

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»
завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат пед. наук, доцент
_____ Тарас ВІЙЧУК
«__» _____ 2025 р.

ВИКОРИСТАННЯ ПРОЄКТНОГО МЕТОДУ НАВЧАННЯ ПІД ЧАС
ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПЛОЩІ ТА ОБ'ЄМИ ГЕОМЕТРИЧНИХ
ФІГУР»

Спеціальність: 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями)
Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)
Додаткова предметна спеціальність: 014.09 Середня освіта
(Інформатика)

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації:
«Магістр середньої освіти.
Вчитель математики, вчитель інформатики»

Автор роботи: **Пирин Іванна Іванівна** _____
підпис

Науковий керівник: доктор філософії
доцент Войтович Христина Олегівна _____
підпис

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи

Використання проєктного методу навчання під час вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
дата		підпис	прізвище, ім'я

	Секретар ЕК	_____	_____
		підпис	прізвище, ім'я

Анотація

Пирин І.І. *Використання проєктного методу навчання під час вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур»*. – Рукопис. – 50 с.

У магістерській роботі теоретично обґрунтовано та розроблено методику використання проєктного методу навчання під час вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур» у курсі математики основної школи. Проаналізовано психолого-педагогічні передумови формування просторового мислення учнів, сучасні навчальні програми й підручники, визначено дидактичний потенціал проєктної діяльності в контексті STEM/STEAM-освіти та компетентнісного підходу. Створено навчально-методичний модуль, що включає систему прикладних проєктів, задач і практичних завдань, спрямованих на розвиток дослідницьких умінь, математичної грамотності та навичок застосування геометричних знань у реальних ситуаціях.

Annotation

Pyryn I. I. *The Use of the Project-Based Learning Method in Studying the Topic “Areas and Volumes of Geometric Figures”*. — Manuscript. — 50 pages.

In the master's thesis, a methodology for applying the project-based learning method in teaching the topic “Areas and Volumes of Geometric Figures” within the lower secondary school mathematics curriculum is theoretically substantiated and developed. The psychological and pedagogical prerequisites for the formation of students' spatial thinking, as well as current educational programs and textbooks, are analyzed. The didactic potential of project-based activities is defined in the context of STEM/STEAM education and the competence-based approach. A teaching and methodological module has been developed, including a system of applied projects, problem-solving tasks, and practical assignments aimed at fostering research skills, mathematical literacy, and the ability to apply geometric knowledge in real-life situations.

Зміст

ВСТУП	6
1.1. Метод проєктів: історія розвитку, суть та типи в сучасній освіті.....	9
1.2. Психолого-педагогічні особливості формування просторової уяви та конструктивного мислення учнів старшої школи	13
1.3. Дидактичний потенціал проєктної діяльності для реалізації компетентнісного підходу (STEM/STEAM)	18
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ОРГАНІЗАЦІЇ ПРОЄКТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ВИВЧЕННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН	21
2.1. Логіко-дидактичний аналіз теми «Площі та об'єми»: від планіметрії до стереометрії.....	21
2.2. Типові труднощі учнів при вивченні геометричних тіл та обчисленні їх характеристик	23
2.3. Етапи організації роботи над проєктом	26
РОЗДІЛ 3. НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПЛОЩІ ТА ОБ'ЄМИ» ЗАСОБАМИ ПРОЄКТНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ	29
3.1. Класифікація проєктів з теми «Площі та об'єми»	29
3.2. Методичні розробки проєктів	31
3.3. Теоретичне обґрунтування ефективності запропонованої методики ..	42

ВИСНОВОК.....46

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ49

Вступ

Сучасний розвиток системи освіти в Україні, зокрема реалізація концепції «Нова українська школа», актуалізує потребу переосмислення традиційних підходів до навчання математики та пошуку нових ефективних методик, орієнтованих на формування ключових компетентностей, розвиток практичного мислення та здатності застосовувати математичні знання у реальних життєвих ситуаціях. Вимірювання площ і об'ємів є одним із базових змістових блоків шкільного курсу геометрії, при цьому саме ця тема викликає у здобувачів освіти найбільше труднощів, пов'язаних із просторовим мисленням, візуалізацією та здатністю до узагальнення геометричних моделей. Традиційні пояснювально-ілюстративні методи не завжди забезпечують глибоке розуміння учнями сутності площі чи об'єму та формул, що їх описують, а також не дають можливості учням побачити практичну значущість цих величин.

Одним із перспективних напрямів удосконалення методики викладання геометрії є проєктне навчання, яке набуває особливого значення у світлі сучасних вимог до STEM-освіти та компетентнісного підходу. Проєктний метод дозволяє інтегрувати математичні знання з реальними задачами, забезпечує діяльнісну основу навчання, сприяє розвитку дослідницьких умінь, самостійності, творчості та відповідальності учнів. Під час виконання проєктів учні навчаються планувати діяльність, проводити вимірювання, аналізувати інформацію, будувати моделі, застосовувати формули в практичних ситуаціях — тобто здійснюють повний цикл навчальної діяльності, який відповідає принципам НУШ та сучасним підходам до навчання геометрії.

Актуальність теми дослідження посилюється суперечностями, які спостерігаються у шкільній практиці: між необхідністю формування математичної, просторової та інженерної компетентностей і переважанням репродуктивних методів навчання; між високим прикладним потенціалом

теми «Площі та об'єми геометричних фігур» і обмеженістю завдань, що вимагають реальних вимірювань, моделювання або розв'язання прикладних проблем; між потребою учнів у практичному застосуванні знань і домінуванням абстрактних задач без зв'язку з реальними ситуаціями. Тому виникає необхідність теоретичного обґрунтування та розробки системи методичних рекомендацій щодо організації проєктної діяльності під час вивчення цієї теми.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування та розробка методики використання проєктного методу навчання під час вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур» у курсі математики основної школи.

Об'єкт дослідження — процес навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження — методика застосування проєктного методу під час вивчення площ та об'ємів геометричних фігур.

Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання дослідження:

1. Проаналізувати науково-педагогічну літературу та визначити сутність, особливості та дидактичні можливості проєктного методу.
2. Дослідити стан викладання теми «Площі та об'єми геометричних фігур» у чинних програмах та підручниках.
3. Обґрунтувати доцільність використання проєктного методу для формування в учнів просторових уявлень, практичних та дослідницьких умінь.
4. Розробити навчально-методичний модуль.

У роботі застосовано такі методи дослідження: теоретичні (аналіз, синтез, класифікація, узагальнення педагогічних джерел та стандартів освіти); моделювання (створення структури навчально-методичного модуля); методи вивчення й узагальнення педагогічного досвіду; аналіз

змісту навчальних програм і підручників; частково — елементи педагогічного експерименту у формі апробації розроблених матеріалів (за можливості).

Наукова новизна дослідження полягає в уточненні дидактичних принципів застосування проєктного методу у викладанні теми «Площі та об'єми геометричних фігур» та обґрунтуванні його ефективності з позицій компетентнісного й діяльнісного підходів.

Практичне значення полягає у створенні готового до впровадження навчально-методичного модуля, що включає сценарії уроків, систему проєктів, завдання, матеріали для учнів.

Структура роботи складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел.

.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи проєктного навчання у шкільному курсі математики

1.1. Метод проєктів: історія розвитку, суть та типи в сучасній освіті.

Метод проєктів є однією з найпотужніших сучасних педагогічних технологій, що поєднує діяльнісний, особистісно орієнтований та компетентнісний підходи до навчання. Його розвиток має тривалу історію, яка сягає кінця XIX — початку XX століття. Джон Дьюї, американський філософ і педагог, сформулював ідею «learning by doing» — навчання через активну діяльність, у якій учні не засвоюють знання у готовому вигляді, а відкривають їх у процесі розв’язання реальних чи наближених до реальних проблем. Його учень Вільям Кілпатрік конкретизував ці ідеї у вигляді «методу проєктів», підкреслюючи, що навчання має ґрунтуватися на усвідомленій, цілеспрямованій та практично значущій діяльності учнів. В Європі паралельний розвиток відбувався завдяки педагогічним ідеям Георга Кершенштейнера, який наголошував на трудовому, соціально орієнтованому та діяльнісному характері освіти. [1, 2]

На різних етапах розвитку освіти інтерес до методу проєктів змінювався: у 1920-х роках він активно застосовувався й у радянській школі, але згодом був витіснений традиційними репродуктивними підходами. Справжнє відродження проєктної діяльності припадає на кінець XX — початок XXI століття, коли освіта перейшла до компетентнісної моделі, а вимоги до учнівських результатів почали охоплювати не лише знання, а й уміння критично мислити, працювати в команді, самостійно здобувати інформацію, презентувати власні рішення та застосовувати теорію на практиці. Сьогодні метод проєктів є ключовим компонентом міжнародних освітніх практик, зокрема Project-Based Learning (PBL), що широко впроваджується у школах США, Канади, Нідерландів, Фінляндії, Сінгапуру та інших країн, а також інтегрується у STEM- і STEAM-освіту.

У сучасній інтерпретації метод проєктів розглядається як форма організації навчання, у якій учні виконують комплексне завдання, орієнтоване на створення певного продукту — моделі, дослідження, презентації, макета, креслення чи іншого практично значущого результату. Проєктна діяльність передбачає самостійне планування, пошук інформації, аналіз даних, проведення вимірювань, створення моделі або рішення, а також презентацію результатів та рефлексію. Саме поєднання дослідницьких, практичних, творчих та комунікативних компонентів робить метод проєктів надзвичайно ефективним для формування ключових компетентностей, визначених сучасними державними стандартами освіти.

