

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

Завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«_____» _____ 2025 р.

**Зростання аналітичних функцій ймовірнісних
законів**

Спеціальність 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями)

Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 Середня освіта (Інформатика)

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації
Магістр середньої освіти.
Вчитель математики, вчитель інформатики.

Автор роботи:

МИГАЛЬ Дмитро Володимирович

підпис

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент

КУТНЯК Ольга Анатоліївна

підпис

Дрогобич, 2025

Захист кваліфікаційної роботи

Зростання аналітичних функцій ймовірнісних законів

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

Голова ЕК _____

Дата

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

АНОТАЦІЯ

В термінах порядку, узагальненого порядку та уточненого порядку досліджено зростання аналітичних в одиничному крузі функцій ймовірнісних законів.

ANNOTATION

The growth of analytic probability law functions in the unit circle is obtained in terms of order, general order and refined order.

ЗМІСТ

1. Вступ.....	5
2. Випадок порядку і нижнього порядку.....	7
3. Узагальнені порядки росту аналітичних х.ф. ймовірнісних законів.....	12
4. Випадок уточненого порядку.....	17
4. Висновки.....	23
5. Список використаних джерел	24

1. Вступ

Безпосереднім узагальненням рядів Діріхле $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ є інтеграли Фур'є – Стілт'єса. Цьому класу належать і характеристичні функції ймовірнісних законів.

Неспадна функція $F^*(x)$, $-\infty < x < +\infty$, неперервна зліва і така, що виконуються умови $\lim_{x \rightarrow \infty} F^*(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F^*(-x) = 0$ називається ймовірнісним законом, а характеристичну функцію (х.ф.) цього закону $F^*(x)$ називається функція $\chi(t)$, задана на $(-\infty, +\infty)$ рівністю $\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) dF^*(x)$

Аналітичне продовження цієї функції будемо позначати через χ та введемо наступні класи функцій:

L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[a, +\infty)$ функцій h таких, що $h(+\infty)=+\infty$ і $h(x)=h(a)$ при $x \leq a$;

L^0 - клас функцій $h \in L$ таких, що $h((1+\gamma(x)x) \sim h(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ для довільної функції $\gamma(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$) ;

Λ – клас функцій $h \in L$ таких, що $h(cx) \sim h(x)$ ($x \rightarrow +\infty$) для довільного $c \in (0, +\infty)$

Нехай $\mathfrak{M}(r) = \max_{|t|=r} |\chi(t)|$. У випадку, коли $\chi(t)$ – ціла функція, питання про

зв'язок між ростом $\mathfrak{M}(r)$ і поведінкою функції $T(x)=1- F^*(x)+ F^*(-x)$ вивчався наприклад в [1,2]

Метою даної роботи є вивчення умов зростання характеристичних функцій аналітичних в одиничному крузі і таких, що мають на колі $|t|=1$ хоча б одну особливу точку.

Об'єктом роботи є аналітичні функції ймовірнісних законів.

Предметом дослідження є асимптотичні властивості характеристичних функцій ймовірнісних законів. У роботі використовуються методи теорії функцій комплексної змінної та функціонального аналізу.

2. Випадок порядку і нижнього порядку.

Теорема 2.1. Коли х.ф. $\chi(z)$ ймовірнісного закону $F^*(x)$ аналітична в одиничному крузі. То $\alpha = \Delta/(\Delta+1)$, де

$$\alpha = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(x + \ln T(x))}{\ln(x)}, \Delta = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln \mathfrak{M}(r)}{-\ln(1-r)}$$

тут $\alpha^+ = \alpha$ при $\alpha \geq 0$ і $\alpha^+ = 0$ при $\alpha < 0$.

Доведення. Припустимо, що $\Delta < \infty$. Із визначення Δ для кожного $\varepsilon > 0$, при r достатньо близьких до 1 маємо

$$\ln \mathfrak{M}(r) \leq (1-r)^{-\Delta-\varepsilon} \quad (2.1)$$

Відомо [3,c.55], що $2\mathfrak{M}(r) \geq T(x)\exp(rx)$ для всіх r , $0 < r < 1$ і для всіх $x > 0$. Тому

$$\ln \mathfrak{M}(r) \geq \ln T(x) + rx - \ln 2 \quad (2.2)$$

Звідси, враховуючи (2.1) для кожного $\varepsilon > 0$ при всіх $x > 0$ при $r \geq r(\varepsilon)$ отримаємо нерівність

$$-\ln T(x) \geq xr - (1-r)^{-\Delta-\varepsilon}$$

Виберемо

$$r = 1 - \left(\frac{\Delta + \varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{1+\Delta+\varepsilon}}$$

