}$$

$$\int_0^a \beta(t) e^{-xt} dt = a_0 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{x^{1+\alpha}} + o(1/x^{1+\alpha}), x \rightarrow +\infty.$$

51. Нехай $0 < a < +\infty$, $0 < \varepsilon \leq a$, β – неперервна на $[-a; a]$ функція, яка на проміжку $[-\varepsilon; \varepsilon]$ розвивається в поточково збіжний ряд

$$\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k. \text{ Покажіть, що}$$

$$\int_{-a}^a \beta(t) e^{-xt^2} dt = \beta(0) \sqrt{\pi/x} + o(1/\sqrt{x}), x \rightarrow +\infty.$$

52. Доведіть твердження:

1. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то між двома різними нулями функції f лежить принаймні один нуль функції f' .

2. Якщо $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, то на кожному з проміжків $(0;1)$, $(1;2)$ і $(2;3)$ функція f' має єдиний нуль і інших нулів функція f' не має.
3. Якщо $f(x) = (x-1)^3(x-2)^4(x-3)$, то рівняння $f'(x) = 0$ має принаймні один корінь на проміжку $(0;1)$.
4. Якщо $p \in \mathbb{N}_0$, $q \in \mathbb{N}_0$ і функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови: 1) має на проміжку $[a; b]$ неперервну похідну, порядку $p+q$; 2) має на проміжку $(a; b)$ похідну, порядку $p+q+1$; 3) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$; 4) $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0$. Тоді $(\exists c \in (a; b)): f^{(p+q+1)}(c) = 0$.
5. Якщо $f''(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то рівняння $f(x) = 0$ має не більше двох дійсних коренів.
6. Якщо поліном з дійсними $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ з дійсними коефіцієнтами a_j має лишень дійсні нулі, то поліном $f'(x)$ також має лише дійсні нулі.
7. Рівняння $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$ має єдиний додатний корінь і цей корінь належить проміжку $(0; 1/2)$.
8. Рівняння $x^3 + px - q = 0$, $p > 0$, $q > 0$, має єдиний додатний корінь і цей корінь належить проміжку $(0; p/q)$.
9. Рівняння $x^3 + px - q = 0$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, має єдиний дійсний корінь, якщо $4p^3 + 27q^2 > 0$.
10. Рівняння $x^3 + px - q = 0$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, має три дійсних корені, якщо $4p^3 + 27q^2 < 0$.
11. Рівняння $\arcsin x = 0$ має єдиний дійсний корінь $x = 0$ і цей корінь має кратність $m = 2$.
12. Рівняння $xe^x = 2$ має єдиний дійсний корінь і цей корінь належить проміжку $(0; 1)$.
13. Якщо $a \in (1; +\infty)$, то рівняння $a^x = ax$ має два дійсні корені.
14. Рівняння $a^x = bx$ має два дійсні корені, якщо $a \in (1; +\infty)$ і $b > e \ln a$.
15. Рівняння $a^x = bx$ не має жодного дійсного кореня, якщо $e \ln a > b > 0$.
16. Рівняння $a^x = bx$ має єдиний дійсний корінь, якщо $a \in (1; +\infty)$ і $b > 0$.

