

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

«_____» _____ 2025 р.

МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ФОРМУВАННЯ
ЕВРИСТИЧНИХ УМІНЬ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ
НА УРОКАХ З МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями)

Предметна спеціальність: 014.04 Середня освіта (Математика)

Додаткова предметна спеціальність: 014.09 Середня освіта

(Інформатика)

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації:

«Магістр середньої освіти.

Вчитель математики, вчитель інформатики»

Автор роботи:

Мельник Павло Михайлович _____

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Комарницька Леся Іванівна _____

Дрогобич, 2025

Захист магістерської роботи
«Методичні підходи формування евристичних умінь учнів основної
школи на уроках з математики»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

дата

Голова ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Анотація

Мельник П. М. Методичні підходи формування евристичних умінь учнів основної школи на уроках з математики. – Рукопис

Магістерська робота зі спеціальності 014 Середня освіта (за предметними спеціальностями). Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. Дрогобич, 2025.

Магістерська робота присвячена проблемі формування евристичних умінь учнів основної школи у процесі навчання математики. У роботі проаналізовано теоретичні засади евристичного навчання та обґрунтовано роль евристичних прийомів у розвитку творчого мислення школярів. Запропоновано систему евристичних задач і методичні рекомендації щодо їх використання на уроках і факультативних заняттях з математики. Практична цінність дослідження полягає у можливості застосування отриманих результатів у професійній діяльності вчителів математики та в підготовці майбутніх педагогів.

Ключові слова: евристичні уміння, евристичне навчання, методика навчання математики, евристичні задачі, аналіз через синтез, творче мислення, основна школа.

Abstract

Melnyk P.M. Methodological approaches to the formation of heuristic skills of primary school students in mathematics lessons. – Manuscript.

Master's thesis in the specialty 014 Secondary education (by subject specialization). Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, Drohobych, 2025.

The master's thesis is devoted to the problem of forming heuristic skills of primary school students in the process of teaching mathematics. The paper analyzes the theoretical principles of heuristic learning and substantiates the role of heuristic techniques in the development of creative thinking of schoolchildren. A system of heuristic tasks and methodological recommendations for their use in lessons and optional classes in mathematics are proposed. The practical value of the study lies in the possibility of applying the obtained results in the professional activities of mathematics teachers and in the training of future teachers.

Keywords: heuristic skills, heuristic learning, mathematics teaching methodology, heuristic tasks, analysis through synthesis, creative thinking, primary school.

Зміст

Вступ	5
РОЗДІЛ I. Теоретичні основи формування прийомів евристичної діяльності учнів у процесі вивчення математики	8
1.1. Сутність евристик та їх роль у навчанні математики	8
1.2. Роль і місце евристичних умінь у процесі навчання математики	14
1.3. Методичні вимоги до формування евристичних умінь школярів на уроках математики.	18
РОЗДІЛ 2. Шляхи формування евристичних умінь учнів на уроках математики	26
2.1. Формування евристичних прийомів розумової діяльності на уроках математики	26
2.2. Евристичні задачі як засіб формування евристичних умінь	40
Висновки.....	52
Список використаних джерел	54
Додатки	56

Вступ

На сучасному етапі розвитку України постала гостра потреба в трансформації освітньої системи, що зумовлена як зміною соціально-економічних умов, так і запитами суспільства щодо підготовки творчої, компетентної та самостійної особистості. Сучасна школа, збільшуючи обсяг знань, які мають засвоїти учні, часто спрямована на механічне запам'ятовування матеріалу, що формує, фактично, споживацьке ставлення до знань і обмежує розвиток креативного потенціалу школярів. Внаслідок цього значна частина молоді виявляється недостатньо підготовленою до самостійного прийняття рішень, узагальнення отриманої інформації та її трансформації у знання, що можуть бути ефективно застосовані в різних життєвих ситуаціях.

Саме тому провідні країни світу протягом останніх десятиліть активно здійснюють реформування освітніх систем, спрямоване на підвищення інтелектуального потенціалу населення та формування креативної особистості. В освіті акцент переноситься на розвиток умінь застосовувати здобуті знання на практиці, здійснювати аналітичний та критичний аналіз, приймати рішення в нестандартних ситуаціях.

Пріоритетним завданням сучасної математичної освіти є розвиток мислення учнів до рівня, який дозволяє їм стати компетентними фахівцями, здатними до самостійного оволодіння знаннями, їх узагальнення та систематизації, а також ефективного застосування в навчальній діяльності й повсякденному житті. Важливим елементом реалізації цього завдання є формування в учнів евристичних умінь, які сприяють розвитку творчого й критичного мислення, здатності до самостійного пошуку рішень і побудови алгоритмів розв'язання різних задач.

Проблемі розвитку евристичних умінь у навчанні математики присвятили увагу відомі науковці та методисти, серед яких Ж. Адамар, Г. П. Бевз, М. І. Бурда, Б. В. Гнеденко, Г. В. Дорофєєв, І. І. Зільберберг, Ю. М.

Колягін, Л. Ларсон, Ю. О. Палант, Д. Пойа, З. І. Слєпкань, Н. А. Тарасенкова, Л. М. Фрідман, А. Я. Хінчин, С. І. Шапіро, М. І. Шкіль та інші. Сучасні дослідження підтверджують, що формування евристичних умінь підвищує ефективність засвоєння знань, стимулює мислення та сприяє розвитку інтелектуального потенціалу учнів.

Однією з ключових особливостей навчального процесу, яка сприяє розвитку евристичних умінь, є активізація загальнорозвивальної функції уроку шляхом залучення учнів до нових видів діяльності. Проте обмеженість навчального часу на уроках математики часто ускладнює повноцінну реалізацію цього завдання.

Відзначаючи значний обсяг наукових здобутків у галузі математики, слід зауважити, що проблема систематичного формування евристичних умінь учнів у процесі уроків математики досліджена недостатньо, що й стало підставою для вибору теми даного дослідження.

Об'єкт дослідження – процес формування евристичних умінь учнів під час вивчення математики основної школи.

Предмет дослідження – завдання, спрямовані на формування евристичних умінь учнів уроках математики.

Мета дослідження – розробити методичні рекомендації та запропонувати практичні завдання, що сприяють формуванню евристичних умінь учнів на уроках математики.

Для досягнення поставленої мети були визначені такі завдання:

1. проаналізувати стан дослідження проблеми формування евристичних умінь учнів у психолого-педагогічній і методичній літературі;
2. виявити педагогічні передумови формування евристичних умінь учнів на різних типах занять з математики;
3. дібрати евристичні завдання, що сприяють формуванню в учнів різних прийомів розумової діяльності;
4. розробити системи задач, які можуть використовуватись на уроках та факультативних заняттях для розвитку евристичних умінь учнів.

Для реалізації завдань дослідження застосовувалися такі методи:

- аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури;
- вивчення навчальних програм, підручників та посібників з математики;
- аналіз педагогічного досвіду вчителів;
- спостереження, бесіди та анкетування учнів.

Практична цінність дослідження полягає у можливості використання запропонованих систем задач та методичних рекомендацій у навчально-виховному процесі для підвищення ефективності формування евристичних умінь, розвитку критичного мислення та творчого потенціалу учнів основної школи.

Результати дослідження доповідались на XII-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів ФФМЕІТ та засіданні кафедри математики та економіки ДДПУ ім.Івана Франка.

Розділ 1. Теоретичні основи формування прийомів евристичної діяльності учнів у процесі вивчення математики

1.1. Сутність евристик та їх роль у навчанні математики

У процесі аналізу методичної та психолого-педагогічної літератури було з'ясовано зміст, генезу та сучасні підходи до трактування поняття «евристика», а також визначено її місце в системі навчання математики в основній школі. Дослідження різних наукових джерел засвідчує, що еристика розглядається як багатогранне педагогічне явище, яке поєднує в собі елементи мисленнєвої діяльності, методів навчання, дидактичних прийомів і способів організації пізнавальної активності учнів.

Історично поняття еристики пов'язують із сократівською системою навчання, яка ґрунтувалася на діалозі, проблемних запитаннях і логічних міркуваннях. Сократ, використовуючи метод маевтики, не передавав готові знання, а спрямовував учнів до самостійного пошуку істини. За допомогою продуманої системи запитань він стимулював мисленнєву діяльність співрозмовника, допомагав усвідомити суперечності та поступово підводив до правильних висновків. У результаті цього процесу істина відкривалася не лише учневі, але й самому вчителю, що підкреслює діалогічний і творчий характер евристичного навчання.

Як науковий термін «евристика» був уведений у III столітті н.е. давньогрецьким математиком Паппом Олександрійським. У своїх працях він узагальнив методи міркувань і способи пошуку розв'язань, які не зводилися до суворо логічних доказів, і об'єднав їх під умовною назвою «евристика» [24]. Таким чином, еристика з самого початку розглядалася як інструмент відкриття нового знання, що спирається на інтуїцію, досвід, аналогії та припущення.

У подальшому розвитку педагогічної науки поняття евристики набуло ширшого змісту. У працях В. І. Андрєєва, В. І. Крупіча, Ю. О. Паланта, З. І. Слєпканя, Л. М. Фрідмана та інших учених евристики віднесено до категорії загальнодидактичних методів і прийомів навчання. Науковці підкреслюють, що евристичні прийоми сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їхнього мислення, формуванню самостійності та здатності до творчого розв'язування навчальних і практичних задач.

Особливу увагу в наукових дослідженнях приділено систематизації евристичних прийомів. Значну кількість евристик у формі так званих евристичних орієнтирів було сформульовано американським математиком Л. Ларсоном. Запропоновані ним орієнтири виконують функцію своєрідних інтелектуальних «підказок», які спрямовують мислення учнів у процесі розв'язування задач, але не замінюють самостійний пошук.

Аналіз педагогічних джерел свідчить, що використання евристик у навчанні математики може трактуватися по-різному. З одного боку, евристика розглядається як окремий дидактичний прийом або метод навчання, спрямований на активізацію розумової діяльності учнів. З іншого боку, її можна розглядати як форму організації навчального процесу або як засіб навчання, що забезпечує умови для творчого пізнання. У найбільш узагальненому вигляді евристика постає як цілісна методична система, орієнтована на формування в учнів умінь самостійно здобувати знання, аналізувати інформацію, висувати гіпотези та перевіряти їх у процесі навчальної діяльності.

Проблема евристичних прийомів стала предметом численних досліджень у галузі методики навчання математики. Узагальнення результатів цих досліджень дало змогу здійснити спробу класифікації евристик, що враховує їх дидактичні функції та роль у навчальному процесі (див. схему 1). В основу запропонованої класифікації покладено два взаємопов'язані критерії: ступінь узагальнення евристичного прийому та ступінь узагальнення мети, на досягнення якої він спрямований.

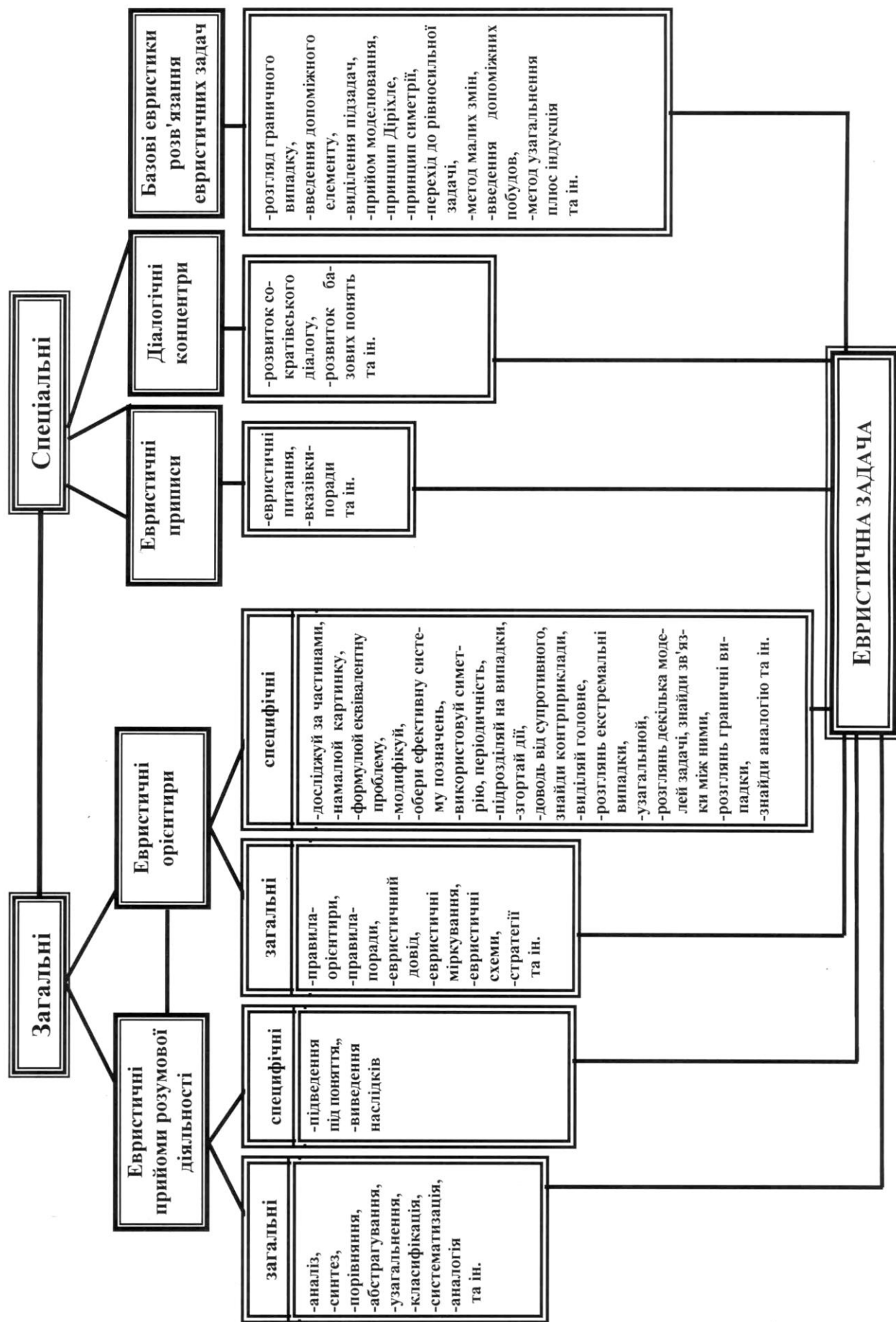


Схема 1

Першим критерієм класифікації є ступінь узагальнення евристичного прийому. За цим критерієм евристики поділяються на загальні та спеціальні. *Загальні* евристики застосовуються практично в усіх галузях знань і не залежать від конкретного предметного змісту. Їх основне призначення полягає у виявленні загальних закономірностей мисленнєвих процесів, що відбуваються під час розв'язування різноманітних проблемних ситуацій. Такі евристики сприяють формуванню універсальних інтелектуальних умінь, зокрема аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення та абстрагування.