Тоді з останньої нерівності знаходимо, що

$$-\ln T(x) \geq x - x \left(\frac{\Delta + \varepsilon}{x}\right)^{\frac{1}{1+\Delta+\varepsilon}} - \left(\frac{x}{\Delta + \varepsilon}\right)^{\frac{\Delta + \varepsilon}{1+\Delta+\varepsilon}}$$

або

$$x + \ln T(x) \leq Kx^{\frac{\Delta + \varepsilon}{1+\Delta+\varepsilon}},$$

звідки через довільність $\varepsilon > 0$, маємо

$$\alpha = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(x + \ln T(x))}{\ln(x)} \leq \frac{\Delta}{1 + \Delta}$$

Із визначення числа α випливає, що $\alpha \leq 1$. Тому при $\Delta = \infty$ остання нерівність очевидна.

Доведемо протилежну нерівність. Із визначення α для кожного ε , $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ при $x \geq x_0(\varepsilon)$ має місце

$$T(x) \leq \exp \left(x \left(x^{\bar{\alpha}-1} - 1 \right) \right), \bar{\alpha} = \alpha + \varepsilon < 1 \quad (2.3)$$

Відомо з [3,с.55], що справедлива нерівність

$$\mathfrak{M}(r) \leq K_1 + r \int_0^\infty \exp(rx) T(x) dx. \quad (2.4)$$

Введемо в [1] функцію

$$E(r) = \sup_{x \geq 0} \{T(x) \exp(rx)\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(r) &\leq K_1 \int_0^\infty T(x) e^{rx} dx = K_1 + r \int_0^\infty T(x) e^{(rx + \gamma(r)x)} e^{-\gamma(r)x} dx \leq \\ &K_1 + E(r + \gamma(r)) \int_0^\infty e^{-\gamma(r)x} dx = K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} E(r + \gamma(r)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $\gamma(r) > 0$. Враховуючи (2.3) та (2.5), отримуємо, що

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(r) &\leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} E(r + \gamma(r)) \leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \sup_{x \geq 0} \left\{ T(x) \exp(x(r + \gamma(r))) \right\} \\ &\leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left(\max_{x \geq 0} \{x(x^{\bar{\alpha}-1} - 1 + r + \gamma(r))\}\right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Максимум правої частини досягається при

$$x = (\bar{\alpha} / (1 - r - \gamma(r)))^{1/(1-\bar{\alpha})}\tag{2.7}$$

Підставивши (2.7) у (2.6), маємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(r) &= K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left\{\left(\frac{\bar{\alpha}}{1 - r - \gamma(r)}\right)^{1/(1-\bar{\alpha})} \left(\frac{1 - r - \gamma(r)}{\bar{\alpha}} - 1 + r + \gamma(r)\right)\right\} \\ &= K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left\{\frac{1}{1 - \bar{\alpha}} \left(\frac{\bar{\alpha}}{1 - r - \gamma(r)}\right)^{\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}}\right\}\end{aligned}$$

Припустивши $\gamma(r) = (1 - \bar{\alpha})(1 - r) < 1 - r$ і два рази прологарифмувавши, при r достатньо близьких до 1 одержуємо

$$\ln^+ \ln^+ \mathfrak{M}(r) \leq \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \ln \frac{1}{1 - r} + O(1)$$

При $r \rightarrow 1$. Із останньої нерівності у зв'язку з довільністю $\varepsilon > 0$, маємо

$\Delta \leq \alpha / (1 - \alpha)$. У випадку $\alpha = 1$ остання нерівність тривіальна.

Скажемо, що виконується умова (В), якщо для всіх достатньо великих x існує монотонно зростаюча похідна функції $\ln T(x)$.

Теорема 2.2. Нехай $x.f. \lambda(z)$ ймовірнісного закону $F^*(x)$ аналітична в одиничному крузі. Тоді $\lambda \geq \lambda^* / (1 - \lambda^*)$. Якщо при цьому виконується умова (В), то $\lambda = \lambda^* / (1 - \lambda^*)$, де

$$\lambda^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(x + \ln T(x))}{\ln x}, \lambda = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\ln \ln \mathfrak{M}(r)}{-\ln(1-r)}$$

Доведення. Із визначення λ^* випливає, що $0 \leq \lambda^* \leq 1$. Нехай $\lambda^* > 0$. Тоді при $x \geq x_0^*(\bar{\lambda})$, $0 < \bar{\lambda} < \lambda^*$ виконується $T(x) \geq \exp(x(x^{\bar{\lambda}-1} - 1))$

Узявши $x_1 = x_1(r) = (\frac{\bar{\lambda}}{1-r})^{1/(1-\bar{\lambda})}$ із (2.2), враховуючи останню нерівність, отримуємо

$$\ln 2\mathfrak{M}(r) \geq x(x^{\bar{\lambda}-1} - 1) + rx = \bar{\lambda}^{\frac{1}{1-\bar{\lambda}}} \left(\frac{1-\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}\right) \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\lambda}}}$$

Звідки через довільність $\bar{\lambda} < \lambda^*$, випливає, що $\lambda > \lambda^*/(1-\lambda^*)$.