17. Рівняння $x \ln x = a$ не має дійсних коренів, якщо $a \in (-\infty; -1/e)$.
18. Рівняння $x \ln x = a$ має єдиний дійсний корінь, кратності $m = 2$, якщо $a = -1/e$.
19. Рівняння $x \ln x = a$ має два простих корені, якщо $a \in (-1/e; 0)$.
20. Рівняння $x \ln x = a$ має єдиний дійсний корінь, якщо $a \in (0; +\infty)$.
21. Існує таке $a \in \mathbb{R}$, що рівняння $\log_a x = x$ має принаймні один корінь.
22. Для кожного $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ рівняння $x^2 \arctg x = a$ має єдиний дійсний корінь.
23. Якщо $f''(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $f(x_0)f'(x_0) < 0$ і $f(x_0)f''(x_0) < 0$ то рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь на проміжку $(x_0; x_0 - f(x_0)/f'(x_0))$.
24. Якщо $f''(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 0$ і $f(x_0)f''(x_0) < 0$ то рівняння $f(x) = 0$ має єдиний корінь на кожному з проміжків $(-\infty; x_0)$ і $(x_0; +\infty)$.
25. Якщо $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$, має похідну на проміжку $(0; +\infty)$, $f(0) < 0$ і $(\exists c_0 > 0)(\forall x \in (0; +\infty)) : f'(x) \geq c_0$, то на проміжку $(0; +\infty)$ рівняння $f(x) = 0$ єдиний корінь і цей корінь належить проміжку $(0; -f(0)/c_0)$.
26. Якщо $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, і $a_i = a_{n-i}$ для всіх $i \in \overline{1; n}$, то $\tilde{x} = -1$ є нулем $P_n(x)$ і $P_n(x) = (x+1)Q_{n-1}(x)$, де $Q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ і $a_i = a_{n-1-i}$ для всіх $i \in \overline{1; n-1}$.
27. Якщо $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i = -a_{n-i}$ для всіх $i \in \overline{1; n}$ і n —непарне натуральне число, то $\tilde{x} = 1$ є нулем $P_n(x)$.
28. Якщо $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_i = -a_{n-i}$ для всіх $i \in \overline{1; k}$ і n —парне натуральне число, то числа $\tilde{x} = 1$ і $\tilde{\tilde{x}} = 1$ є нулями $P_n(x)$.
29. Якщо n —непарне натуральне число, $a_1 > 0$ і $a_{2i-1} \geq 0$ для всіх $i \in \overline{1; k}$, то рівняння $x^{2k+1} + a_{2k-1} x^{2k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ має єдиний додатний корінь.

30. Рівняння $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - a_0 = 0$, де $a_0 > 0$ і всі $a_j \geq 0$ має єдиний додатний корінь.

53. Доведіть твердження:

1. Якщо $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{1} = 0$, то рівняння $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ має принаймні один корінь на проміжку $[0;1]$.
2. Якщо $a_n \neq 0$, $M_1 = \max\{|a_k| : k \in \overline{0; n-1}\}$, то $|\tilde{x}| < 1 + M_1/|a_n|$ для кожного кореня $\tilde{x}$ рівняння $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$.
3. Якщо $a_0 \neq 0$, $M_0 = \max\{|a_k| : k \in \overline{1; n}\}$, то $|\tilde{x}| > (1 + M_1/|a_0|)^{-1}$ для кожного кореня $\tilde{x}$ рівняння $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$.
4. Якщо всі $a_j \in \mathbb{R}$ і $a_n > 0$, то $|\tilde{x}| < 1 + \sqrt[k]{A/a_n}$, для кожного дійсного кореня $\tilde{x}$ рівняння $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, де $A = \max\{|a_j| : a_j < 0, j \in \overline{0; n}\}$ і $k = \max\{j : a_j < 0\}$.
5. Якщо $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, всі $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$ і існує таке $c > 0$, що $P_n^{(k)}(c) \geq 0$ для всіх $k \in \overline{0; n}$, то $|\tilde{x}| < c$, для кожного дійсного нуля $\tilde{x}$ багаточлена $P_n(x)$.
6. Кількість додатних нулів багаточлена $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами не перевищує кількості змін знаку його коефіцієнтів. (кількість змін знаку коефіцієнтів багаточлена – це кількість пар $(a_k; a_m)$ таких, що $k < m$, $a_k a_m < 0$ і $a_j = 0$ для всіх $j \in \overline{k; m-1}$).
7. Для того щоб функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $(a; b)$, необхідно і достатньо, щоб $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ для будь-яких x_1 і x_2 , $a < x_1 < x_2 < b$, та будь-яких $\alpha \in [0; 1]$ і $\beta \in [0; 1]$, $\alpha + \beta = 1$.
8. Для того щоб функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $(a; b)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

для будь-яких x_1, x_2 і x_3 , $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$.

9. Для того щоб функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

для будь-яких $x_j \in (a;b)$ і $\alpha_j \in [0;1]$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$, $j \in \overline{1;n}$.

10. Для того щоб функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x_0 \in (a;b)$ функція

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ була неспадною на множині } A = (a; x_0) \cup (x_0; b).$$

11. Існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є опуклою на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не є опуклою на $\mathbb{R}$.

12. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$, то вона є неперервною на $(a;b)$.

13. Для того щоб функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною на $(a;b)$ і $f((x_1 + x_2)/2) \leq (f(x_1) + f(x_2))/2$ для будь-яких x_1 і x_2 , $a < x_1 < x_2 < b$.

14. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$, то вона має в кожній точці $x \in (a;b)$ праву та ліву похідні і $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

15. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$, то вона має в кожній точці $x \in (a;b)$ праву та ліву похідні і $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$, $a < x_1 < x_2 < b$.

16. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$, то вона має в кожній точці $x \in (a;b)$ праву та ліву похідні і $f'_-(x_1) \leq (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) \leq f'_+(x_2)$, $a < x_1 < x_2 < b$.

17. Для того щоб диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб функція f' була неспадною на $(a;b)$.

18. Для того щоб диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $x_0 \in (a;b)$ її графік на $(a;b)$ лежав не нижче дотичної, проведеної до нього в точці $(x_0; f(x_0))$.
19. Для того щоб двічі диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб $(\forall x \in (a;b)): f''(x) \geq 0$.
20. Для того щоб диференційовна на проміжку $(a;b)$ функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ була вгнутою на $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб функція f' була незростаючою на $(a;b)$.
21.
$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \quad x_i \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$
22.
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$
23. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку $[a;b]$ і $f'_+(a) f'_-(b) \leq 0$, то знайдеться така точка $c \in [a;b]$, що $f'(c) = 0$.
24. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку $[a;b]$, то для кожного D , яке лежить між $f'_+(a)$ і $f'_-(b)$ знайдеться така точка $c \in [a;b]$, що $f'(c) = D$.
25. Якщо функція $p:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$ є диференційовною на $[0;+\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \rho \in [0;+\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x p'(x) \ln x = 0$ і $h(x) = x^{p(x)}$, то
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = c^\rho$$
 для кожного $c > 0$.
26. Якщо функція $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідні до порядку n включно в точці a , $P_n(x)$ – багаточлен Тейлора степеня n в точці a , $Q_n(x)$ – довільний багаточлен степеня n , то знайдеться окіл точки a , для всіх x з якого виконується $|f(x) - P_n(x)| \leq |f(x) - Q_n(x)|$.
27. $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}): (1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0$, якщо $T_m(x) = \cos(\arccos x)$ – багаточлен Чебешова.
28. $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}): (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$, якщо

$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} ((x^2 - 1)^m)^{(m)}$ – багаточлен Лежандра.

29. $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}) : xL_m''(x) - (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0$, якщо

$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)}$ – багаточлен Лагера.

30. $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}) : H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$, якщо

$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)}$ – багаточлен Ерміта.

31. Всі багаточлени Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ мають лише дійсні нулі і належать проміжку $(-1; 1)$.

32. Всі багаточлени Лагера $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$ мають лише дійсні нулі.

33. Всі багаточлени Ерміта $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ мають лише дійсні нулі.

54. Доведіть твердження (про піки Пойа):

1. Нехай дійсні функції $\eta : [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, $\eta_1 : [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ і $\eta_2 : [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ неперервними на $[x_0; +\infty)$, функція η_2 / η_1 є неспадною, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) / \eta_1(x) = +\infty$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) / \eta_2(x) = 0$. Тоді існує послідовність (x_n) , $0 < x_n \uparrow +\infty$, для якої

$$\eta(x) \leq \begin{cases} \frac{\eta(x_n)}{\eta_1(x_n)} \eta_1(x), & x^* \leq x \leq x_n, \\ \frac{\eta(x_n)}{\eta_2(x_n)} \eta_2(x), & x_n \leq x < +\infty. \end{cases}$$

2. Нехай функція $\eta : [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ є неперервною і неспадною на $(0; +\infty)$, причому

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \eta(x)}{\ln x} = \rho \in (0; +\infty). \quad (1)$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують послідовність (x_n) , $0 < x_n \uparrow +\infty$, і $x^* \in [0; +\infty)$, для яких

$$\eta(x) \leq \begin{cases} \eta(x_n) (x / x_n)^{\rho - \varepsilon}, & x^* \leq x \leq x_n, \\ \eta(x_n) (x / x_n)^{\rho + \varepsilon}, & x_n \leq x < +\infty. \end{cases}$$