Спеціальні евристики, на відміну від загальних, тісно пов'язані з вивченням конкретного математичного матеріалу. Вони спрямовані на створення сприятливих дидактичних умов для самоорганізації учнів у процесі «відкриття» нових знань, формування математичних умінь і навичок, а також оволодіння прийомами розв'язування певних класів евристичних задач. Такі евристики враховують специфіку математичного змісту та особливості мислення учнів основної школи.

Другим критерієм класифікації є ступінь узагальнення мети евристичного прийому. Відповідно до цього критерію з класу загальних евристик виокремлюють прийоми розумової діяльності та евристичні орієнтири. *Прийоми розумової діяльності* поділяються на загальні, що забезпечують базові мисленнєві операції, та специфічні, які орієнтовані на виконання окремих пізнавальних дій у процесі розв'язування задач.

Евристичні орієнтири включають як загальні, так і специфічні компоненти. До загальних орієнтирів належать правила-орієнтири, правила-поради, евристичні доводи, евристичні міркування та евристичні схеми стратегій. Вони мають характер правдоподібних правил, що спрямовують учнів на пошук способу розв'язання проблеми, не задаючи при цьому жорсткого алгоритму дій. Специфічні евристичні орієнтири, у свою чергу, істотно звужують поле пошуку розв'язання складної задачі, проте не гарантують досягнення правильного результату, що стимулює учнів до подальшого аналізу та перевірки власних міркувань.

До класу спеціальних евристик за другим критерієм віднесено евристичні приписи, діалогічні концентри та базові евристики розв'язування евристичних задач. *Евристичні приписи* використовуються в процесі вивчення конкретного навчального матеріалу та подаються у формі запитань, вказівок, порад або настанов, які спрямовують мислення учнів у потрібному напрямі. *Діалогічні концентри* передбачають включення кожного нового математичного поняття в систему взаємозв'язків з уже вивченими поняттями з метою відтворення базових знань, їх осмислення та систематизації. *Базові евристики* розв'язування евристичних задач формуються в результаті розв'язування окремих задач і згодом переносяться на інші навчальні ситуації, що забезпечує розвиток умінь перенесення знань і способів діяльності.

Запропонована класифікація евристик створює методологічне підґрунтя для глибшого дослідження проблеми впливу евристичних прийомів на управління процесом навчання математики. Вона дозволяє системно підійти до формування прийомів евристичної діяльності учнів і визначити оптимальні шляхи їх упровадження в освітній процес.

Проблемі формування навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів в умовах упровадження сучасних освітніх технологій присвячено наукові праці О. І. Скафи. Авторкою розроблено й науково обґрунтовано сучасну концепцію формування прийомів евристичної діяльності, а також уперше в Україні запропоновано методичну систему евристичного навчання математики [19]. У межах цієї системи евристична діяльність розглядається як важливий чинник розвитку особистості учня, його пізнавальної самостійності та творчого потенціалу.

За твердженням О. І. Скафи [19], оволодіння учнями евристичними вміннями відбувається поступово, у процесі проходження визначених етапів навчально-пізнавальної евристичної діяльності. Кожен з етапів має свої завдання, методи й засоби, що забезпечують поступовий перехід від репродуктивної діяльності до продуктивної та творчої.

Дослідницею визначено місце й роль навчально-пізнавальної евристичної діяльності в системі навчання математики, охарактеризовано її

основні ознаки та обґрунтовано розгляд цієї діяльності як цілісної системи. У її структурі виокремлено змістовий, операційно-процесуальний, мотиваційний, організаційний і методологічний компоненти, з одного боку, а також мету, продукти, способи діяльності та задачі – з іншого. Такий підхід дозволяє комплексно оцінити процес формування евристичних умінь учнів і визначити умови його ефективності.

Спираючись на науково-теоретичну та методичну концепцію О.І. Скафи, вважаємо доцільним упровадження елементів зазначеної системи в процесі проведення уроків з математики в основній школі. Це створює додаткові можливості для організації евристично спрямованої діяльності учнів, розвитку їхньої пізнавальної активності та формування стійкого інтересу до вивчення математики.

Таким чином, створена класифікація дає змогу глибше дослідити питання впливу евристик на управління процесом навчання математики, формування прийомів евристичної діяльності.

Також, у свої публікації О. І. Скафа присвячувала проблемі формування *навчально-пізнавальної евристичної діяльності* учнів в умовах впровадження сучасних технологій навчання. Автором розроблено й науково обґрунтовано сучасну концепцію формування прийомів евристичної діяльності й вперше в Україні введено методичну систему *евристичного навчання математики* [19].

Оволодіння учнями евристичними вміннями, на думку О. І. Скафи [19], відбувається в ході проходження певних етапів навчально-пізнавальної евристичної діяльності.

О. І. Скафа визначила місце й роль навчально-пізнавальної евристичної діяльності у процесі навчання математики, її характерні ознаки; розглянула навчально-пізнавальну евристичну діяльність як цілісну систему, в якій виділяються такі компоненти: змістовий, операційно-процесуальний, мотиваційний, організаційний і методологічний, з одного боку, та мету, продукти, способи й задачі – з іншого.

1.2. Роль і місце евристичних умінь у процесі навчання математики

У педагогічній та психологічній науці розвиток особистості традиційно пов'язується з рівнем сформованості систематизованих знань. Багато науковців розглядають знання як фундамент будь-якої діяльності, адже без них неможливе формування вмінь. Водночас знання виступають не лише передумовою, а й засобом і результатом творчої діяльності. Однак їх значущість визначається не самим фактом засвоєння, а функціонуванням знань у мисленні, здатністю особистості на їх основі виробляти власні практичні рішення та застосовувати їх у нових ситуаціях.

У педагогіці відсутній єдиний підхід до визначення поняття «уміння». Так, Ю. К. Бабанський подає узагальнене визначення, відповідно до якого уміння розглядається як спроможність успішно виконувати дії на основі набутих знань для розв'язування поставлених задач відповідно до заданих умов [1]. Подібної позиції дотримується і сучасна педагогічна термінологія. Зокрема, у педагогічному словнику зазначається, що уміння – це спроможність ефективно виконувати дії (діяльність) відповідно до мети й умов, у яких доводиться діяти [14].

У низці наукових джерел поняття уміння розкривається через володіння певними прийомами діяльності. Такий підхід є близьким до діяльнісної теорії навчання. У сучасному трактуванні, з позицій теорії діяльності, як зазначає З. І. Слєпкань [22], будь-яка дія здійснюється за допомогою операцій, причому одна й та сама дія може реалізовуватися різними операціями. Способи діяльності, які засвоюються учнями, поступово трансформуються у навички й уміння. Навичка розглядається як операція, спосіб виконання якої доведений до автоматизму та майже не контролюється свідомістю (наприклад, навички лічби, читання, виконання арифметичних дій). На стадії навички дія стає швидшою й точнішою, але не усвідомлюється повністю, оскільки підпорядковується загальній меті діяльності.

На відміну від навички, уміння є складнішою психолого-педагогічною категорією. Воно являє собою дію, що складається з упорядкованої сукупності операцій (навичок), об'єднаних спільною метою. Уміння включає знання теоретичних основ дії (поняття, закони, теорії), способів її виконання, їх змісту та послідовності, а також елементи творчого підходу. Уміння може бути сформоване з різним ступенем досконалості, проте його виконання завжди перебуває під свідомим контролем. Отже, у межах діяльнісного підходу навички розглядаються як первинні операції, тоді як уміння є похідними утвореннями, що складаються з навичок. При цьому навички стосуються способів виконання дій, а не їх цілей і умов.

З огляду на зазначене, у нашому дослідженні ми спираємося на визначення, подане в сучасному педагогічному словнику: уміння – це засвоєний суб'єктом спосіб виконання дії, що забезпечується сукупністю набутих знань і навичок. Уміння формується шляхом вправ і забезпечує можливість виконання дії не лише в стандартних, а й у змінюваних умовах [22]. Таке трактування є особливо важливим у контексті компетентнісного підходу, закладеного в Концепції Нової української школи, де акцент робиться на здатності учнів застосовувати знання в реальних життєвих ситуаціях.

У структурі математичної компетентності особливе місце належить евристичним умінням. Саме вони забезпечують перехід від репродуктивної діяльності до продуктивної, пошукової та творчої. У своїх дослідженнях О. І. Скафа виділяє три рівні сформованості евристичних умінь:

- низький рівень – учні здійснюють близьке перенесення евристик (дії за зразком), потребують значної допомоги з боку вчителя, діяльність евристичного характеру викликає у них слабкий інтерес;
- середній рівень – учні здатні переносити евристики в подібні ситуації, потребують незначної допомоги вчителя, виявляють інтерес до евристичної діяльності, проте він має нестійкий характер;
- високий рівень – учні здійснюють подальше перенесення евристик переважно самостійно, виявляють стійкий інтерес до евристичної діяльності

[19].

Поступове ускладнення самостійної роботи учнів і зменшення педагогічної підтримки забезпечує перехід з одного рівня сформованості евристичних умінь на інший. Такий підхід узгоджується з ідеями НУШ щодо педагогіки партнерства та поступового зростання навчальної автономії учнів.

Оволодіння евристичними вміннями має значну пізнавальну цінність, оскільки вони виконують низку важливих функцій. Освітня (пізнавальна) функція полягає в тому, що евристичні вміння дають змогу учням самостійно здобувати нові знання на основі вже наявних, опановувати евристичні прийоми й способи діяльності, розширювати кругозір, здійснювати систематизацію та узагальнення навчального матеріалу. Виховна функція проявляється у формуванні вмінь раціонально організовувати розумову діяльність, розвитку самостійності й відповідальності за результати власного навчання. Розвивальна функція пов'язана з розвитком евристичного мислення, пізнавального інтересу, потреби в нових знаннях, вміння міркувати та аргументувати. Евристична функція полягає в тому, що, оволодівши евристичними вміннями, учні набувають здатності самостійно «відкривати» нові знання й опановувати нові прийоми діяльності [22].

Формування евристичних умінь учнів нерозривно пов'язане з евристичними задачами, які виступають основним засобом організації евристичної діяльності. У межах нашого дослідження під евристичною задачею розуміємо таку навчальну задачу, яка передбачає самостійне формулювання способу її розв'язання, у процесі чого учень потрапляє в ситуацію необхідності виявити власну евристичну позицію.

Розв'язування евристичних задач і їх систем сприяє становленню інтелектуально-творчої та евристичної діяльності учнів. Такі задачі створюють умови для формування евристичних ситуацій актуалізації, орієнтування, пошуку, перетворення й інтеграції знань, а також забезпечують використання різних евристичних прийомів у процесі формування математичних понять, вивчення теорем, розв'язування задач і моделювання

реальних процесів. Саме такі вміння перевіряються в міжнародному дослідженні PISA, де оцінюється здатність учнів застосовувати математичні знання в нестандартних, життєвих ситуаціях.

Розглядаючи проблему пошуку розв'язання нестандартних задач, А.А. Столяр наголошує на необхідності врахування «евристичної» інформації, закладеної в умові задачі, яка підказує перспективний напрям пошуку. Цей процес регулюється системою евристичних і спеціальних прийомів. Завдання вчителя полягає в тому, щоб допомагати учню самостійно розв'язувати задачі, поступово підводячи його до самостійного відкриття. Подібної позиції дотримується і З. І. Слєпкань, яка зазначає [22], що ефективним засобом керування розумовою діяльністю учнів під час розв'язування нестандартних задач є ознайомлення їх з евристичними схемами пошуку розв'язання певним методом.

Педагогічна взаємодія в процесі розв'язування евристичних задач, спрямована на стимулювання становлення евристичної діяльності учнів, передбачає поетапне вдосконалення педагогічної діяльності в напрямі її технологізації. На першому етапі евристичні задачі використовуються ситуативно для досягнення різних дидактичних цілей уроку: актуалізації знань, підготовки до сприйняття нового матеріалу, диференціації навчання, контролю й оцінювання. На другому етапі з метою розвитку пізнавальної самостійності застосовуються різні форми організації діяльності: усна робота, діалогічна співпраця, групова робота. На третьому етапі реалізується принцип «розвитку задачі», що стимулює активну пізнавальну самодіяльність учнів. Четвертий етап передбачає творче застосування методики, її адаптацію до індивідуального стилю роботи вчителя та подальше вдосконалення [24].