Сутність методу проєктів полягає в тому, що він забезпечує органічну інтеграцію теоретичних знань та практичної діяльності учнів, поєднуючи пізнавальні, дослідницькі, творчі й соціальні компоненти в єдину цілісну навчальну активність. Проєкт завжди починається з проблеми, питання або задачі, що має практичну вагу й виходить за межі простого відтворення знань. Вона спонукає учнів не лише пригадати вивчене, а й мобілізувати різні когнітивні ресурси: висувати гіпотези, шукати інформацію, аналізувати можливі шляхи розв'язання, порівнювати альтернативи. Сам процес навчання відбувається через активну взаємодію, дослідження, експеримент, моделювання, обговорення й узагальнення, що відповідає сучасним уявленням про діяльну природу пізнання та засадничим принципам компетентнісного навчання. [5]

Особливістю проєктного методу є суттєве зміщення центру відповідальності з учителя на учнів: вони планують власні дії, визначають необхідні ресурси, встановлюють послідовність етапів роботи, здійснюють самоконтроль і взаємоконтроль. Такий розподіл відповідальності сприяє формуванню внутрішньої мотивації, адже учень відчуває, що керує процесом, а результати залежать від його активності, наполегливості та якості прийнятих рішень. Водночас зростає рівень самостійності та

автономії, що є ключовими складовими навчальної та життєвої компетентностей.

Комунікація та співпраця становлять невід’ємні елементи методу проєктів. Більшість проєктів виконуються у парах або групах, що створює умови для розвитку соціальної взаємодії, взаємного навчання та колективної відповідальності. Учні вчаться домовлятися, розподіляти ролі відповідно до індивідуальних ресурсів та інтересів, аргументувати власні погляди, слухати інших і знаходити компромісні рішення. Така комунікативна й кооперативна взаємодія не лише сприяє досягненню якіснішого результату, але й формує ключові soft skills, що є необхідними для сучасного громадянина та професіонала.

У сукупності ці характеристики визначають метод проєктів як технологію, що переводить навчання з площини пасивного засвоєння знань у площину активної, усвідомленої та практично спрямованої діяльності, у межах якої учні не лише навчаються, але й конструюють власний досвід, набувають умінь працювати з інформацією, розв’язувати проблеми та презентувати результати своєї роботи. [11]

Типологія проєктів у педагогіці достатньо різноманітна, що дозволяє адаптувати метод до різних вікових груп, рівнів підготовки та навчальних цілей. За характером діяльності проєкти можуть бути дослідницькими, творчими, практико-орієнтованими або інформаційними. За тривалістю — короткостроковими міні-проєктами, середньотривалими чи довготривалими. За кількістю учасників — індивідуальними, парними або груповими. Окреме місце належить міжпредметним та STEM/STEAM-проєктам, які об’єднують математику, природничі науки, інформатику, технології та мистецтво в єдину інтегровану діяльність, що дає учням змогу застосувати знання комплексно, у ситуаціях, максимально наближених до реального життя. Типологія проєктів у педагогіці є достатньо різноманітною, що дозволяє адаптувати метод до різних вікових груп,

рівнів підготовки, навчальних цілей і специфіки предмета. У науковій літературі проекти класифікують за різними критеріями, серед яких домінуючий вид діяльності, кількість учасників, тривалість, міжпредметний характер і тип кінцевого продукту. За характером навчальної активності проекти можуть бути дослідницькими, творчими, практико-орієнтованими та інформаційними. Дослідницькі передбачають науковий стиль мислення, висунення гіпотез, проведення вимірювань, експериментів, аналіз даних і формулювання висновків; у математиці це часто проекти, пов'язані з моделюванням або обґрунтуванням закономірностей. Творчі проекти спрямовані на створення оригінального продукту — макета, моделі, візуалізації, презентації або навіть математичного квесту; такі завдання сприяють розвитку креативності та візуального мислення. Практико-орієнтовані проекти пов'язані з вирішенням конкретної прикладної проблеми, наприклад розрахунок кількості матеріалів, оптимізація форми упаковки, планування приміщення або території за масштабом. Інформаційні проекти зосереджені на зборі, систематизації та аналітичній обробці даних, що особливо важливо для формування інформаційної грамотності. [2, 5]

Значущим критерієм є тривалість виконання проекту. Міні-проекти (1–2 уроки) найчастіше використовуються для актуалізації знань або формування первинних навичок роботи в команді, водночас середньотривалі (1–2 тижні) дозволяють організувати повноцінну дослідницьку або конструктивну діяльність. Довготривалі проекти можуть тривати місяць і більше, передбачаючи глибокий аналіз проблеми, створення складних моделей або обґрунтованих розрахунків, використання програм для 3D моделювання, вимірювань чи статистичної обробки даних.

За кількістю учасників проекти поділяють на індивідуальні, парні та групові. Індивідуальні проекти формують автономність і відповідальність, тоді як групові забезпечують розвиток комунікативних і кооперативних

навичок, вчать учнів розподіляти ролі (лідер, аналітик, дослідник, дизайнер, доповідач), узгоджувати дії та працювати над спільним результатом. Парні проєкти часто застосовують на етапах, коли важливо організувати взаємонавчання й взаємопідтримку. [12]

Окреме місце у сучасній педагогіці належить міжпредметним та інтегрованим STEM/STEAM-проєктам, що поєднують знання математики, фізики, біології, інформатики, технологій та мистецтва. Такі проєкти моделюють реальні професійні ситуації, роблять навчання наближеним до життєвих і виробничих контекстів, розвивають системне бачення явищ і навички комплексного проблемного мислення. Наприклад, проєкт з обчислення площі та об'єму може включати геометричні обчислення, фізичні параметри (густину, масу), економічні розрахунки вартості матеріалів та елементи 3D-дизайну. Таким чином, інтегровані проєкти спрямовані не лише на поглиблене розуміння математичного змісту, але й на формування інженерної, технологічної та креативної грамотності, що є надзвичайно важливим у контексті сучасних освітніх реформ.

1.2. Психолого-педагогічні особливості формування просторової уяви та конструктивного мислення учнів старшої школи

Формування просторової уяви та конструктивного мислення є одним із ключових завдань шкільної математичної освіти, оскільки від рівня розвитку цих когнітивних функцій значною мірою залежить успішність учнів у вивченні геометрії, фізики, інформатики, технологій, а також готовність до подальшої професійної діяльності в інженерно-технічних галузях. У старшій школі відбувається якісний стрибок у розвитку просторових та конструктивних здібностей, що пов'язано зі зміною характеру мислення, розширенням інтелектуальних можливостей та зростанням здатності до абстрагування. Водночас саме в цьому віці учні

часто демонструють значні відмінності у сформованості просторових уявлень, що потребує продуманої методичної підтримки з боку вчителя.

Просторова уява розглядається психологією як здатність людини уявно створювати, перетворювати й оперувати образами об'єктів у тривимірному просторі. Для старшокласників характерний розвиток вищих форм просторового мислення — обертання об'єктів подумки, уявне складення та розгортання фігур, представлення складних просторових конфігурацій у двовимірному вигляді, робота з перспективою та масштабами. Важливою складовою є перехід від конкретно-образного до абстрактно-логічного рівня мислення: учні починають не лише бачити образи, а й пояснювати їх властивості, виявляти закономірності, узагальнювати просторові зв'язки. Це створює підґрунтя для вивчення таких тем, як площі та об'єми геометричних фігур, де учні повинні не лише виконувати обчислення, а й розуміти структуру образу, теоретичні основи формул та взаємозв'язки між геометричними величинами. [6]

Конструктивне мислення нерозривно пов'язане з умінням будувати, моделювати та трансформувати просторові об'єкти. У старшій школі ця здатність проявляється у вмінні аналізувати структуру предмета, виділяти його елементи, визначати способи побудови та здійснювати уявні або практичні перетворення. Учні здатні переходити від реального об'єкта до його моделі, від моделі до формули, а від формули — до узагальнення. Саме цей цикл «об'єкт — модель — формула — задача» лежить в основі розуміння теми площі і об'ємів, де математичні поняття мають просторово-конструктивний характер. Формування конструктивного мислення відбувається через дії, спрямовані на виділення структурних елементів, аналіз взаєморозташування частин, відтворення та перетворення форм.

Психологи та дослідники когнітивного розвитку, зокрема Ж. Піаже, Д. Ельконін, Л. Виготський, Дж. Брунер, Г. Гарднер та інші, підкреслюють, що у старшокласників відбувається суттєвий прогрес у розвитку вищих

форм мислення, зокрема здатності до багаторівневого аналізу, системного бачення та логічного узагальнення. Жан Піаже зазначав, що у віці старшої школи учні переходять до стадії формальних операцій, яка характеризується здатністю оперувати абстракціями, здійснювати уявні перетворення об'єктів, працювати з гіпотетичними моделями та міркувати про просторові відношення без опори на конкретні предмети. У працях Джерома Брунера наголошується на важливості переходу від іконичного (образного) до символічного мислення, що виявляється у здатності учнів не лише уявляти просторові фігури, а й виражати їх властивості через формули, схеми та символи. [7, 10]

Лев Виготський підкреслював роль соціальної взаємодії та спільної діяльності у розвитку вищих психічних функцій, що безпосередньо стосується формування просторових уявлень: під керівництвом дорослого або в межах співпраці з однолітками учень здатний діяти у «зоні найближчого розвитку», засвоюючи складні способи мислення, включно з аналізом просторових структур, побудовою моделей і міркуванням про взаємозалежність величин. Дослідження Говарда Гарднера щодо множинного інтелекту також вказують на існування «візуально-просторового» типу інтелекту, який прямо впливає на здатність учнів сприймати та опрацьовувати геометричні образи.