Доведемо протилежну нерівність. Позначимо

$$\mathfrak{x}(x) = \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{1}{T(x)} \right).$$

Відмітимо, що $\mathfrak{x}(x) < 1$ при всіх достатньо великих x . Дійсно, у протилежному випадку в силу монотонності $\mathfrak{x}(x)$ для всіх достатньо великих $x \geq x_0' \geq x_0$

мали б $\mathfrak{x}(x) > q > 1$, звідки

$$\begin{aligned} T(x) &= T(0) \exp \left(- \int_0^x \mathfrak{x}(x) dx \right) = T(0) \exp \left(- \int_0^{x_0'} \mathfrak{x}(x) dx - \int_{x_0'}^x \mathfrak{x}(x) dx \right) \\ &\leq T(0) \exp \left(- \alpha (x - x_0') \right) + O(1), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

що в силу того, що $T(x) = \bar{O}(\exp(-rx))$ при $x \rightarrow \infty$, суперечить тому, що $\lambda(z)$ має особливу точку на одиничному колі.

Припустимо, що $\lambda^* < \infty$ і нехай $x_k \uparrow \infty$ - послідовність, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln^+(x_k + \ln T(x_k))}{\ln x_k} = \lambda^* \quad (2.8)$$

і припустимо

$$\mu(r) = \max_{k \geq 1} (T(x_k \exp(rx_k)))$$

Так як в силу монотонності $\varphi(x) = \max_{x>0} \{T(x) \exp(rx)\}$ досягається в єдиній

точці x , такий, що $r = \varphi(x)$, то при $r = \varphi(x)$ виконується

$E(r) = T(x) \exp(rx)$. Тому при $r = r_k = \varphi(x_k)$ маємо

$E(r_k) = \mu(r_k) = T(x_k) \exp(r_k x_k)$. Окрім того, із (2.4) отримуємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(r) &\leq K_1 + r \int_0^\infty \exp\left(\frac{1+r}{2}\right) \exp\left(-\frac{1-r}{2}x\right) T(x) dx \\ &= E\left(\frac{1+r}{2}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1-r}{2}x\right) dx + K_1 \leq \frac{2}{1-r} E\left(\frac{1+r}{2}\right) + K_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Із (2.9) маємо

$$\begin{aligned} &\lim_{r \rightarrow 1} \ln \ln \mathfrak{M}(r) / (-\ln(1-r)) \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \ln E(r_k) / (-\ln(1-r_k)) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \ln \mu(r_k) / (-\ln(1-r_k)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Із (2.8) при $x \geq x_0$ ($\bar{\lambda}$) знаходимо $T(x_k) \leq \exp(x_k^{\bar{\lambda}} - x_k)$, $\bar{\lambda} < \lambda^*$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \ln \mu(r) &\leq \max_{k \geq 1} (\ln T(x_k) + rx_k) \leq \max_{k \geq 1} (x_k^{\bar{\lambda}} - x_k + rx_k) \leq \max_{x>0} (x^{\bar{\lambda}} - x + rx) \\ &= (1-r)^{-\lambda^*/(1-\lambda^*)} \end{aligned}$$

і, як наслідок, $\lambda < \lambda^*/(1-\lambda^*)$. Отож, теорема 2.2. доведена.

3. Узагальнені порядки росту аналітичних х.ф. ймовірнісних законів.

Теореми (2.1) і (2.2) поширимо на випадок узагальнених порядків введених раніше.