Розвиток евристичних умінь у процесі розв'язування евристичних задач сприяє підвищенню рівня загальних математичних умінь учнів. Проте їх головна цінність полягає в тому, що сформовані евристичні вміння допомагають учням впевненіше підходити до розв'язування не лише нестандартних математичних задач, а й особистісних проблем. Адже як

математичні, так і життєві проблеми мають спільні риси, зокрема у способах їх розв'язування.

Евристичні уміння є важливими для подальшого навчання в старшій школі та для розв'язування реальних життєвих ситуацій. Учень, який володіє такими уміннями, виявляється готовим до пошуку відповіді в умовах невизначеності, здатним актуалізувати відомі способи діяльності та добирати адекватні прийоми для розв'язування конкретної проблеми. Він не просто відтворює готові алгоритми, а свідомо здійснює пошук, що є особливо актуальним у сучасному мінливому світі.

Евристичні уміння мають вагомe значення у процесі самостійного здобуття нових знань. Оволодіння ними можливе лише в умовах самостійної навчально-пізнавальної евристичної діяльності, що передбачає наявність мотивів, пізнавальних потреб, інтересу, вольових зусиль і здатності застосовувати знання в нових ситуаціях. Саме тому показником сформованості евристичних умінь може виступати пізнавальна самостійність учнів.

Узагальнюючи викладене, у нашому дослідженні під евристичними уміннями будемо розуміти уміння здійснювати цілеспрямований пошук розв'язування евристичної задачі шляхом використання евристичних прийомів. Застосування евристичних умінь на практиці розглядаємо як процес усвідомленого, самостійного й творчого пошуку розв'язування певної проблеми (зокрема математичної задачі) за допомогою евристичних прийомів, спрямований на пізнання навколишньої дійсності.

1.3. Методичні вимоги до формування евристичних умінь школярів на уроках математики

Сучасні освітні тенденції дедалі більше підкреслюють значення орієнтації навчального процесу на особистість учня, врахування та розвиток

його індивідуальних потреб і здібностей, а також реалізацію ідей гуманізації освіти. Багато педагогів і математиків трактують це як зміщення акцентів у меті навчання, зокрема математичного, від простого засвоєння знань до формування пізнавальної самостійності та творчого потенціалу школярів, що відповідає принципам компетентнісного підходу та орієнтації на результати навчання, закладені в рамках НУШ і міжнародних досліджень PISA.

Як зазначає О. І. Скафа [19], для евристичного навчання математики характерним є визначення навчальних цілей через активну діяльність учнів та частково через внутрішні процеси інтелектуального розвитку. Оскільки навчально-пізнавальна евристична діяльність, подібно до будь-якої іншої навчальної діяльності, передбачає виконання чітко окреслених дій, перетворення мети на конкретні дії дозволяє здійснювати ефективну діагностику та управління процесом засвоєння учнями знань, умінь і навичок, а також сприяє розвитку їх мислення.

Отже, методичні вимоги до формулювання цілей на евристичному занятті полягають у спрямуванні їх на формування евристичних умінь, які відповідають цілям вивчення теми та забезпечують розвиток критичного та творчого мислення. Саме ці цілі організації евристичного навчання математики визначають основу для вибору його змісту.

На думку М. І. Бурди [3], однією з ключових задач удосконалення методичних систем навчання математики є розробка змісту математичної освіти, приведення його у відповідність до потреб особистості та вимог сучасного суспільства. Реалізацію цієї задачі слід здійснювати, спираючись на цілі навчання та принципи гуманізації, гуманітаризації, індивідуалізації та диференціації освітнього процесу.

У нашому дослідженні виділено такі методично обґрунтовані вимоги до змісту занять з математики. По-перше, зміст навчання має відповідати принципу соціальної ефективності, що дозволяє адекватно математизувати практичні ситуації та успішно опановувати сучасні інформаційні технології. По-друге, під час підбору навчального матеріалу необхідно враховувати

принцип розвивальної функції навчання, який передбачає реалізацію діяльнісного підходу та сприяє інтенсифікації навчального процесу. Принцип розвивальної функції орієнтує навчання не лише на застосування готових знань, а й на створення педагогічних ситуацій, які стимулюють самостійне відкриття учнями математичних закономірностей [3], що узгоджується з ідеями компетентнісного підходу та вимогами PISA щодо розвитку критичного мислення.

У зв'язку з цим важливою методичною умовою для змісту факультативу є переважання відкритих завдань, які не мають однозначного алгоритму виконання. Такі завдання принципово відрізняються від традиційних вправ, тестів і задач із «правильними» відповідями, що порівнюються із заданим зразком. Результат виконання відкритого завдання завжди індивідуальний і відображає рівень творчого самовираження учня, на відміну від просто правильної відповіді.

По-третє, зміст навчання повинен бути пізнавально привабливим, цікавим і захоплюючим, щоб підтримувати в учнів стійкий інтерес до факультативних занять. По-четверте, при формуванні змісту слід враховувати принцип навчання на оптимальному рівні складності, пропонуючи завдання в межах зони найближчого розвитку учнів. По-п'яте, зміст має прямо відповідати своєму призначенню – формуванню евристичних умінь; тобто під час опанування навчального матеріалу учні мають засвоювати відповідні прийоми евристичної діяльності.

Створення учнем власного освітнього продукту (термін А. В. Хуторського) можливе лише за умови надання йому змоги безпосереднього пізнання реального освітнього об'єкта, а потім – знайомства з уже існуючими знаннями людства [24]. Наприклад, під час експериментів із дзеркалами на занятті «Дослідницька робота. Експерименти з дзеркалами» у межах факультативу «Евристики в геометрії» учень спершу досліджує зміни предмета при дзеркальному відображенні, помічає особливості цього процесу, формулює власні запитання і проблеми, і лише після цього ознайомлюється з

навчальним посібником або слухає пояснення вчителя. Такий підхід запобігає догматичному передаванню інформації, що не пов'язана з діяльністю учня, і сприяє формуванню його індивідуальної освітньої траєкторії.

В евристичному навчанні математики зміст значно розширюється та поглиблюється шляхом включення спеціальних евристичних задач, розв'язування яких потребує застосування певного переліку евристичних прийомів. Використання таких завдань стимулює розвиток навчально-пізнавальної евристичної діяльності учнів і, як наслідок, формування їх евристичних умінь. Залучення до змісту завдань на застосування різних евристик створює основу для глибокого розуміння матеріалу та сприяє розвитку інтелектуальної й творчої активності школярів. **Наприклад**, задача «Знайти всі числа x , для яких виконується нерівність $|x - 5| < |x + 4|$ » для учнів 7 класу є евристичною, тому на занятті факультативу за темою «Модуль числа» учні зможуть її розв'язати, використовуючи евристичний прийом «переформулювання задачі: заміна її рівносильною задачею, але більш простою». Знаючи геометричний зміст числа $|x - 5|$ – відстань на числовій осі між точкою x і точкою 5; число $|x + 4|$ або $|x - (-4)|$ – відстань від точки x до точки -4 , задачу можна переформулювати так: «Знайти всі точки координатної осі, які розміщені ближче до точки 5, ніж до точки -4 ». Оскільки посередині між точками 5 і -4 знаходиться точка $\frac{1}{2}$, то відповідь:

$$x > \frac{1}{2}.$$

У сучасній педагогічній практиці, що відповідає компетентнісним стандартам освіти (зокрема вимогам НУШ та міжнародним орієнтирам PISA), виділяють такі групи методів навчання:

1. **Інформаційно-репродуктивні методи**, що передбачають передачу знань і базових умінь (усний виклад, пояснення, демонстрація прикладів). Ці методи формують базові знання, необхідні для подальших творчих дій.

2. **Проблемно-орієнтовані методи**, що стимулюють мислення через постановку проблемних питань і задач. Вони включають метод проблемного викладу, проблемні завдання, організацію дискусій та аналіз навчальних ситуацій.

3. **Пошукові та евристичні методи**, які спрямовані на самостійний пошук учнями шляхів розв'язання проблем, формулювання гіпотез і їх перевірку. До них належать частково-пошукові стратегії, евристична бесіда, метод дослідницьких завдань, метод проєктів, метод моделювання та інші. Ці методи сприяють розвитку творчого мислення й умінню застосовувати знання в нових ситуаціях.

4. **Дослідницькі методи**, що забезпечують організацію діяльності учнів із постановкою власних питань, плануванням дослідження, здійсненням експериментальної роботи та інтерпретацією результатів. Такі методи максимально активізують інтелектуальну діяльність учнів та закладають основу наукового способу мислення.

Кожна із зазначених груп методів має своє функціональне призначення у формуванні евристичних умінь. Інформаційно-репродуктивні методи створюють основу предметних знань, без яких неможливе глибоке розуміння математичного матеріалу. Проблемно-орієнтовані та пошукові методи сприяють формуванню пізнавальної самостійності та здатності до самостійного пошуку розв'язань, що є центральними у контексті компетентнісного підходу в освіті.

Уроки, організовані на основі проблемного та пошукового навчання, забезпечують більш глибоку інтеграцію знань, умінь і способів діяльності, що необхідні для успішної участі учнів у вирішенні реальних життєвих задач — аспект, який оцінюється й міжнародними освітніми оцінюваннями PISA, де високий рівень математичної грамотності передбачає здатність застосовувати математичне мислення в нових контекстах.

Отже, у нашому дослідженні ми розглядаємо методи навчання не як статичні прийоми, а як *комплексні способи організації навчально-пізнавальної*

діяльності, що сприяють формуванню евристичних умінь через поєднання репродуктивних, проблемних, пошукових і дослідницьких підходів.

Організація та управління евристичною діяльністю учнів неможливі без використання різноманітних форм навчання. У педагогічній літературі та практиці виділяють такі традиційні форми організації навчально-виховного процесу: уроки (лекції, семінари, практикуми з розв'язування задач, диспути, конференції), навчально-практичні заняття, екскурсії та дидактичні ігри.

Серед цих форм особливу увагу слід приділити тим, що найбільше стимулюють розвиток евристичних умінь. Зокрема, **заняття-дискусії** спрямовані на обговорення суперечливих питань, проблемних ситуацій і альтернативних підходів у розв'язанні задач, що активно формує навички критичного мислення та самостійного висновку. Учитель підтримує учнів у процесі формулювання власних думок та розвитку співпраці між ними, сприяючи їхній соціально-комунікативній компетентності.

Практичні заняття орієнтовані на включення учнів у різні види самостійної діяльності через застосування системних знань. Практична діяльність забезпечує застосування знань і умінь у реальних або змодельованих ситуаціях. Основними формами є практичні та лабораторні роботи: на лабораторних заняттях переважає формування експериментальних умінь, на практичних – конструктивних. Наприклад, для організації евристичної ситуації на факультативі за темою «Моделювання. Розв'язування задач із практичним змістом» учням 7 класу пропонується групова лабораторна робота: «Освітлення кімнати вважається нормальним, якщо площа вікон становить не менше 0,2 площі підлоги. Визначте, чи нормальне освітлення вашого класу». Для практичних робіт доцільна групова форма (3–4 учні), яка сприяє розвитку навичок колективної роботи.

Особливе місце займають **уроки з розв'язування задач**, що включають: задачі різними способами, математичні софізми, самостійне складання задач, конкурс-змагання «Хто більше?» та інші інтерактивні форми.

В евристичному навчанні застосовуються також **специфічні форми занять**, які доповнюють традиційні. Серед них: евристичні лекції, евристичні семінари, евристичні ситуації, евристичні «занурення», самонавчання, дослідницькі роботи та евристичні проекти. Ці форми часто комбінуються: наприклад, евристична лекція може бути частиною евристичного «занурення».

Евристична лекція передбачає, що учитель, викладаючи матеріал, допомагає учням створювати нові знання, формулювати проблеми та робити власні відкриття. Евристичний ефект досягається за рахунок добору змісту, цілей і структури лекції та спеціально сформульованих завдань: порівняти поняття, скласти власний план лекції, придумати запитання чи зробити власні висновки.

Евристичний семінар орієнтований на обговорення результатів учнівської діяльності і створення особистих освітніх продуктів. Учні вчаться виступати з повідомленнями, дискутувати, аргументувати свої судження, що стимулює розвиток евристичних умінь та культури спілкування.

Евристична ситуація – форма навчання, у якій учень потрапляє в стан перевідкриття знань і створює методологічні чи навчальні продукти самостійно. Мета – народження власного освітнього результату (ідей, гіпотез, схем) у процесі спеціально організованої діяльності. Учитель організовує освітній простір, створює проблемну ситуацію та супроводжує діяльність, але не визначає наперед конкретних результатів. Цикл евристичної ситуації включає: мотивацію, проблемну ситуацію, індивідуальне розв'язання проблеми, демонстрацію продуктів, порівняння з культурно-історичними аналогами та рефлексію результатів.

Евристичне «занурення» передбачає серію занять з єдиною освітньою домінантою, що дозволяє учням глибоко опанувати тему, реалізувати індивідуальні творчі здібності та створити власну систему знань. Навчання може бути організоване через історичні події, наукову діяльність учених або математичні теорії.

Контроль та оцінювання евристичної діяльності відрізняються від традиційного підходу. Якщо раніше оцінка базувалася на точності відтворення знань, то в евристичному навчанні враховується оригінальність і творча продуктивність освітнього продукту учня. Це відповідає сучасним стандартам НУШ та вимогам компетентнісного підходу, а також сприяє розвитку критичного та творчого мислення, що оцінюють міжнародні дослідження PISA.

Рефлексія та самооцінка є невід’ємною частиною процесу. Поточна рефлексія відбувається під час занять, а підсумкова – після завершення курсу. Самооцінка включає якісні та кількісні параметри, порівнюється з культурно-історичними аналогами та оцінками вчителя, однокласників чи незалежних експертів.