Попри загальний розвиток когнітивних структур у старшому шкільному віці, численні дослідження (зокрема роботи П. Я. Гальперіна, В. В. Давидова, Р. Стрікланда, Р. Ньюкомба) демонструють, що значна частина учнів має типові труднощі у сфері просторових уявлень: плутання площі та об'єму, слабкість уявного обертання або перетворення фігур, труднощі з переходом від 2D-зображення до 3D-об'єкта, недостатнє розуміння співвідношень між величинами та формулами. Такі труднощі часто зумовлені не лише віковими особливостями, а й характером навчання, у якому переважають репродуктивні завдання, відсутність практики

моделювання, недостатнє застосування діяльнісних методів, таких як експеримент, конструктивна робота або проєктні завдання. [6]

Психологічні дослідження (зокрема роботи Т. Коттлера, М. Де Грута, С. Скіннера щодо навчальної мотивації та активної діяльності) підтверджують, що учні значно краще засвоюють геометричний матеріал тоді, коли мають можливість працювати з реальними або віртуальними моделями, виконувати вимірювання, створювати власні конструкції, будувати проєкти, креслення й макети. Активна практична діяльність сприяє переходу від зовнішніх дій до внутрішніх ментальних операцій (за Гальперіним), що є ключовим для розвитку просторової уяви та конструктивного мислення.

Педагогічні умови розвитку просторової уяви старшокласників охоплюють комплекс організаційних, методичних і дидактичних чинників, які забезпечують поступовий перехід учнів від конкретно-образних уявлень до абстрактно-символічних просторових моделей. Однією з ключових умов є використання різноманітних наочних, графічних та цифрових засобів: фізичних моделей геометричних тіл, розгорток, креслень, картографічних схем, комп'ютерних симуляцій і 3D-візуалізацій. Такі засоби допомагають учням співвідносити реальні об'єкти з їх символічними зображеннями, усвідомлювати просторові властивості фігур та переходити від практичних вимірювань до математичного узагальнення.

Важливим педагогічним ресурсом є створення навчальних ситуацій, у яких учні застосовують математичні поняття для роботи з реальними об'єктами: вимірюють предмети навколишнього середовища, аналізують їх форми, виконують побудови, будують масштабні моделі та здійснюють практичні обчислення. Такий підхід ґрунтується на принципах діялісного навчання, відповідно до яких знання засвоюються значно ефективніше, коли пов'язані з практичними діями, сенсорним досвідом та особистісною залученістю учня.

Особливу роль у розвитку просторової уяви відіграє проблемність навчання. Коли учень стикається з конкретною задачею, що потребує аналізу просторових співвідношень — наприклад, визначення оптимальної форми упаковки, обчислення площі поверхні або об'єму реального об'єкта, пошуку способів побудови складної фігури, — він активізує не лише логічне, а й образне, конструктивне та творче мислення. Розв'язання проблемних задач стимулює учнів порівнювати різні моделі, здійснювати уявні перетворення фігур, знаходити оптимальні рішення, будувати нові образи та перевіряти їх коректність. [10]

Особливо ефективним інструментом розвитку просторових уявлень є метод проєктів, який поєднує модельну, дослідницьку, практичну та комунікативну діяльність. Виконуючи проєкти, учні вимірюють реальні об'єкти, створюють ескізи й креслення, будують фізичні або цифрові моделі, проводять розрахунки площ і об'ємів, аналізують можливі варіанти рішень та аргументують свій вибір. Проєктна діяльність передбачає багатоетапний процес — від аналізу проблеми до презентації результатів, — що сприяє формуванню в учнів здатності працювати зі складними просторовими структурами, узагальнювати інформацію, здійснювати конструктивні перетворення та інтегрувати різні типи мислення.

Крім того, проєктний метод створює умови для використання сучасних цифрових інструментів, таких як динамічні геометричні середовища, 3D-редактори, симулятори об'єктів, що дозволяє учням працювати з віртуальними просторовими моделями та здійснювати перетворення, недоступні при традиційних формах навчання. Взаємодія з такими інструментами суттєво розширює діапазон просторових уявлень учнів і сприяє формуванню навичок, необхідних у сучасних STEM-напрямах. [6]

Таким чином, розвиток просторової уяви та конструктивного мислення старшокласників можливий лише у разі систематичного

використання діяльнісних, дослідницьких і проєктних методів, які забезпечують поєднання практичної роботи, графічного моделювання, проблемних ситуацій і цифрових засобів. Саме такі педагогічні умови створюють оптимальне середовище для оволодіння учнями складними геометричними поняттями, зокрема пов'язаними з площами та об'ємами.

1.3. Дидактичний потенціал проєктної діяльності для реалізації компетентнісного підходу (STEM/STEAM)

Проєктна діяльність посідає ключове місце у реалізації компетентнісного підходу, оскільки створює умови для активного, практико-орієнтованого та дослідницького навчання, яке відповідає потребам сучасної школи та вимогам STEM/STEAM-освіти. На відміну від традиційних репродуктивних форм роботи, проєкти забезпечують ситуації, у яких учні не лише отримують знання, а й конструюють їх у процесі взаємодії з реальними проблемами, використовуючи міжпредметні зв'язки, цифрові інструменти та власний досвід. В основі проєктного підходу лежать ті самі принципи, що й у STEM/STEAM: діяльнісність, інтегративність, практичність, творчість та розвиток критичного мислення.

Одним із найбільш значущих аспектів дидактичного потенціалу проєктної діяльності є її здатність формувати математичну, природничу, інженерну та технологічну грамотність. Виконуючи проєкти, учні не лише виконують обчислення чи побудови, а й аналізують характеристики реальних об'єктів, оцінюють точність вимірювань, працюють із масштабами, площами, об'ємами, щільністю, пропорціями. Таким чином відбувається застосування математичних понять у реальних або максимально наближених до реальних умовах, що відповідає ключовим завданням компетентнісного підходу. [3, 9]

Проєктна діяльність сприяє розвитку критичного та системного мислення, оскільки будь-який проєкт передбачає постановку проблеми, пошук оптимального способу її розв'язання, порівняння альтернатив, аналіз

умов, прогнозування результатів і оцінювання наслідків. Школяр має визначити, які математичні інструменти доцільні, які моделі відповідають реальності, якою мірою отримані результати є достовірними. Таке мислення є основою STEM-компетентності та відповідає вимогам міжнародних досліджень освітніх результатів (PISA), де особлива увага приділяється моделюванню та застосуванню знань у нестандартних ситуаціях.

Важливою дидактичною особливістю проєктної діяльності є її інтегративний характер. Проєкти природно об'єднують знання з різних галузей — математики, фізики, інформатики, географії, технологій, мистецтва. Саме ця інтеграція є основою STEAM-підходу, де математика не існує окремо, а включена в реальні завдання: від моделювання архітектурних об'єктів до розрахунку матеріалів, енергоспоживання або об'єму резервуарів. Наприклад, проєкт з теми «Об'єм та площа поверхні» може поєднувати фізичні закономірності (тиск, маса), економічні розрахунки (вартість матеріалів), інженерне мислення (вибір оптимальної форми) та графічний дизайн (створення 3D-моделі). Тому проєктна діяльність виступає найефективнішою формою практичного застосування міжпредметних зв'язків. [13]

Проєктне навчання також має великий потенціал у розвитку цифрової компетентності, адже сучасні проєкти неможливі без використання цифрових інструментів: комп'ютерної графіки, симуляцій, динамічних геометричних середовищ, 3D-моделювання, електронних таблиць, систем вимірювання та візуалізації. Учні вчаться не лише працювати з технологіями, але й оцінювати їх доцільність, точність і можливості для моделювання реальних процесів.

Суттєвий дидактичний потенціал проєктної діяльності полягає й у розвитку комунікативних і соціальних умінь, які є складовими компетентнісного підходу. Проєкти виконуються в групах, що потребує від

учнів уміння домовлятися, розподіляти ролі, слухати партнерів, аргументовано відстоювати точку зору та презентувати результати. Ці навички набувають особливої ваги у STEM-галузях, де командна робота є обов'язковою умовою реалізації будь-яких інженерних чи наукових завдань. [14]

Не менш цінним аспектом є розвиток креативності, яка є фундаментальною складовою STEAM-підходу. Проєкти дозволяють учням комбінувати математичні знання з мистецькими, дизайнерськими та інженерними підходами, створювати унікальні моделі, будувати нестандартні конструкції та шукати інноваційні рішення. Креативна складова особливо проявляється під час проєктів, пов'язаних із візуалізацією, проєктуванням простору, архітектурним моделюванням і створенням 3D-об'єктів. [9]

Таким чином, проєктна діяльність має багатовимірний дидактичний потенціал для реалізації компетентнісного підходу та ідей STEM/STEAM. Вона забезпечує розвиток математичної, цифрової, інженерної, комунікативної та творчої компетентностей; формує здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; розвиває системне й критичне мислення; забезпечує інтеграцію різних галузей знань; створює умови для особистісного зростання та активної позиції учнів у навчальному процесі.

Розділ 2. Методика організації проєктної діяльності при вивченні геометричних величин

2.1. Логіко-дидактичний аналіз теми «Площі та об'єми»: від планіметрії до стереометрії.