3. Нехай функція $\eta:[0;+\infty)\rightarrow(0;+\infty)$ є неспадною і неперервною на $(0;+\infty)$, причому $\lim_{x\rightarrow+\infty}\ln\eta(x)/\ln x=\lambda\in(0;+\infty)$. Тоді для кожного $\varepsilon\rightarrow 0$

існують послідовність (x_n) , $0< x_n\uparrow+\infty$, і число $x^*\in[0;+\infty)$ такі, що

$$\eta(x)\geq\begin{cases}\eta(x_n)(x/x_n)^{\lambda+\varepsilon}, & x^*\leq x\leq x_n, \\ \eta(x_n)(x/x_n)^{\lambda-\varepsilon}, & x_n\leq x<+\infty.\end{cases}$$

4. Нехай функція $\eta:[0;+\infty)\rightarrow(0;+\infty)$ є неспадною і неперервною на $(0;+\infty)$, і виконується (1). Тоді існують послідовності (r_n) , (ε_n) , (α_n) , (A_n) і (δ_n) такі, що

$$0<\varepsilon_n\rightarrow 0, \quad 0<\delta_n\rightarrow 0, \quad 0<\alpha_n\rightarrow 0,$$

$$0<A_n\rightarrow+\infty, \quad 0<r_n\uparrow+\infty, \quad \alpha_nr_n\rightarrow+\infty$$

і для всіх досить великих n і всіх $r\in[\alpha_nr_n;A_nr_n]$ виконується $\alpha(r)\leq(1+\delta_n)\alpha(r_n)(r/r_n)^{\rho+\varepsilon_n}$.

5. Нехай функція $u:[1;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$ є неперервною неспадною і $u(r)\rightarrow+\infty$ при $r\rightarrow+\infty$, а функція $\varphi:[u(1);+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$ є неперервною, незростаючою,

$$\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt<+\infty. \quad (2)$$

і $\varphi(r)\rightarrow 0$, якщо $r\rightarrow+\infty$. Тоді для всіх $r\geq 1$, крім, можливо, деякої множини скінченної міри виконується $u(r+\varphi(u(r)))<u(r)+1$ (на прикладі функції u , яка є оберненою до функції $u^{-1}(x)=\int_1^x\varphi(t)dt$, переконатись, що умова (2) в сформульованому

твердженні (лемі Бореля –Неванлінни) є істотною).

6. Нехай функція $u:[1;+\infty)\rightarrow[0;+\infty)$ задовольняє умови попереднього твердження. Тоді нерівність $u(r+r/\ln u(r))\leq u^{1+\varepsilon}(r)$ виконується для всіх $r>1$, за винятком, можливо, деякої множини E , для якої $\int_E d\ln r<+\infty$.

55. Доведіть твердження:

1. Послідовність

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1/k; 1] \cup \{0\}, \\ 1, & (0; 1/k), \end{cases}$$

є незростаючою для кожного $x \in [0; 1]$, поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до неперервної функції $f(x) = 0$.

2. Послідовність

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k^2 x, & x \in [0; 1/2k], \\ k - 2k^2(x - 1/3k), & x \in (1/2k; 1/k], \\ 0, & (1/k; 0), \end{cases}$$

функцій, неперервних на $[0; 1]$, поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до неперервної функції $f(x) = 0$.

3. Послідовність $f_k(x) = x^k$ є незростаючою для кожного $x \in [0; 1]$, всі функції f_k є неперервними на $[0; 1]$ і послідовність (f_k) поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до розривної функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

4. Для кожної функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $D(f) = [a; b]$,

послідовність $f_k(x) = \frac{[kf(x)]}{k}$ є рівномірно збіжною на $[a; b]$ до f .

5. Для кожної функції $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, для якої функція f' є неперервною на $(a; b)$, послідовність $f_k(x) = k(f(x + 1/k) - f(x))$ є рівномірно збіжною на до f' на кожному проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$.

6. Існує послідовність функцій $f_k : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) : x \in [0; +\infty) \right\} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{ f_k(x) : x \in [0; +\infty) \}$ і обидві границі в останній рівності існують і є скінченними.