Важливим є також **рівнева диференціація завдань та допомоги учням**: учні з високим рівнем евристичних умінь виконують завдання самостійно або «розвивають задачу», учням середнього рівня надається евристичний припис, а учням з низьким рівнем – евристичний орієнтир.

Отже, виважена організація навчального процесу на заняттях з математики сприяє формуванню особистого освітнього досвіду учнів та розвитку навчально-пізнавальної евристичної діяльності, що, у свою чергу, забезпечує становлення творчої особистості на відповідному етапі розвитку.

РОЗДІЛ 2. Шляхи формування евристичних умінь учнів на уроках математики

2.1. Формування евристичних прийомів розумової діяльності на уроках математики

Одним із важливих завдань навчання математики є ознайомлення учнів із різноманітним евристичними прийомів цілеспрямованого пошуку способів розв'язування задач. Такі прийоми задають загальний напрям мислення, однак не забезпечують автоматичного отримання правильного результату. Евристичні уміння передбачають оволодіння відповідними евристичними прийомами розумової діяльності, які активізують пізнавальну самостійність учнів і стимулюють їх творчу активність.

Метою евристичних прийомів розумової діяльності є виявлення загальних закономірностей мисленнєвих процесів, що відбуваються під час розв'язування проблем різного характеру, незалежно від їх предметного змісту. Саме ці прийоми забезпечують універсальність мислення та можливість перенесення набутих способів діяльності в нові навчальні й життєві ситуації.

Вагому роль у процесі «відкриття» математичних понять і розв'язування задач відіграють евристичні прийоми розумової діяльності загального характеру. До них належать загальні прийоми (аналіз, синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, класифікація, систематизація, аналогія, індукція) та специфічні прийоми (підведення під поняття, виведення наслідків). Застосування цих прийомів сприяє глибшому осмисленню навчального матеріалу й формуванню в учнів умінь оперувати математичними знаннями на різних рівнях узагальнення.

Особливе місце серед названих евристичних прийомів посідають аналіз і синтез. Вони мають визначальне значення у процесі засвоєння школярами вивідних знань, оскільки саме з аналізу та синтезу розпочинається пізнання

будь-якого явища, факту, процесу чи об'єкта. У ході навчання учень має навчитися виявляти не лише зовнішні, очевидні ознаки та властивості, а й приховані, суттєві характеристики, які можуть бути встановлені лише в результаті глибокого й всебічного аналізу та синтезу.

Важливою формою мисленнєвої діяльності є аналіз через синтез. Його сутність полягає в тому, що об'єкт у процесі мислення включається у все нові й нові зв'язки, унаслідок чого він постає перед учнем у різних аспектах і набуває нових якостей. Таким чином, з об'єкта ніби поступово «вичерпується» новий зміст: він кожного разу розкривається з іншого боку, а в його структурі виявляються нові властивості й відношення. Саме такий підхід забезпечує поглиблене розуміння математичних понять і створює умови для формування евристичних умінь учнів.

Евристичні завдання, спрямовані на застосування прийому аналізу через синтез, можуть мати такий характер:

- охарактеризуйте об'єкти А і В, виокремивши їх істотні ознаки;
- визначте можливі зв'язки, якими можуть бути поєднуватися об'єкти А та В;
- встановіть нові якості об'єкта А, що виявляються в результаті його взаємозв'язку з об'єктом В;
- з'ясуйте, чи спостерігаються нові властивості об'єкта А за умов включення його в зазначену систему зв'язків.

Прикладом реалізації прийомів **аналізу та синтезу** можуть слугувати спеціально дібрані задачі евристичного факультативу з математики для учнів 7 класу.

Задача 1. Розділіть двома прямими прямокутник так, щоб у результаті утворилися два трикутники і два п'ятикутники.

Задача 2. Розмістіть на площині шість точок таким чином, щоб при послідовному з'єднанні першої точки з другою, другої з третьою і т. д., а шостої — знову з першою, кожний із шести відрізків рівно один раз перетинався з будь-яким іншим відрізком.

З метою формування в учнів уміння аналізувати умову задачі доцільно систематично пропонувати задачі з несформульованим запитанням, а також задачі з недостатніми або зайвими даними.

Задачі з несформульованим запитанням

У задачах цього типу запитання не формулюється ні прямо, ні опосередковано, проте воно логічно випливає з наведених у задачі математичних відношень. Робота з такими задачами сприяє розвитку вміння осмислювати умову, висувати гіпотези та самостійно формулювати мету розв'язування.

Учням пропонується проаналізувати кожну задачу за таким планом:

- а) сформулювати приховане (несформульоване) запитання;
- б) розв'язати задачу;
- в) визначити гіпотези, що виникали в процесі міркувань;
- г) обґрунтувати, якими міркуваннями зумовлене саме таке формулювання запитання.

Задачі і вправи

1. У трикутнику перший кут на 30° більший, ніж другий, а третій кут на 20° менший, ніж перший.
2. У прямокутнику точка перетину діагоналей розташована на відстані, що на 6 см більша від меншої сторони, ніж від більшої. Периметр прямокутника дорівнює 44 см.
3. Дано квадрат. Якщо одну його сторону зменшити на 1,2 м, а іншу — на 1,5 м, то площа утвореного прямокутника буде на $14,4 \text{ м}^2$ меншою за площу квадрата.

Задачі з недостатніми даними

У задачах цього виду відсутні деякі необхідні умови, унаслідок чого отримати однозначну відповідь неможливо. Лише після введення додаткових даних задача стає коректною і розв'язуваною. Аналіз таких задач формує в учнів уміння критично оцінювати повноту умови.

Розглянемо приклад.

Задача 3. Обчисліть сторону квадрата з площею 64 см^2 . Обчисліть сторону прямокутника з площею 36 см^2 .

За цією задачею доцільно провести евристичну бесіду:

- Чи можемо ми розв'язати першу задачу?
- Так, оскільки у квадрата всі сторони рівні. Складаємо рівняння $x^2=64$, з урахуванням того, що сторона – додатне число, отримуємо $x=8 \text{ (см)}$.
- Чи так само легко розв'язується друга задача?
- Ні, оскільки у прямокутника сторони не обов'язково рівні.
- Якої інформації бракує?
- Необхідно знати довжину однієї зі сторін прямокутника або співвідношення між ними.

Задачі з зайвими даними

У задачах цього типу містяться додаткові, непотрібні відомості, які не впливають на розв'язання, але ускладнюють аналіз умови та маскують істотні дані.

Задача 4. Маємо рівнобедрений трикутник, одна його сторона дорівнює 2 см , друга – 10 см , третя дорівнює одній з двох даних. Знайдіть третю сторону.

У процесі евристичної бесіди доцільно поставити такі запитання: що дано? що потрібно знайти? чи узгоджується умова задачі? чи визначається шукане даними задачі? чи є серед них зайві або суперечливі? У результаті аналізу з'ясовується, що твердження «третя дорівнює одній з двох даних» є зайвим.

Учням пропонується самостійно розв'язати подані нижче задачі, проаналізувати кожную з них, визначити недостатні та зайві дані, а також переформулювати умову так, щоб задача стала коректною (у дужках подано недостатні дані, зайві – підкреслено).

Задачі і вправи

1. У рівнобедреному трикутнику дві сторони відносяться як $3 : 8$. Знайдіть сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 38 см , а одна сторона на 10 см більша за іншу, причому сторони трикутника — цілі числа.

2. Дано два кола, радіус одного з них дорівнює 3 см, відстань між центрами – 10 см. Чи перетинаються вони? *(Потрібно знати радіус другого кола.)*

3. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона менша за основу. Периметр трикутника — 31 см. Знайдіть довжини сторін. *(Необхідно знати довжину однієї зі сторін або співвідношення між основою і бічною стороною.)*

4. Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 3. Знайдіть їх довжини. *(Потрібно знати периметр або довжину хоча б однієї сторони.)*

Домашнє завдання. Доберіть або складіть власні приклади задач: коректних, некоректних, з недостатніми та зайвими даними. Проаналізуйте їх, визначте характер даних та розв'яжіть.

Здатність до аналітико-синтетичної діяльності виявляється не лише в умінні виокремлювати окремі елементи об'єкта або поєднувати їх у цілісну систему, а й у здатності включати об'єкт у нові зв'язки, відкривати його нові функції та властивості. Формуванню таких рис творчого мислення сприяють завдання, у яких один і той самий об'єкт розглядається з позицій різних понять, а також постановка різноманітних запитань до певного геометричного об'єкта.

Приклад. Для розвитку вмінь перебору варіантів, аналізу й синтезу учням можна запропонувати такі завдання:

1. Побудуйте квадрат:
 - а) за двома заданими вершинами;
 - б) за серединами двох протилежних сторін;
 - в) за серединами двох суміжних сторін;
 - г) за центром квадрата і точкою, що лежить на одній із його сторін.

Під час розв'язування подібних задач учні здійснюють розгорнуті міркування, послідовно аналізуючи різні можливі варіанти розміщення заданих точок і обґрунтовуючи доцільність кожного з них.

2. Два селища А і В розташовані по різні боки річки та на неоднакових

відстанях від її берегів. У якому місці доцільно побудувати перехідний міст через річку, щоб він був однаково віддалений від обох селищ? (*Береги річки вважати паралельними прямими.*)

3. Два села А і В розміщені на одному березі річки, але на різних відстанях від неї. Де слід збудувати міст, щоб відстань до кожного із селищ була однаковою?

4. Дано кут 36° . Проаналізуйте, яким чином за допомогою циркуля і лінійки, використовуючи основні задачі на побудову, можна побудувати кут 99° .

5. Дано кут 54° . Як, користуючись циркулем і лінійкою, поділити його на три рівні кути?

6. Побудуйте трикутник зі сторонами a , b і c , якщо задані відрізки $a+b$, $b+c$ і $a+c$.

7. Відрізок АВ розташований уздовж краю аркуша паперу. Потрібно провести до нього перпендикуляр через середину відрізка. Як це зробити?

8. Вершина С трикутника АВС не вмістилася на кресленні. Побудуйте основи висоти та бісектриси, проведених з вершини С.

9. Дано дві точки А і В. Як за допомогою циркуля і лінійки провести через них пряму, якщо довжина лінійки менша за відстань між точками?

10. Дано коло радіуса 3 см і точку А, розташовану на відстані 5 см від центра кола. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до даного і має центр у точці А.

11. На площині задано два кола. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до обох даних кіл і має центр на прямій, що проходить через їхні центри, якщо радіуси заданих кіл і відстань між їхніми центрами відповідно дорівнюють 5, 2 і 1.

12. У вершинах трикутника розміщено центри трьох кіл, які попарно дотикаються. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо сторони трикутника дорівнюють 5, 6 і 7. Скільки розв'язків має задача?

Домашнє завдання. Розв'яжіть задачу. Вершина А трикутника АВС не

вмістилася на рисунку. Як побудувати висоту цього трикутника, опущену на сторону ВС?

Аналіз і синтез відіграють особливо важливу роль у формуванні евристичної діяльності учнів, оскільки вміння аналізувати є одним із провідних прийомів мислення людини та основою свідомого розв'язування навчальних і пізнавальних задач.

Невід'ємною складовою навчально-пізнавальної діяльності школярів є також *порівняння* об'єктів і способів розв'язання задач з метою виявлення аналогій, перенесення властивостей відомих об'єктів у нові умови, а також зіставлення різних підходів до розв'язання. Саме тому дія порівняння лежить в основі формування значної кількості евристичних умінь і виступає засобом встановлення зв'язку між новими та вже засвоєними знаннями.

Порівняння — це розумова дія, у процесі якої встановлюються спільні та відмінні ознаки предметів і явищ. Особливо доцільно застосовувати цей прийом під час вивчення споріднених понять, наприклад подільності натуральних чисел і подільності многочленів.

Формування вміння користуватися прийомом порівняння доцільно здійснювати поетапно:

1. виділення ознак і властивостей одного об'єкта;
2. встановлення подібності або відмінностей між ознаками двох об'єктів;
3. виявлення спільних рис між ознаками трьох, чотирьох і більшої кількості об'єктів.

Таке поступове ускладнення сприяє розвитку мислення учнів, збагаченню їхнього пізнавального досвіду та вдосконаленню самого вміння порівнювати.

Показником сформованості прийому порівняння є здатність учнів самостійно застосовувати його під час розв'язування різних задач без спеціальних вказівок типу «Порівняй...», «Вкажи ознаки...», «У чому подібність і відмінність...».

Евристичні завдання на порівняння можуть мати такий характер:

1. чим відрізняється об'єкт А від об'єкта В;
2. яких властивостей не має об'єкт А порівняно з об'єктом В;
3. які додаткові властивості притаманні об'єкту А порівняно з об'єктом В;
4. у чому полягає відмінність між формулюваннями задач або тверджень тощо.

На заняттях математичного факультативу після розв'язування однієї задачі кількома способами учням систематично пропонується порівняти отримані розв'язання з метою вибору найбільш простого, наочного та раціонального.

У випадку недостатньої сформованості в окремих учнів уміння порівнювати доцільно організувати їхню самостійну роботу з системою корекційних евристичних вправ з математики (для учнів 7 класів), починаючи з найпростіших завдань.

1. Який з малюнків на рис. 2.1 «зайвий»? Чому?

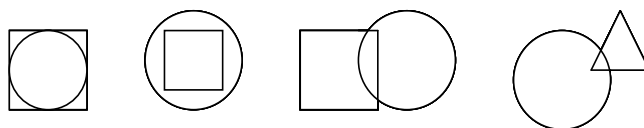


Рис.2.1

2. Що спільного та в чому різниця геометричних фігур, зображених на рис. 2.2?