Тема «Площі та об'єми геометричних фігур» є фундаментальною у шкільному курсі математики, оскільки забезпечує перехід учнів від двовимірних уявлень про фігури до оперування просторовими об'єктами. Вона має особливе дидактичне значення, адже поєднує практичні вимірювальні дії з абстрактними математичними моделями, формує основу для розвитку просторового мислення та конструктивних умінь, а також слугує важливим містком між планіметрією та стереометрією.

На етапі вивчення планіметрії учні знайомляться з поняттям площі як числової характеристики плоскої фігури. Дуже важливо, щоб цей процес розпочинався з конкретних дій — накладання фігур, порівняння, підрахунку квадратів, вимірювання площі шляхом поділу фігури на елементи. Такі практичні дії поступово переходять у дедуктивні методи: вивчення формул площі прямокутника $S = ab$, трикутника $S = \frac{1}{2}ah$, паралелограма $S = ah$, трапеції $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. На цьому ж етапі формується розуміння того, що площа — це узагальнення і вимірювальна величина, і абстрактна характеристика.

Перехід до вивчення стереометрії потребує якісного розширення цих понять. Об'єм твердого тіла подається як аналог площі у тривимірному просторі, а одиниця вимірювання — кубічна одиниця — стає узагальненням площі квадрата. Логіко-дидактична структура теми в стереометрії ґрунтується на трьох базових положеннях, які забезпечують послідовне, природне ускладнення змісту та формування глибоких просторових уявлень. [4]

Першим ключовим положенням є принцип розбиття складних фігур на більш прості елементи. Будь-який многогранник або тіло обертання

можна аналізувати через призми, піраміди, циліндри, конуси чи кулі. Такий підхід опирається на вже відомі учням формули площі основи, отримані у планіметрії. Наприклад, об'єм призми обчислюється як добуток площі основи та висоти:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Тут площа основи може бути знайдена різними способами: через теореми про трикутник, через формули Герона, координати чи тригонометричні співвідношення.

Другим фундаментальним положенням є універсальний зв'язок між площею основи та висотою, що простежується у формулах об'єму майже всіх основних тіл. Так, об'єм піраміди визначається як:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h,$$

об'єм циліндра:

$$V = \pi r^2 h,$$

а об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Усі ці формули демонструють учням логічну послідовність: площа $\rightarrow$ висота $\rightarrow$ об'єм.

Третім важливим компонентом є перехід від плоских характеристик до просторових через аналіз перерізів, розгорток та проєкцій. Наприклад, площа бічної поверхні циліндра розглядається як площа прямокутника, що утворюється при розгортці:

$$S_{\text{біч}} = 2\pi r \cdot h.$$

Аналогічно, площа поверхні призми знаходиться шляхом додавання площ граней, а площа кулі:

$$S = 4\pi r^2$$

є наслідком узагальнення окружності та площі кола на сферичну поверхню.

З логічної точки зору, засвоєння теми передбачає поетапну структуру, яка забезпечує поступовий перехід від простого до складного. Спочатку опановуються площі простих плоских фігур, після чого учні переходять до складених фігур. Далі — до призми і піраміди як базових просторових фігур, потім — до тіл обертання (циліндра, конуса, кулі). Поступово учні вчаться співвідносити елементи фігур: ребра, висоти, радіуси, площі граней, і бачити, як зміна одного параметра впливає на інші. Важливим елементом логіко-дидактичної структури є робота зі складеними фігурами. [7] Наприклад, об'єм тіла, яке складається з циліндра та півкулі, обчислюється як сума:

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3,$$

а площа поверхні — як сума площ бічних і основи з урахуванням можливих перетинів. Такі задачі допомагають учням переносити знання у нові ситуації та робити логічні узагальнення.

Нарешті, логіко-дидактичний аналіз теми не може бути повним без врахування прикладних задач. Площі та об'єми є основою реальних вимірювань і технічних розрахунків: під час ремонту, будівництва, дизайну, створення упаковок, планування приміщень, розрахунку витрат матеріалів чи місткості резервуарів. Саме тому важливо створювати для учнів умови, за яких вони можуть переносити формули з абстрактної площини у реальний контекст, працювати з вимірюваннями, масштабами, моделями та кресленнями. [10]

2.2. Типові труднощі учнів при вивченні геометричних тіл та обчисленні їх характеристик

Вивчення геометричних тіл і обчислення їх площ та об'ємів традиційно викликає в учнів значні труднощі, що пояснюється як складністю переходу від двовимірних уявлень до оперування просторовими об'єктами, так і особливостями мислення старшокласників. Ці труднощі

мають як когнітивну, так і методичну природу та проявляються у різних аспектах опанування стереометричного матеріалу.

Однією з найбільш поширених проблем є недостатній розвиток просторової уяви, що ускладнює сприйняття об'ємних фігур, їх перерізів та взаємного розміщення елементів. Учні часто мають труднощі з уявним обертанням об'єкта, перетворенням його форми, співвіднесенням тривимірного вигляду з двовимірним зображенням. Це проявляється у неправильному визначенні висоти, радіуса, апофеми, діагоналей, кута нахилу граней чи ребер. Багато учнів також плутають проєкцію з перерізом, не розрізняють видиму частину об'єкта від його реальної структури.

Загальною проблемою є плутання площі та об'єму, що пов'язано зі слабким розумінням природи цих величин. Учні нерідко використовують формули без усвідомлення їх змісту, підміняють одиниці вимірювання (наприклад, записують «см²» замість «см³» і навпаки), застосовують формули площі для обчислення об'єму або навпаки. Помилки виникають і через поверхове засвоєння того, що площа — це характеристика поверхні, а об'єм — це характеристика простору, який фігура займає. [10]

Часто зустрічається також труднощі зі встановленням відповідностей між елементами фігур. Наприклад, при роботі з призмою учні іноді не можуть виділити основу, плутають висоту з бічним ребром, некоректно визначають площу основи. При роботі з пірамідою поширеною є помилка у визначенні висоти або апофеми, що призводить до неправильного використання формули:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$

Подібні труднощі трапляються й у циліндрі або конусі: учні нерідко використовують діаметр замість радіуса у формулі площі кола $S = \pi r^2$, неправильно знаходять висоту або плутають її з твірною.

Суттєву складність становить робота з розгортками, адже вона потребує поєднання просторового й планіметричного мислення. Учні

нерідко не можуть відтворити, як виглядає розгортка циліндра, призми чи піраміди, що призводить до неправильного обчислення площі поверхні. Поширеною помилкою є ідентифікація бічної поверхні з площею всієї поверхні, або нехтування площею основ, або навпаки — дублювання цих площ у сумі. Проблеми виникають і під час роботи з комбінованими фігурами, де необхідно віднімати площі спільних частин або об'єднувати різні розгортки. [7]

Значно ускладнює навчання і недостатня сформованість умінь виконувати багатокрокові обчислення, коли потрібно послідовно визначити кілька величин перед підстановкою у формулу. Наприклад, щоб обчислити об'єм правильної піраміди, учень має:

- визначити сторону основи;
- знайти площу основи;
- обчислити висоту або апофему;
- застосувати формулу об'єму.

Порушення логічної послідовності або відсутність умінь виділяти потрібний алгоритм призводить до того, що учні виконують зайві обчислення або плутають порядок дій.

Окремо слід виділити труднощі, пов'язані з неадекватним уявленням про масштаб і пропорційність. Учні інколи не усвідомлюють, що площа змінюється пропорційно квадрату коефіцієнта подібності, а об'єм — кубу:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \frac{V_1}{V_2} = k^3.$$

Нерозуміння цих залежностей призводить до неправильних відповідей у задачах на побудову моделей або зміну розмірів об'єкта.

Не менш поширеними є алгебраїчні труднощі, коли учні не можуть підставити правильні величини у формули, допускають помилки у перетворенні виразів, неправильно виконують дії з квадратами, степенями, коренями та тригонометричними функціями. Це свідчить про

міжпредметний характер теми: оволодіння стереометрією потребує як просторових уявлень, так і впевненого володіння алгеброю.

Окремою групою труднощів є інтерпретаційні помилки у текстових задачах. Учні нерідко не можуть правильно виділити геометричну модель ситуації, визначити, яка фігура описується в умові, або які параметри є відомими. Так, в задачах на резервуари, басейни, споруди чи контейнери учні часто неправильно уявляють форму об'єкта, через що обирають невідповідну формулу або неправильну систему вимірів.

2.3. Етапи організації роботи над проєктом

Організація роботи над геометричним проєктом передбачає поетапну діяльність учнів, що поєднує пізнавальний, дослідницький, практичний та рефлексивний компоненти. Чітка структурованість проєктного процесу є важливою педагогічною умовою ефективності цієї технології, оскільки дозволяє учням поступово перейти від усвідомлення проблеми до створення завершеного навчального продукту та його представлення.