7. $\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + 1/2^{2k} \right) = 2.$

8. $\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + 1/2^{2k} \right) = 2.$

9. $\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + x^{2k} \right) = \frac{1}{1-x}.$

$$10. \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}.$$

$$11. \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$12. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)} \right) = \frac{1}{3}.$$

$$13. \prod_{k=1}^{\infty} \frac{9k^2}{9k^2 - 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

14. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ є збіжним, а ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ є розбіжними, якщо

$$a_k = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{n}}, & k = 2n - 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}, & k = 2n. \end{cases}$$

15. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$, в якому всі $u_k > 0$ є збіжним абсолютно тоді і тільки тоді, коли абсолютно збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k$.

16. $\sum_{k=1}^n a_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$, якщо всі $a_k > 0$.

17. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ є збіжним, якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ збіжними є ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, ..., $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{m-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^m$.

18. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp(a_k)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

19. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp \left(a_k + \frac{a_k^2}{2} \right)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^3$.

20. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp \left(a_k + \frac{a_k^2}{2} + \frac{a_k^3}{3} \right)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^4.$$

21. Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на $\mathbb{R}$, для якої функція f' є неперервною на $(a; b)$, послідовність

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} (f(x + 1/k) - f(x)) \quad \text{є рівномірно збіжною до } f \quad \text{на}$$

кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

22. Існують такі функціональні послідовності (φ_k) і (f_k) , які не є рівномірно збіжними на проміжку $[0; 1]$, а послідовність $(\varphi_k + f_k)$ є рівномірно збіжною на $[0; 1]$.

23. Якщо $(\exists q \in (0; 1))(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E): \sqrt[k]{|f_k(x)|} \leq q$, то на множині E ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1}$$

є збіжним рівномірно і абсолютно.

24. Якщо $(\exists q \in (0; 1))(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E): |f_{k+1}(x)/f_k(x)| \leq q$, то на множині E ряд (1) є збіжним рівномірно і абсолютно.

25. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ збігається на множині E рівномірно, то і ряд (1) збігається на E рівномірно.

26. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(x)|$ збігається на множині E рівномірно і $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E): |f_k(x)| \leq |a_k(x)|$, то і ряд (1) збігається на E рівномірно.

27. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + x^2}$ збігається рівномірно на проміжку $[0; 1]$, але не збігається абсолютно для кожного $x \in [0; 1]$.

28. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x^2)}{k^2}$ збігається рівномірно на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але його не можна почленно диференціювати.

29. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^k$ збігається абсолютно на проміжку $[0;1]$, але не рівномірно на $[0;1]$.

30. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, де $f_k(x) = (-1)^k (1-x)x^k$, збігається абсолютно і рівномірно на проміжку $[0;1]$, але ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ не є рівномірно збіжним на $[0;1]$.

31. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, де

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 2^{-k-1}], \\ \frac{1}{k} \sin^2(\pi 2^{k+1} x), & x \in [2^{-k-1}; 2^{-k}], \\ 0, & x \in [2^{-k}; 1], \end{cases}$$

збігається абсолютно і рівномірно на проміжку $[0;1]$, але не існує такого збіжного числового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, що $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E): |f_k(x)| \leq |a_k|$.

32. Якщо для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність (a_{km}) є додатною і неспадною, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{km}$.

33. $\lim_{t \rightarrow 1-} (1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \ln 2$.

34. $\lim_{t \rightarrow 1-} (1-t^2) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^k}{1-t^k} = \frac{\pi^2}{6}$.

35. Якщо всі функції $f_k: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a;b]$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на $[a;b]$, то рівномірно збіжним на $[a;b]$ є також ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(x) dx$.