Теорема 3.1. Нехай $\alpha(x) \in L^0$, $\beta(x) \in \Lambda$. Позначимо $F(x:c) = \beta^{-1}(c(x))$ і припустимо, що для всіх c , $0 < c < \infty$ виконуються співвідношення

а)

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{d \ln F(x:c)}{d \ln x} < 1$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x \alpha^{-1}(c \beta(x)))}{\beta(x)} = c$$

Тоді $\Delta_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$, де

$$\gamma_{\alpha\beta} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x} \ln T(x)}\right)}, \quad \Delta_{\alpha\beta} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha\left(\frac{1}{1-r} \ln \mathfrak{M}(r)\right)}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)}, \quad \text{і} \quad \alpha^+ = \frac{1}{2}(|\alpha| + \alpha).$$

Доведення. Нехай $\Delta_{\alpha\beta} < \infty$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $r > r^0$ отримаємо

$$\ln 2 \mathfrak{M}(r) \ll (1-r) \alpha^{-1} \left(\overline{\Delta} \beta \left(\frac{1}{1-r} \right) \right), \quad \overline{\Delta} = \Delta_{\alpha\beta} + \varepsilon.$$

Враховуючи останню нерівність, із (2.2) знаходимо

$$1 + \frac{1}{x} \ln T(x) \ll (1-r) + \frac{(1-r)}{x} \alpha^{-1} \left(\overline{\Delta} \beta \left(\frac{1}{1-r} \right) \right)$$

Припустивши

$$r = r(x) = 1 - 1/\beta^{-1} \frac{1}{\overline{\Delta}} \alpha(x),$$

Приходимо до нерівності

$$(1 + \frac{1}{x} \ln T(x))^+ \ll \frac{1}{\beta^{-1} (\frac{1}{\Delta} \alpha(x))} + \frac{1}{\beta^{-1} (\frac{1}{\Delta} \alpha(x))} \ll \frac{2}{\beta^{-1} (\frac{1}{\Delta} \alpha(x))}$$

Звідси, через довільність $\varepsilon > 0$, маємо $\Delta_{\alpha\beta} \gg \gamma_{\alpha\beta}$. При $\Delta_{\alpha\beta} = \infty$ ця нерівність є очевидною.

Доведемо протилежну нерівність. Припустимо, що $\gamma_{\alpha\beta} < \infty$. Із визначення $\gamma_{\alpha\beta}$ маємо:

$$T(x_k) \leq \exp \frac{x}{\beta^{-1}} (\frac{1}{\bar{\gamma}} \alpha(x) - x), \quad \bar{\gamma} = \gamma_{\alpha\beta} + \varepsilon, \quad x \geq x_0$$

Враховуючи останню нерівність із (2.5) отримуємо

$$\mathfrak{M}(r) \leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \max_{x \geq 0} \{ \exp(\frac{x}{F(x: 1/\bar{\gamma})} - x(1 - r - \gamma(r))) \}$$

Використовуючи звичайні методи дослідження функцій на екстремум і враховуючи умову а) теореми, як і в (4) отримуємо, що максимум правої частини досягається при

$$x = \alpha^{-1}(\bar{\gamma} \beta (\frac{1 + O(1)}{1 - r - \gamma(r)}))$$

Тоді із останньої нерівності знаходимо, що

$$\mathfrak{M}(r) \leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\{(q - r - \gamma(r))\alpha^{-1} \left(\bar{\gamma} \beta \left(\frac{1 + O(1)}{1 - r - \gamma(r)} \right) \right)\}$$

Припустивши $\gamma(r) = \frac{1}{2} (1 - r) < 1 - r$, отримуємо

$$\frac{1}{2(1 - r)} \ln \mathfrak{M}(r) \leq \frac{1}{2(1 - r)} \ln \frac{1}{2(1 - r)} + \alpha^{-1}(\bar{\gamma} \beta (\frac{1 + O(1)}{2(1 - r)}))$$

Звідси, враховуючи умову б) теореми, через довільність $\varepsilon > 0$, приходимо до нерівності $\mathfrak{g}_{\alpha\beta} \gg \gamma_{\alpha\beta}$. Таким чином, теорема доведена.

Теорема 3.2. Нехай $\alpha(x) \in L^0$, $\beta(x) \in \Lambda$ і виконуються умови а) і б), тоді

$$\lambda_{\alpha\beta} \geq \lambda_{\alpha\beta}^*, \text{ де}$$

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\alpha(\frac{1}{1-r} \ln \mathfrak{M}(r))}{\beta(\frac{1}{1-r})}, \quad \lambda_{\alpha\beta}^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta[1/(1+\frac{1}{x} \ln T(x))^+]},$$

якщо, окрім цього, виконується умова в), то $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}^*$.

Доведення. Нехай $\lambda_{\alpha\beta}^* \geq 0$. Із визначення $\lambda_{\alpha\beta}^*$ при $x \gg x_0(\bar{\lambda})$, $0 < \bar{\lambda} < \lambda_{\alpha\beta}^*$ виконується $\ln T(x) \geq \frac{x}{\beta^{-1}(\frac{1}{\bar{\lambda}} \alpha(x))} - x$.