Першим етапом є постановка проблеми та формулювання навчального завдання. Учитель пропонує проблемну ситуацію, яка має прикладний характер і безпосередньо пов'язана з темою «Площі та об'єми геометричних фігур». Це може бути задача на проєктування приміщення, оптимізацію форми резервуара, розрахунок площі фасаду для оздоблення, визначення кількості матеріалу для покриття поверхні тощо. На цьому етапі важливо забезпечити проблемність ситуації: учні повинні зрозуміти, що для отримання відповіді недостатньо безпосередньо застосувати готову формулу, необхідно побудувати модель, проаналізувати форму об'єкта та вибрати оптимальний спосіб обчислення. Учні разом з учителем уточнюють мету проєкту: що необхідно знайти або створити, які результати очікуються, які реальні умови мають бути враховані. [2, 11]

Другий етап полягає в плануванні діяльності. Учні формують групи, розподіляють ролі, обговорюють алгоритм роботи та визначають послідовність дій. На цьому етапі формується навичка проєктного мислення: школярі вчаться прогнозувати результат, співвідносити часові ресурси з обсягом завдань, визначати, які дані необхідно зібрати, які формули застосувати, які вимірювання провести. Відбувається попередній добір інструментів — вимірювальних приладів, графічних матеріалів, цифрових середовищ, програм моделювання та презентаційних ресурсів.

Наступний етап — дослідницько-пошукова діяльність і конструювання моделі. Учні здійснюють конкретні дії: виконують вимірювання реальних або заданих об'єктів, створюють ескізи та креслення, будують геометричні моделі, визначають параметри фігур, добирають відповідні формули площ і об'ємів. Саме тут відбувається ключова інтеграція теоретичних знань з практичною діяльністю. Учні здійснюють математичне моделювання процесів: переводять реальну задачу у геометричну модель, формулюють відомі та шукані величини, виконують проміжні обчислення та перевіряють коректність отриманих результатів. Даний етап супроводжується активною груповою взаємодією, обговореннями запропонованих способів розв'язання та пошуком оптимальних рішень. [1]

Після цього розпочинається аналітико-узагальнювальний етап, який полягає у перевірці правильності математичних побудов та результатів, зіставленні різних варіантів рішень, оцінюванні точності вимірювань та адекватності побудованої моделі реальним умовам. Учні аналізують, чи відповідають отримані результати практичному змісту проблеми, за потреби вносять корективи у розрахунки або геометричні побудови. На цьому етапі формується критичне та рефлексивне мислення, адже учні навчаються не лише виконувати обчислення, але й оцінювати достовірність отриманої інформації та робити обґрунтовані висновки.

Завершальним етапом є оформлення результатів та презентація проєкту. Учні готують підсумковий продукт, яким може бути модель геометричного тіла, креслення, розгортка, розрахункова таблиця, мультимедійна презентація або відео-звіт. Під час представлення результатів кожна група демонструє створену модель, пояснює алгоритм розв'язання задачі, аргументує вибір методів і формул, відповідає на запитання однокласників та вчителя. Цей етап сприяє розвитку мовленнєвої та комунікативної компетентності, формує навички публічного виступу та логічного викладу матеріалу. Водночас проводиться підсумкова рефлексія: обговорюється внесок кожного учасника, труднощі та успіхи у виконанні проєкту, можливі напрями вдосконалення результатів. [12]

Таким чином, організація роботи над геометричним проєктом охоплює взаємопов'язані етапи — від постановки проблеми до захисту кінцевого продукту, — кожен із яких сприяє розвитку просторового мислення, математичної компетентності, навичок співпраці, планування та самоконтролю. Поетапна структура проєктної діяльності забезпечує не лише якісне засвоєння навчального матеріалу з теми «Площі та об'єми», а й становлення в учнів здатності самостійно застосовувати математичні знання в реальних практичних ситуаціях.

Розділ 3. Навчально-методичне забезпечення вивчення теми «площі та об'єми» засобами проєктної технології

3.1. Класифікація проєктів з теми «Площі та об'єми»

Зміст теми «Площі та об'єми геометричних фігур» вирізняється великою кількістю абстрактних понять, просторових моделей та формульних залежностей, що потребують комплексного підходу до навчання. Проєктна діяльність дозволяє поєднати теоретичні знання з реальною практикою, а різноманіття типів проєктів дає можливість створити багаторівневу дидактичну систему навчання, адаптовану до вікових та індивідуальних особливостей старшокласників. Класифікація проєктів за домінуючим видом діяльності — дослідницькі, прикладні та інформаційні — забезпечує структурованість навчального процесу та сприяє цілеспрямованому розвитку навчальних компетентностей. [2]

Дослідницькі проєкти з теми площ і об'ємів спрямовані передусім на формування аналітичного та критичного мислення. У межах таких проєктів учні працюють з гіпотезами, експериментами, аналізом числових даних та геометричних взаємозалежностей. Наприклад, може досліджуватися питання, як змінюється об'єм тіла при фіксованій площі основи і зміні висоти, або які наслідки має масштабування фігури для площ oraz об'ємів. Учні вивчають залежності:

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2, \frac{V_1}{V_2} = k^3,$$

де k — коефіцієнт подібності, порівнюють експериментальні виміри з теоретичними обчисленнями та роблять висновки щодо правильності моделей. Типовим видом діяльності є побудова геометричних конструкцій, виконання вимірювань реальних або створених моделей, застосування цифрових інструментів моделювання та виконання багатоетапних розрахунків. Дослідницькі проєкти стимулюють усвідомлене сприйняття

формул і геометричних понять, формують у школярів уміння бачити математику як інструмент пояснення закономірностей навколишнього світу.

Прикладні проєкти мають безпосередній зв'язок із життєвими ситуаціями та є особливо ефективними для формування прагматичної математичної компетентності. Такі проєкти орієнтовані на розв'язання конкретних практичних завдань: проєктування приміщення або ділянки, обчислення кількості матеріалу для оздоблення поверхонь, визначення об'єму резервуарів, оптимізацію форми упаковок тощо. Учні самостійно виконують вимірювання, здійснюють креслення, побудову масштабних моделей, використовують формули площі і об'ємів:

$$V = S_{\text{осн}}h, \quad V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi rh,$$

та набувають навичок інтерпретації отриманих результатів із точки зору їх практичної доцільності. Особливість прикладних проєктів полягає в інтеграції математичних знань із основами дизайну, інженерії, економіки (розрахунок витрат і собівартості), екології (вибір оптимальних об'ємів сховищ чи контейнерів). Завдяки цьому учні бачать геометрію як реальний інструмент планування та моделювання, що підвищує мотивацію до навчання та формує стійкий інтерес до предмета.

Інформаційні проєкти виконують важливу освітню та пізнавальну функцію, адже спрямовані на розвиток інформаційної та комунікативної компетентностей учнів. Вони передбачають пошук, відбір, аналіз і систематизацію інформації про історію геометричних вимірювань, розвиток уявлень про площі та об'єми, застосування геометричних тіл у архітектурі, будівництві, промисловому дизайні, медицині чи астрономії. Результати інформаційних проєктів можуть бути представлені у формі презентацій, тематичних доповідей, інтерактивних плакатів, відеоматеріалів або електронних довідників.[5] Такі проєкти допомагають учням осмислити міжпредметні зв'язки математики з історією, культурою

та мистецтвом, розширюють світогляд та розвивають навички публічного представлення науково зрозумілої інформації.

Системне та комплексне використання трьох зазначених типів проєктів дозволяє створити ефективну модель навчання теми «Площі та об'єми», у якій різні аспекти математичної діяльності реалізуються послідовно та взаємодоповнювально. Дослідницькі проєкти формують аналітичне мислення та науковий підхід до розв'язання задач; прикладні — забезпечують практичну спрямованість та формування життєвих компетентностей; інформаційні — розвивають здатність до систематизації знань та комунікативної діяльності. Разом вони створюють передумови для глибокого, усвідомленого та мотивованого засвоєння геометричних понять і формул, що відповідає ключовим вимогам компетентнісного та STEM/STEAM-підходів у сучасній освіті.

3.2. Методичні розробки проєктів

Міні-проєкт «Геометрія навколо нас»

Міні-проєкт «Геометрія навколо нас» орієнтований на формування в учнів практичної математичної компетентності шляхом застосування знань з теми «Площі геометричних фігур» до реальних побутових ситуацій. Його метою є розвиток уміння сприймати навколишній простір як сукупність геометричних об'єктів і виконувати обґрунтовані розрахунки площ поверхонь, необхідних для виконання побутових завдань, зокрема під час планування ремонту, декорування чи оновлення інтер'єру.

Проєкт реалізується у межах одного або двох навчальних уроків і передбачає роботу в малих групах по 3–4 учні, що сприяє формуванню навичок співпраці, розподілу відповідальності та колективного прийняття рішень. На вступному етапі вчитель пропонує проблемну ситуацію, наближену до реального життя, наприклад: *«Потрібно визначити кількість фарби для фарбування стін кімнати, кількість шпалер для обклеювання чи*

плитки для підлоги. Як правильно виконати розрахунки, щоб уникнути перевитрат матеріалу?»

Обговорюючи умову, учні аналізують об'єкти навколишнього середовища з позицій геометрії, приходять до висновку, що всі поверхні приміщення можуть бути подані як плоскі геометричні фігури — прямокутники, трапеції або їх комбінації.

На етапі планування діяльності кожна група обирає конкретний об'єкт дослідження: кімнату, стіну, підлогу, віконний або дверний проріз, шафу, кухонний стіл тощо. Учні визначають, які параметри необхідно виміряти (довжину, ширину, висоту), добирають інструменти для вимірювання та складають алгоритм виконання розрахунків. Відбувається розподіл ролей у групі: один учасник здійснює вимірювання, другий фіксує результати, третій виконує обчислення, четвертий відповідає за оформлення результатів і презентацію.