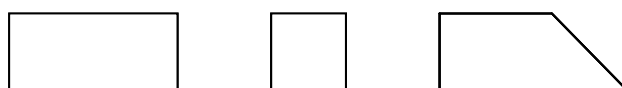


Рис.2.2

Під час розв'язування практично зорієнтованих задач учні мають справу не з реальними об'єктами, а з їхніми моделями. Для розв'язання прикладної задачі вони насамперед будують *математичну модель* ситуації, а вже потім досліджують її шляхом розв'язування відповідної математичної задачі. Така діяльність передбачає необхідність виокремлення в предметах і явищах істотних для даного дослідження властивостей та свідомого відволікання від другорядних, тобто використання *прийому абстрагування*.

Процес створення інновацій і пошуку нових ідей завжди пов'язаний із

варіюванням властивостей, ознак і характеристик об'єктів під час їх дослідження. У зв'язку з цим виникає потреба в *узагальненні та систематизації* причин, наслідків і результатів дослідницької діяльності, що зумовлює особливу значущість відповідних евристичних прийомів розумової діяльності.

Узагальнення розглядається як розумова дія, спрямована на виявлення істотної спільної властивості, притаманної певній множині об'єктів і такої, що об'єднує їх у єдине ціле. Водночас педагогічні спостереження засвідчують, що більшість учнів не здатні самостійно й усвідомлено застосовувати цей прийом. З метою подолання зазначених труднощів доцільною є організація самостійної роботи школярів із системою корекційних евристичних вправ. У додатку А подано систему таких вправ для учнів 7 класів, спрямовану на оволодіння прийомом узагальнення.

Систематизація як прийом розумової діяльності полягає в упорядкуванні об'єктів, що вивчаються, у певну систему на основі визначеного принципу. Застосування цього прийому на уроках математики є особливо ефективним під час вивчення таких тем, як «Елементи теорії подільності» (7 клас), «Системи лінійних рівнянь» (8 клас), «Початки теорії рівнянь», «Початкові відомості про функції», «Нерівності. Алгоритмічні й евристичні підходи до їх розв'язання», «Геометричні особливості заданої конфігурації», «Метод координат. Векторний метод» (9 клас). Систематизація як теоретичних фактів шкільного курсу математики, так і евристичних прийомів сприяє формуванню в учнів цілісного бачення навчального матеріалу та його структурованості.

Важливою складовою прийому систематизації є *класифікація*, яка визначається як розумова дія віднесення окремих об'єктів до відповідного класу або роду на основі істотних ознак. Для формування вміння класифікувати доцільно використовувати евристичні завдання такого типу:

1. визначте й проаналізуйте властивості об'єктів А і В
2. запропонуйте об'єкт С, до якого можна віднести об'єкти А і В;

3. встановить співвідношення істотних властивостей об'єктів А, В і С.

Прикладами завдань на застосування класифікації є вправи, наведені в додатку А: з першого рівня — задача 2 (блок «задачі з вказівками до розв'язування») і задача 3 (блок «задачі для самостійного розв'язування»); з другого рівня — задачі 3, 6–7; з третього рівня — задачі 2, 5–7.

Уміння здогадуватися є важливим не лише в процесі навчання математики, а й у повсякденній життєвій діяльності людини. Значну роль у цьому відіграє *аналогія* — розумова дія, спрямована на здобуття нових знань про властивості, ознаки та відношення об'єктів на основі встановлення їх часткової подібності з іншими, уже відомими об'єктами та явищами.

Застосування прийому аналогії сприяє висуванню гіпотез, формуванню здогадки щодо можливих властивостей досліджуваних об'єктів. Такі евристичні уміння, як уміння знаходити спільне в розв'язуванні задач за спільністю їх компонентів, установлювати подібність і відмінність методів розв'язування, визначати орієнтири під час побудови нових об'єктів, ґрунтуються на здатності здійснювати умовиводи за аналогією.

Для формування зазначених умінь доцільно пропонувати учням евристичні завдання такого змісту:

1. розгляньте окремі властивості або відношення об'єкта А;
2. згадайте об'єкт, подібний до об'єкта А, який вивчався раніше;
3. порівняйте властивості першого й другого об'єктів;
4. спробуйте виявити властивості об'єкта А, аналогічні властивостям об'єкта В.

Установлюючи, наприклад, що нове поняття є аналогічним до вже відомого, учень має змогу виокремити спільні властивості цих понять і на цій основі прийти до «відкриття» нових тверджень, теорем або задач, які раніше не розглядалися в процесі навчання.

Наприклад, аналогія може використовуватись на уроці з теми «Ділення многочленів». Учням 7 класу пропонується самостійна робота з табл. 2.1. Протягом 10-15 хвилин учні, ознайомлюючись з таблицею, проводять

аналогію між подільністю натуральних чисел та подільністю многочленів. Потім їм пропонується скласти евристичну схему ділення многочленів n -го ступеня з однією змінною.

Таблиця 2.1

**Проведення аналогії між подільністю натуральних чисел
та подільністю многочленів**

Ділення без залишку та ділення із залишком

Ділення натуральних чисел	Ділення многочленів
<i>ділення без залишку</i>	
$ \begin{array}{r} 1043 \overline{)7} \\ \underline{7} 149 \\ 34 \\ \underline{28} \\ 63 \\ \underline{63} \\ 0 \end{array} $	$ \begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad x + 1 \overline{) } \\ \underline{x^3 + x^2} x^2 + x - 2 \\ x^2 - x - 2 \\ \underline{x^2 + x} -2x - 2 \\ \underline{-2x - 2} 0 \end{array} $
<i>ділення із залишком</i>	
$ \begin{array}{r} 1045 \overline{)7} \\ \underline{7} 149 \\ 34 \\ \underline{28} \\ 65 \\ \underline{63} \\ 2 \end{array} $ Отримуємо остачу 2. Це можна записати так: $1045 = 7 \cdot 149 + 2$	$ \begin{array}{r} 2x^3 + 2x^2 + x + 6 \quad x^2 + 2x + 1 \overline{) } \\ \underline{2x^3 + 4x^2 + 2x} 2x - 2 \\ -2x^2 - x + 6 \\ \underline{-2x^2 - 4x - 2} 3x + 8 \end{array} $ Як тільки степінь чергової різниці – в цьому випадку це $3x + 8$ – стане меншим ніж степінь дільника $x^2 + 2x + 1$, операцію ділення потрібно припинити. $3x + 8$ – остача. Це можна записати у такий спосіб: $ \begin{aligned} 2x^3 + 2x^2 + x + 6 &= \\ &= (x^2 + 2x + 1)(2x - 2) + (3x + 8). \end{aligned} $ Розділити многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ з остачею – означає знайти такі многочлени $Z(x)$ (частку) й $R(x)$
Розділити ціле число p на натуральне число q з остачею –	

означає знайти такі цілі числа n (частку) і r ($0 \leq r < q$), що $p = nq + r.$	(остача, степінь якого є меншим степенем дільника $Q(x)$), при яких виконується рівність: $P(x) = Q(x) \cdot Z(x) + R(x).$
---	--

Важливо звернути увагу учнів на те, що *міркування за аналогією не завжди може розглядатися як доказ*. Твердження, сформульовані на основі аналогії або індуктивного припущення, іноді виявляються хибними. Водночас суттєво, що саме за допомогою аналогії часто вдається отримати правдиві твердження або знайти напрямки для відкриття істинних результатів. Тому першочергове завдання – навчитися *формулювати математичні твердження за аналогією*, не зупиняючись на початковому етапі на оцінці їх правдивості чи хибності. Досягти цього можна лише через *систематичні вправи*, під час яких необхідно чітко уявляти, які фігури або об'єкти та які їхні властивості вважаються аналогічними.

Прикладом можуть слугувати такі задачі.

1. *«У рівносторонній трикутник можна вписати коло». Сформулюйте аналогічне твердження для многокутника. Чи правильне воно?*

Відповідь. «У рівносторонній многокутник можна вписати коло». Це твердження неправильне.

2. *«Якщо в трикутнику всі сторони рівні, то і всі кути рівні». Сформулюйте аналогічне твердження для шестикутника. Чи правильне воно?*

Відповідь. «Якщо в шестикутнику всі сторони рівні, то і всі кути рівні». Воно неправильне, оскільки можна взяти правильний шестикутник, шарнірний, і потім трохи зжати його. Сторони залишаться рівними, а кути шестикутника вже не всі рівні. Отже, сформульоване за аналогією твердження виявилось помилковим.

Оскільки в розв'язуванні будь-якої задачі присутня певна частка «відкриття», то в ньому мусить знайтися місце для здогадки, для правдоподібного умовиводу. Розрізняють два основні види умовиводів: індукцію та дедукцію. *Індукція – умовивід, при якому з двох чи кількох*

одиничних, або часткових суджень одержують нове загальне судження (висновок).

Міркування за індукцією сприяє розвитку в учнів навичок передбачення, прогнозування та гіпотетичного мислення. Учні формують різні гіпотези під час розв'язування прогностичних задач, що ставлять запитання на кшталт: «що буде, якщо ...», «чи завжди ...», «чи правильно, що ...».

Для розвитку таких евристичних умінь, як мислити за індукцією, висувати припущення та гіпотези на основі аналізу кількох часткових випадків, а також помічати загальні закономірності в результаті розгляду ряду окремих випадків і робити узагальнення, можна використовувати спеціально розроблену систему вправ.

Задача 1. За малюнком (рис. 2.3) зробіть індуктивний умовивід щодо спільних властивостей перелічених тварин. Установіть її істинність. Спробуйте скласти подібне завдання і запропонуйте його своєму товаришеві.



Рис.2.3

Передбачувана відповідь. «Баран має роги, козел має роги, бик має роги. Баран, козел, бик – парнокопитні тварини. Висновок: всі парнокопитні тварини мають роги». Цей індуктивний умовивід неправильний, тому що існує порода корів, що відноситься до парнокопитних тварин, але не має рогів.

Задача 2. Дослідіть взаємне розміщення кола та прямої, еліпса та прямої, параболи та прямої. За допомогою висловіть гіпотезу щодо взаємного розташування прямої з кривими лініями другого порядку, установіть її істинність.

Передбачувана відповідь. «Коло перетинає пряму не більше ніж у двох

точках. Еліпс перетинає пряму не більше ніж у двох точках. Парабола перетинає пряму не більше ніж у двох точках. Коло, еліпс, парабола – криві лінії другого порядку. Висновок: усі криві другого порядку перетинають пряму не більше ніж у двох точках». Цей умовивід помилковий, тому що, наприклад, для гіперболи це твердження не правильне.

Аналіз правильних розв’язань математичних задач показує, що обробка інформації, поданої в умові, часто здійснюється з метою отримання різних висновків або наслідків із заданих даних. Важливе місце серед математичних умінь посідає отримання наслідків з умови задачі, що в літературі називають «*виведенням наслідків*». Це передбачає переосмислення елементів малюнка чи об’єкта через призму іншого поняття, їхнє реконструювання або перетворення.

Даний прийом є складовою ширшого підходу, відомого як «*аналіз через синтез*», який охоплює не лише виділення властивостей та елементів об’єкта, а й їхнє логічне поєднання для виявлення нових залежностей і наслідків.

Для того щоб учні оволоділи цим прийомом на практиці, необхідно створювати *евристичні завдання*, у яких використання виведення наслідків реалізується максимально повно, сприяючи розвитку уміння логічно аналізувати й синтезувати інформацію.

Корисні евристичні завдання такого змісту:

- 1) сформулюйте якомога більше наслідків з даних про об’єкт;
- 2) перетворіть об’єкт й отримайте ще якісь наслідки;
- 3) установіть зв’язки між первинним і перетвореним об’єктами.

Цілеспрямоване й систематичне використання учнями *спеціальних евристик* на факультативних заняттях більшою мірою, ніж на уроках математики, сприяє формуванню евристичних умінь. Для підготовки до профільної старшої школи, одержання вищої освіти, підготовки до самостійного прийняття рішень у дорослому житті саме учень основної школи має оволодіти такими уміннями, як «перебирати всілякі можливі підходи до розв’язання проблеми», «обирати найбільш раціональний варіант її

розв'язання» (перебір), «розглядати проблему під різними кутами зору», «переформулювати умову задачі» (переформулювання), «модифікувати, перетворювати об'єкт з появою нових властивостей», «переходити до рівносильної задачі, до більш загальної задачі», «знаходити такі складові об'єкта, розгляд яких полегшує розв'язання» (розбиття «цілого на частини»), «формулювати відношення між невідомими й даними», «використовувати симетрію», «знаходити нову інтерпретацію заданих умов у рамках тієї ж мови», «перевіряти результат задачі за розмірністю тощо», «виділяти часткові випадки», «розбивати задачу на підзадачі», «використовувати ефективну систему позначень», «конструювати нові об'єкти за певною властивістю», «моделювати» тощо. Формування зазначених евристичних умінь відбувається через оволодіння учнями відповідними евристичними прийомами.

Евристичні прийоми дозволяють учням не зосереджуватися на механічному запам'ятовуванні розв'язання кожної задачі окремо. Натомість вони спрямовують на засвоєння методів, ідей та стратегій пошуку розв'язання, які можна застосовувати до широкого кола завдань. Завдяки використанню евристик у школярів формується здатність помічати в розв'язанні однієї задачі підходи та методи, які можна перенести на розв'язування інших задач, що значно розширює їхнє математичне мислення та самостійність.

2.2. Евристичні задачі як засіб формування евристичних умінь

Для вчителя математики важливо навчити учнів творчо мислити, міркувати, відкривати для себе нові закономірності, розвивати інтерес до дослідження. Перераховані якості переважно розвиваються в процесі розв'язування задач.