36. Якщо всі функції $f_k: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a;b]$, ряд (1) є рівномірно збіжним на кожному замкненому проміжку $[a;\eta] \subset [a;b]$ і $(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\forall x \in [a;b]): |S_n(x)| \leq c_1$, то сума

ряду (1) є інтегрованою в невластному розумінні на $[a; b]$ і

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

37. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними і невід'ємними на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b]$ і

$$\int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx \quad \text{для кожного } \eta \in [a; b]. \quad \text{Тоді}$$

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx, \quad \text{якщо принаймні одна з частин цієї рівності є скінченною.}$$

38. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними і на кожному

$$\text{проміжку } [a; \eta] \subset [a; b] \text{ і } \int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx \text{ для кожного}$$

$$\eta \in [a; b]. \text{ Тоді } \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx, \text{ якщо принаймні одна із}$$

$$\text{чисел } \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right) dx \text{ або } \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_k(x)| dx \text{ є скінченним.}$$

39. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)(kx^k - (k-1)x^{k-1})$ є поточковій збіжним на проміжку $[0; 1]$

і його сума є функцією неперервною на $[0; 1]$, але цей ряд не можна почленно інтегрувати на $[0; 1]$.

40. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^3 + 1}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

41. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

42. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(x-k)^2}$ має похідну на проміжку $[0; 1]$.

43. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{tg}^k x$ має похідну на проміжку $(-\pi/4; \pi/4)$.

44. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^5 + 1}$ має другу похідну на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

45. Функція $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ є нескінченно диференційовною на проміжку $(1; +\infty)$.

46. Функція

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{k\pi^2 x}} + e^{-k\pi^2 x} \right)$$

є нескінченно диференційовною на проміжку $(0; +\infty)$.

47. Функція $\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}$ є неперервною на проміжку $[0; 1]$, диференційовною (не диференційовною) в точці $x \in [0; 1]$, якщо x – раціональне (іраціональне) число.

48. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k!$, якщо останній ряд є збіжним в $\mathbb{R}$.

49. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними на проміжку $[a; b]$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на $[a; b]$ до функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, то функція f є інтегровною на $[a; b]$ і

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

50. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є диференційованими на проміжку $[a; b]$, ряд (1) є збіжним в точці $x = a$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то ряд (1) збіжним на $[a; b]$ до функції

$$f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ диференційовної на } [a; b] \text{ і } \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

51. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ є збіжним на проміжку $[0; 1)$ до функції $f(x) = 1/(1+x)$ і не є збіжним на проміжку $[0; 1]$, але

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n dx.$$

52. Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є збіжним і має суму s , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ є рівномірно

збіжним на проміжку $[0;1]$ і $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ (теорема Абеля).

53. Якщо $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s \in \mathbb{R}$ і $a_k = o(1/k)$, якщо $k \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є збіжним і має суму s (теорема Таубера).

54. $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1/2$, якщо $a_k = (-1)^k$ і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є розбіжним.

55. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ має на проміжку $[a;b]$ всі похідні до порядку $n+1 \in \mathbb{N}$ включно і функція $f^{(n+1)}$ є неперервною на $[a;b]$, то для кожного $x \in [a;b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

(формула Тейлора з додатковим членом в інтегральній формі).

56. $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

57. $f(x) = (1-qx)f(qx)$, якщо $f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

58. $\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k+1)/2}}{\prod_{j=1}^k (q^j - 1)} x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

59. $\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{\prod_{j=1}^k (1-q^j)} x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

60. $\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{(3k^2+k)/2}$, $|q| < 1$.

61. $\frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{2k})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{2k-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k+1)/2}$.

56. Знайдіть перетворення Фур'є функції

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 1], \\ 0, & x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2; 1], \\ 0, & x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

5. Знайдіть перетворення Фур'є функції f , якщо $f(x) = \varphi(x)$ для $x \in [-\pi; \pi]$ і $f(x) = 0$ для $x \notin [-\pi; \pi]$, де φ – розв'язок диференціального рівняння $\varphi'' + \varphi = 0$, який задовольняє початкові умови $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$.

6. Знайдіть перетворення Фур'є функції f , якщо $f(x) = \varphi(x)$ для $x \in [0; 1]$ і $f(x) = 0$ для $x \notin [0; 1]$, де φ – розв'язок диференціального рівняння $\varphi'' - \varphi = 0$, який задовольняє початкові умови $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$.

7. Знайдіть перетворення Фур'є функції f , якщо $f(x) = \varphi(x)$ для $x \in [-1; 0]$ і $f(x) = 0$ для $x \notin [-1; 0]$, де φ – розв'язок диференціального рівняння $\varphi'' - 4\varphi = 0$, який задовольняє початкові умови $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$.