Враховуючи останню нерівність із (2.2) отримуємо

$$\ln \mathfrak{M}(r) \geq x \left(1/\beta^{-1} \left(\frac{1}{\bar{\lambda}} \alpha(x) \right) - 1 + r + \frac{\ln 2}{x} \right). \quad (3.1)$$

Взявши в останній нерівності $x = x(r) = \alpha^{-1}(\bar{\lambda} \beta(1/2(1-r)))$, через довільність $\bar{\lambda} < \lambda_{\alpha\beta}^*$, отримаємо $\lambda_{\alpha\beta} \gg \lambda_{\alpha\beta}^*$.

Доведемо протилежну нерівність. Припустимо, що $\lambda_{\alpha\beta}^* < \infty$, та x^k – послідовність, для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(x_k)/\beta[1/(1+\frac{1}{x_k} \ln T(x))^+] = \lambda_{\alpha\beta}^* \quad (3.2)$$

Враховуючи умову б), із (2.9), як і в (2.10), отримуємо

$$\lim_{r \rightarrow 1} \alpha(\frac{1}{1-r} \ln \mathfrak{M}(r))/\beta(\frac{1}{1-r}) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \alpha(\frac{1}{1-r_k} \ln \mu(r_k))/\beta(\frac{1}{1-r_k}) \quad (3.3)$$

Із (3.2) маємо $T(x_k) \leq \exp\left(\frac{x_k}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\alpha(x_k)\right)} - x_k, \bar{\lambda} > \lambda_{\alpha\beta}^*\right).$

Таким чином

$$\ln \mu(r) \leq \max_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{r_k}{F(x_k: 1/\bar{\lambda})} - x_k + r x_k \right) \leq \max_{x > 0} \left(x \left(\frac{1}{F(x_k: 1/\bar{\lambda})} - 1 + r \right) \right). \quad (3.4)$$

Так як максимум у правій частині досягається при

$$x = \alpha^{-1} \left(\bar{\lambda} \beta \left(\frac{1 + 0(1)}{1 - r} \right) \right),$$

з (3.4) маємо

$$\mu(r) \leq \exp \left((1 - r) \alpha^{-1} \left(\bar{\lambda} \beta \left(\frac{1 + 0(1)}{1 - r} \right) \right) \right), \quad (3.5)$$

Звідси, враховуючи (3.3), через довільність $\bar{\lambda} > \lambda_{\alpha\beta}^*$, отримуємо $\lambda_{\alpha\beta} \leq \lambda_{\alpha\beta}^*$.

Теорема 3.2. Нехай $\alpha(x) \in L^0$, $\beta(x) \in \Lambda$, якщо окрім умов а) і б) виконується

в) $F(x/F(x:c):c) \sim F(x:c)$, $x \rightarrow \infty$, то $\gamma_{\alpha\beta} = \hat{\Delta}_{\alpha\beta}$, де

$$\hat{\Delta}_{\alpha\beta} = \overline{\lim_{r \rightarrow 1}} \alpha(\ln \mathfrak{M}(r)) / \beta\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Доведення. Нехай $\hat{\Delta}_{\alpha\beta} < \infty$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $r > r_0$ отримаємо

$$\ln 2\mathfrak{M}(r) \leq \alpha^{-1} \hat{\Delta} \beta\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad \hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_{\alpha\beta} + \varepsilon$$

Враховуючи останню нерівність, із (2.2) знаходимо, що

$$\left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x) \right) \leq (1 - r) + \frac{1}{x} \alpha^{-1} \left(\hat{\Delta}_1 \beta \left(\frac{1}{1 - r} \right) \right).$$

Припустивши

$$r = r(x) = 1 - 1/\beta^{-1}(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha(x/\beta^{-1}(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha(x))))),$$

Враховуючи умову в) , приходимо до нерівності

$$\left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right)^+ \leq \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha\left(\frac{x}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha(x)\right)}\right)\right)} + \frac{1}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha(x)\right)} \leq \frac{3}{\beta^{-1}\left(\frac{1}{\hat{\Delta}_1}\alpha(x)\right)}.$$

Звідси, через довільність $\varepsilon > 0$, маємо $\hat{\Delta}_{\alpha\beta} \geq \gamma_{\alpha\beta}$. Якщо $\Delta_{\alpha\beta} = \infty$, то остання нерівність є очевидною. Доведення нерівності $\hat{\Delta}_{\alpha\beta} \leq \gamma_{\alpha\beta}$ проводиться так само, як доведення другої частини теореми 3.2.