На думку психологів, саме розв'язування задач посідає центральне місце серед розумових умінь людини. Задача без пошуку розв'язання перестає бути самостійно розв'язаною. Пошук завжди пов'язаний із системою

взаємопов'язаних думок, логічним міркуванням, застосуванням евристик. Проте, як відомо, для отримання бажаного ефекту в навчанні недоцільно використовувати окремо взяті задачі, зокрема це стосується й евристичних задач. Задачі мають складати певну систему, яка забезпечить органічний зв'язок з теоретичним матеріалом, бо останній глибоко розуміється й якісно засвоюється в процесі розв'язування задач.

Управління процесом формування евристичної діяльності учнів (яка, своєю чергою, сприяє ефективному оволодінню евристичними вміннями, самостійному відкриттю нових знань) може бути реалізоване шляхом включення в практику факультативного навчання евристичних задач та систем евристично орієнтованих задач. Систематична робота з такими задачами, і на уроках математики, і в позаурочній роботі (на факультативних заняттях) сприяє глибшому засвоєнню знань і закріпленню умінь застосовувати евристичні прийоми. Засвоївши ці прийоми при розв'язуванні математичних задач, учень в подальшому вже на підсвідомому рівні застосовуватиме їх і в житті.

У дослідженні дотримуватимемося запропонованих О. І. Скафою вимог до системи евристично орієнтованих задач [20]:

1) відбір задач системи повинен відповідати змісту курсу основної школи (7-9 класам) і повноті представлення евристик для учнів певної вікової категорії;

2) задачі системи певною мірою повинні забезпечувати формування в учнів таких властивостей творчої особистості, як здатність до формалізації умови задачі, здатність до узагальнення математичного матеріалу, гнучкість мислення, прагнення до більш раціонального способу розв'язання; а також спрямовувати учнів на «відкриття»;

3) задачі системи повинні відповідати їх функціям у процесі навчання математики, доцільному співвідношенню між логічними й евристичними компонентами на кожному етапі навчання математики;

4) розв'язування задач системи має здійснюватися шляхом виведення

інтуїтивних міркувань на рівень осмислених логічних процесів за схемою «передзнання» – формалізація – «післязнання», забезпечення мотивації цього переходу;

5) відбір задач системи повинен здійснюватися з урахуванням рівня розвитку евристичних умінь учнів;

6) більш легкі й більш знайомі задачі системи повинні передувати менш легким і менш знайомим задачам;

7) вміння розв'язувати задачі одного типу повинно спрощувати розв'язування задач інших типів;

8) система задач має сприяти оволодінню учнями евристичними прийомами.

Опишемо структуру перших систем задач. Задачі системи поділено за чотири блоки: «формалізація матеріалу», «узагальнення», «гнучкість» й «раціональність». Завдання кожного блоку розподіляються за евристичними прийомами пошуку їх розв'язання (біля кожного евристичного прийому в дужках вказано номери задач, пошук розв'язування яких здійснюється за допомогою цих евристик). Крім того, до кожної задачі додається евристична підказка. Як *приклад* наведемо фрагмент такої системи задач до теми «Рівняння з одним невідомим» факультативу «Початки теорії рівнянь».

БЛОК «ФОРМАЛІЗАЦІЯ» (1-7)

«Аналіз задачі» (1-4)

1. Розв'яжіть рівняння: а) $\frac{x}{5} \cdot \frac{625}{x} = 125 + x$; б) $\frac{(\frac{1}{5} - 3x)(x - \frac{2}{15})}{3x - \frac{2}{5}} = 0$.

Евристична підказка. Аналізуйте умову задачі. Виводьте наслідки з умови.

2. Наталя придумала рівняння, яке має один корінь, Оля придумала рівняння, яке має два корені, Андрій – нескінченно багато коренів, а Сергій – жодного кореня. Ось ці рівняння: 1) $2,4(2x+1) - 1,5 = 3(1,6x + 0,3)$; 2) $(4|x+3| - 7) + 33 = 0$; 3) $0,2(4-3x) = 3,2 - 0,1(x-29)$; 4) $|4x+1| = 10,4$.

Вкажіть автора кожного з рівнянь. Відповідь обґрунтуйте.

3. Доберіть число a так, щоб рівняння $x - (2 - x) = 2x + a$ мало хоч би один корінь.

4. Складіть таке рівняння, щоб відразу було видно, що воно має два корені 1 і 2.

«Перехід до рівносильної задачі» (5-7)

5. Розв'яжіть рівняння $x(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$.

Евристична підказка. Модифікуйте, перетворіть рівняння з появою нових властивостей. Використайте рівносильний перехід.

6. Дано многочлен $x^3 - 5x^2 + 8x$. Відомо, що якщо значення x збільшити на одиницю, то значення многочлена не зміниться. Знайдіть це значення x .

Евристична підказка. Переформулюйте задачу.

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 1999$.

Евристична підказка. Перейдіть до рівносильної задачі.

БЛОК «УЗАГАЛЬНЕННЯ» (8-14)

8. Укажіть план розв'язання рівняння $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) = 0$.

Евристична підказка. Узагальніть певний метод міркування.

9. Розв'яжіть рівняння $2^{1000} - 2^{999} - 2^{998} - \dots - 2 + x = 2x$.

Евристична підказка. Шукайте деяку спільну властивість. Узагальніть задачу. Виводьте наслідки.

10. З чотирьох даних рівнянь три володіють деякою спільною властивістю. Знайдіть цю спільну властивість і вкажіть зайве рівняння.

1) $3 \cdot x + 4 = 7$; 2) $18 - 5 \cdot x = 8$; 3) $2 \cdot x - 4 = 20$; 4) $9 - x = 6$.

Евристична підказка. Проаналізуйте дані вирази, шукайте щось спільне, виберіть основу для розбиття даних рівнянь на групи.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$ відносно змінної a .

Евристична підказка. Виразіть одну змінну через інші. Абстрагуйтеся

від решти невідомих.

12. Розв'яжіть рівняння: $6\sqrt{x} - x = 9$.

Евристична підказка. Скористайтеся допоміжною змінною. Перейдіть до рівносильної задачі.

«Інверсія» (13)

13. Розв'яжіть рівняння: $x - \sqrt{x+1} = -1$.

Евристична підказка. Модифікуйте, перетворюйте з появою нових властивостей. Послідовно зводьте заданий в умові об'єкт до потрібного за рахунок побудови ланцюжка моделей.

«Виділення цілої частини дробу» (14)

14. Розв'яжіть рівняння: $\frac{(x+a)(x+b)}{x+a+b} = \frac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$.

Евристична підказка. Скористайтеся прийомом розбиття «цілого на частини». Модифікуйте, перетворюйте з появою нових властивостей. Переходьте до рівносильної задачі.

Системи евристично орієнтованих задач з неявним виділенням блоків задач, які відповідають наведеним вище властивостям творчої особистості, мають простішу структуру: завдання системи розбиті на підтеми, до кожної задачі додано евристичну підказку. У таких системах задач явно не вказуються евристичні прийоми, які можна застосувати під час пошуку їх розв'язання, та явно не виділено задачі, за допомогою яких можна розвивати відповідні властивості творчої особистості. Для **прикладу** наведемо фрагмент такої системи задач до теми «Декартові координати на площині» факультативу «Метод координат. Векторний метод».

Кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої

1. Серед даних прямих укажіть ті, що утворюють гострі кути з віссю Ox , та знайдіть їх значення:

1) $3y - \sqrt{3}x + 17 = 0$; 2) $2y - \sqrt{12}x - 5 = 0$;

3) $-9y - \sqrt{27}x + 21 = 0$; 4) $y + x - \sqrt{18} = 0$.

Евристична підказка. Переформулюйте задачу. Модифікуйте, змінійте з появою нових властивостей.

Взаємне розташування прямих на площині

2. Як розташовані прямі $|x|=5$, $|y|=1$ в одній системі координат?

Узагальніть висновок на випадок $|x|=p$, $|y|=m$.

Евристична підказка. Намалюйте картинку.

3. Пряма a задається рівнянням $y=4x+1$. Які з даних прямих $y=4x+5$; $y=-3x+1$; $y=\frac{x}{4}$; $8x-2y+2=0$ перетинають пряму a ?

Евристична підказка. Знаходьте зв'язок між кутовими коефіцієнтами прямої a й даними прямими.

4. Визначте вид чотирикутника, сторони якого лежать на прямих, що задано рівняннями: $y=x+1$; $y=3-x$; $y=1-x$; $y=x+3$.

Евристична підказка. Шукайте зв'язок між кутовими коефіцієнтами прямих.

5. Точки M і N є відповідно серединами сторін AB і AC трикутника ABC . Відстань від вершини A до сторони, що лежить навпроти неї, дорівнює 4. Яке рівняння має пряма BC , якщо пряма MN задається рівнянням $y+2=0$? Скільки розв'язків має задача?

Евристична підказка. Зобразіть геометричну ілюстрацію умови задачі. Шукайте зв'язок між середньою лінією й висотою трикутника.

6. Пряма, що містить сторону AB паралелограма $ABCD$, має рівняння $x-2y+4=0$, $D(-2; -3)$. Яке рівняння має пряма CD ?

Евристична підказка. Переформулюйте задачу на геометричну мову. Виводьте наслідки з умови задачі. Шукайте зв'язок між кутовими коефіцієнтами паралельних прямих.

Рівняння кола

7. Яку фігуру визначає множина всіх точок, координати яких задовольняють рівнянню $x^2 + y^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$?

Евристична підказка. Досліджуйте за частинами, переберіть можливі випадки числа a .

8. У прямокутній системі координат трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(-4;-1)$, $B(0;2)$, $C(4;-1)$. Напишіть рівняння кола, вписаного в цей трикутник.

Евристична підказка. Зобразіть геометричну модель задачі. Визначте вид трикутника. Виводьте наслідки. Шукайте зв'язок між центром трикутника й медіаною.

Обидва види систем евристично орієнтованих задач сприяють управлінню процесом формування евристичної діяльності учнів на уроках математики.

Отже, за допомогою системи таких задач через формування евристичних прийомів в учнів розвиваються властивості творчої особистості, як-от: здатність до формалізації, узагальнення, гнучкість мислення, які знадобляться не тільки під час вивчення математики, але й стануть у нагоді в повсякденному житті. Такий підхід до розвитку учня на уроках математики, на нашу думку, сприятиме більшій пристосованості до сьогоденного життя.

Розглянемо, як приклад, систему евристично орієнтованих задач для формування вміння конструювати нові задачі.

Уміння розв'язувати задачі та *уміння конструювати задачі* різняться між собою; з першого не випливає друге. Конструювання задач за наперед заданою вимогою потребує іншого використання знань, ніж розв'язування готової задачі.

Наведемо завдання, які пропонуються для домашнього завдання (номер завдання відповідає номеру заняття факультативу).

1. Удома або в шкільній майстерні зробіть чотири відрізки довжиною 4, 7, 10 і 13 см. З'єднайте кінцями три відрізки з чотирьох, з'ясуйте, з яких трьох відрізків можна скласти трикутник, а з яких ні. Висновки поясніть.

2. Доберіть або придумайте задачі: «коректні», «некоректні», з недостатніми, зайвими даними. Проаналізуйте їх, вкажіть недостатні й

зайві дані, розв'яжіть їх.

3. Виконайте рисунок, щоб на ньому були відрізки, пряма, 2 промені, коло з центром і радіусами, сегмент, сектор, трикутники, чотирикутники.

4. Придумайте та намалюйте свою картинку з опуклостями й вм'ятинами на аркуші паперу.

На заняттях факультативу «Початкові відомості про функції» навички конструювання учнями 9 класу таких математичних об'єктів, як функції, можуть бути сформовані за допомогою таких задач:

1. Дано ряд чисел: $0, \frac{7}{2}, 13, \frac{63}{2}, 62, \frac{215}{2}, 171$. Запропонуйте функцію натурального аргументу, для якої ці числа є її частинними значеннями.

2. Задайте функцію так, щоб її областю визначення була множина:
а) всіх додатних чисел; б) всіх чисел, менших від 1; в) $[-2; 6]$; г) $(-\infty; +\infty)$.

3. Наведіть приклади функцій, множиною значень яких є: а) парні числа; б) невід'ємні числа; в) проміжок $[2; 3)$.

4. Наведіть приклад функції, яка: а) має два нулі; б) має три нулі; в) набуває значень, що дорівнюють нулю при значеннях аргументу -5 і $\sqrt{7}$.

5. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої симетричний відносно початку координат із графіком функції:

$$1) y = x + 2; 2) y = \frac{4}{3}x - 2; 3) y = -2x + 5; 4) y = \frac{1}{3}; 5) y = 0.$$

6. При яких значеннях k і b графік функції $y = kx + b$ перетинає додатну частину осі ординат, і осі абсцис? Які ще можливі випадки перетину осей графіком лінійної функції? Які значення k і b їм відповідають? Складіть обернене завдання. Сформулюйте подібні завдання для функцій $y = \frac{k}{x}$ і $y = kx$.

Відомо, що евристика, використана під час розв'язування однієї-двох задач, безпосередньо може бути перенесена тільки на аналогічні ситуації. Вона втрачає притаманну їй раніше користь і новизну й стає складовою готових способів дій, накопичуваних у досвіді учня. Однак, коли зміст ситуації суттєво

змінюється, ступінь новизни може знову відновлюватись. Тому необхідним стає використання систем задач, які дають можливість використати одну й ту ж евристику в різних ситуаціях, котрі поступово ускладнюються. Для **прикладу** наведемо систему евристичних задач на застосування евристичного прийому «переформулювання задачі» у різних ситуаціях.