Дослідницько-практичний етап передбачає виконання реальних вимірювань та побудову геометричної моделі обраного об'єкта. Учні подають поверхні як сукупність прямокутників або інших многочленних фігур і використовують відповідні формули площ:

$$S_{\text{прямокутника}} = ab, S_{\text{трапеції}} = \frac{(a + b)h}{2}.$$

Для обчислення площі підлоги чи стін здійснюється підсумовування площ елементів та, за необхідності, віднімання площ віконних і дверних отворів.

На цьому ж етапі учні здійснюють перерахунок отриманих результатів у площу матеріалу, необхідного для роботи, наприклад визначають кількість рулонів шпалер або літрів фарби з урахуванням коефіцієнтів запасу, які приймаються у будівельній практиці. Таким чином формується не лише геометричне, а й елементарне економічне мислення — учні навчаються розраховувати витрати матеріалів і планувати ресурси.

Аналітико-рефлексивний етап передбачає перевірку правильності виконаних вимірювань і розрахунків, зіставлення результатів між групами,

обговорення можливих похибок та способів їх зменшення. Учні аналізують, чому результати можуть відрізнятися навіть у подібних задачах, роблять висновки щодо значущості точності вимірів та правильності побудови геометричної моделі. Також відбувається осмислення того, як отримані знання можуть бути використані в реальному житті.

Завершальним етапом є презентація результатів проєкту. Кожна група демонструє схему вимірювання об'єкта, подає побудовану геометричну модель і пояснює здійснені обчислення площ. Презентаційний продукт може бути оформлений у вигляді плаката, розрахункової таблиці, макету поверхні або короткої мультимедійної презентації. Під час захисту учні аргументують вибір формул і методику підрахунку, відповідають на запитання однокласників та оцінюють власний внесок у спільну роботу.

Середньостроковий STEM-проєкт «Архітектурна майстерня» (розрахунок об'ємів та кошторису матеріалів)

Середньостроковий STEM-проєкт «Архітектурна майстерня» спрямований на формування у старшокласників цілісної системи предметних і ключових компетентностей шляхом інтеграції математичних знань з елементами інженерного проєктування, технологій моделювання та економічних розрахунків. Основною ідеєю проєкту є перенесення формальних формул стереометрії у реальні прикладні ситуації, з якими стикаються архітектори, інженери та проєктувальники, зокрема під час планування будівель та розрахунку витрат будівельних матеріалів. Проєкт реалізується у межах 2–3 тижнів навчальних занять і позаурочної дослідницької роботи в малих групах по 3–5 учнів із чітким розподілом ролей: аналітик (робота з умовою і кресленнями), математик-обчислювач (розрахунок площ і об'ємів), дизайнер (створення моделі), економіст (складання кошторису) та доповідач (підготовка презентації результатів).

Робота над проєктом розпочинається з проблемного завдання – необхідності спроектувати модель невеликої споруди громадського або

житлового призначення, наприклад павільйону, спортивного залу або котеджу, та виконати повний комплекс математичних розрахунків для визначення об'ємів її конструктивних елементів і вартості будівельних матеріалів. Учні аналізують обрану споруду як сукупність базових геометричних тіл — призм, циліндрів, пірамід, конусів або їхніх комбінацій — та створюють ескіз будівлі з зазначенням усіх основних розмірів і масштабу. Побудована схема стає основою для математичного моделювання об'єкта.

На наступному етапі здійснюється безпосередній розрахунок об'ємів елементів конструкції за відомими формулами стереометрії:

$$V = S_{\text{осн}}h, V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h, V = \pi r^2h, V = \frac{1}{3}\pi r^2h.$$

Учні обчислюють об'єми складових тіл окремо та визначають загальний об'єм матеріалу.

Отримані числові значення аналізуються з позиції реалістичності та доцільності вибраної конструкції, за необхідності параметри будівлі коригуються, що сприяє формуванню навичок оптимізації математичних моделей.

Паралельно з обчисленнями учні переходять до економічного блоку проєкту — складання орієнтовного кошторису матеріалів. На основі знайдених об'ємів визначається необхідна кількість будівельних одиниць (цегли, бетонних блоків, панелей тощо) за формулою:

$$N = \frac{V_{\text{заг}}}{V_{\text{од.матеріалу}}},$$

після чого обчислюється загальна вартість:

$$C = N \cdot P,$$

де P — вартість одиниці матеріалу відповідно до актуальних ринкових цін. Учні аналізують отриманий кошторис, прогнозують фінансові витрати та порівнюють альтернативні варіанти конструктивних рішень з позицій економічної ефективності. Цей етап органічно поєднує

математичні розрахунки з елементами фінансової грамотності та підприємницької компетентності.

Одночасно відбувається конструювання наочної моделі споруди — у вигляді фізичного макета з картону, фанери чи паперу або цифрової тривимірної моделі. Учні будують розгортки поверхонь, здійснюють масштабування графічних елементів і корегують математичні розрахунки відповідно до параметрів моделі. Таке поєднання теоретичних і практичних дій забезпечує розвиток просторової уяви, точності вимірювань та уміння переводити абстрактні схеми у реальні об'єкти.

Завершальним етапом проєктної діяльності є підготовка та захист результатів. Команди представляють архітектурну концепцію споруди, демонструють модель або макет будівлі, пояснюють алгоритм обчислення об'ємів, аргументують вибір формул і параметрів та обґрунтовують складений кошторис матеріалів. Під час захисту відбувається колективне обговорення переваг і недоліків різних проєктних рішень, взаємооцінювання робіт і рефлексія щодо труднощів та досягнень групової діяльності.

Серія задач до проєкту. Серія прикладних задач спрямована на формування в учнів цілісного уявлення про процес проектування реальної споруди як систему взаємопов'язаних математичних дій: побудови геометричної моделі, обчислення об'ємів конструктивних елементів, визначення потреби в матеріалах та їх вартості, а також аналізу економічної доцільності прийнятих проєктних рішень.

Задача 1. Геометричне моделювання споруди

Спроектувати модель одноповерхової будівлі у вигляді прямокутної призми розмірами: довжина — 12 м, ширина — 8 м, висота стін — 3 м, дах — правильна трикутна призма з висотою покрівлі 2 м.

Побудувати креслення споруди у масштабі 1:100 і визначити об'єм:

- основного об'єму будівлі,

- об'єму покрівлі,
- загальний будівельний об'єм будівлі.

Задача 2. Обчислення об'ємів конструктивних елементів

1. Знайти об'єм прямокутної призми:

$$V_{\text{призма}} = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

2. Для покрівлі вважати поперечний переріз трикутником зі сторонами:
основа — 8 м, висота — 2 м.

Обчислити об'єм трикутної призми:

$$V = \frac{1}{2}ah \cdot l,$$

де a — основа трикутника, h — його висота, l — довжина даху.

Задача 3. Розрахунок об'єму стін

Товщина стін — 0,3 м. Будівля має 2 дверей (2×1 м), 6 вікон ($1,2 \times 1,5$ м).

1. Знайти площу всіх зовнішніх стін:

$$S_{\text{стін}} = P_{\text{будівлі}} \cdot h - S_{\text{отворів}}.$$

2. Обчислити об'єм матеріалу стін:

$$V_{\text{стін}} = S_{\text{стін}} \cdot t,$$

де t — товщина стіни.

Задача 4. Потреба у матеріалах

Один кубічний метр стіни потребує 400 цеглин. Знайти загальну кількість цегли:

$$N = V_{\text{стін}} \cdot 400.$$

Задача 5. Кошторис будівництва

Використати ринкові ціни цеглина — 9 грн/шт., цемент — 180 грн за мішок (один мішок на $0,015 \text{ м}^3$ кладки), робота будівельників — 450 грн/м² стіни.

Обчислити:

1. Вартість цегли:

$$C_{\text{цегла}} = N \cdot 9.$$

2. Витрати на цемент:

$$C_{\text{цемент}} = \frac{V_{\text{стін}}}{0.015} \cdot 180.$$

3. Заробітну плату:

$$C_{\text{праця}} = 450 \cdot S_{\text{стін}}.$$

4. Загальну вартість будівництва:

$$C_{\text{заг}} = C_{\text{цегла}} + C_{\text{цемент}} + C_{\text{праця}}.$$

Задача 6. Оптимізаційна задача

Дослідити, як зміниться об'єм приміщення і кошторис будівлі, якщо:

- збільшити висоту стін на 0,5 м;
- зменшити товщину стін до 0,25 м;
- замінити дах іншої форми (напівциліндр замість трикутної призми).

Визначити найбільш економічно вигідний варіант конструкції при збереженні об'єму приміщення не менше початкового.

Дослідницький проєкт «Проблема ізопериметрії та оптимізація форми» (чому банки круглі?)

Дослідницький проєкт «Проблема ізопериметрії та оптимізація форми» орієнтований на ознайомлення учнів із фундаментальною математичною ідеєю оптимізації геометричних форм та формування в них навичок цілісного математичного моделювання прикладних задач. Центральною проблемою дослідження є ізопериметричне твердження, відповідно до якого серед усіх плоских фігур, що мають однаковий периметр, найбільшу площу має коло. Проєкт має прикладну мотивацію, сформульовану у вигляді проблемного запитання: чому у сучасній промисловості для виготовлення ємностей — банок, резервуарів, бочок — майже завжди обирається кругла форма, а не квадратна чи багатокутна, адже з погляду виробництва всі вони здаються однаково можливими?