8. Знайдіть перетворення Фур'є функції f , якщо $f(x) = \varphi(x)$ для $x \in [-1; 0]$ і $f(x) = 0$ для $x \notin [-1; 0]$, де φ – розв'язок диференціального рівняння $\varphi'' - \varphi' = 0$, який задовольняє початкові умови $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$.

57. Знайдіть згортку $f * \varphi$ функцій

$$1. f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+x^2}, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ e^{2x}, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$6. f(x) = x, \quad \varphi(x) = e^x.$$

$$7. f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = \operatorname{sh} x.$$

$$8. f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = \operatorname{ch} x.$$

$$9. f(x) = x^3, \quad \varphi(x) = x^2.$$

Література

1. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Основи одновимірного комплексного аналізу: навчальний посібник. – Дрогобич: Швидкодрук, 2012. – 273 с.
2. Винницький Б.В., Хаць Р.В. Вибрані розділи теорії функцій, Ч.1.: навчальний посібник. – Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. І. Франка, 2014. – 129 с.
3. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч. 1. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 517 с.
4. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. – Ч. 2. – 2-ге вид., доп. та перероб. – Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. І. Франка, 2021. – 511 с.
5. Коренков М.Є., Головенко І.П. Цілі функції та нескінченні добутки (спецкурс). – Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. – 38 с.
6. Шеремета М.М., Філевич П.В. Цілі функції: текст лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2001. – 57 с.
7. Bateman H, Erdélyi A. Higher transcendental functions. – V. 2. – McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953. – 476 p.
8. Bleistein N., Handelsman R. Asymptotic expansions of integrals. – New York: Dover Publications, 1975. – 210 p.
9. Boas R.P. Entire functions. – New York., Academic Press, 1954. – 276 p.
10. Copson E.T. Asymptotic expansions. – Cambridge: University Press, 1965. – 120 p.
11. de Bruijn N.G. Asymptotic methods in analysis. – Amsterdam: North-Holland, 1958 (2nd ed. 1975, 3rd ed., New York: Dover 1981). – 200 p.
12. Erdelyi A. Asymptotic expansions. – New York: Dover Publ., 1956. – 178 p.
13. Evgrafov M.A. Asymptotic estimates and entire functions. – New York: Dover Publications, 1979. – 192 p.
14. Gao D.Y., Krysko V.A. Introduction to asymptotic methods, 1st ed. – Routledge, 2019. – 272 p.
15. Goldberg A.A., Ostrovskii I.V. Value distributions of meromorphic functions. Transl. Math. Monogr. – V. 236. – Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2008. – 488 p.
16. Higgins J.R. Completeness and basis properties of sets of special functions. – Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977. – 350 p.

17. Korenev B.G. Bessel functions and their applications. – Taylor Francis, Inc., London-New York, 2002. – 276 p.
18. Levin B.Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr. – V. 150. – Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996. – 248 p.
19. Miller P.D. Applied asymptotic analysis. – American Math. Soc., 2006. – 467 p.
20. Murray J.D. Asymptotic analysis. – Springer, 1984. – 165 p.
21. Olver F. Asymptotics and special functions. – London-New York: Academic Press, 1974. – 574 p.
22. Ronkin L.I. Introduction to the theory of entire functions of several variables. Transl. Math. Monogr. – V. 44. – Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974. – 273 p.
23. Ronkin L.I. Functions of completely regular growth. Transl. Math. Monogr. – V. 81. – Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992. – 392 p.
24. Titchmarsh E.C. The theory of functions, 2nd ed. – Oxford University Press, 1976. – 464 p.
25. Fedoryuk M.V. Asymptotic methods in analysis. – Berlin: Springer, 1989. – 191 p.
26. Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. – Cambridge University Press, Cambridge, 1944. – 804 p.
27. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. – Cambridge: University Press, 1927. – 620 p.

Електронне навчальне видання

Руслан Хаць

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

Редактор
Ірина Невмержицька

Технічний редактор
Лужецька Ольга

Коректор
Артимко Ірина

Здано до набору 30.03.2023 р. Формат 60х90/16. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 8,125. Зам. 18.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка.
(Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140
від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.