1. При яких a з нерівності $1 < x \leq 2$ слідує нерівність $x^2 - 2ax + a < 0$?

2. Якщо перший автомобіль зробить 4 рейси, а другий 3 рейси, то вони перевезуть разом менше за 21 т вантажу; якщо ж перший зробить 7 рейсів, а другий 4 рейси, то вони перевезуть більше за 33 т вантажу. Який автомобіль має більшу вантажопідйомність?

3. Знайдіть множину значень функції $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

4. Переформулюйте задачу «Розв'язати нерівність $x > \frac{1}{x}$ » у словесну форму.

5. Знайдіть найменше значення функції $y = (x-1)(x-5)(x-6)(x-2)$.

6. Знайдіть дріб зі знаменником 63, який міститься між $\frac{7}{12}$ і $\frac{11}{8}$.

7. При яких a корені рівняння $x^2 + ax + a = 0$ більші за 1?

8. Скільки коренів має рівняння $|10 - x| + |x + 10| = 20$?

9. Знайдіть усі такі значення x , що $\min\{2x - x^2, x - 1\} > -\frac{1}{2}$.

Зазначимо, що на різних етапах формування евристичних умінь учнів на факультативних заняттях доцільно пропонувати різні за структурою системи евристичних задач. Крім системи задач, згаданої вище, на етапі самостійного застосування евристичних прийомів учням можна запропонувати задачі на застосування деякої сукупності евристик у будь-якій послідовності їх застосування під час пошуку розв'язання запропонованих задач.

Наприклад.

1. Чи при будь-якому натуральному n число $n^5 + 5n - 1$ просте?

2. Обчисліть значення виразу $4\frac{2}{183} \cdot 6\frac{5}{199} - 2\frac{181}{183} \cdot 7\frac{194}{199} - 7 \cdot \frac{5}{199}$.

3. Знайдіть всі числа x , для яких виконується нерівність $|x - 5| < |x + 4|$.

4. Знайдіть значення дробу $\frac{x+y}{x-y}$, якщо $x^2 + y^2 = 6xy$, $x > y > 0$.

5. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – непарні функції, які визначені на множині всіх дійсних чисел. Чи правильно, що тоді їх сума $f(x) + g(x)$ завжди буде парною функцією?

6. Доведіть, що середини основ трапеції, точка перетину діагоналей і точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій.

Задачі вимагають від учнів здійснення евристичного пошуку, упродовж якого відбувається формування евристичних умінь «аналізувати», «одержувати висновки з умови» (задачі 1-6), «виражати один математичний об'єкт через інший» (задача 4), «наводити контрприклад» (задачі 1 і 5), «вводити допоміжні елементи» (задача 2), «модифікувати, перетворювати математичні об'єкти з появою нових властивостей» (задачі 2 і 4), «формулювати умову задачі різними мовами», «переходити до рівносильної задачі шляхом переформулювання умови задачі на іншу мову» (задачі 3 і 6).

Для самостійного виконання завдань учням доцільно надати допомогу різного рівня (у вигляді евристичних підказок або детальних пояснень) залежно від рівня розвитку евристичних умінь конкретного учня.

Відомо, що евристики можуть бути використані для створення сюжетної канви, сюжетної оболонки. Тому на етапі самостійного застосування евристичних прийомів на заняттях евристичного факультативу мають місце такі завдання.

Завдання «Упізнай евристику». Укажіть, яку (або які) евристику застосував Петрик Мошкін під час розв'язування такої задачі: «Розв'язати нерівність $\left| \frac{2x-3}{2x+5} \right| > 1$ ».

Розв'язання Петрика Мошкіна: «Скориставшись властивістю модуля

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, перепишемо дану нерівність так $|2x-3| > |2x+5|$, $2x+5 \neq 0$ і

сформулюємо задачу в такий спосіб: знайти точки x , для яких $2x$ знаходиться ближче до -5 , ніж до 3 , причому $x \neq -2,5$. Ця умова рівносильна тому, що $2x < -1$, $x \neq -2,5$, тобто $x \in (-\infty; -2,5) \cup (-2,5; -0,5)$. Це і є розв'язанням заданої нерівності».

Передбачуваний варіант відповіді. Петрик застосував такі евристики, як «переформулювання» задачі та «перехід до рівносильної задачі».

Творче завдання «Зашифруй евристику». Для однієї (або декількох) евристики дібрати (придумати, скласти) задачу, пошук розв'язання якої ґрунтувався б на ній (них).

Завдання «Знайди відповідність». У табл. 2.5 пропонується ряд задач та набір евристик. Потрібно вказати, яка (або які) евристика може бути застосована під час розв'язування задач.

Таблиця 2.5

Завдання «Знайди відповідність»

Набір задач	Набір евристик
1. Найшвидше й найраціональніше перевірте рівність $1023^2 + 64^2 = 1025^2.$ 2. Чи правильно, що при будь-якому натуральному n число $n^5 + 5n - 1$ є простим? 3. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ xy = 9. \end{cases}$	1. Розбиття «цілого на частини». 2. Переформулювання задачі. 3. Перебір варіантів. 4. Наведення контрприкладу. 5. Побудова геометричної моделі задачі. 6. Використання симетрії.

Продовження табл. 2.5

4. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52.$ 5. Побудуйте графік функції $y = \frac{ x+1 }{x+1} + \frac{x-1}{ x-1 } - x x.$ 6. Знайдіть x, якщо у записі $(x - (x - (x - \dots - (x - 1) \dots))) = 1$ міститься 200 пар дужок. 7. Уставте пропущені слова, малюнки, числа або вирази замість знака питання. <table> <tr> <td>1, 4, 9, 16, 25, ...</td> <td>$y = x^2$</td> </tr> <tr> <td>1, 8, 27, 64, 125, ...</td> <td>?</td> </tr> </table> 8. Розв'яжіть рівняння $(x + 2)(x - 3)(x + 1)(x + 6) = -96.$	1, 4, 9, 16, 25, ...	$y = x^2$	1, 8, 27, 64, 125, ...	?	7. Уведення допоміжної змінної. 8. Розбиття задачі на кілька підзадач (виділення підзадач). 9. Індукція. 10. Аналогія. 11. Інверсія. 12. Аналіз умови задачі.
1, 4, 9, 16, 25, ...	$y = x^2$				
1, 8, 27, 64, 125, ...	?				

Таким чином, цілеспрямоване й систематичне застосування на факультативних заняттях з математики подібних евристичних задач та їх систем надає учневі можливість осмисленого формування прийомів евристичної діяльності, що, своєю чергою, сприяє формуванню евристичних умінь в учнів цієї вікової категорії.

Висновки

1. Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури показав, що формування евристичних умінь учнів на уроках математики є важливою умовою розвитку критичного та творчого мислення, однак ця проблема досліджена недостатньо, що обґрунтовує актуальність проведеного дослідження.

2. Евристичні вміння сприяють розвитку мисленнєвих операцій, таких як аналіз, синтез, узагальнення, порівняння, абстрагування, систематизація та індуктивне міркування, що підвищує ефективність засвоєння знань, розвиток логічного мислення та здатність до самостійного пошуку рішень.

3. Встановлено, що застосування системи спеціально підібраних евристичних задач на уроках і факультативних заняттях з математики стимулює формування різних прийомів розумової діяльності: вміння аналізувати умову задачі, виділяти суттєві ознаки об'єктів, встановлювати закономірності, прогнозувати наслідки, робити умовиводи за аналогією та індукцією.

4. Розроблені системи евристичних задач дозволяють поетапно формувати в учнів здатність до аналітико-синтетичної діяльності, узагальнення та класифікації інформації, що є основою формування творчого підходу до розв'язання математичних і практичних проблем.

5. Практична цінність дослідження полягає у можливості використання запропонованих методичних рекомендацій і систем задач для організації навчального процесу, підвищення ефективності уроків математики та розвитку компетентностей учнів, необхідних для самостійного навчання, прийняття рішень у життєвих ситуаціях і подальшого професійного становлення.

6. Наукова новизна роботи полягає в системному обґрунтуванні методики формування евристичних умінь на уроках математики, розробці

диференційованих систем евристичних задач для різних рівнів підготовки учнів та визначенні педагогічних умов їх ефективного використання.

7. Запропоновані підходи можуть бути інтегровані у навчальні програми та факультативні заняття з математики, а також застосовані для підготовки майбутніх учителів до ефективного використання евристичних методів у практичній діяльності.

Список використаних джерел

1. Бахмат Н.І.; Войналович Н.М. Евристичне навчання математики як комп'ютерно методична система. // Наукові записки молодих учених, 2.10.2018. URL: <https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/1525>
2. Бесєдін Б., Чернякова Я. Формування евристичної діяльності учнів на уроках математики // Гуманізація навчально-виховного процесу, № 6(98). 2019. Режим доступу: [https://doi.org/10.31865/2077-1827.6\(98\)2019.197469](https://doi.org/10.31865/2077-1827.6(98)2019.197469)
- Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти / М. І. Бурда // Педагогіка і психологія. – 1996. – №1. – С. 40-45.
3. Гозян Н.І. Математичні задачі евристичного характеру. Методичні розробки для математичного гуртка. Миколаїв, 2015.
4. Гончарова І. В. Психолого-педагогічні передумови формування евристичних умінь учнів основної школи на факультативних заняттях з математики / І. В. Гончарова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН. – 2007. – Вип. 27. – С. 79-84.
5. Кріщенко Л.М. Евристичне навчання: сутність і змістові характеристики. // Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, випуск 159. Режим доступу: <https://cusu.edu.ua/images/download-files/naukovi-zapysky/159/42.pdf>
6. Кривонос О. Б. Евристичне навчання як важлива умова розвитку обдарованості учнів сільської школи. // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, 2014, № 7(41). Режим доступу: <https://repository.sspu.edu.ua/items/66e19537-c7d8-4701-9de5-28cee0dc5c08>
7. Кизенко В. І. Особливості застосування методів навчання на факультативних заняттях / В. І. Кизенко, Ю. І. Мальований // Біологія і хімія в школі. – 2002. – №5. – С. 6-12.
8. Мельник П., Гордієнко І. Дидактичні ігри в організації розвивального навчання математики. Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XII-ї

міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. Дрогобич, 2025. – С. 231-233.

9. Митник О. Я. Завдання для розвитку творчих здібностей дітей / О. Я. Митник // Обдарована дитина. – 2002. – №3. – С. 55-57.

10. Нам'ясенко С. Ю. Евристичні технології навчання математики в профільній школі : магістерська робота / науковий керівник – канд. пед. наук, доцент Дмитро Євгенович Бобилєв. Кривий Ріг, 2022. 116 с. Режим доступу:

<http://elibrary.kdpu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/6937>

11. Палант Ю. А. Эвристика как интегральная дисциплина / Ю. А. Палант, А. Я. Бейгельзимер, Я. Е. Бейгельзимер // Эвристика и дидактика точных наук. – Донецк: ТЕАН. – 1997. – Вып. 6. – С. 4-7.

12. Панова С.О. Викладання змістової лінії "Евристичне навчання математики" під час фахової підготовки майбутніх учителів математики [Електронний ресурс] / С. О. Панова // Вісник психології і педагогіки ; Педагогічний інститут Київського університету імені Бориса Грінченка ; Інститут людини. Збірник_наук._праць. Випуск 18 – К., 2016-2017. – Режим доступу: <http://www.psyh.kiev.ua/>

13. Педагогічний словник / За ред. М. Д. Ярмаченка. – К.: Пед. думка, 2001. – 516 с.

14. Пометун О. Інтерактивні методики та системи навчання / О. Пометун. – К.: Шк. світ, 2007. – 112. – (Б-ка «Шк. світу»).

15. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е. И. Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.

16. Скафа О. І. Задача як форма і засіб формування евристичної діяльності / О. І. Скафа // Рідна школа. – 2003. – №6. – С. 43-47.

17. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підручник / З. І. Слепкань. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк., 2006. – 582 с.

18. Слепкань З. І. Формування творчої особистості учня в процесі навчання математики / З. І. Слепкань // Математика в школі. – 2003. – №1. – С.

6-9.

19. Тадеев В. О. Неформальна математика. 6-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с. iang, S. *Habits of Mathematical Thinking and Development of Heuristics* — про розвиток евристичного мислення в математиці. [conmaths.com](https://doi.org/10.30935/conmaths/11521)
<https://doi.org/10.30935/conmaths/11521>

20. Favier, S., Dorier, J.L. Heuristics and semantic spaces for the analysis of students' work in mathematical problem solving. *Educ Stud Math* 115, 407–431 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10297-y>

21. Hänze, M., Leiss, D. Using heuristic worked examples to promote solving of reality-based tasks in mathematics in lower secondary school. *Instr Sci* **50**, 529–549 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11251-022-09583-8>

22. Tambunan, H. (2018). Impact of Heuristic Strategy on Students' Mathematics Ability in High Order Thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 321-328. <https://doi.org/10.12973/iejme/3928>

23. Eisenmann, P. (2014). Problem Solving in School Mathematics Based on Heuristic Strategies. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*. <https://doi.org/10.7160/ERIESJ.2013.070101>

24. Kireina D., Sarson W.P., Bertu R. The Effectiveness of Heuristic Vee Model to Improve Students' Mathematical Problem Solving Skills. Vol. 8 No. 3 (2025): VOLUME 8. DOI: <https://doi.org/10.22460/jiml.v8i3.28161>

25. Gurat, M. *Mathematical Problem-Solving Heuristics Among Student Teachers*. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*. September 2018. <https://doi.org/10.7160/ERIESJ.2018.110302>

26. Heuristic Strategies in Mathematical Problem-Solving Skills. Special Issue, Vol 28 No Special (2024). <https://doi.org/10.47460/uct.v28iSpecial.775>

Задачі для формування та розвитку здатності до узагальнення

Рівень перший

I. Задачі з розв'язанням

1. Знайдіть зайву фігуру на рис. И.1.