Теорема 3.3. Якщо $\alpha(x) \in \Lambda$, $\beta(x) \in \Lambda$, виконуються умови а) , б) і в)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha\left(\frac{1}{x} \alpha^{-1}(\rho\beta(x))\right)/\beta(x) = \rho, \quad 0 < \rho < \infty$$

то $\hat{\lambda}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}^*$, де <

$$\hat{\lambda}_{\alpha\beta} = \lim_{r \rightarrow 1} \left(\frac{\alpha(\ln \mathfrak{M}(r))}{\beta\left(\frac{1}{1-r}\right)} \right), \quad \lambda_{\alpha\beta}^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x)/\beta \left(\left[1/(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)) \right]^+ \right).$$

Доведення. Взявши $r = r(x) = \alpha^{-1}(\bar{\lambda}\beta(1/2(1-r)))$ з (3.1) отримуємо

$$\ln \mathfrak{M}(r) \geq \alpha^{-1}(\bar{\lambda}\beta(1/2(1-r))) (1-r)$$

звідки , враховуючи умову в) в силу довільності $\varepsilon > 0$, маємо $\hat{\lambda}_{\alpha\beta} \geq \lambda_{\alpha\beta}^*$.

Справедливість нерівності $\hat{\lambda}_{\alpha\beta} \leq \lambda_{\alpha\beta}^*$ отримуємо з (3.5), враховуючи (3.3) та умову в). Теорема доведена.

4. Випадок уточненого порядку.

Уточненим порядком будемо називати, слідуючи [5] функцію $\Delta(r)$, враховуючи $0 < r < 1$, що задовільняє умови:

- 1) $\Delta(r) \geq 0, 0 \leq r < 1$,
- 2) $\lim_{r \rightarrow 1} \Delta(r) = \Delta$
- 3) $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \ln(1-r) \Delta'(r) = 0$.

$$\text{Величини } t_\chi = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} (1-r)^{\Delta(r)} \ln \mathfrak{M}(r) . \quad T_\chi = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1} (1-r)^{\Delta(r)} \ln \mathfrak{M}(r)$$

називаються відповідно типом і нижнім типом функції $\chi(z)$ при уточненому порядку $\Delta(r)$. Припустимо $\varphi(y) = y^{\Delta(y)+1}$ і нехай η – функція обернена до φ . Оскільки

$$\frac{d \ln \varphi(y)}{d \ln y} = y \Delta'(y) \ln y + \Delta(y) + 1 \rightarrow \Delta + 1, \quad (y \rightarrow \infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d \ln \eta(x)}{d \ln x} = \frac{1}{\Delta + 1}$$

(4.1)

і, таким чином,

$$\ln \eta(kx) - \ln \eta(x) = \frac{1+o(1)}{\Delta+1} \ln k \quad (x \rightarrow \infty).$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(kt)}{\eta(t)} = k^{1/(\Delta+1)}, k \in]0, \infty[$$

(4.2)

Теорема 4.1. Тип t_χ аналітичної х.ф. $\chi(z)$ уточненого порядку $\Delta(r)$ знаходиться за формулою

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right)^+ = (t_\chi \Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{\Delta + 1}{\Delta} \quad (4.3)$$

Доведення. Припустимо, що $t_\chi < \infty$. Із визначення t_χ для кожного $\varepsilon > 0$, при r достатньо близьких до 1, маємо

$$\ln \mathfrak{M}(r) + \ln 2 \leq t_0 \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\Delta(r)}, t_0 = t_\chi + \varepsilon \quad (4.4)$$

Із (2.2) та (4.4) при r достатньо близьких до 1 отримаємо

$$-\ln T(x) \geq xr - t_0 \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\Delta(r)} \geq xr - t_0(1-r) \varphi \frac{1}{(1-r)}.$$

Підставляючи в останню нерівність $1/(1-r) = \eta\left(\frac{x}{t_0\Delta}\right)$ при достатньо більших x

Отримаємо

$$-\ln T(x) \geq x - \frac{x}{\eta\left(\frac{x}{t_0\Delta}\right)} - \frac{t_0 x}{\eta\left(\frac{x}{t_0\Delta}\right) t_0 \Delta} = x - \frac{\Delta + 1}{\Delta} \cdot \frac{x}{\eta\left(\frac{x}{t_0\Delta}\right)}$$

Звідки, враховуючи (4.2), маємо

$$\left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right)^+ \leq \frac{\Delta + 1}{\Delta} * \frac{1}{\eta\left(\frac{x}{t_0\Delta}\right)} \sim \frac{1}{\eta(x)} (t_0 \Delta)^{\frac{1}{1+\Delta}} * \frac{1 + \Delta}{\Delta}, (x \rightarrow +\infty)$$