Робота над проєктом розпочинається з феноменологічного етапу, під час якого учні спостерігають об'єкти побутового середовища і фіксують домінування круглих форм у виробках, призначених для зберігання рідких та сипких матеріалів. На основі цих спостережень висувуються початкові гіпотези щодо причин такого вибору: економія матеріалу, стійкість конструкції, рівномірний розподіл тиску на стінки ємностей, технологічна зручність виготовлення. Учні спільно приходять до висновку, що практичні причини цього явища мають глибоке математичне підґрунтя, яке пов'язане з оптимізацією простору та мінімізацією периметра поверхні при фіксованому об'ємі.

Наступним етапом є формалізація проблеми у вигляді геометричної моделі. Учні проводять порівняльний аналіз площ плоских фігур із заданим спільним периметром P , зокрема кола, квадрата і правильного шестикутника. Для обчислення використовуються формули:

$$S_{\text{кола}} = \frac{P^2}{4\pi}, S_{\text{квадрата}} = \frac{P^2}{16}, S_{\text{правильного } n\text{-кутника}} = \frac{P^2}{4n \tan(\pi/n)},$$

що дають змогу простежити закономірність зростання площі правильних багатокутників зі збільшенням кількості сторін та їхнього наближення до граничного випадку — кола. Аналіз числових результатів дозволяє наочно переконатися, що саме круг має максимальну площу серед усіх фігур із заданим периметром. Ці результати учні візуалізують за допомогою таблиць, схем та графіків, що поглиблює розуміння ролі математичного апарату у дослідженні оптимізаційних задач.

Переходячи до стереометричного рівня задачі, учні розглядають ємності сталої висоти у формі призм та циліндрів, основи яких мають однаковий периметр. Для визначення об'ємів використовуються формули:

$$V_{\text{призми}} = S_{\text{осн}} h, V_{\text{циліндра}} = \pi r^2 h.$$

У процесі розрахунків встановлюється, що за незмінної висоти максимальний об'єм має циліндр з круглою основою, адже його площа

основи найбільша серед усіх плоских фігур з однаковим контуром. Таким чином робиться узагальнений висновок, що кругла форма забезпечує максимально можливу місткість при однаковій довжині огорожувальної лінії та мінімальному витрачанні матеріалу на виготовлення стінок.

Дослідження доповнюється інженерно-фізичним аналізом. Учні з'ясовують, що у циліндрі внутрішній тиск рівномірно розподіляється по всій поверхні оболонки, тоді як у багатокутних чи призматичних ємностях на ребрах виникають локальні напруження, які потребують посилення матеріалу. Отже, математичні результати ізопериметричної задачі отримують додаткове фізичне пояснення та підтвердження з позиції опору матеріалів і техніки безпеки.

Експериментальна складова проєкту передбачає виготовлення учнями паперових або картонних моделей циліндрів і призм із рівним периметром основ. Учні вимірюють місткість цих моделей шляхом наповнення їх водою або сипкими матеріалами, порівнюють практичні результати з теоретичними розрахунками і встановлюють відповідність моделі реальним законам геометрії. Особливе значення має обговорення похибок експерименту та чинників, що впливають на точність вимірювань, адже це формує у старшокласників наукову культуру дослідження і навички корекції моделей.

На завершальному етапі учні здійснюють узагальнення отриманих висновків і формують аргументовану відповідь на вихідне проблемне запитання про причини домінування круглої форми у виробництві ємностей. Під час презентації результатів вони демонструють математичні обчислення, створені макети, графічні порівняння площ і об'ємів та формулюють висновки про оптимальність кола й циліндра як геометричних форм, що забезпечують максимальну ефективність використання матеріалу. Особливу увагу приділено розвитку комунікативних навичок,

уміння аргументовано захищати власну позицію та застосовувати математичну мову для пояснення реальних явищ.

Для реалізації дослідницького проєкту можна розробити серію прикладних задач, спрямованих на поступове формування в учнів умінь математичного моделювання, порівняння геометричних величин та узагальнення результатів дослідження оптимальних форм. Задачі добираються таким чином, щоб поєднати теоретичні розрахунки з практичним експериментуванням і міждисциплінарним аналізом.

На першому етапі учням пропонуються задачі з елементами прямого порівняльного аналізу площ плоских фігур однакового периметра.

Задача 1.

Нехай задано периметр $P = 40$ см. Знайти площу:

- квадрата зі стороною $a = 10$ см;
- круга з довжиною кола $P = 40$ см;
- правильного шестикутника із стороною $a = \frac{P}{6}$.

Отримані результати занести до таблиці порівняння та зробити висновок про те, яка фігура має найбільшу площу. Побудувати графічні моделі всіх фігур та здійснити візуалізацію співвідношення площ.

Задача 2.

Дослідити, як змінюється площа правильних n -кутників (при $n = 4, 6, 8, 12$) за фіксованого периметра $P = 60$ см. Скласти таблицю з відповідними значеннями та побудувати діаграму залежності $S = S(n)$. Пояснити, до якої фігури наближається значення площі при зростанні кількості сторін.

На наступному етапі задачі переходять у просторовий вимір і мають дослідницький характер.

Задача 3.

Нехай задано однакову висоту ємностей $h = 12$ см та спільний периметр поперечного перерізу $P = 50$ см. Обчислити об'єми:

- призми з квадратною основою;
- призми з шестикутною основою;
- циліндра з круглою основою.

Для цього необхідно знайти площі основ відповідних фігур та використати формулу

$$V = S_{\text{осн}} h.$$

Порівняти отримані значення об'ємів і зробити висновок щодо оптимальної форми ємності з погляду максимальної місткості.

Задача 4.

Порівняти витрати матеріалу для виготовлення оболонки ємностей однакової висоти $h = 15$ см та однакового об'єму V , але різної форми: призма з квадратною основою та циліндр. Обчислити площу бічних поверхонь і загальну площу оболонки тіл та встановити, яка форма потребує меншої кількості матеріалу.

На етапі експериментального моделювання учням пропонуються задачі практичного характеру.

Задача 5.

Виготовити з паперу або картону модель призми та циліндра з однаковим периметром основи. Перевірити їх місткість шляхом наповнення однаковою порцією води або сипкого матеріалу. Зафіксувати об'єм, що вміщується в кожну модель, та порівняти практичні результати з теоретичними обчисленнями. Оцінити можливі похибки вимірювань та пояснити їх причини.

Задача 6 (творча).

Учням пропонується спроектувати упаковку для сипкого продукту з максимально можливим об'ємом за умови обмеженої кількості пакувального матеріалу. Потрібно:

- запропонувати кілька варіантів форми упаковки;
- побудувати геометричні моделі;

- виконати необхідні обчислення площ і об'ємів;
- аргументувати вибір оптимального варіанта.

Під час виконання всієї серії задач учні формують комплекс умінь, що включають просторове моделювання, математичні обчислення, аналіз співвідношень геометричних величин, роботу з експериментальними даними та застосування математичних закономірностей до реальних об'єктів. Серія задач сприяє глибшому осмисленню проблеми ізопериметрії та формує у школярів переконання у практичній значущості теоретичних результатів геометрії.

3.3. Теоретичне обґрунтування ефективності запропонованої методики

Теоретичне обґрунтування ефективності запропонованої методики вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур» базується на міждисциплінарному синтезі положень сучасної дидактики, психології навчання, теорії компетентнісного підходу та STEM-орієнтованої освіти. Центальною ідеєю методики є організація навчальної діяльності так, щоб засвоєння геометричного матеріалу відбувалося в активному, дослідницькому, практично зорієнтованому середовищі, де учень виступає не пасивним споживачем готової інформації, а суб'єктом пізнання, що самостійно будує знання, перевіряє їх у діяльності та переносить у прикладні ситуації.

Згідно з діяльнісною теорією навчання, повноцінне засвоєння понять досягається лише за умови включення учнів у цілеспрямовану систему розумових і практичних дій, що передбачають аналіз, моделювання, експеримент і рефлексію. Саме така логіка реалізується у розробленій методиці: учні виконують вимірювання реальних об'єктів, створюють математичні моделі будівель та ємностей, проводять оптимізаційні дослідження форм, використовуючи геометричні закономірності. Такий підхід відповідає положенням теорії поетапного формування дій,

відповідно до якої перехід від матеріальних і наочно-дійових моделей до абстрактного рівня понять забезпечує стійкість знань і можливість їх застосування у нових ситуаціях. Прогностично це дозволяє очікувати зростання не лише обсягу засвоєних відомостей, а й глибини розуміння просторових співвідношень між геометричними величинами.

Психолого-педагогічною основою ефективності методики є активізація зон найближчого розвитку учнів шляхом організації співпраці у малих групах. Рольове розподілення завдань у проєктних командах створює ситуацію навчальної взаємодії, де сильніші учні виступають джерелом підтримки для менш підготовлених, а колективне розв'язання проблем сприяє внутрішній мотивації та усвідомленню особистої значущості кожного учасника освітнього процесу. Прогностично передбачається зниження рівня навчальної тривожності, подолання страху помилок та формування позитивного ставлення до вивчення геометрії як предмета, доступного для глибокого осмислення та практичного застосування.

Важливою складовою ефективності методики є формування просторового мислення шляхом багатоканальної візуалізації навчального матеріалу. Побудова макетів тіл, створення розгорток, виконання масштабних креслень та інтеграція цифрового моделювання дозволяють працювати одночасно з образним, логічним та операційним компонентами мислення. Згідно з результатами психологічних досліджень (Ж. Піаже, М. Мінський, Г. Гарднер), саме синхронне залучення кількох типів мисленнєвої діяльності забезпечує більш ефективне формування складних ментальних структур, до яких належать просторові уявлення. Прогностично це дозволяє передбачити зменшення типових помилок, пов'язаних із невмінням виділяти елементи фігур, плутанням понять площі та об'єму, неправильним добором формул та алгоритмів обчислення.