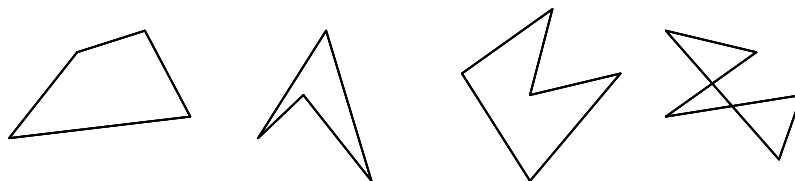


Рис. И.1

Розв'язання. Переформулюємо умову задачі. Оскільки потрібно знайти зайву фігуру, то три фігури з чотирьох об'єднані якоюсь спільною властивістю (цю спільну властивість і потрібно знайти). Знайдемо те спільне, що об'єднує ці фігури. Для цього проаналізуємо кожну фігуру: перша фігура – чотирикутник, друга – також чотирикутник, третя – п'ятикутник, четверта – взагалі не є багатокутником. Отже, три фігури з чотирьох об'єднані спільною властивістю – вони багатокутники. Зайва четверта фігура, оскільки вона не є багатокутником.

Відповідь: четверта.

2. На рис. И. 2 пропонуються п'ять геометричних об'єктів, чотири з них об'єднані однією спільною властивістю. Знайдіть зайвий об'єкт.

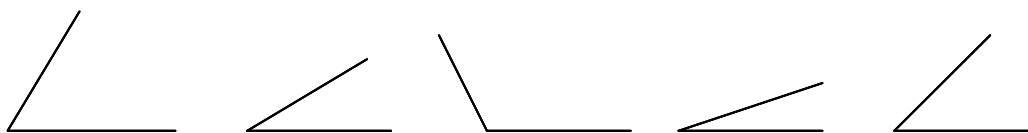


Рис. И. 2

Розв'язання. Розглянемо запропоновані геометричні об'єкти – кути. Перший кут гострий, другий теж гострий, третій – тупий, четвертий і п'ятий – гострі кути. Отже, чотири кути з п'яти об'єднані спільною властивістю – вони всі гострі. Виходить, зайвий геометричний об'єкт – третій кут, оскільки він тупий.

Відповідь: третій.

3. Етажерка складається з 5 полиць. На кожній з трьох нижніх полиць розташовано по a книг, а на кожній із двох верхніх по b книг. Задайте формулою загальне число книг на етажерці.

Розв'язання. Запишемо спочатку, скільки книг розташовано на нижніх полицях: $3a$, на верхніх: $2b$. І тоді загальне число книг на етажерці знайдемо за формулою $3a + 2b$.

Відповідь: $3a + 2b$.

II. Задачі з вказівками до розв'язування

1. Знайдіть «зайву» фігуру на рис. И. 3. Відповідь обґрунтуйте для кожної фігури.

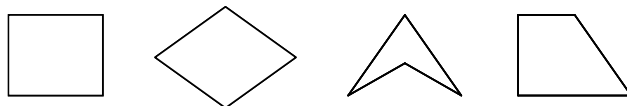


Рис. И. 3

Вказівка. Використай симетрію.

2. Розподіліть математичні об'єкти на групи на свій розсуд.

- 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $0,1111\dots$; 4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; 5) $\frac{10}{7} - 1$; 6) $0,4285\dots$

Вказівка. Переведіть звичайні дробу в десяткові.

III. Задачі для самостійного розв'язування

1. За якою спільною ознакою підібрані наступні букви російського алфавіту:

- 1) В, Е, З, К, С, Э, Ю; 2) Ж, Н, О, Х; 3) А, Д, М, Т, П, Ш?

2. Яка з фігур на рис. И. 4 «зайва» (відрізняється від інших) і чим вона відрізняється?



Рис. И.4

3. Розподіліть об'єкти, зображені на рис. И. 5, на групи, поєднуючи їх за спільною властивістю. Скільки вийшло груп? Чому?

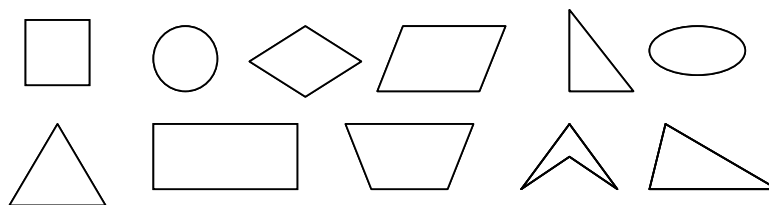


Рис. И. 5

4. Визначте, який із п'яти геометричних об'єктів на рис И. 6 «зайвий».



Рис. И. 6

5. Одна коробка цукерок коштує 3 грн. k осіб купили по n коробок цукерок кожний. За якою формулою підраховується вартість покупки?

6. Міст має 5 прогонів, 4 прогони мають однакову довжину по a м, а п'ятий – b м. Задайте формулою довжину моста.

7. Подивіться на рис. И. 7 і рис. И. 8. Порівняйте, що в цих фігурах є спільного, а чим вони різняться (для кожного випадку окремо).

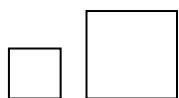


Рис. И. 7



Рис. И. 8

8. Опишіть одним словом або словосполученням словосполучення:

- 1) рейки; сліди від лиж на снігу; лінія берега й обрій;
- 3) стрілки годинника на 9³⁰; перехрестя доріг; рейки – шпали.

Рівень другий

I. Задачі з розв'язанням

1. Розв'яжіть анаграми і знайдіть зайве слово.

РГУК, ОСЛИЧ, ОМБЄ, ТНІСА

Розв'язання. Слово «анаграма» грецького походження й означає перестановку букв у слові, що приводить до іншого слова. Наприклад, розв'язати анаграму РСТОП означає знайти слово, що складається з цих букв (відповідь: СПОРТ). Повернімося до розв'язання задачі. З букв РГУК складемо слово «КРУГ», з букв ОСЛИЧ – слово «ЧИСЛО», з букв ОМБЄ –

«ОБ'ЄМ», з букв ТНІСА – «СТІНА». З отриманих слів «КРУГ», «ЧИСЛО», «ОБ'ЄМ», «СТІНА» слово «СТІНА» зайве, тому що інші слова є математичними термінами.

Відповідь: СТІНА.

2. Запишіть задачу «Довжина кімнати 6 м, ширина 3 м, висота 2 м. Який об'єм 4-х таких кімнат?» у загальному вигляді.

Розв'язання. У математиці узагальнення часто пов'язане із заміною постійних змінними, а конкретизація – з підстановкою замість змінних їх значень. Наша задача записана в конкретному вигляді, тому що задані конкретні значення довжини, ширини і висоти кімнати. Якщо ж числа 6, 3, 2, 4 ми замінимо буквами, наприклад, a , b , h , k відповідно тим самим ми узагальнимо задачу, а саме «Довжина кімнати a м, ширина b м, висота h м. Який об'єм k таких кімнат?».

Подібне узагальнення може бути дуже корисним. Перейшовши від задачі «у числах» до задачі «в буквах» з'являються нові можливості, наприклад, ці величини можна вважати змінними.

Відповідь: «Довжина кімнати a м, ширина b м, висота h м. Який об'єм k таких кімнат?».

II. Задачі з вказівками до розв'язування

1. Знайдіть зайве слово. Свій вибір поясніть.

ПРЯМА, ТРИКУТНИК, ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Вказівка. Зверніть увагу на те, що пряма і трикутник – плоскі фігури, а паралелепіпед – об'ємне тіло.

2. Група, що складається з n людей, замовила обід у ресторані. Кожен заплатив порівну. Загальний рахунок склав t грн. Скільки повинен заплатити кожний?

Вказівка. Зверніть увагу на те, що витрати розподілено порівну між всіма учасниками обіду. Якщо відразу важко розв'язати, спробуйте конкретизувати задачу (тобто букви t і n замініть на числа).

III. Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'яжіть анаграми і знайдіть зайве слово.

ТИМАНУ, ТРЕМ, КДАНУСЕ, ТИУКС

2. Які із зазначених алгебраїчних виразів можуть бути подані у вигляді квадрата суми двох чисел? Поясніть чому.

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------|-----------------|
| 1) $(a+b)^2$; | 2) $(a+b) \cdot 2$; | 3) $a+b^2$; | 4) $a+2b^2$; |
| 5) (a^2+b^2) | 6) $(a+2b)^2$; | 7) $(a+b^2)^2$; | 8) $(a+2b^2)^2$ |
| | | ; | |
| 9) $a+2b$; | 10) | 11) | |
| $(a+b^2) \cdot 2 \cdot (a+2b)^2 \cdot 2$; | | $(2a+2b) \cdot 2$. | |

3. Розгляньте рис. И. 9. Розподіліть відрізки на групи, поєднуючи їх за спільною властивістю. Скільки усього вийшло груп? Чому? Чи існує відрізок, який не потрапив до жодної групи?

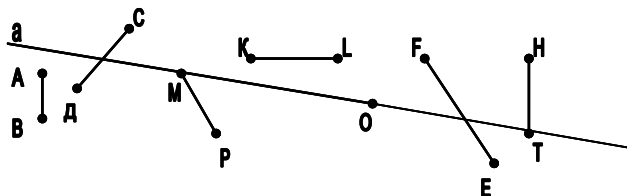


Рис. И. 9

4. У кожному наборі знайдіть зайве слово. Свій вибір поясніть.

- | | | |
|-----------|-----------|------------|
| а) точка, | відрізок, | трикутник; |
| б) кут, | діаметр, | пряма; |
| в) площа, | пряма, | квадрат; |

5. Розв'яжіть запропоновані задачі. Конкретизуйте їх так, щоб задачі мали сенс.

1). Зошит коштує a коп, а олівець b коп. Скільки потрібно заплатити за x зошитів і y олівців?

2). Потрібно пофарбувати стіну будинку довжиною L м і висотою H м, що має 3 вікна, ширина яких E м, а висота N м. Яку площу потрібно пофарбувати?

6. Поділіть математичні об'єкти на групи за своїм розсудом.

- | | | |
|--------------------------|-----------------------|------------------|
| 1) $2a^2 - 3a = 5$; | 2) $-6k^2 + 3k - 7$; | 3) $-3x + 9$; |
| 4) $-3x^2 + x - 2 = 0$; | 5) $5x + 3 = 0$; | 6) $5x^2 - 6x$. |

Рівень третій

Задачі для самостійного розв'язування

1. Дано: $(a + b)^2 = \dots$. У алгебраїчних виразах розкрийте дужки і зазначте спільне і відмінне між ними? Що об'єднує всі задані алгебраїчні вирази?

$$\begin{array}{lll} 1) (a + x)^2; & 2) (2a + b)^2; & 3) (a^2 + b)^2; \\ (x + y)^2; & \left(\frac{1}{2}a + 2b\right)^2; & (a^n + b^{2n})^2; \\ (m + n)^2; & \left(\frac{1}{5}a + 0,2b\right)^2; & (a^3 + b^4)^2. \end{array}$$

2. Розподіліть алгебраїчні вирази на дві групи, об'єднуючи їх за спільною властивістю.

$$\begin{array}{l} 1) (a + b)^2; 2) a^2 + b^2; 3) \left(\frac{1}{3}ab^3\right)^2 + (2a)^2; 4) \left(1 + \frac{1}{2}a^3b^2\right)^2; 5) (-5x + 0,6xy^2)^2; \\ ; \\ 6) (3x - 6y)^2; 7) (m + x + b)^2; 8) (4x + y^3 - a)^2; 9) 51^2; 10) \\ (C + D + E)(C + D + E). \end{array}$$

3. За якою властивістю можна об'єднати числа:

$$10, 12, 19, 20, 200, 9, 90, 900.$$

4. Яка загальна формула: а) парного числа; б) непарного числа?

5. Розподіліть многочлени на групи залежно від ступеня.

$$\begin{array}{lll} 1) a^5 + 6a^3 - 2; & 2) 3b^2 - 2b + 3; & 3) a^2 - b^3 + 3ab - b^5 \\ 4) a + b^3 - 2ab^2; & 5) 6a^3 - 3b + a^2; & 6) a^2 - 3b + 5. \end{array}$$

6. Розподіліть одночлени на групи залежно від коефіцієнта.

$$1) k^2; 2) 8z; 3) \frac{1}{3}ac; 4) -0,5m; 5) 10abc; 6) -\frac{5}{6}y^2z; 7) 20bx.$$

7. Розподіліть многочлени на групи. Відповідь обґрунтуйте.

$$1) 5k^2 - 6k^3; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)a^4 + \left(\frac{1}{6}\right)a \cdot a^3; \quad 3) -7b \cdot b^2 + \left(\frac{1}{2}\right)b^2;$$

4) $k + 25,7k$; 5) $5k^3 \cdot k^4 - 3k^2 \cdot k^5$; 6) $3k^3 \cdot k^4 - 5k^5 \cdot k$.

8. Розв'яжіть запропоновані задачі. Конкретизуйте їх так, щоб вони мали сенс.

1). На пришкільній ділянці p плодових дерев. Груш в q разів більше, ніж слив, а кількість яблунь дорівнює кількості груш і слив разом. Скільки плодових дерев кожного виду на ділянці?

2). Зал кінотеатру поділений проходами на a частин, причому в кожній частині є p рядів по n місць у кожному ряді. Визначите загальну кількість глядачів, які можуть одночасно бути на сеансі.