Звідки через довільність $\varepsilon > 0$, отримаємо

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right)^+ = (t_\chi \Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{1 + \Delta}{\Delta}$$

Якщо $t_\chi = \infty$, то остання нерівність є очевидною. Покажемо, що в останній нерівності має місце знак рівності. Для цього визначимо число t рівнянням

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right)^+ = (t\Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{1+\Delta}{\Delta} \quad (4.5)$$

І покажемо, що $t_\chi \leq t$. Нехай $t < \infty$. Тоді із (4.5) для довільного $t_1 > t$ при $x \geq x_0(t_1)$ маємо

$$T(x) \leq \exp\left(-x + \frac{x\alpha_1}{\eta(x)}\right), \quad \alpha_1 \stackrel{\text{def}}{=} (t_1\Delta)^{1+\frac{\Delta}{\Delta}} \cdot \frac{1+\Delta}{\Delta} \quad (4.6)$$

Враховуючи (4.6) із (2.6) отримаємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(r) &\leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} E(r + \gamma(r)) \leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \max_{x>0} \left\{ T(x) \exp\left(x(r + \gamma(r))\right) \right\} \\ &\leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left(\max_{x>0} \left\{ x\left(\frac{\alpha_1}{\eta(x)} - 1 + r + \gamma(r)\right) \right\}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оскільки в силу (4.1) $x\eta'(x)/\eta(x) \rightarrow 1/1 + \Delta$, $x \rightarrow \infty$, то максимум правої частини досягається при

$$x = x(r) = \varphi\left(\frac{\alpha_2(r)}{1 - r - \gamma(r)}\right) = (1 + o(1))\alpha_2^{\Delta+1} \varphi\left(\frac{1}{1 - r - \gamma(r)}\right), r \rightarrow 1 \quad (4.8)$$

де $\alpha_2(r) \rightarrow \alpha_1 \frac{\Delta}{1+\Delta}$ при $r \rightarrow 1$. Підставивши (4.8) у (4.7) при

$\gamma(r) = \varepsilon_1(1 - r)$, $\varepsilon_1 > 0$ маємо

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(r) &\leq K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left(-\varphi\left(\frac{\alpha_2(r)}{1 - r - \gamma(r)}\right) \left(1 - r - \gamma(r) - \frac{\alpha_1(1 - r - \gamma(r))}{\alpha_2}\right)\right) = \\ &= K_1 + \frac{1}{\gamma(r)} \exp\left(\left(\frac{1}{1 - r - \gamma(r)}\right)^{\Delta(r)} (1 + o(1))\alpha_2^{\Delta+1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= \exp\left\{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\Delta(r)} \left(\left(\frac{1}{1-\varepsilon_1}\right)^{\Delta(r)} (1 + O(1)t_1)\right), r \rightarrow 1\right.$$

Звідси через довільність $t_1 > t$, отримуємо $t_\chi \leq t$. Якщо $t = \infty$, то остання нерівність очевидна.

Теорема 4.2. Якщо виконується умова в), то нижній тип T_χ аналітичної х.ф. $\chi(z)$ уточненого порядку $\Delta(r)$ визначається за формулою

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right) = (T_\chi \Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{\Delta + 1}{\Delta}$$

Доведення. Нехай $\lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) \left(1 + \frac{1}{x} \ln T(x)\right) = T_\chi^*$ і $T_\chi^* > 0$

Тоді при $x \geq x_0(\bar{T})$, $\bar{T} < T_\chi^*$ виконується

$$T(x) \geq \exp\left(x \left(\frac{\bar{T}}{\eta(x)} - 1\right)\right).$$

Взявши $x_1 = x_1(r) = \varphi\left(\frac{\bar{T}\Delta}{1+\Delta} \cdot \frac{1}{1-r}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) \left(\frac{\bar{T}\Delta}{1+\Delta}\right)^{1+\Delta}$,

із (2.2), враховуючи останню нерівність, отримаємо

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{M}(r) &\geq x \left(\frac{\bar{T}}{\eta(x)} - 1 + r\right) \\ &\geq \left(\frac{\bar{T}\Delta}{1+\Delta}\right)^{1+\Delta} \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right) \left(\frac{\bar{T}(\Delta+1)}{\Delta\bar{T}}(1-r) - (1-r)\right) \\ &= \left(\frac{\bar{T}\Delta}{1+\Delta}\right)^{1+\Delta} \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\Delta(r)} \cdot \frac{1}{\Delta} \end{aligned}$$

Звідки, через довільність $\bar{T} < T_\chi^*$ отримуємо

$$T_\chi^* \leq (T_\chi \Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{\Delta+1}{\Delta}.$$

Якщо $T_\chi^* = 0$, то остання нерівність очевидна.