Компетентнісна спрямованість методики забезпечує її відповідність сучасним вимогам освітніх стандартів. Запропоновані проєкти та STEM-

завдання сприяють розвитку ключових компетентностей: математичної грамотності, критичного мислення, фінансової та технологічної компетентностей, навичок комунікації й роботи в команді. Через орієнтацію на реальні ситуації — планування будівель, розрахунок матеріалів, оптимізацію упаковки — учні набувають уміння застосовувати математичні знання у практичному контексті. У прогностичному вимірі це означає підвищення готовності випускників до подальшого навчання у технічних і педагогічних спеціальностях, де потрібне комплексне поєднання просторового мислення, математичного аналізу та проєктної діяльності.

Загальною передумовою ефективності методики є формування стійкої внутрішньої мотивації до навчання. Дослідницький характер завдань, наявність конкретного результату діяльності (модель споруди, кошторис, експериментальні виміри, презентація) і можливість демонстрації власних досягнень сприяють переходу від зовнішньої мотивації (оцінка) до внутрішньої (інтерес, пізнавальна потреба). З позиції прогностичного аналізу можна передбачити підвищення загальної активності учнів, більш усвідомлений вибір навчальних профілів, посилення інтересу до інженерно-математичних напрямів освіти.

Окрему увагу слід приділити аспекту диференціації навчання. Проєктна технологія дає змогу враховувати неоднорідність класних колективів, адже учні можуть виконувати завдання різного рівня складності відповідно до власних освітніх можливостей: від простих вимірювань і побудов схем до складних математичних розрахунків та оптимізаційних досліджень. Це створює прогнозовані умови для підвищення навчальних результатів усіх учнів незалежно від початкового рівня підготовки.

Узагальнення положень прогностичного аналізу дозволяє констатувати, що запропонована методика вивчення теми «Площі та об'єми» має високий потенціал результативності. Вона забезпечує системне

формування просторового й логічного мислення, інтегрує теоретичне навчання з прикладною діяльністю, активізує мотивацію та розвиває ключові компетентності учнів. Незважаючи на відсутність формуючого експерименту, узгодженість методики з провідними психолого-педагогічними теоріями та сучасними дидактичними підходами дає підстави прогнозувати її суттєву перевагу над традиційними репродуктивними методами викладання геометрії та дозволяє розглядати отримані методичні напрацювання як перспективний напрям упровадження в освітній процес закладів загальної середньої освіти.

Висновок

У результаті проведеного дослідження теоретично обґрунтовано та методично розроблено систему використання проєктного методу навчання під час вивчення теми «Площі та об'єми геометричних фігур» у курсі математики основної школи. Реалізація завдань магістерської роботи дозволила комплексно розглянути проблему формування просторових уявлень і практично орієнтованого мислення учнів засобами проєктної діяльності в умовах реалізації компетентнісної освітньої парадигми, задекларованої Концепцією «Нова українська школа».

Проведений аналіз науково-педагогічної літератури підтвердив, що проєктний метод є одним із найбільш ефективних інструментів діяльнісного навчання, оскільки спрямований на інтеграцію теоретичних знань із практичною діяльністю учнів, розвиток самостійності, дослідницьких умінь, комунікації та відповідальності за результат спільної роботи. Встановлено, що сучасні психологічні та дидактичні підходи підкреслюють важливість формування просторового мислення саме через практичне моделювання, виконання вимірювань, побудову наочних і цифрових образів та розв'язування реальних прикладних задач. Такий підхід створює умови для переходу учнів від репродуктивного рівня засвоєння знань до продуктивного та творчого рівнів пізнавальної діяльності.

Аналіз чинних навчальних програм і підручників з математики щодо викладання теми «Площі та об'єми геометричних фігур» засвідчив, що зміст навчального матеріалу є логічно послідовним і науково коректним, однак методичний аспект значною мірою зводиться до традиційного пояснювально-ілюстративного викладу та тренувального розв'язування стандартних задач. У програмно-методичному забезпеченні спостерігається недостатня кількість завдань, що передбачають активну діяльність учнів: виконання реальних вимірювань, експериментальне дослідження властивостей геометричних тіл, створення моделей конструкцій і

розрахунків, роботу з практичними та міжпредметними ситуаціями. У зв'язку з цим доведено доцільність упровадження проєктного методу як засобу компенсації означених недоліків та розширення дидактичного потенціалу теми.

У ході роботи обґрунтовано, що застосування проєктного навчання під час вивчення площі і об'ємів сприяє розвитку у школярів не лише математичної грамотності, а й комплексу ключових компетентностей: уміння працювати в команді, здійснювати пошук і аналіз інформації, формулювати гіпотези, планувати власну діяльність, презентувати результати, аргументувати свою позицію та здійснювати рефлексію. Особливо важливим є розвиток просторової уяви, конструктивного і логічного мислення, які традиційно становлять проблемну сферу засвоєння геометрії. Проєктна діяльність забезпечує включення образного, практичного та аналітичного компонентів мислення, що істотно підвищує якість опанування геометричного матеріалу.

На основі теоретичного аналізу та узагальнення педагогічного досвіду було розроблено навчально-методичний модуль, який включає систему різнорівневих проєктів: короткострокові прикладні міні-проєкти («Геометрія навколо нас»), середньостроковий STEM-проєкт («Архітектурна майстерня») та дослідницький проєкт («Проблема ізопериметрії та оптимізація форми»). Для кожного з них створено серію практичних задач, спрямованих на поєднання геометричних обчислень з моделюванням реальних процесів, фінансово-економічними розрахунками та оптимізаційними дослідженнями. Запропоновані завдання демонструють високий потенціал для формування в учнів міжпредметних умінь у відповідності до вимог STEM-освіти та компетентнісного підходу.

Теоретичне прогнозування ефективності розробленої методики дозволяє дійти висновку, що її впровадження сприятиме суттєвому підвищенню результативності навчання геометрії за рахунок активізації

пізнавальної мотивації учнів, зниження навчальної тривожності, подолання страху помилки та зростання інтересу до предмета. Організація групової та проєктної діяльності створює умови для диференціації навчання, даючи змогу залучити учнів з різними рівнями підготовки та забезпечити позитивну динаміку навчальних досягнень у всіх категоріях школярів.

Отримані результати дослідження підтверджують, що проєктний метод є ефективним засобом реалізації компетентнісного та діяльнісного підходів у викладанні геометрії та відповідає сучасним освітнім стандартам. Запропонована методика дозволяє не лише підвищити якість засвоєння теми «Площі та об'єми геометричних фігур», а й сформувати у здобувачів освіти навички практичного застосування математичних знань у реальних життєвих та професійних контекстах.

Практична цінність роботи полягає у можливості безпосереднього використання розробленого навчально-методичного модуля у діяльності вчителів математики закладів загальної середньої освіти. Матеріали можуть бути інтегровані як у поточний освітній процес, так і в систему позакласної та профільної роботи з учнями, що цікавляться математикою, технічними та інженерними напрямками.

Список використаних джерел

1. Білоусова Л. І., Жалдак М. І. Метод проєктів у навчанні математики: теорія і практика // *Фізико-математична освіта*. – 2021. – № 1 (29). – С. 9–15.
2. Крамаренко Т. Г. Проєктна діяльність як засіб реалізації компетентнісного підходу в навчанні математики // *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Серія 3. Фізика і математика. – 2022. – Вип. 23. – С. 56–63.
3. Семеріков С. О., Стрюк А. М., Моисеєнко Н. В. STEM-орієнтоване навчання математики в закладах загальної середньої освіти // *Інформаційні технології і засоби навчання*. – 2021. – Т. 83, № 3. – С. 1–14.
4. Слєпкань З. І. Методика навчання математики в середній школі : підручник. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2020. – 512 с.
5. Пометун О. І., Пироженко Л. В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. – Київ : А.С.К., 2021. – 192 с.
6. Бех І. Д. Особистісно орієнтоване виховання і навчання : теоретико-методологічні засади. – Київ : Либідь, 2021. – 256 с.
7. Костюченко М. П. Формування просторового мислення учнів старшої школи у процесі навчання геометрії // *Педагогічні науки*. – 2022. – № 98. – С. 74–80.
8. Міністерство освіти і науки України. Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. – Київ, 2020. – 64 с.
9. Міністерство освіти і науки України. Концепція розвитку STEM-освіти в Україні. – Київ, 2020. – 28 с.
10. Шарко В. Д. Методика навчання геометрії в основній і старшій школі. – Київ : Генеза, 2021. – 320 с.

11. **Bell S.** Project-Based Learning for the 21st Century: Skills for the Future // *The Clearing House*. – 2021. – Vol. 94, No. 1. – P. 1–6.
12. **Krajcik J. S., Blumenfeld P. C.** Project-Based Learning // In: *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*. – Cambridge : Cambridge University Press, 2022. – P. 317–334.
13. **English L. D.** STEM education and problem-based learning in the mathematics classroom // *International Journal of STEM Education*. – 2021. – Vol. 8. – Article 45.
14. **OECD.** Mathematics Curriculum in the 21st Century. – Paris : OECD Publishing, 2023. – 104 p.
15. **Hattie J.** Visible Learning: The Sequel. – London : Routledge, 2023. – 392 p.
16. **UNESCO.** Reimagining Our Futures Together: A New Social Contract for Education. – Paris : UNESCO, 2021. – 205 p.