Доведемо протилежну нерівність. Припустимо тепер, що $T_\chi^* < \infty$ і нехай $x_k \uparrow \infty$ - послідовність для якої

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta(x_k) \left(1 + \frac{1}{x_k} \ln T(x_k) \right) = T_\chi^* \quad (4.9)$$

Припустимо $\mu(r) = \max_{k \geq 1} (T(x_k) \exp(rx_k))$.

Аналогічно до (2.10) маємо

$$\varliminf_{r \rightarrow 1} (1-r)^{\Delta(r)} \ln \mathfrak{M}(r) \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (1-r_k)^{\Delta(x_k)} \ln \mu(r_k),$$

а із (4.9) випливає, що

$$T(x_k) \leq \exp \left(x_k \left(\frac{\bar{T}}{\eta(x_k)} - 1 \right) \right), \bar{T} > T_\chi^*.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \ln \mu(r) &\leq \max_{k \geq 1} (x_k \left(\frac{\bar{T}}{\eta(x_k)} - 1 + r \right)) \leq \max_x \left(x \left(\frac{\bar{T}}{\eta(x_k)} - 1 + r \right) \right) \\ &\leq \left(\frac{\bar{T}\Delta}{\Delta+1} \right)^{1+\Delta} \varphi \left(\frac{1}{1-r} \right) \left(\frac{\bar{T}(\Delta+1)}{\Delta\bar{T}} (1-r) - (1-r) \right) = \left(\frac{\bar{T}\Delta}{\Delta+1} \right)^{1+\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta} \end{aligned}$$

звідки, через довільність $\bar{T} > T_\chi^*$, отримуємо $T_\chi^* \geq (T_\chi \Delta)^{1/(1+\Delta)} \cdot \frac{\Delta+1}{\Delta}$.

Якщо $T_\chi^* = \infty$, то остання нерівність очевидна.

Відмітимо, що для випадку, коли $\chi(z)$ – ціла функція, твердження, аналогічні теоремам 4.1, 4.2 отримані в [6].

В теорії аналітичних в одиничному колі функцій часто доводиться використовувати інші шкали росту, а саме тип і нижній тип, які, відповідно, визначаються за формулами

$$t = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1} (1 - r)^{\Delta} \ln \mathfrak{M}(r), \quad T = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1} (1 - r)^{\Delta} \ln \mathfrak{M}(r).$$

Із теореми 4.1 і 4.2 при $\varphi(t) = t^{\Delta+1}$ отримаємо наступні твердження.

Наслідок 4.1 Тип t аналітичної х.ф. $\chi(z)$ ймовірнісного закону F_x^* визначається за формулою

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{\Delta}{1+\Delta}} (x + \ln T(x))^+ = (t\Delta)^{\frac{1}{1+\Delta}} \cdot \frac{1 + \Delta}{\Delta}$$

Наслідок 4.2 Якщо виконується умова в), то нижній тип T аналітичної х.ф. $\chi(z)$ ймовірнісного закону F_x^* визначається за формулою

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{\Delta}{1+\Delta}} (x + \ln T(x)) = (T\Delta)^{\frac{1}{1+\Delta}} \cdot \frac{1+\Delta}{\Delta}.$$

5. Висновки.

Таким чином, у даній роботі досліджено зростання аналітичних функцій ймовірнісних законів. Отримані результати для випадків порядку і нижнього порядку, узагальненого порядку та уточненого порядку функції сформульовані та доведені відповідно у теоремах 2.1, 2.2, 3.1,3.2 та 4.1, 4.2. Матеріали магістерської роботи опубліковані в матеріалах XII міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» (Дрогобич, 2025)

6. Список використаних джерел.

1. B. Vinnytskyi. – On one property of entire characteristic functions of probability laws// Mathematical notes.– 1975, №4, p.95 – 97.
2. М. Шеремета. – Про належність цілих характеристичних функцій ймовірнісних законів до класу збіжності// Доп. АН УРСР. – 1975, №8, с.697 – 699.
3. М. Шеремета . – Про зв'язок між зростанням функцій, аналітичної в крузі, і модулями коефіцієнтів її ряду Тейлора// Доп. АН УРСР , сер А, – 1966, №6, с.729 - 730.
4. A. Gaysyn. – Growth estimate of functions representes by the Dirichlet series in a half-strip // Sbornik: Matematics. – 1982, T117(159) №3, p.412 – 424.
5. M Deves, M.Riedel. – The connection between the proximate order of an entire characteristic function and the corresponding function // Czechosl. Math.I. (CvSSR). – 1977, 27 №2, с.173 – 185.